Bisimulaatio modaalilogiikassa

Tuomo Lempiäinen

Kandidaatintutkielma
Maaliskuu 2013
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan modaalilogiikkaa välineenä *struktuurien* tutkimiseen. Struktuuri muodostuu joukosta ja kokoelmasta siinä määriteltyjä relaatioita. Struktuurin käsite on hyvin yleinen, ja niitä esiintyykin lähes kaikkialla niin matematiikassa kuin erilaisten ilmiöiden mallintamisen yhteydessä [BRV01, esipuhe].

Modaalilogiikka on ei-klassinen logiikan järjestelmä ja tavallisen propositiologiikan laajennus. Se saadaan lisäämällä propositiologiikan kieleen uusia operaattoreita, joita kutsutaan *modaalioperaattoreiksi* tai *modaliteeteiksi*. Modaliteetti tarkoittaa tekemisen tai olemisen tapaa; modaalilogiikassa sen voi ajatella määrittävän tapaa, jolla väite on tosi. Jokin väite tai tapahtuma voi olla esimerkiksi välttämätön, mahdollinen, pakollinen, sallittu, tunnettu tai olla tosi tulevaisuudessa tai menneisyydessä [RV04, luku 1].

Formaalin modaalilogiikan kehitys alkoi C. I. Lewisin tutkimuksista 1910-luvulla, ja pitkään sitä kehitettiin lähinnä filosofian piirissä [BRV01, luku 1.7]. Modaalilogiikan ajateltiin alun perin tutkivan vain mahdollisuuden ja välttämättömyyden kaltaisia filosofisia käsitteitä, ja sitä tarkasteltiin vain todistusteoreettisesti, erilaisina päättelysysteemeinä. Merkittävä muutos tapahtui 1950- ja 1960-lukujen vaihteessa, jolloin modaalilogiikalle otettiin käyttöön formaali, matemaattinen semantiikka, jonka taustalla on ajatus useista *mahdollisista maailmoista*. Tärkeitä tähän muutokseen vaikuttaneita henkilöitä olivat esimerkiksi Saul Kripke, Jaakko Hintikka ja Stig Kanger. Filosofisen semantiikan voidaan edelleen ajatella antavan formaalille semantiikalle intuitiivisen taustan, mutta struktuureihin perustuvan formaalin semantiikan myötä modaalilogiikka ei rajoitu vain välttämättömyyden ja mahdollisuuden kaltaisten modaalikäsitteiden tutkimiseen, vaan siitä on tullut huomattavan joustava ja tehokas väline erilaisten struktuurien käsittelyyn.

Yksi tärkeä väline modaalilogiikassa on bisimulaatio. Jos kahden struktuurin alkioiden välillä on olemassa bisimulaatio, ne näyttävät modaalilogiikan näkökulmasta täysin samoilta. Tämä asettaa rajoituksia sille, millaisia struktuurien ominaisuuksia modaalilogiikan avulla on mahdollista kuvailla. Toisaalta tämä mahdollistaa myös struktuurien muokkaamisen tavoilla, jotka eivät muuta niitä modaalilogiikan kannalta mitenkään.

Nykyään modaalilogiikalle tunnetaan sovelluksia filosofian lisäksi monilta aloilta – esimerkiksi joukko-opista, teoreettisesta tietojenkäsittelytieteestä, tekoälystä, bioinformatiikasta, kielitieteestä, taloustieteestä, peliteoriasta, älykkäistä ja hajautetuista järjestelmistä sekä laitteistojen ja ohjelmistojen verifikaatiosta [BBW07, esipuhe; BRV01, luku 1.7]. Toisaalta monilla sovellusalueilla on löydetty riippumattomasti modaalilogiikan tutkimuksesta käsitteitä, jotka ovat myöhemmin osoittautuneet osaksi modaalilogiikkaa.

Luku 2 tarjoaa yleiskatsauksen modaalilogiikan perusteisiin – sen syntaksiin ja semantiikkaan. Luvussa 3 esitellään ensin bisimulaation käsite ja todistetaan joitakin tuloksia siihen liittyen. Luvun lopuksi käydään läpi muutama esimerkki tavoista soveltaa bisimulaatiota modaalilogiikassa. Tutkielmassa sivuutetaan modaalilogiikan syntaktinen puoli, kuten todistusjärjestelmät ja niihin liittyvät eheys ja täydellisyys. Lisäksi esimerkiksi eksoottisemmat modaalilogiikan variantit ja modaalinen predikaattilogiikka jäävät tutkielman ulkopuolelle.

Lukijan oletetaan tuntevan klassisen propositiologiikan alkeet, hieman joukko-oppia sekä ainakin relaation, verkon ja puun käsitteet. Johdatukseksi propositiologiikkaan soveltuu esimerkiksi Salminen ja Väänänen [SV92].

2 Modaalilogiikan perusteet

2.1 Syntaksi

Tässä luvussa esitellään modaalilogiikan syntaksi määrittelemällä modaalisessa propositiologiikassa käytettävien kielten *hyvin muodostettujen kaavojen* joukot.

Määritelmä 1. *Perusmodaalikielen aakkosto* koostuu sulkeista) ja (, numeroituvasti äärettömästä määrästä propositiosymboleita $p_0, p_1, p_2, \ldots$, konnektiiveista $\neg$ (negaatio) ja $\vee$ (disjunktio) sekä modaalioperaattorista $\Diamond$ (ruutu). Näistä *primitiivisymboleista* saadaan perusmodaalikielen *(hyvin muodostettujen) kaavojen* joukko seuraavilla säännöillä:

1. Propositiosymbolit $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ovat kaavoja.
2. Jos ϕ on kaava, niin sen negaatio $\neg\phi$ on kaava.
3. Jos ϕ ja ψ ovat kaavoja, niin niiden disjunktio $(\phi \vee \psi)$ on kaava.
4. Jos ϕ on kaava, niin $\Diamond\phi$ on kaava.

Perusmodaalikieli on siis propositiologiikan kieli, johon on lisätty operaattori $\Diamond$ ja sitä vastaava kaavanmuodostussääntö.

Konjunktio, implikaatio ja ekvivalenssi määritellään lyhennysmerkintöinä seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
(\phi \wedge \psi) &= \neg(\neg\phi \vee \neg\psi), \\
(\phi \to \psi) &= (\neg\phi \vee \psi), \\
(\phi \leftrightarrow \psi) &= ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)).
\end{aligned}
$$

Lisäksi operaattorille $\Diamond$ määritellään *duaalioperaattori* $\Box$ (laatikko) seuraavasti:

$$\Box\phi = \neg\Diamond\neg\phi.$$

Modaalioperaattorit $\Diamond$ ja $\Box$ siis suhtautuvat toisiinsa vastaavalla tavalla kuin kvanttorit $\forall$ ja $\exists$ predikaattilogiikassa.

Jatkossa kaavojen uloimmat sulkeet jätetään merkitsemättä. Lisäksi, koska disjunktio ja konjunktio ovat merkitykseltään liitännäisiä, sulkeet jätetään pois kaavoista, joissa esiintyy vain joko disjunktioita tai konjunktioita.

Esimerkki 2 ([RV04, luku 1])**.** Perusmodaalikielen operaattoreille $\Diamond$ ja $\Box$ voidaan antaa useita erilaisia intuitiivisia tulkintoja. Esimerkiksi *aleettisessa modaalilogiikassa* kaava $\Diamond\phi$ tarkoittaa, että ϕ on mahdollisesti tosi, ts. se on tosi jossakin loogisesti mahdollisessa maailmassa, ja kaava $\Box\phi$ tarkoittaa, että ϕ on välttämättä tosi, ts. se on tosi kaikissa loogisesti mahdollisissa maailmoissa. Toisaalta *deonttisessa logiikassa* eli *normilogiikassa* taas tarkastellaan, mitä jonkin agentin on sallittua tehdä. Tällöin kaava $\Diamond\phi$ tarkoittaa, että ϕ on sallittua, ja kaava $\Box\phi$ tarkoittaa, että ϕ on pakollista.

Mikään ei pakota rajoittumaan vain perusmodaalikielen yhteen, yhden kaavan argumentikseen ottavaan modaliteettiin. Tämä johtaa seuraavaan yleistykseen.

Määritelmä 3 ([BRV01, luku 1.2])**.** *Modaalisimilaarisuustyyppi* on pari $\tau = (O, \rho)$, jossa O on epätyhjä joukko modaalioperaattoreita ja $\rho\colon O \to \mathbb{N}$ on kunkin operaattorin paikkaluvun kertova funktio. Olkoon τ modaalisimilaarisuustyyppi ja lisäksi Φ joukko propositiosymboleja. Näihin perustuvan *modaalikielen* $\mathrm{ML}(\tau, \Phi)$ aakkosto koostuu perusmodaalikielestä tutuista sulkeista ja konnektiiveista sekä propositiosymboleista $p \in \Phi$, operaattoreista $\triangle \in O$ ja pilkusta. Kielen $\mathrm{ML}(\tau, \Phi)$ hyvin muodostettujen kaavojen joukko saadaan seuraavilla säännöillä:

1. Propositiosymbolit $p \in \Phi$ ovat kaavoja.
2. Jos ϕ on kaava, niin sen negaatio $\neg\phi$ on kaava.
3. Jos ϕ ja ψ ovat kaavoja, niin niiden disjunktio $(\phi \vee \psi)$ on kaava.
4. Jos $\triangle \in O$ on operaattori ja ϕ_1, ϕ_2, $\ldots$, $\phi_{\rho(\triangle)}$ ovat kaavoja, niin $\triangle(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{\rho(\triangle)})$ on kaava.

Esimerkki 4 ([BRV01, luku 7.2; RV04, luku 1])**.** *Temporaalilogiikka* eli *aikalogiikka* on yksi tunnettu esimerkki modaalilogiikasta, jossa on käytössä useampi primitiivinen operaattori. Temporaalilogiikassa halutaan viitata sekä tulevaisuuteen että menneisyyteen, joten siinä käytetään operaattoreita F (sanasta "future") ja P (sanasta "past"). Kaavan Fϕ tulkitaan tarkoittavan, että ϕ toteutuu joskus tulevaisuudessa ja vastaavasti kaavan Pϕ tulkitaan tarkoittavan, että ϕ oli tosi joskus menneisyydessä. Operaattorin F duaali G ilmaisee, että sen argumentti on tosi aina tulevaisuudessa ja operaattorin P duaali H ilmaisee, että sen argumentti oli tosi aina menneisyydessä.

Yllä esitettyyn perustemporaalikieleen voidaan myös lisätä kaksipaikkainen operaattori U (sanasta "until"). Kaava U(ϕ, ψ) ilmaisee, että ϕ toteutuu joskus tulevaisuudessa ja että ψ on tosi nykyhetkestä aina siihen asti, kunnes ϕ toteutuu. Voidaan osoittaa, että operaattoria U ei ole mahdollista määritellä pelkästään operaattoreiden F ja P avulla – saatu kieli on siis aidosti vahvempi kuin perustemporaalikieli.

Tässä tutkielmassa käsitellään jatkossa vain perusmodaalikieltä ja sanalla kaava tarkoitetaan tästä lähtien aina perusmodaalikielen kaavaa. Useimmat esitettävistä käsitteistä ja tuloksista voi kuitenkin yleistää melko suoraviivaisesti koskemaan myös modaalikieliä, joissa on useampia (mielivaltaisen paikkaluvun) modaalioperaattoreita.

2.2 Semantiikka

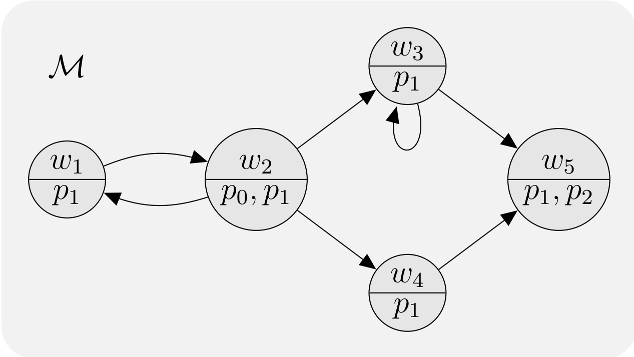
Tässä luvussa annetaan modaalilogiikalle täsmällinen semantiikka *struktuurien* avulla. Struktuureja käsitellään kahdella eri tasolla: ne voivat olla joko *kehyksiä* tai *malleja*.

Määritelmä 5 ([BRV01, luku 1.3])**.** Perusmodaalikielen *kehys* on pari $\mathcal{F} = (W, R)$, jossa W on epätyhjä joukko ja $R \subseteq W \times W$ on joukon W kaksipaikkainen relaatio.

Joukon W alkioita voidaan kontekstista riippuen nimittää esimerkiksi *tiloiksi*, *pisteiksi*, *solmuiksi*, *(mahdollisiksi) maailmoiksi*, *ajanhetkiksi* tai *tilanteiksi*. Jatkossa tässä tutkielmassa käytetään nimitystä tila. Relaatiota R kutsutaan *saavutettavuusrelaatioksi* tai *vaihtoehtorelaatioksi*. Jos $(w, v) \in R$, sanotaan, että tila v on tilan w *seuraaja* tai että tila v on *saavutettavissa* tilasta w.

Määritelmä 6 ([BRV01, luku 1.3])**.** Perusmodaalikielen *malli* on pari $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, jossa $\mathcal{F}$ on perusmodaalikielen kehys ja V on funktio $\{p_0, p_1, \ldots\} \to \mathcal{P}(W)$.

Funktiota V kutsutaan *valuaatioksi* tai *totuusjakaumaksi*. Se siis liittää jokaiseen propositiosymboliin p_i joukon W osajoukon $V(p_i)$. Intuitiivisesti



Kuva 1: Malli esitettynä suunnattuna verkkona. Kunkin tilan nimi on merkitty sen yläosaan ja sen toteuttamat propositiosymbolit sen alaosaan.

joukkoa $V(p_i)$ voidaan ajatella niiden tilojen joukkona, joissa p_i on tosi. Sanotaan, että malli $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ *perustuu* kehykseen $\mathcal{F}$. Jos $\mathcal{F} = (W, R)$, merkitään tällöin yleensä $\mathcal{M} = (W, R, V)$. Kannattaa huomata, että joukko $V(p_i)$ on yksipaikkainen relaatio joukossa W. Malli $\mathcal{M}$ voidaan siis tulkita struktuuriksi $\mathcal{M} = (W, R, V(p_0), V(p_1), \ldots)$.

Usein on hyödyllistä ajatella kehyksiä ja malleja *suunnattuina verkkoina*: joukko W on verkon solmujen joukko ja relaatio R on sen kaarirelaatio. Tämä tarjoaa havainnollisen tavan esittää kehyksiä ja malleja graafisesti, kuten seuraava esimerkki osoittaa. Modaalilogiikkaa on sovellettu hyvin monenlaisiin ongelmiin, mutta yhteistä näille ongelmille on se, että niiden oleelliset ideat voidaan esittää verkkojen kaltaisina struktuureina [BBW07, luku 1.1].

Esimerkki 7. Olkoon $\mathcal{M} = (W, R, V)$ malli, jossa

$$\begin{aligned}
W &= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, \\
R &= \{(w_1, w_2), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_2, w_4), (w_3, w_3), (w_3, w_5), (w_4, w_5)\}, \\
V(p_0) &= \{w_2\}, \\
V(p_1) &= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, \\
V(p_2) &= \{w_5\}, \\
V(p_i) &= \varnothing \text{ kaikilla } i \geq 3.
\end{aligned}$$

Malli $\mathcal{M}$ on esitetty verkkona kuvassa 1.

Jatkossa tarkasteltavat mallit esitetään usein ainoastaan kuvina edellisen esimerkin tapaan.

Nyt voidaan määritellä modaalilogiikan kaavojen totuus annetun mallin kussakin tilassa. Jos kaava ϕ on *tosi* mallin $\mathcal{M}$ tilassa w, merkitään $\mathcal{M}, w \vDash \phi$, ja jos se on *epätosi*, merkitään $\mathcal{M}, w \nvDash \phi$.

Määritelmä 8 ([BRV01, luku 1.3])**.** Olkoon $\mathcal{M} = (W, R, V)$ malli ja $w \in W$ sen tila. Kaavan ϕ *totuus* mallin $\mathcal{M}$ tilassa w määritellään seuraavasti:

1. Kun $\phi = p_i$, niin $\mathcal{M}, w \vDash \phi$, joss $w \in V(p_i)$.

2. Kun $\phi = \neg\psi$, niin $\mathcal{M}, w \vDash \phi$, joss $\mathcal{M}, w \nvDash \psi$.

3. Kun $\phi = \psi \vee \sigma$, niin $\mathcal{M}, w \vDash \phi$, joss $\mathcal{M}, w \vDash \psi$ tai $\mathcal{M}, w \vDash \sigma$.

4. Kun $\phi = \Diamond\psi$, niin $\mathcal{M}, w \vDash \phi$, joss jollakin $v \in W$ pätee $(w, v) \in R$ ja $\mathcal{M}, v \vDash \psi$.

Jos $\mathcal{M}, w \vDash \phi$, sanotaan myös, että tila w *toteuttaa* kaavan ϕ. Kaava ϕ on *toteutuva*, jos on olemassa jokin malli $\mathcal{M}$ ja sen tila w, joille pätee $\mathcal{M}, w \vDash \phi$.

Totuuden määritelmästä seuraa, että $\mathcal{M}, w \vDash \Box\phi$, jos ja vain jos kaikilla $v \in W$, joilla $(w, v) \in R$, pätee $\mathcal{M}, v \vDash \phi$. Lisäksi muotoa $\phi \wedge \psi$, $\phi \to \psi$ tai $\phi \leftrightarrow \psi$ olevien kaavojen totuus määräytyy propositiologiikasta tutulla tavalla.

Edellä esitetty totuusmääritelmä on *sisäinen* ja *paikallinen* seuraavassa mielessä: kaavojen totuus määritellään mallien sisällä, niiden yksittäisessä tilassa w. Lisäksi operaattori $\Diamond$ ottaa huomioon ainoastaan tilat, jotka ovat saavutettavissa paikallisesti tämänhetkisestä tilasta yhdellä askeleella relaation R avulla [BRV01, luku 1.3]. Tässä suhteessa modaalilogiikka eroaa olennaisesti predikaattilogiikasta välineenä struktuurien tutkimisessa. Modaalilogiikkaa voidaan kuitenkin ajatella predikaattilogiikan rajoittuneena versiona, jossa kvantifiointi on rajoitettu vain nykyisen tilan kannalta relevantteihin tiloihin.

Esimerkki 9. Olkoon $\mathcal{M}$ kuvan 1 malli. Määritelmästä 8 seuraa helposti esimerkiksi $\mathcal{M}, w_2 \vDash \Box(\neg p_0 \wedge p_1)$, $\mathcal{M}, w_3 \vDash \Diamond\Diamond p_2$ ja $\mathcal{M}, w_2 \nvDash \Box p_1 \to \Diamond p_2$.

Tarkastellaan sitten tilassa w_1 kaavaa $\phi \to \Box\Diamond\phi$, jossa ϕ on mikä tahansa modaalilogiikan kaava. Jos ϕ on tosi w_1:ssä, niin $\Diamond\phi$ on tosi w_2:ssa. Tila w_2 on w_1:n ainoa seuraaja, joten tällöin $\mathcal{M}, w_1 \vDash \Box\Diamond\phi$. Siis $\mathcal{M}, w_1 \vDash \phi \to \Box\Diamond\phi$ pätee kaikilla kaavoilla ϕ.

Tarkastellaan vielä mallin tilaa w_4. Sen ainoalla seuraajalla w_5 ei ole yhtään seuraajaa, joten vaikka kaava $p_1 \to p_1$ on aina tosi, ei $\Diamond\Diamond(p_1 \to p_1)$ toteudu w_4:ssä. Kaava $\Box p_0$ on tosi tilassa w_5, koska w_5:llä ei ole seuraajaa, jossa $\neg p_0$ toteutuisi. Tästä seuraa, että $\Diamond\Box p_0$ on tosi w_4:ssä. Nyt siis pätee $\mathcal{M}, w_4 \nvDash \Diamond\Diamond(p_1 \to p_1) \leftrightarrow \Diamond\Box p_0$.

Kehysten voidaan ajatella mallintavan sitä, mitä on olemassa ja mitä suhteita olemassa olevien olioiden välillä on. Mallit taas liittävät kehyksiin kuvailevaa, kontingenttia informaatiota – tietoa asioista, jotka voisivat olla toisinkin. Jotta väitettä voitaisiin kutsua loogiseksi, sen on oltava invariantti tämän kontingentin informaation suhteen [BRV01, luku 1.3]. Tämä johtaa seuraavaan validisuuden määritelmään.

Määritelmä 10 ([BRV01, luku 1.3])**.** Olkoon $\mathcal{F} = (W, R)$ kehys ja $w \in W$.

1. Kaava ϕ on *validi kehyksen* $\mathcal{F}$ *tilassa* w (merkitään $\mathcal{F}, w \vDash \phi$), jos ϕ on tosi jokaisen kehykseen $\mathcal{F}$ perustuvan mallin $(\mathcal{F}, V)$ tilassa w.

2. Kaava ϕ on *validi kehyksessä* $\mathcal{F}$ (merkitään $\mathcal{F} \vDash \phi$), jos se on validi jokaisessa kehyksen $\mathcal{F}$ tilassa.

3. Kaava ϕ on *validi kehysten luokassa* $\mathbf{F}$ (merkitään $\mathbf{F} \vDash \phi$), jos se on validi jokaisessa luokan $\mathbf{F}$ kehyksessä.

4. Kaava ϕ on *validi* (merkitään $\vDash \phi$), jos se on validi kaikkien kehysten luokassa.

Validisuuden määritelmästä seuraa, että kaava ϕ ei ole validi kehyksessä $\mathcal{F}$, jos ja vain jos on olemassa kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ ja sen tila w, joille $\mathcal{M}, w \nVdash \phi$. Tätä havaintoa hyödynnetään seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 11. (i) Kaava $\Box(p_0 \to p_1)$ on tosi kaikissa kuvan 1 mallin $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tiloissa. Se ei kuitenkaan ole validi kehyksessä (W, R). Tämä nähdään esimerkiksi valitsemalla valuaatio V', jolle $V'(p_0) = \{w_1\}$ ja $V'(p_1) = \varnothing$. Tällöin $(W, R, V'), w_2 \nvDash \Box(p_0 \to p_1)$.

(ii) Kaava $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$ on validi. Tämä nähdään seuraavasti. Olkoon $\mathcal{F} = (W, R)$ mikä tahansa kehys, $w \in W$ ja V mikä tahansa $\mathcal{F}$:n valuaatio. Oletetaan, että $(\mathcal{F}, V), w \vDash \Box(\phi \to \psi)$ ja $(\mathcal{F}, V), w \vDash \Box\phi$. Jos $v \in W$ ja $(w, v) \in R$, niin oletuksen nojalla $(\mathcal{F}, V), v \vDash \phi \to \psi$ ja $(\mathcal{F}, V), v \vDash \phi$. Tällöin $(\mathcal{F}, V), v \vDash \psi$. Koska v oli mielivaltainen w:n seuraaja, niin $(\mathcal{F}, V), w \vDash \Box\psi$. Tällöin $(\mathcal{F}, V), w \vDash \Box\phi \to \Box\psi$, joten $(\mathcal{F}, V), w \vDash \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$. Saatiin osoitettua, että $\vDash \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$.

(iii) Kaava $\Diamond\Diamond p_0 \to \Diamond p_0$ ei ole validi. Tämä osoitetaan etsimällä kehys $\mathcal{F} = (W, R)$, tila $w \in W$ ja $\mathcal{F}$:n valuaatio V, joille $(\mathcal{F}, V), w \nvDash \Diamond\Diamond p_0 \to \Diamond p_0$. Olkoon $W = \{w, v\}$, $R = \{(w, v), (v, w)\}$ ja V mikä tahansa valuaatio, jolle $V(p_0) = \{w\}$. Nyt $(\mathcal{F}, V), v \vDash \Diamond p_0$, joten $(\mathcal{F}, V), w \vDash \Diamond\Diamond p_0$. Lisäksi $(\mathcal{F}, V), w \nvDash \Diamond p_0$, joten $\mathcal{F}$, w ja V toteuttavat halutun ominaisuuden. Huomataan kuitenkin helposti, että kaava $\Diamond\Diamond p_0 \to \Diamond p_0$ on validi sellaisessa kehysten luokassa, jossa kaikkien kehysten saavutettavuusrelaatio on transitiivinen.

Modaalilogiikan kehyksiä on kutsuttu usein *Kripke-kehyksiksi* ja malleja *Kripke-malleiksi* sekä niihin perustuvaa semantiikkaa *Kripke-semantiikaksi* ne tunnetuksi tehneen Saul Kripken mukaan. Kuitenkin useat muutkin logikot, muun muassa Jaakko Hintikka ja Stig Kanger, esittelivät samoihin aikoihin Kripken kanssa samanlaisia ideoita. Nykyään Kripke-semantiikkaa kutsutaankin usein tasapuolisemmin *relaatiosemantiikaksi* [BBW07, esipuhe ja luku 1.2.1].

3 Bisimulaatio

Luvussa 2.2 määriteltiin totuuden käsite, joka antaa yhteyden mallien ja modaalilogiikan kaavojen välille. Tässä luvussa tutkitaan, mitä mallien ominaisuuksia on mahdollista kuvailla modaalilogiikan avulla ja mitä ei. Tämän mahdollistaa *bisimulaation* käsite, jolla on keskeinen asema modaalilogiikassa.

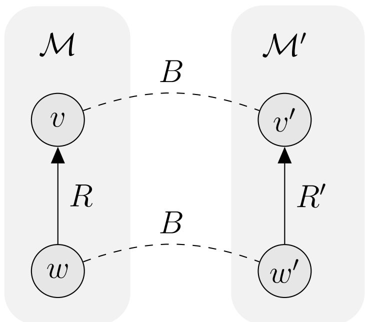
3.1 Määritelmä ja perustuloksia

Määritelmä 12 ([BRV01, luku 2.2])**.** Olkoot $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ja $\mathcal{M}' = (W', R', V')$ malleja. *Bisimulaatio mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välillä* on epätyhjä relaatio $B \subseteq W \times W'$, jolle pätee kaikilla $(w, w') \in B$ seuraavat ehdot:

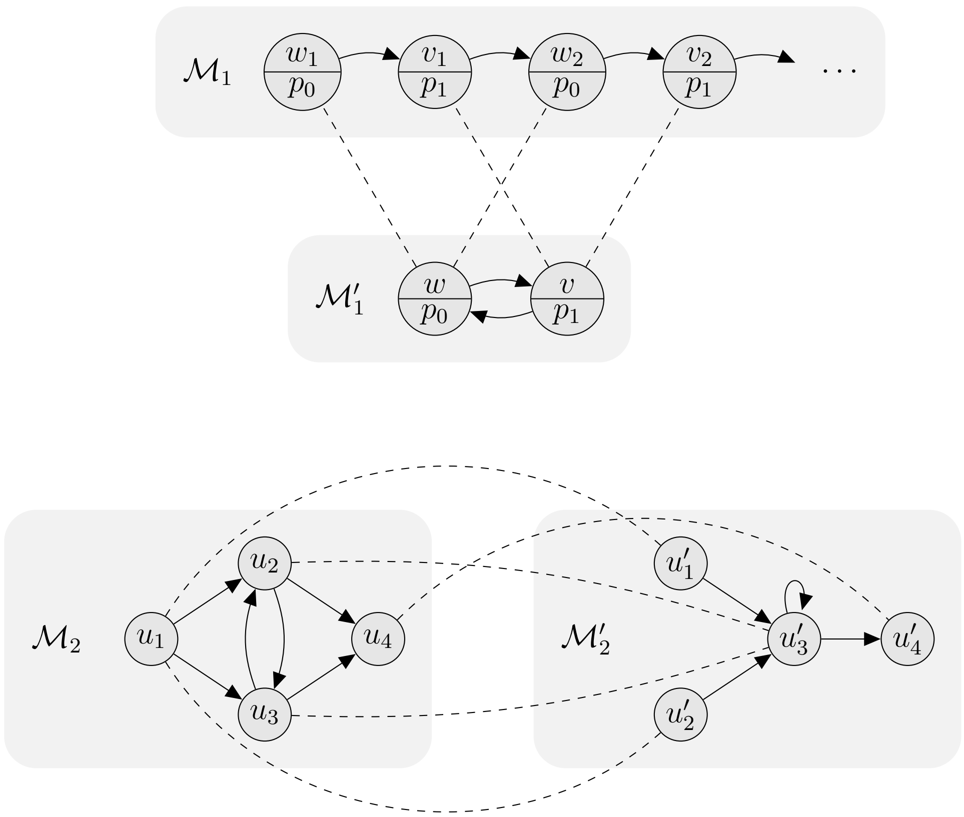
1. Tilat w ja w' toteuttavat samat propositiosymbolit.
2. Jos $(w, v) \in R$, niin on olemassa $v' \in W'$, jolle pätee $(w', v') \in R'$ ja $(v, v') \in B$.
3. Jos $(w', v') \in R'$, niin on olemassa $v \in W$, jolle pätee $(w, v) \in R$ ja $(v, v') \in B$.

Jos B on bisimulaatio mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välillä, merkitään $B\colon \mathcal{M} \underline{\leftrightarrow} \mathcal{M}'$. Jos lisäksi $(w, w') \in B$, merkitään $B\colon \mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathcal{M}', w'$. Jos on olemassa jokin bisimulaatio $B\colon \mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathcal{M}', w'$, merkitään $\mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathcal{M}', w'$ (tai lyhyemmin $w \underline{\leftrightarrow} w'$) ja sanotaan, että tilat w ja w' ovat *bisimilaarisia*.

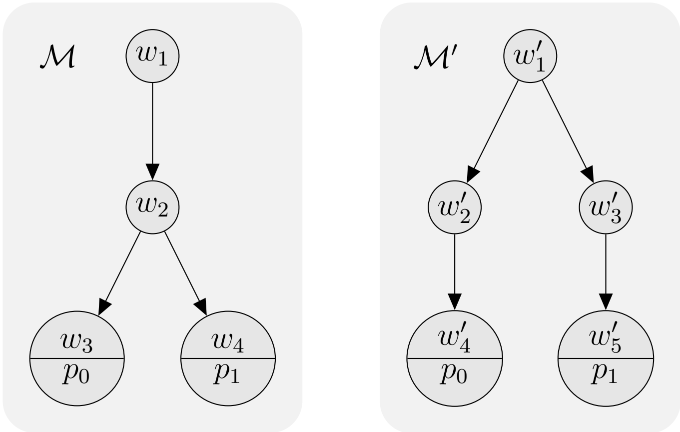
Kaksi tilaa ovat siis bisimilaarisia, jos ja vain jos niiden toteuttamat propositiosymbolit sekä niiden mahdolliset tilasiirtymät vastaavat toisiaan. Seuraava kuva havainnollistaa määritelmän ehtoja 2 ja 3:



Tilojen w ja v sekä w ja w' väliset kaaret toteuttavat ehdon 2 oletuksen, joten ehdosta seuraa, että kuvaan voidaan täydentää tila v' sekä loput kaksi kaarta. Ehto 3 voidaan tulkita symmetrisellä tavalla.



Kuva 2: Mallien $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_1'$ välillä sekä mallien $\mathcal{M}_2$ ja $\mathcal{M}_2'$ välillä on olemassa bisimulaatio. Keskenään bisimilaariset tilat on yhdistetty toisiinsa katkoviivoilla.



Kuva 3: Tilat w_1 ja w'_1 eivät ole bisimilaarisia.

Esimerkki 13. (i) Tarkastellaan kuvan 2 ääretöntä mallia $\mathcal{M}_1$ ja kaksitilaista mallia $\mathcal{M}'_1$. Näiden välillä on olemassa bisimulaatio, jolle $w_i \underline{\leftrightarrow} w$ kaikilla $i \in \mathbb{N}_+$ ja $v_i \underline{\leftrightarrow} v$ kaikilla $i \in \mathbb{N}_+$. Lukija voi helposti tarkistaa, että bisimulaation määritelmän ehdot 1–3 toteutuvat.

(ii) Myös kuvan 2 mallien $\mathcal{M}_2$ ja $\mathcal{M}'_2$ välillä on olemassa bisimulaatio, jossa niiden kaikki tilat ovat mukana. Mallin $\mathcal{M}_2$ tila u_1 on jaettu kahdeksi tilaksi u'_1 ja u'_2 ja toisaalta sen tilat u_2 ja u_3 on yhdistetty yhdeksi tilaksi u'_3. Tilan u'_3 on oltava itsensä seuraaja, koska tiloista u_2 ja u_3 on pääsy toisiinsa. Kuvaan ei ole merkitty tilojen toteuttamia propositiosymboleja, mutta katkoviivalla yhdistettyjen tilojen oletetaan tässä toteuttavan samat propositiosymbolit.

Esimerkki 14. Kuvassa 3 esitettyjen mallien $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ja $\mathcal{M}' = (W', R', V')$ tilat w_1 ja w'_1 eivät ole bisimilaarisia. Jos nimittäin olisi $w_1 \underline{\leftrightarrow} w'_1$, niin tällöin $w_2 \underline{\leftrightarrow} w'_2$ ja $w_2 \underline{\leftrightarrow} w'_3$. Koska $(w_2, w_3) \in R$ ja w'_5 on w'_3:n ainoa seuraaja, niin täytyy olla $w_3 \underline{\leftrightarrow} w'_5$. Tilat w_3 ja w'_5 eivät toteuta samoja propositiosymboleja, joten saatiin ristiriita. Kannattaa kuitenkin huomata, että mallien välillä on olemassa bisimulaatio $B = \{(w_3, w'_4), (w_4, w'_5)\}$, jossa on mukana ainoastaan tilat, joilla ei ole seuraajia.

Tilojen bisimilaarisuus tarkoittaa käytännössä sitä, että niitä ei ole mahdollista erottaa toisistaan minkään modaalilogiikan kaavan avulla. Esitetään seuraavaksi tälle tarkka määritelmä ja todistus.

Määritelmä 15 ([BRV01, luku 2.1])**.** Olkoot $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ja $\mathcal{M}' = (W', R', V')$ malleja, $w \in W$ ja $w' \in W'$. Sanotaan, että tilat w ja w' ovat *(modaalisesti) ekvivalentit* ja merkitään $w \leftsquigarrow\!\!\!\rightsquigarrow w'$, jos kaikille kaavoille ϕ pätee

$$\mathcal{M}, w \vDash \phi, \quad \text{joss} \quad \mathcal{M}', w' \vDash \phi.$$

Lause 16 ([BRV01, luku 2.2]). *Olkoot* $\mathcal{M} = (W, R, V)$ *ja* $\mathcal{M}' = (W', R', V')$ *malleja,* $w \in W$ *ja* $w' \in W$*. Jos* $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq \mathcal{M}', w'$*, niin* $w \leftrightsquigarrow w'$*. Bisimilaariset tilat siis toteuttavat täsmälleen samat kaavat.*

Todistus. Olkoon ϕ kaava. Osoitetaan induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen, että se on tosi tilassa w, jos ja vain jos se on tosi tilassa w' kaikilla tiloilla $w \in W$ ja $w' \in W'$, joille pätee $w \leftrightarroweq w'$.

Jos ϕ on propositiosymboli, niin väite seuraa määritelmän 12 ehdosta 1. Tehdään sitten induktio-oletus: väite pätee kaavoille ψ ja σ. Jos ϕ on muotoa $\neg\psi$, niin väite seuraa induktio-oletuksesta ja määritelmän 8 kohdasta 2. Jos ϕ on muotoa $\psi \vee \sigma$, niin väite seuraa induktio-oletuksesta ja määritelmän 8 kohdasta 3.

Olkoon sitten $\phi = \Diamond\psi$. Oletetaan, että $w \leftrightarroweq w'$ ja $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\psi$. Tällöin on olemassa bisimulaatio $B\colon \mathcal{M}, w \leftrightarroweq \mathcal{M}', w'$. Määritelmän 8 kohdan 4 nojalla jollakin $v \in W$ pätee $(w, v) \in R$ ja $\mathcal{M}, v \vDash \psi$. Nyt määritelmän 12 ehdon 2 nojalla on olemassa $v' \in W'$, jolle pätee $(w', v') \in R'$ ja $(v, v') \in B$. Pätee $v \leftrightarroweq v'$, joten soveltamalla induktio-oletusta tiloihin v ja v' saadaan $\mathcal{M}', v' \vDash \psi$. Tällöin $\mathcal{M}', w' \vDash \Diamond\psi$. Käänteinen suunta todistetaan vastaavalla tavalla käyttäen määritelmän 12 ehtoa 3. $\square$

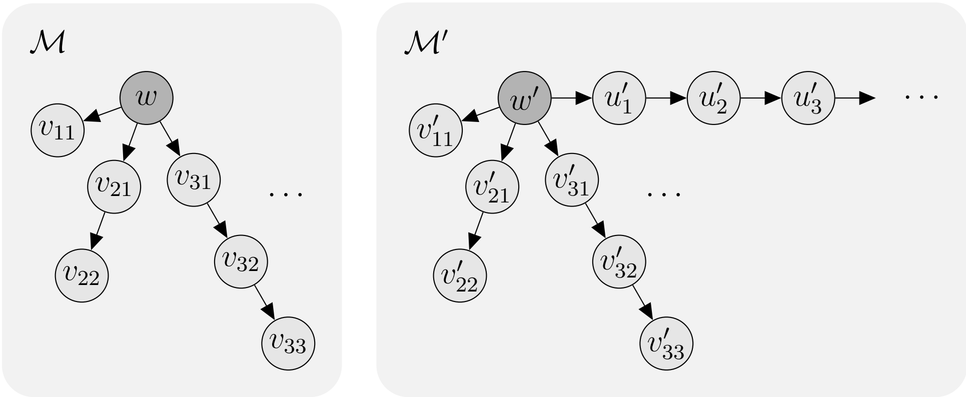
Edellisen lauseen todistus oli huomattavan yksinkertainen. Tämä kuvastaa sitä, kuinka luonnollisella tavalla bisimulaatio ja modaalinen ekvivalenttisuus vastaavat toisiaan.

Lause 16 tarjoaa uuden tavan osoittaa, että kaksi tilaa eivät ole bisimilaarisia. Tarkastellaan kuvan 3 malleja $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$. Jos w_1 ja w_1' olisivat bisimilaarisia, ne toteuttaisivat samat kaavat. Nyt kuitenkin $\mathcal{M}, w_1 \vDash \Diamond(\Diamond p_0 \wedge \Diamond p_1)$ ja $\mathcal{M}', w_1' \nvDash \Diamond(\Diamond p_0 \wedge \Diamond p_1)$, joten w_1 ja w_1' eivät voi olla bisimilaarisia.

Tässä vaiheessa on luonnollista kysyä, päteekö lauseen 16 väite käänteiseen suuntaan: seuraako modaalisesta ekvivalenttisuudesta bisimilaarisuus? Seuraava esimerkki osoittaa, että yleisesti ottaen näin *ei* tapahdu.

Esimerkki 17. Tarkastellaan kuvan 4 malleja $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ja $\mathcal{M}' = (W', R', V')$. Molemmissa malleissa on siis yksi erityinen "juuritila": $\mathcal{M}$:ssä w ja $\mathcal{M}'$:ssa w'. Kaikilla $n \in \mathbb{N}_+$ on olemassa juuritiloista lähtevät polut, joiden pituus on n: $\mathcal{M}$:ssä $(w, v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn})$ ja $\mathcal{M}'$:ssa $(w', v_{n1}', v_{n2}', \ldots, v_{nn}')$. Lisäksi mallissa $\mathcal{M}'$ on äärettömän pituinen polku $(w', u_1', u_2', \ldots)$. Voidaan olettaa, että $V(p_i) = V'(p_i) = \varnothing$ kaikilla propositiosymboleilla p_i.

Nyt tilat w ja w' ovat modaalisesti ekvivalentteja, mutta eivät bisimilaarisia. Modaalinen ekvivalenttisuus nähdään seuraavasti, todistuksen yksityiskohdat sivuuttaen: Jos kaava $\phi = \Diamond\psi$ on tosi tilassa w, niin kaava ψ on tosi jonkin tilasta w lähtevän polun ensimmäisessä tilassa v_{n1}, $n \in \mathbb{N}_+$. Tilasta w' lähtee samanpituinen polku, jonka ensimmäinen tila v_{n1}' toteuttaa



Kuva 4: Tilat w ja w' ovat modaalisesti ekvivalentit, mutta eivät bisimilaariset.

kaavan ψ. Siis kaava $\phi = \Diamond\psi$ on tosi myös tilassa w'. Oletetaan sitten, että kaava $\phi = \Diamond\psi$ on tosi tilassa w'. Jos kaava ψ on tosi jonkin äärellisen polun ensimmäisessä tilassa v'_{n1}, nähdään vastaavalla päättelyllä kuin äsken, että myös tila w toteuttaa kaavan $\phi = \Diamond\psi$. Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa ψ toteutuu äärettömän polun ensimmäisessä tilassa u'_1. Kaavassa ψ on vain äärellisen monta sisäkkäistä ruutua, joten se ”näkee vain äärelliselle etäisyydelle” äärettömässä polussa. On siis olemassa jokin tilasta w lähtevä riittävän pitkä äärellinen polku, jonka ensimmäinen tila v_{n1} myös toteuttaa kaavan ψ ja näin ollen kaava $\phi = \Diamond\psi$ on tosi tilassa w.

Jotta saataisiin osoitettua, että tilojen w ja w' välillä ei ole bisimulaatiota, tehdään vastaoletus: on olemassa bisimulaatio $B\colon \mathcal{M}, w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathcal{M}', w'$. Nyt $(w', u'_1) \in R'$, joten $(w, v_{n1}) \in R$ ja $(v_{n1}, u'_1) \in B$ jollakin $n \in \mathbb{N}_+$. Jos $(v_{ni}, u'_i) \in B$, niin tällöin $(u'_i, u'_{i+1}) \in R'$, $(v_{ni}, v_{ni+1}) \in R$ ja $(v_{ni+1}, u'_{i+1}) \in B$. Induktiolla seuraa, että kaikilla $i \in \mathbb{N}_+$ pätee $(v_{ni}, v_{ni+1}) \in R$. Kuitenkaan tilalla v_{nn} ei ole seuraajaa mallissa $\mathcal{M}$, joten saatiin ristiriita.

Käänteinen tulos – Hennessyn–Milnerin lause – kuitenkin pätee, jos mallille asetetaan yksi lisäehto. Jos $\mathcal{M} = (W, R, V)$ on malli, niin tilan $w \in W$ *seuraajien* joukko on joukko $R(w) = \{v \in W \mid (w, v) \in R\}$.

Lause 18 (Hennessy–Milner, [BRV01, luku 2.2])**.** *Olkoot $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ja $\mathcal{M}' = (W', R', V')$ malleja, joilla jokaisen tilan seuraajien joukko on äärellinen. Tällöin jokaiselle $w \in W$ ja $w' \in W'$ pätee, että $w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} w'$, jos ja vain jos $w \leftrightsquigarrow w'$.*

Todistus. Jos $w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} w'$, niin lauseesta 16 seuraa, että $w \leftrightsquigarrow w'$. Toisen suunnan todistamiseksi näytetään, että relaatio $\leftrightsquigarrow$ itsessään on bisimulaatio.

Oletetaan, että $w \leftrightsquigarrow w'$. Koska w ja w' toteuttavat samat kaavat, ne toteuttavat samat propositiosymbolit. Siis määritelmän 12 ehto 1 on voimassa.

Oletetaan sitten, että $(w, v) \in R$. On osoitettava, että on olemassa $v' \in W'$, jolle pätee $(w', v') \in R'$ ja $v \leftrightsquigarrow v'$. Tarkastellaan seuraajien joukkoa $R'(w') = \{u' \in W' \mid (w', u') \in R'\}$. Joukko $R'(w')$ on epätyhjä, koska muuten pätisi $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond(p_0 \vee \neg p_0)$ ja $\mathcal{M}', w' \nvDash \Diamond(p_0 \vee \neg p_0)$. Oletuksen nojalla $R'(w')$ on lisäksi äärellinen, joten voidaan merkitä $R'(w') = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$. Tehdään vastaoletus: yksikään $v'_i \in R'(w')$ ei ole etsitty v'. Tällöin jokaiselle v'_i on olemassa jokin kaava ϕ_i, jolle pätee $\mathcal{M}, v \vDash \phi_i$ ja $\mathcal{M}', v'_i \nvDash \phi_i$. Nyt

$$\mathcal{M}, w \vDash \Diamond(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}', w' \nvDash \Diamond(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n).$$

Tämä on ristiriidassa oletuksen $w \leftrightsquigarrow w'$ kanssa. Siis määritelmän ehto 2 on voimassa. Ehdon 3 voimassaolo osoitetaan vaihtamalla mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ roolit keskenään. □

Jos rajoitutaan tutkimaan ainoastaan äärellisiä malleja, niin mallien jokaisella tilalla on tietysti vain äärellinen määrä seuraajia, ja voidaan soveltaa lausetta 18.

3.2 Bisimulaation sovelluksia

Invarianssituloksia, kuten lausetta 16, voidaan ajatella joko negatiivisesta tai positiivisesta näkökulmasta [BRV01, luku 2.3]: Toisaalta ne rajoittavat sitä, millaisia ominaisuuksia modaalilogiikan kaavoilla voidaan kuvailla. Toisaalta ne tarjoavat menetelmiä mallien muuntamiseen helpommin käsiteltävään muotoon ilman, että kaavojen toteutuvuus muuttuu. Tässä luvussa esitetään esimerkkejä molemmista näkökulmista.

Esimerkissä 11 nähtiin, että kaava $\Diamond\Diamond p_0 \to \Diamond p_0$ on validi transitiivisten kehysten luokassa. Voidaan osoittaa, että sama vastaavuus pätee toiseenkin suuntaan: jos $\Diamond\Diamond p_0 \to \Diamond p_0$ on validi kehyksessä $\mathcal{F} = (W, R)$, niin relaatio R on transitiivinen. Kyseisen kaavan sanotaan määrittelevän transitiivisten kehysten luokan tai transitiivisuuden. Tätä ajatusta yleistämällä saadaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 19 ([BRV01, luku 3.1])**.** Olkoon ϕ kaava ja P jokin kehysten ominaisuus. Kaava ϕ *määrittelee ominaisuuden* P, jos kaikille kehyksille $\mathcal{F}$ pätee:

$$\mathcal{F} \vDash \phi, \quad \text{joss} \quad \text{kehyksellä } \mathcal{F} \text{ on ominaisuus } P.$$

Ominaisuus on *(modaalisesti) määriteltävä*, jos on olemassa jokin kaava, joka määrittelee sen.

Seuraavassa on joitakin esimerkkejä kehysten määriteltävistä ominaisuuksista, todistukset sivuuttaen.

Esimerkki 20 ([BBW07, luku 1.5.2; BRV01, luku 3.1; RV04, luku 10.1]).

1. Kaava $p_0 \to \Diamond p_0$ määrittelee ominaisuuden "saavutettavuusrelaatio on refleksiivinen".

2. Kaava $p_0 \to \Box\Diamond p_0$ määrittelee ominaisuuden "saavutettavuusrelaatio on symmetrinen".

3. Kaava $\Diamond p_0 \to \Box p_0$ määrittelee ominaisuuden "saavutettavuusrelaatio on osittainen funktio".

4. Kaava $p_0 \leftrightarrow \Box p_0$ määrittelee ominaisuuden "kehys koostuu eristetyistä refleksiivisistä tiloista".

Kaikkia kehysten ominaisuuksia ei kuitenkaan vastaa mikään modaalilogiikan kaava. Kiinnostava kysymys on, miten tällaisia vastaamattomuustuloksia voidaan todistaa. Modaalilogiikan kaavoja on ääretön määrä, joten ei voida tarkistaa jokaista kaavaa erikseen. Sen sijaan, jos löydetään kaksi kehystä, joista toisella on haluttu ominaisuus ja toisella ei ja joissa kuitenkin täsmälleen samat kaavat ovat valideja, niin kyseinen ominaisuus ei ole määriteltävä. Tässä voidaan hyödyntää bisimulaatiota. Todistustekniikan yksityiskohdat selviävät seuraavasta esimerkistä.

Esimerkki 21. (i) Osoitetaan, että mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele irrefleksiivisyyttä (siis ominaisuutta "mikään tila ei ole relaatiossa itsensä kanssa"). Tehdään vastaoletus: on olemassa kaava ϕ, jolle $(W, R) \vDash \phi$, jos ja vain jos R on irrefleksiivinen. Olkoon $\mathcal{F} = (W, R)$ kehys, jossa $W = \{w\}$ ja $R = \{(w, w)\}$. Nyt R ei ole irrefleksiivinen, joten $\mathcal{F} \nvDash \phi$ eli $\mathcal{M}, w \nvDash \phi$ jollakin mallilla $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$.

Konstruoidaan sitten irrefleksiivinen kehys $\mathcal{F}' = (W', R')$, jossa $W' = \{w_1, w_2, \ldots\}$ ja $R = \{(w_i, w_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}_+\}$, sekä malli $\mathcal{M}' = (\mathcal{F}', V')$, jossa

$$V'(p_i) = \begin{cases} W', & \text{jos } V(p_i) = W, \\ \varnothing, & \text{jos } V(p_i) = \varnothing, \end{cases}$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt relaatio $B = \{(w, w_i) \mid i \in \mathbb{N}_+\}$ on mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välinen bisimulaatio, joten $w \leftrightarrows w_1$. Koska $\mathcal{M}, w \nvDash \phi$, niin $\mathcal{M}', w_1 \nvDash \phi$. Tästä seuraa $\mathcal{F}' \nvDash \phi$, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Siis irrefleksiivisyys ei ole määriteltävä ominaisuus.

(ii) Kohdan (i) konstruktiota soveltaen voidaan aivan samalla tavalla osoittaa, että myöskään ominaisuus "tilajoukko on ääretön" ei ole määriteltävä.

Lause 16 takaa sen, että jos kaava on tosi jonkin mallin jossakin tilassa, se on tosi jokaisen mallin jokaisessa alkuperäisen tilan kanssa bisimilaarisessa tilassa. Tästä seuraa, että usein voidaan korvata alkuperäinen malli toisenlaisella mallilla, jolla on haluttuja ominaisuuksia, jotka alkuperäiseltä mallilta puuttuvat. Seuraavaksi tarkastellaan kahta luonnollista, mallin kokoa päinvastaisiin suuntiin muuttavaa tapaa mallin muuntamiseen toisenlaiseksi.

Ensimmäinen esimerkki on mallin kutistaminen niin sanotuksi *bisimulaatiokutistukseksi* [BBW07, luku 1.3.2]. Aloitetaan todistamalla muutama yksinkertainen lemma.

Lemma 22. *Jos on olemassa bisimulaatio mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välillä, niin on olemassa maksimaalinen bisimulaatio niiden välillä, ts. bisimulaatio B_{m}, jolle pätee $B \subseteq B_{\mathrm{m}}$ kaikilla $B\colon \mathcal{M} \leftrightarroweq \mathcal{M}'$.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{B}$ epätyhjä joukko bisimulaatioita mallien $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ja $\mathcal{M}' = (W', R', V')$ välillä. Osoitetaan, että yhdiste $\bigcup \mathcal{B}$ on bisimulaatio. Selvästi $\bigcup \mathcal{B} \subseteq W \times W'$ on epätyhjä. Oletetaan sitten, että $(w, w') \in \bigcup \mathcal{B}$. Tällöin $(w, w') \in B$ jollakin bisimulaatiolla $B \in \mathcal{B}$. Siis w ja w' toteuttavat samat propositiosymbolit, joten määritelmän 12 ehto 1 toteutuu. Jos $(w, v) \in R$, niin on olemassa $v' \in W'$, jolle $(w', v') \in R'$ ja $(v, v') \in B \subseteq \bigcup \mathcal{B}$, joten relaatio $\bigcup \mathcal{B}$ toteuttaa myös määritelmän ehdon 2. Ehdon 3 toteutuminen nähdään samalla tavalla. Siis $\bigcup \mathcal{B}\colon \mathcal{M} \leftrightarroweq \mathcal{M}'$.

Olkoon sitten $\mathcal{B}$ kaikkien mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välisten bisimulaatioiden joukko. Oletuksen nojalla $\mathcal{B}$ on epätyhjä. Nyt $B_{\mathrm{m}} = \bigcup \mathcal{B}$ on bisimulaatio, ja jos $B\colon \mathcal{M} \leftrightarroweq \mathcal{M}'$, niin $B \subseteq B_{\mathrm{m}}$. Siis B_{m} on haluttu maksimaalinen bisimulaatio. □

Bisimulaatiolle annettu määritelmä sallii myös bisimulaation mallin ja sen itsensä välillä. Tällaista bisimulaatiota kutsutaan *autobisimulaatioksi* [BBW07, luku 1.3.2]. Selvästi jokaisella mallilla on ainakin yksi autobisimulaatio – nimittäin mallin tilojen joukon identtinen kuvaus. Näin ollen mallilla on aina myös maksimaalinen autobisimulaatio.

Lemma 23. *Olkoot B ja B' bisimulaatioita. Tällöin käänteisrelaatio B^{-1} on bisimulaatio. Jos yhdiste $B' \circ B$ on epätyhjä, myös se on bisimulaatio.*

Todistus. Olkoot $\mathcal{M} = (W, R, V)$, $\mathcal{M}' = (W', R', V')$ ja $\mathcal{M}'' = (W'', R'', V'')$ malleja, $B\colon \mathcal{M} \leftrightarroweq \mathcal{M}'$ ja $B'\colon \mathcal{M}' \leftrightarroweq \mathcal{M}''$. Näytetään, että $B^{-1}\colon \mathcal{M}' \leftrightarroweq \mathcal{M}$ ja $B' \circ B\colon \mathcal{M} \leftrightarroweq \mathcal{M}''$.

Selvästi $B^{-1} \subseteq W' \times W$ on epätyhjä. Olkoon $(w', w) \in B^{-1}$. Tällöin $(w, w') \in B$. Määritelmän 12 ehto 1 pätee B:lle, joten se pätee B^{-1}:lle. Jos $(w', v') \in R'$, niin soveltamalla ehtoa 3 bisimulaatioon B nähdään, että on olemassa $v \in W$, jolle $(w, v) \in R$ ja $(v, v') \in B$. Nyt $(v', v) \in B^{-1}$, joten ehto 2 pätee B^{-1}:lle. Ehdon 3 voimassaolo nähdään vastaavalla tavalla soveltamalla ehtoa 2 bisimulaatioon B. Siis $B^{-1} \colon \mathcal{M}' \leftrightarrow \mathcal{M}$.

Oletuksen nojalla $B' \circ B \subseteq W \times W''$ on epätyhjä. Olkoon $(w, w'') \in B' \circ B$. Tällöin on olemassa $w' \in W'$, jolle $(w, w') \in B$ ja $(w', w'') \in B'$. Koska w toteuttaa samat propositiosymbolit kuin w' ja w' toteuttaa samat propositiosymbolit kuin w'', niin w ja w'' toteuttavat samat propositiosymbolit. Siis määritelmän ehto 1 on voimassa. Jos $(w, v) \in R$, niin soveltamalla ehtoa 2 bisimulaatioon B löydetään tila $v' \in W'$, jolle $(w', v') \in R'$ ja $(v, v') \in B$. Soveltamalla edelleen ehtoa 2 bisimulaatioon B' löydetään tila $v'' \in W''$, jolle $(w'', v'') \in R''$ ja $(v', v'') \in B'$. Nyt $(v, v'') \in B' \circ B$, joten ehto 2 on voimassa relaatiolle $B' \circ B$. Ehdon 3 voimassaolo nähdään jälleen vastaavalla tavalla. Siis $B' \circ B \colon \mathcal{M} \leftrightarrow \mathcal{M}''$. □

Lemma 24. *Olkoon $\mathcal{M} = (W, R, V)$ malli. Maksimaalinen autobisimulaatio $B_{\mathrm{m}} \colon \mathcal{M} \leftrightarrow \mathcal{M}$ on joukon W ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Joukon W identtinen kuvaus id_W on selvästi bisimulaatio, joten $\mathrm{id}_W \subseteq B_{\mathrm{m}}$. Siis $(w, w) \in B_{\mathrm{m}}$ kaikilla $w \in W$, joten B_{m} on refleksiivinen.

Olkoon $(w, v) \in B_{\mathrm{m}}$. Tällöin $(v, w) \in B_{\mathrm{m}}^{-1}$. Lemman 23 nojalla B_{m}^{-1} on bisimulaatio, joten $B_{\mathrm{m}}^{-1} \subseteq B_{\mathrm{m}}$, mistä seuraa, että $(v, w) \in B_{\mathrm{m}}$. Siis B_{m} on symmetrinen.

Olkoon sitten $(w, v) \in B_{\mathrm{m}}$ ja $(v, u) \in B_{\mathrm{m}}$. Tällöin $(w, u) \in B_{\mathrm{m}} \circ B_{\mathrm{m}}$. Myös $B_{\mathrm{m}} \circ B_{\mathrm{m}}$ on bisimulaatio, joten $B_{\mathrm{m}} \circ B_{\mathrm{m}} \subseteq B_{\mathrm{m}}$, mistä seuraa, että $(w, u) \in B_{\mathrm{m}}$. Siis B_{m} on transitiivinen. □

Edellisen lemman nojalla mallin $\mathcal{M} = (W, R, V)$ maksimaalinen autobisimulaatio B_{m} jakaa W:n ekvivalenssiluokkiin, jotka tunnetusti muodostavat W:n osituksen. Merkitään tilan $w \in W$ ekvivalenssiluokkaa $[w]$. Nyt voidaan määritellä mallin $\mathcal{M}$ bisimulaatiokutistus.

Määritelmä 25. Olkoon $\mathcal{M} = (W, R, V)$ malli ja B_{m} sen maksimaalinen autobisimulaatio. Mallin $\mathcal{M}$ *bisimulaatiokutistus* (engl. bisimulation contraction) on malli $\mathcal{M}_{\mathrm{bc}} = (W_{\mathrm{bc}}, R_{\mathrm{bc}}, V_{\mathrm{bc}})$, jonka tilajoukko koostuu relaation B_{m} ekvivalenssiluokista:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{bc}} &= \{[w] \mid w \in W\}, \\ R_{\mathrm{bc}} &= \{([w], [v]) \mid (w, v) \in R\}, \\ V_{\mathrm{bc}}(p_i) &= \{[w] \mid w \in V(p_i)\} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mallin $\mathcal{M}$ bisimilaariset tilat siis samaistetaan keskenään. Nyt malli $\mathcal{M}_{\mathrm{bc}}$ voidaan liittää alkuperäiseen malliin $\mathcal{M}$ kanonisella projektiolla $w \mapsto [w]$. Saadaan seuraava tulos.

Lemma 26. *Olkoon* $\mathcal{M} = (W, R, V)$ *malli,* $\mathcal{M}_{\mathrm{bc}} = (W_{\mathrm{bc}}, R_{\mathrm{bc}}, V_{\mathrm{bc}})$ *sen bisimulaatiokutistus ja* $B = \{(w, [w]) \mid w \in W\}$*. Tällöin* B *on bisimulaatio, joka liittää jokaiseen* $\mathcal{M}$*:n tilaan jonkin* $\mathcal{M}_{\mathrm{bc}}$*:n tilan ja päinvastoin.*

Todistus. Selvästi B on epätyhjä. Olkoon $(w, [w]) \in B$. Valuaation V_{bc} määritelmän nojalla propositiosymboli p_i on tosi tilassa $[w]$, jos se on tosi tilassa w. Toinen suunta seuraa siitä, että jos propositiosymboli p_i on tosi tilassa $[w]$, niin määritelmän nojalla se on tosi jossakin tilassa v, jolle pätee $[v] = [w]$ ja siis $v \leftrightarroweq w$. Näin ollen määritelmän 12 ehto 1 toteutuu.

Jos $(w, v) \in R$, niin relaation R_{bc} määritelmän nojalla $([w], [v]) \in R_{\mathrm{bc}}$ ja lisäksi $(v, [v]) \in B$. Tämä toteuttaa ehdon 2.

Jos $([w], [v]) \in R_{\mathrm{bc}}$, niin on olemassa tilat $w' \in [w]$ ja $v' \in [v]$, joille $(w', v') \in R$. Nyt $w' \leftrightarroweq w$, joten ehdon 2 nojalla on olemassa tila $u \in W$, jolle $(w, u) \in R$ ja $v' \leftrightarroweq u$. Koska lisäksi $v' \leftrightarroweq v$, niin $u \leftrightarroweq v$ ja $[u] = [v]$. Tällöin $(u, [v]) \in B$, joten myös ehto 3 toteutuu. □

Algebraa tunteva lukija voi huomata bisimulaatiokutistuksen samankaltaisuuden algebrallisten tekijästruktuurien kanssa. Se on modaalilogiikan näkökulmasta pienin mahdollinen esitystapa alkuperäiselle mallille; siitä on poistettu kaikki symmetriat.

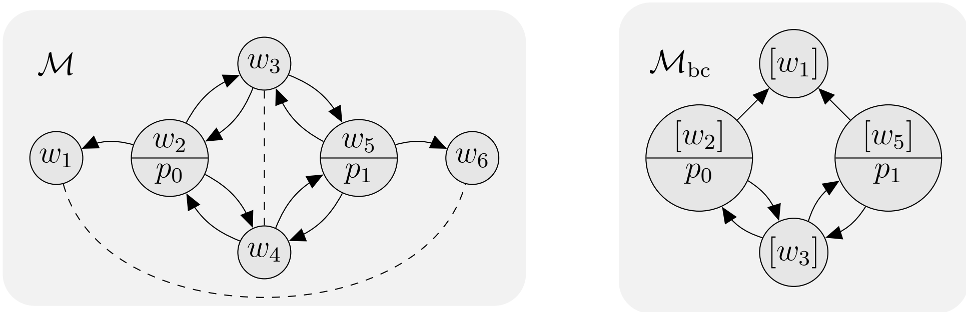
Seuraavaksi näytetään esimerkki mallin kutistamisesta bisimulaatiokutistuksen avulla.

Esimerkki 27. Tarkastellaan kuvan 5 mallia $\mathcal{M} = (W, R, V)$. Nähdään helposti, että katkoviivoilla yhdistetyt tilat ovat bisimilaarisia. Lisäksi mitkään muut kaksi eri tilaa eivät ole bisimilaarisia keskenään – johtuen joko siitä, että ne toteuttavat eri propositiosymbolit tai siitä, että niiden mahdolliset tilasiirtymät ovat erilaiset. Tällöin mallin maksimaalinen autobisimulaatio on

$$B_{\mathrm{m}} = \{(w_1, w_6), (w_6, w_1), (w_3, w_4), (w_4, w_3)\} \cup \{(w, w) \mid w \in W\}.$$

Vastaavat ekvivalenssiluokat ovat $[w_1], [w_2], [w_3]$ ja $[w_5]$, ja ne muodostavat kuvassa esitetyn mallin $\mathcal{M}_{\mathrm{bc}}$.

Seuraavaksi tarkastellaan mallin suurentamista konstruoimalla *puumainen* malli, jonka juuri on bisimilaarinen alkuperäisen mallin annetun tilan kanssa. Puumaisella mallilla tarkoitetaan mallia $\mathcal{M} = (W, R, V)$, jonka kehys (W, R) on (mahdollisesti ääretön) suunnattu puu.



Kuva 5: Malli $\mathcal{M}$ ja sen bisimulaatiokutistus $\mathcal{M}_{\mathrm{bc}}$.

Määritelmä 28 ([BRV01, luku 2.1])**.** Olkoon $\mathcal{M} = (W, R, V)$ malli ja $w \in W$ sen tila. Mallin $\mathcal{M}$ *puulevitys* (engl. tree unraveling) tilan w suhteen on malli $\mathcal{M}^w_{\mathrm{tu}} = (W^w_{\mathrm{tu}}, R^w_{\mathrm{tu}}, V^w_{\mathrm{tu}})$, jonka tilajoukko koostuu kaikista $\mathcal{M}$:n tilasta w alkavista äärellisen pituisista poluista. Formaalisti malli $\mathcal{M}^w_{\mathrm{tu}}$ määritellään seuraavasti:

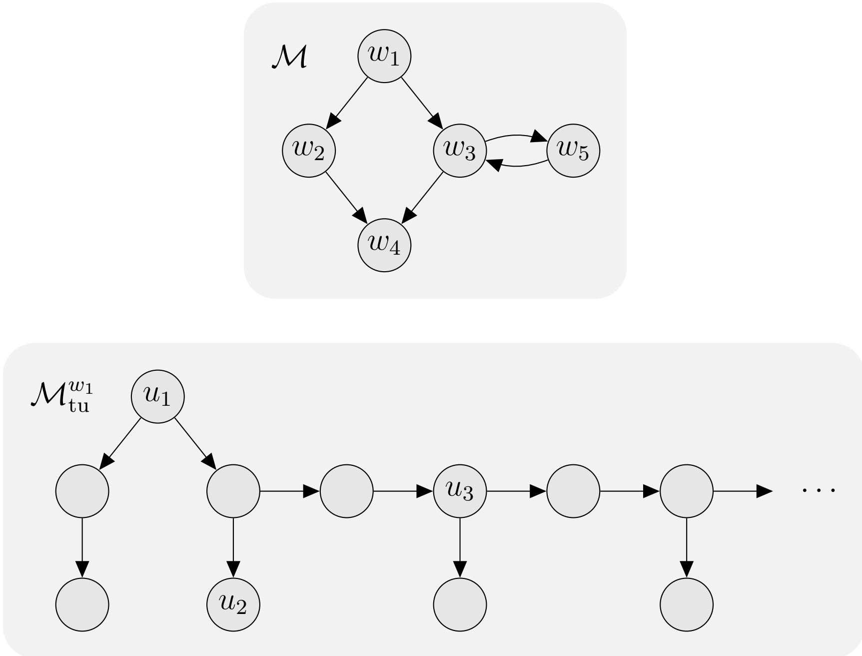
$$W^w_{\mathrm{tu}} = \left\{ (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W^n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}_+,\ w_1 = w \text{ ja} \\ (w_i, w_{i+1}) \in R \text{ kaikilla } i < n \end{array} \right\},$$
$$R^w_{\mathrm{tu}} = \{((w_1, w_2, \ldots, w_n), (w_1, w_2, \ldots, w_{n+1})) \in W^w_{\mathrm{tu}} \times W^w_{\mathrm{tu}} \mid n \in \mathbb{N}_+\},$$
$$V^w_{\mathrm{tu}}(p_i) = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W^w_{\mathrm{tu}} \mid w_n \in V(p_i)\} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}.$$

Lemma 29. *Olkoon $\mathcal{M} = (W, R, V)$ malli, $w \in W$ ja $\mathcal{M}^w_{\mathrm{tu}} = (W^w_{\mathrm{tu}}, R^w_{\mathrm{tu}}, V^w_{\mathrm{tu}})$ $\mathcal{M}$:n puulevitys. Tällöin relaatiolle $B = \{((w_1, w_2, \ldots, w_n), w_n) \in W^w_{\mathrm{tu}} \times W\}$ pätee $B \colon \mathcal{M}^w_{\mathrm{tu}}, (w) \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathcal{M}, w$.*

Todistus. Olkoon $((w_1, w_2, \ldots, w_n), w_n) \in B$. Valuaation V^w_{tu} määritelmän nojalla jokainen propositiosymboli p_i on tosi tilassa $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, jos ja vain jos se on tosi tilassa w_n. Siis määritelmän 12 ehto 1 toteutuu.

Jos $((w_1, w_2, \ldots, w_n), (w_1, w_2, \ldots, w_{n+1})) \in R^w_{\mathrm{tu}}$, niin tilajoukon W^w_{tu} määritelmän nojalla $(w_n, w_{n+1}) \in R$. Lisäksi $((w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}), w_{n+1}) \in B$, joten ehto 2 toteutuu. Myös ehto 3 seuraa suoraviivaisesti määritelmistä. Pätee $((w), w) \in B$, joten $B \colon \mathcal{M}^w_{\mathrm{tu}}, (w) \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathcal{M}, w$. $\square$

Kannattaa huomata, että jos alkuperäisessä mallissa $\mathcal{M}$ on tiloja, jotka eivät ole saavutettavissa tilasta w millään määrällä askeleita, niin ne eivät välttämättä ole bisimilaarisia minkään mallin $\mathcal{M}^w_{\mathrm{tu}}$ tilan kanssa. Tämä ei kuitenkaan ole ongelma, jos tarkastellaan kaavojen totuutta vain tilassa w.



Kuva 6: Malli $\mathcal{M}$ ja sen ääretön puulevitys $\mathcal{M}^{w_1}_{\mathrm{tu}}$.

Lause 30 ([BRV01, luku 2.1])**.** *Perusmodaalikielellä on* puumalliominaisuus, *ts. jokainen toteutuva kaava toteutuu jossakin puumaisessa mallissa.*

Todistus. Olkoon ϕ toteutuva kaava. Tällöin on olemassa malli $\mathcal{M}$ ja sen tila w, joille $\mathcal{M}, w \vDash \phi$. Muodostetaan $\mathcal{M}$:n puulevitys $\mathcal{M}^{w}_{\mathrm{tu}}$ tilan w suhteen. Edellisestä lemmasta ja lauseesta 16 seuraa, että $\mathcal{M}^{w}_{\mathrm{tu}}, (w) \vDash \phi$. $\square$

Esimerkki 31. Muodostetaan kuvan 6 mallin $\mathcal{M}$ puulevitys tilan w_1 suhteen. Saadaan kuvan malli $\mathcal{M}^{w_1}_{\mathrm{tu}}$, jossa esimerkiksi $u_1 = (w_1)$, $u_2 = (w_1, w_3, w_4)$ ja $u_3 = (w_1, w_3, w_5, w_3)$. Lemman 29 nojalla $w_1 \,\underline{\leftrightarrow}\, u_1$, $w_4 \,\underline{\leftrightarrow}\, u_2$ ja $w_3 \,\underline{\leftrightarrow}\, u_3$.

Tässä luvussa tarkasteltiin kahta esimerkkiä menetelmistä, joilla voidaan muodostaa annetusta mallista uusi malli, jonka tilat ovat bisimilaarisia alkuperäisen mallin tilojen kanssa. Ne ovat monessa tilanteessa hyödyllisiä keinoja korvata monimutkainen malli helpommin ymmärrettävällä. Erityisesti puumalliominaisuudella on myös tärkeä teoreettinen merkitys modaalilogiikassa. Se mahdollistaa erilaisten todistustekniikoiden hyödyntämisen ja liittyy läheisesti esimerkiksi modaalilogiikan toteutuvuusongelman ratkeavuuteen ja kompleksisuuteen [BRV01, luku 2.8].

Viitteet

[BBW07] Patrick Blackburn, Johan van Benthem ja Frank Wolter, toim. *Handbook of Modal Logic*. Vol. 3. Studies in Logic and Practical Reasoning. Elsevier, 2007.

[BRV01] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke ja Yde Venema. *Modal Logic*. Vol. 53. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2001.

[RV04] Veikko Rantala ja Ari Virtanen. *Johdatus modaalilogiikkaan*. Gaudeamus, 2004.

[SV92] Hannele Salminen ja Jouko Väänänen. *Johdatus logiikkaan*. Gaudeamus, 1992.