

JOHDATUS SUHTEELLISUUSTEORIAAN

Erkki Thuneberg

Fysiikan laitos
Oulun yliopisto
2017

Järjestelyjä

Johdatus suhteellisuusteoriaan -kurssi on jaettu kahteen osaan, 1 ja 2. Osa 1 käsittää tämän monisteen luvut 1-4 ja osa 2 luvut 5-7.

Osan 1 verkkosivu

<https://www.oulu.fi/tf/jst1/index.html>

Osan 2 verkkosivu

<https://www.oulu.fi/tf/jst2/index.html>

Verkkosivulta löytyy luentomateriaali (tämä moniste), harjoitustehtävät ja myöhemmin myös harjoitustehtävien ratkaisut. Katso sieltä myös mahdolliset muutokset luento- ja harjoitusaikoihin.

Aikataulut 2017

Johdatus suhteellisuusteoriaan 1

Luennot: ti 12-14, sali L8 (17.1.-28.2. ei 21.2.)

Harjoitukset: ke 8-10 ja to 10-12 sali L8 (1.2.-9.3. ei 22. eikä 23.2.)

Pääteko: 21.3.2017

Harjoitusassistentit: Petri Peuravaara, Oskari Tervo

Johdatus suhteellisuusteoriaan 2

Luennot: ti 12-14, sali L8 (14.3.-11.4.)

Harjoitukset: ke 8-10 sali IT138, to 10-12 sali PR126A (22.3.-13.4.)

Pääteko: 25.4.2017

Harjoitusassistentti: Petri Peuravaara

Kurssiin kuuluvat oleellisena osana laskuharjoitukset, joiden tehtävät laitetaan kurssin verkkosivulle pian vastaavan luennon jälkeen. Määräaikaan mennessä näytetyistä tehdyistä harjoituksista saa yhden arvosanapykälän korotuksen loppuarvosanaan. (Ei pisterajoja, jokainen tehtävä vaikuttaa paitsi että loppuarvosana pyöristetään kokonaisluvuksi.) Korostettakoon että nämä lisäpisteet ovat vain pieni lisä siihen hyötyyn, joka laskuharjoitusten tekemisestä on kurssin asian ymmärtämiselle ja siten tenttimenestykselle.

1. Johdanto

Tässä kurssissa (osat 1 ja 2) annetaan perustiedot Albert Einsteinin 1905 julkaisemasta *erityisestä* eli *suppeasta suhteellisuusteoriasta*. Teorian olennaisin oivallus on, että aika ei ole absoluuttista. Esimerkiksi, kaksi tapahtumaa 1 ja 2 voi olla niin, että havaitsija K mittaa tapahtuman 1 tapahtuneen ennen tapahtumaa 2, mutta havaitsija L saa vastakkaisen tuloksen. (Tässä ei ole kysymys siitä että he saisivat tiedon tapahtumista eri aikaan, vaan aivan todellisesta erosta mitatuissa tapahtumien ajoissa.) Suppean suhteellisuusteorian voi johtaa kahdesta perusoletuksesta, joihin pian tutustutaan. Suppea suhteellisuusteoria palautuu Newtonin mekaniikkaan kun tarkasteltavat nopeudet ovat pieniä verrattuna valon nopeuteen. Siksi ajan suhteellisuutta on vaikea havaita arkielämässä. Suppean suhteellisuusteorian ennusteet on tarkasti osoitettu pätevän mittauksissa, joita on tehty hiukkasilla joiden nopeudet ovat lähellä valon nopeutta.

Vuonna 1915 Einstein julkaisi toisen teorian joka tunnetaan *yleisenä suhteellisuusteorian*ana. Tämä rakentuu suppean suhteellisuusteorian perustalle, ja sen tarkoituksena on selittää painovoima eli gravitaatiovuorovaikutus. Olennainen oivallus tässä on että avaruus ja aika ovat "kaareutuneet", ts. normaalielämästä tuttu euklidinen geometria on vain likimääräistys. Normaaliolosuhteissa euklidinen geometria pitää tavattoman tarkasti paikkansa, mutta hyvin massiivisen kappaleen lähellä siitä selvästi poiketaan. Tässä kurssissa ei käsitellä yleistä suhteellisuusteoriaa, vaan sitä varten on oma syventävien opintojen kurssi.

Esitiedot

Fysiikan matematiikkaa ja mekaniikka (tai vastaavat tiedot)

Kirjallisuutta

Lähes kaikissa fysiikan yleiskirjoissa on luku joka käsittelee suhteellisuusteoriaa.

Concepts of Modern Physics, A. Beiser (1995), luku 1.

Lyhyt modernin fysiikan johdatus, J. Maalampi ja T. Perko (1999)

Luentomuistiinpanot, Petri Mutka (2005) (linkki kurssin kotisivulla)

Luentomuistiinpanot, Esko Suhonen (2001) (linkki kurssin kotisivulla)

Special Relativity, A. P. French (1968), pidempi esitys suhteellisuusteoriasta.

Spacetime Physics (5th ed.), E. F. Taylor and J. A. Wheeler (1998), pidempi esitys suhteellisuusteoriasta.

Koe suhteellisuusteorian ilmiötä pelaamalla

<http://testtubegames.com/velocityraptor.html>

Kiitokset

Tämä moniste pohjautuu osittain Esko Suhosen tekemään monisteeseen. Myös Petri Mutkan pitämä suhteellisuusteorian kurssi on vaikuttanut tämän monisteen sisältöön.

Vakioita ja merkintöjä

$c = 299\,792\,458$ m/s, valon nopeus tyhjiössä

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg², gravitaatiovakio

$h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js, Planckin vakio, usein esiintyy myös

$\hbar = h/2\pi = 1.0545 \times 10^{-34}$ Js

$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C, alkeisvaraus, elektronin varauksen itseisarvo

$k_B = 1.380 \times 10^{-23}$ J/K, Boltzmannin vakio

$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ C²/Nm², sähkövakio (tyhjiön permittiivisyys)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A² = $4\pi \times 10^{-7}$ T²m³/J, magneettivakio (tyhjiön permeabiliteetti)

$m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg, elektronin massa

$m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg, protonin massa

$u = 1.6605 \times 10^{-27}$ kg, atomimassayksikkö

1 eV = 1.602×10^{-19} J, elektronivoltti, hiukkasfysiikassa usein käytetty energian yksikkö

$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, yleinen lyhennysmerkintä

$a/bc = \frac{a}{bc}$, laskujärjestyssääntö tässä monisteessa

2. Taustaa

2.1 Newtonin lait

Newton julkaisi kuuluisat mekaniikan lakinsa vuonna 1687. Nämä lait ovat

N I: Jos mikään voima ei vaikuta hiukkaseen niin se jatkaa liikettään vakionopeudella tai pysyy paikallaan.

N II: Hiukkasen kiihtyvyys on suoraan verrannollinen hiukkaseen vaikuttavaan voimaan ja on voiman suuntainen. Kun hiukkasen nopeus on \mathbf{u} ja voima \mathbf{f} , voidaan tämä kirjoittaa kaavana

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}, \quad (1)$$

missä verrannollisuuskerroin m on massa, joka on tutkittavasta hiukkasesta riippuva vakio. Vaihtoehtoinen muoto laille on

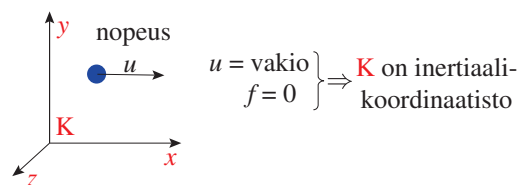
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}, \quad (2)$$

missä on määritelty liikemäärä $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$.

N III: Jos hiukkanen vaikuttaa toiseen hiukkaseen jollakin tietyllä voimalla niin tämä toinen hiukkanen vaikuttaa ensimmäiseen hiukkaseen täsmälleen saman suuruisella mutta vastakkaisuuntaisella voimalla.

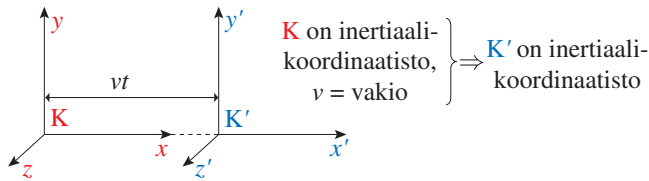
Newtonin lakeihin on tarkemmin tutustuttu mekaniikan kurssissa. Seuraavassa tarkastellaan lähemmin missä koordinaatistossa näitä lakeja kuuluu soveltaa.

Koordinaatistoa jossa Newtonin lait ovat voimassa sellaisenaan kutsutaan *inertiaalikoordinaatistoksi*. Inertiaalikoordinaatiston voi tunnistaa ensimmäisen lain mukaan: jos testihiukkaseen ei vaikuta mikään voima, ja jos se jatkaa liikettään tasaisella nopeudella (tai pysyy paikallaan), on kyseessä inertiaalikoordinaatisto. (Tämän testin toteuttaminen käytännössä voi olla vaikeaa, sillä erityisesti painovoimaa on useimmiten mahdoton poistaa. Käytännön toteutuksen vaikeudesta riippumatta voidaan kuitenkin periaatteellisesti ajatella tällaista mahdollisuutta.)



Oletetaan että koordinaatisto K on inertiaalikoordinaatisto. Oletetaan toinen koordinaatisto K', joka liikkuu tasaisella nopeudella K:n suhteen. Nyt testihiukkanen, joka liikkuu tasaisella nopeudella K:n suhteen, liikkuu tasaisella nopeudella myös K':n suhteen. Tästä johtuen myös K':n täytyy olla

inertiaalikoordinaatisto. Päättellään että kaikki K:n suhteen tasaisella nopeudella liikkuvat koordinaatistot ovat inertiaalikoordinaatistoja, ts. voimme soveltaa Newtonin lakeja missä tahansa niistä.

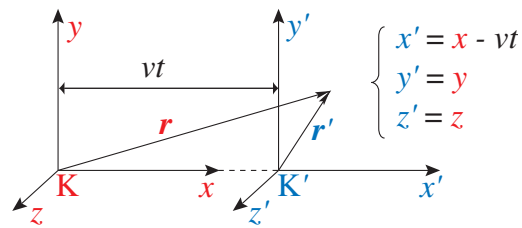


Käytännön kokemuksesta tiedämme että tämä toimii. Esimerkiksi tyynellä merellä tasaisella nopeudella liikkuvan aluksen matkustajat voivat pelata pöytätennistä yhtä vaivattomasti kuin kuivalla maalla. Tekemällä kokeita vain aluksen sisällä ei voi päätellä, onko alus liikkeellä vai levossa.

Newtonin lakien mukaan voidaan kaikki mekaniikan ongelmat (ainakin periaatteessa) ratkaista ilmaisemalla kaikki kappaleiden koordinaatit jossain (vapaasti valittavassa) inertiaalikoordinaatistossa. Näin saatu tulos voidaan sitten ilmaista missä tahansa koordinaatistossa, muuttamalla lasketut tulokset lopuksi tällaiseen koordinaatistoon. Esimerkiksi voimme ratkaista mitä pyörivässä karusellissa pudonneelle kolikolle tapahtuu tarkastelemalla tätä koordinaatistossa, joka on levossa maan suhteen. (Tässä oletetaan että maahan sidottu ns. laboratoriokoordinaatisto on riittävällä tarkkuudella inertiaalinen.)

Vaihtoehtoisesti on kuitenkin mahdollista myös käyttää koordinaatistoa, joka on kiihtyvässä liikkeessä inertiaalikoordinaatistoon nähden. Esimerkiksi voidaan käyttää pyörivään karuselliin kiinnitettyä koordinaatistoa. Tällaisesta koordinaatistosta nähtynä hiukkanen on kiihtyvässä liikkeessä vaikka inertiaalikoordinaatistossa $\mathbf{f} = 0$. Tässäkin tapauksessa voidaan käyttää Newtonin lakeja, jos samalla muutetaan voiman määritelmää: inertiaalikoordinaatistossa vaikuttavaan voimaan pitää lisätä hitausvoima, joka aiheutuu koordinaatiston kiihtyvyydestä. Esimerkkeinä ovat keskipakovoima ja Coriolis-voima, joita on tutkittu mekaniikan kursseissa.

Tutkitaan vielä tarkemmin siirtymistä kahden inertiaalikoordinaatiston välillä. Tämä tapahtuu Newtonin mekaniikassa *Galilein koordinaatistomuunnoksen* avulla. Olkoot K ja K' kaksi inertiaalikoordinaatistoa, joiden akselit ovat yhdensuuntaiset. Liikkukoon koordinaatisto K' koordinaatiston K suhteen tasaisella nopeudella \mathbf{v} positiivisen x -akselin suuntaan. Valitaan myös että koordinaatistojen origot yhtyvät hetkellä $t = 0$.



Hiukkasen paikkaa voidaan nyt kuvata kummissakin koordinaatistossa. Kuvasta päätellään että eri koordinaatistoissa mitatut koordinaatit saadaan toisistaan kaavoilla

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (3)$$

Tämä Galilein koordinaatistomuunnos voidaan esittää myös vektorimuodossa $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$.

Esimerkki 1. Bussin keulaan kiinnitetty koordinaatisto K' ohittaa tasaisella nopeudella 14 m/s pysäkkiin kiinnitetyn koordinaatiston K ajanhetkellä $t = 0$. Jussi seisoo pysäkillä paikassa $x = 2$ m. Mikä on hänen sijaintinsa bussin koordinaatistossa hetkellä $t = 3$ s? Lasketaan ensimmäisestä kaavasta (3) $x' = x - vt = 2 \text{ m} - 14 \text{ m/s} \cdot 3 \text{ s} = -40 \text{ m}$. ■

Esimerkki 2. Anne istuu paikalla $x' = -4$ m bussin koordinaatistossa. Mikä on hänen paikkansa ajanhetkellä $t = 3$ s pysäkin koordinaatistossa? Ratkaistaan ensimmäisestä kaavasta (3) $x = x' + vt = -4 \text{ m} + 14 \text{ m/s} \cdot 3 \text{ s} = 38 \text{ m}$. ■

Tutkitaan seuraavaksi millaiset nopeudet hiukkaselle mitataan eri inertiaalikoordinaatistoissa. Kappaleen nopeus saadaan derivoimalla sen paikkakoordinaatteja ajan suhteen, $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ koordinaatistossa K ja $\mathbf{u}' = d\mathbf{r}'/dt$ koordinaatistossa K'. Derivoimalla yhtälöitä (3) ajan suhteen ja ottamalla huomioon että v on vakio saadaan nopeuskomponenttien Galilein muunnosyhtälöt

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - v \\ u'_y &= u_y \\ u'_z &= u_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Myös nämä voidaan esittää vektorimuodossa $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Esimerkki. Hannu kävelee bussissa nopeudella 2 m/s keulaa kohti. Mikä on hänen nopeutensa pysäkin koordinaatistossa? Identifioidaan $u'_x = 2$ m/s. Ratkaistaan ensimmäisestä kaavasta (4) $u_x = u'_x + v = 2 \text{ m/s} + 14 \text{ m/s} = 16 \text{ m/s}$. ■

Tutkitaan vielä kiihtyvyyksiä eri inertiaalikoordinaatistoissa. Kappaleen kiihtyvyys saadaan derivoimalla sen nopeutta ajan suhteen, $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ koordinaatistossa K ja $\mathbf{a}' = d\mathbf{u}'/dt$ koordinaatistossa K'. Derivoimalla yhtälöitä (4) saadaan

$$a'_x = a_x$$

$$\begin{aligned} a'_y &= a_y \\ a'_z &= a_z, \end{aligned} \quad (5)$$

eli kiihtyvyyks molemmissa koordinaatistoissa on sama, vektorimuodossa $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$.

Newtonin II laki (1) sanoo

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{f}. \quad (6)$$

Koska kiihtyvyyks \mathbf{a} on sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa, täytyy myös voiman \mathbf{f} olla riippumaton valitusta inertiaalikoordinaatistosta.

Voimalla \mathbf{f} voi olla monia syitä: painovoima, tukivoima, kitkavoima, sähkövoima, magneettivoima jne. Tarkastellaan tässä vain painovoimaa. Newtonin painovoimateorian mukaan kahden kappaleen, joiden massat ovat m_1 ja m_2 ja paikat \mathbf{r}_1 ja \mathbf{r}_2 , välillä vaikuttaa vetovoima jonka suuruus

$$f = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \quad (7)$$

missä $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ on gravitaatiovakio.

Siirryttäessä inertiaalikoordinaatistosta toiseen, muuttuvat hiukkasten paikat \mathbf{r}_1 ja \mathbf{r}_2 Galilein muunnoksen mukaan kuten kaavoissa (3). Näiden erotus $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ei kuitenkaan muutu. Siksi saadaan kaavasta (7) että gravitaatiovoima on riippumaton koordinaatistosta. Siis kaavan (6) yhteydessä saatu vaatimus toteutuu.

Newtonin lakien perusteella pystytään hyvin tarkasti kuvaamaan makroskooppisten kappaleiden liikkeitä maanpäällisissä olosuhteissa, aurinkokunnan kappaleita jne., joiden nopeudet ovat pieniä valon nopeuteen verrattuna. Jatkossa tullaan havaitsemaan että Newtonin teoria on kuitenkin riittämätön kun tarkasteltavien kappaleiden nopeus lähestyy valon nopeutta.

2.2 Sähkömagnetismi

Sähkömagnetismin teoria voidaan kompaktisti ilmaista käyttäen Maxwellin yhtälöitä, jotka James Clerk Maxwell esitti vuonna 1861:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \quad (11)$$

Nämä yhtälöt määräävät miten sähkökenttä $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ja magneettikenttä $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ käyttäytyvät. Yhtälöissä esiintyy lisäksi varaustiheys ρ , sähkövirrantiheys \mathbf{j} ja kaksi vakiota ϵ_0 ja μ_0 . Maxwellin yhtälöitä täydentää Lorentz-voiman lauseke

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (12)$$

joka antaa sähkövaraukseen q kohdistuvan voiman. Maxwellin yhtälöt pyritään johtamaan ja niiden monia seurauksia tarkastellaan sähkömagnetismin kurssilla. Tässä vaiheessa ei ole tarkoituksaan yrittää niitä ymmärtää. Todetaan vain että tällaiset yhtälöt ovat olemassa, ja että yksi niiden ratkaisu on etenevä aalto.

Etsitään yhtälöiden (8)-(11) ratkaisua tyhjiössä, missä ei ole varauksia eikä sähkövirtoja, $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Kokeillaan yritettä

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \hat{\mathbf{y}} f(x - ct) \\ \mathbf{B} &= B_0 \hat{\mathbf{z}} f(x - ct). \end{aligned} \quad (13)$$

Tässä $\hat{\mathbf{y}}$ ja $\hat{\mathbf{z}}$ ovat y - ja z -akselien suuntaiset yksikkövektorit ja f on mielivaltainen jatkuva ja derivoituva funktio. Huomataan että yrite riippuu paikasta ja ajasta vain kombinaatiossa $x - ct$. Tällainen yrite esittää x -akselin suuntaan nopeudella c etenevää aaltoa, riippumatta funktion f muodosta. [Perustelu: siirrytään nopeudella c liikkuvaan koordinaatistoon, jossa kaavan (3) mukaan $x' = x - ct$. Siten $f(x - ct) = f(x')$, siis K' :ssa f on levossa (ei riipu ajasta). Siten $f(x - ct)$ etenee nopeudella c K :ssa.] Seuraavaksi sijoitetaan yrite (13) Maxwellin yhtälöihin (8)-(11). Todetaan että nämä kaikki toteutuvat niin, että kun vaaditaan $E_0 \neq 0$, saadaan

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (14)$$

Lisäksi saadaan ehto E_0 :n ja B_0 :n välille, laske se harjoitustehtävänä.

Perustuen aikansa mittauksiin Maxwell laski kaavasta (14) aallon nopeudeksi 310 740 km/s. Hän vertasi sitä valolle mitattuun nopeuteen 314 858 km/s. Ottaen huomioon mittausepä tarkkuuden, nämä tulokset ovat samat. Maxwell totesi: "Voimme tuskin välttyä siltä päätelmältä että valo koostuu värähtelyistä samassa väliaineessa joka aiheuttaa sähköiset ja magneettiset ilmiöt". Tämä on mielestäni yksi teoreettisen fysiikan hienoimpia tuloksia: pystyttiin päättelemään että valo, jolla aiemmin ei ajateltu olevan mitään tekemistä sähköisyyden tai magnetismin kanssa, osoittautuikin olevan seurausta näistä.

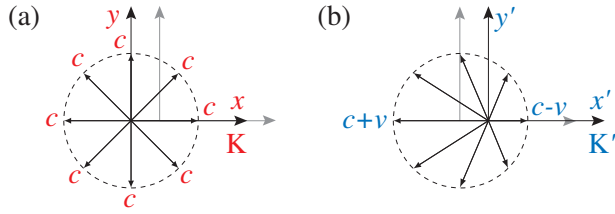
2.3 Sähkömagnetismi ja Galilein muunnos

Siitä että Maxwellin yhtälöt määräävät valon nopeuden seuraa kuitenkin ongelma. Galilein muunnoksen (4) perusteella tiedämme, että nopeus riippuu havaitsijasta. Jos valolle mitataan nopeus c yhdessä inertiaalikoordinaatistossa, se ei ole sama toisessa.

Käyttäen koordinaatistoja K ja K' kuten edellä, oletetaan että u on valon nopeus koordinaatistossa K ja että se on vakio c , siis $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = c^2$. Silloin kaavan (4) mukaan valon nopeus \mathbf{u}' koordinaatistosta K' toteuttaa yhtälön

$$(u'_x + v)^2 + u'^2_y + u'^2_z = c^2. \quad (15)$$

Erikoistapauksena tästä nähdään että K' :n liikenopeuden v suunnassa valon nopeus on $c - v$ ja sitä vastakkaisessa suunnassa $c + v$.



Kuvassa katkoviivalla on merkitty ympyrä, jolle valonsäteet ovat saapuneet ajanhetkellä t kun ne ovat lähteneet koordinaatistojen origosta hetkellä $t = 0$, jolloin origot yhtyvät. (a) Koordinaatistosta K nähtynä valonsäteet kulkevat joka suuntaan samalla nopeudella c . (b) Koordinaatistosta K' nähtynä valonsäteiden nopeus Galilein muunnoksen mukaan noudattaa kaavaa (15).

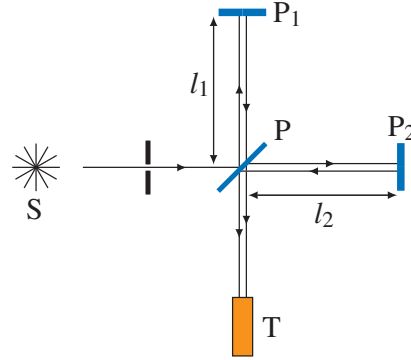
Näyttäsi siis siltä, että valon nopeus ei voi olla vakio eri inertiaalikoordinaatistoissa, vaan ainoastaan yhdessä sellaisessa, ja muissa valon nopeus riippuisi sen kulkusuunnasta. Näin ajateltiin 1800-luvulla koska ei nähty olevan mitään muuta vaihtoehtoa.

Miksi valon nopeus olisi vakio vain yhdessä koordinaatistossa? Tässä voi verrata valoa ääniaaltoihin, jotka ovat esim. ilmassa eteneviä värähtelyjä. Niiden nopeus luonnollisestikin on vakio eri suuntiin vain siinä koordinaatistossa, missä valo on levossa. Ajateltiin että valo muistuttaisi ääniaaltoja siinä, että sekin olisi värähtelyjä jossain väliaineessa. Silloin olisi luonnollista, että valon nopeus olisi vakio vain siinä inertiaalikoordinaatistossa, jossa tämä väliaine on levossa. Tällaista hypoteettista väliainetta alettiin kutsua *eetteriksi*. Koska Maxwellin yhtälöt johtivat valon vakionopeuteen, oli myös oletettava, että nämä yhtälöt ovat voimassa ainoastaan eetterin lepokoordinaatistossa. Koska valo näytti kulkevan myös näennäisessä tyhjiössä, täytyi eetterin olla kaikkialla. (Myös Maxwell oletti tällaisen väliaineen, kuten ilmenee edellä esitetystä lainauksesta.)

Oltiin siis päädytty siihen, että on olemassa kaikkialle levittäytynyt väliaine niin, että valon nopeus olisi täsmälleen sama kaikkiiin suuntiin vain sen lepokoordinaatistossa. Olisi tietysti kiinnostavaa määrittää tuo absoluuttisessa levossa oleva koordinaatisto. Ilmeisesti Maa ei voisi olla levossa sen suhteen koska Maa kiertää Aurinkoa. Mutta voisiko Aurinkokaan olla levossa sen suhteen? Asian voisi selvästikin saada selville mittaamalla valon nopeutta eri suuntiin. Ongelmana on kuitenkin valon suuri nopeus. Jotta erotettaisiin maan nopeus eetteriin nähden v , ei virhe valon nopeuden mittauksessa saa olla huomattavasti suurempi kuin v .

2.4 Michelsonin ja Morleyn koe

Michelsonin vuonna 1881 suorittamassa ja Michelsonin ja Morleyn v. 1887 uusimassa kokeessa pyrittiin määrittämään maan ratanopeus eetterin suhteen. Periaatteena oli verrata maan rataliikkeen suunnassa ja sitä vastaan kohtisuorassa suunnassa kulkevien valonsäteiden nopeuksia valon interferenssin avulla.



Laboratoriossa levossa olevasta lähteestä S tuleva valonsäde jakautuu puoliläpäisevällä peilillä P kahteen osaan. Peililtä P heijastunut valo ohjautuu peilille P_1 ja peilin P läpäissyt valo peilille P_2 . Peilit P_1 ja P_2 heijastavat valon takaisin peiliin P . Osa kumpaakin tietä kulkeneesta valosta tulee teleskooppiin T , missä eri teitä kulkeneiden valonsäteiden interferenssi voidaan havaita. Interferenssin oletettiin riippuvan eri teitä kulkeneiden säteiden sekä matkaerosta että erisuuruudesta nopeudesta.

Tarkastellaan aluksi peilin P_2 kautta kulkevaa valonsädettä ja oletetaan, että S - P - P_2 on maan rataliikkeen suunnassa. Kun maan nopeus eetterin suhteen on v , niin valon nopeus on $c - v$ suunnassa P - P_2 ja $c + v$ suunnassa P_2 - P kuten edellä todettiin. (K on eetterin lepokoordinaatisto, K' maahan kiinnitetty koordinaatisto.) Peilin P_2 ollessa etäisyydellä l_2 peilistä P , edestakaiseen matkaan P - P_2 - P valolta kuluu aika

$$t_2 = \frac{l_2}{c - v} + \frac{l_2}{c + v} = \frac{2cl_2}{c^2 - v^2} = \frac{2l_2\gamma^2}{c},$$

missä

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (16)$$

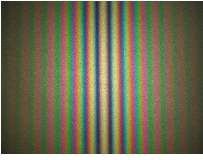
Peilin P_1 kautta kulkevalle säteelle $u'_x = 0 = u'_z$ kaavassa (15), joten sen nopeus on $|u'_y| = \sqrt{c^2 - v^2}$. Säteen edestakaiseen matkaan P - P_1 - P käyttämä aika on

$$t_1 = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_1}{c}\gamma.$$

Eri reittejä kulkeneiden säteiden aikaero on

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\gamma}{c}(\gamma l_2 - l_1).$$

mikä aiheuttaa interferenssin teleskoopissa. Koska hieman vinosti tulleilla säteillä on hieman eri matka, nähdään teleskoopissa interferenssijuovia. (kuva: [Wikipedia](#))



Jatketaan koetta kiertämällä laitteistoa 90° siten, että peiliin P_1 kulkeva säde etenee maan rataliikkeen suuntaan. Vastaavilla laskuilla kuin edellä saadaan aikaeroksi

$$\Delta \bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \frac{2\gamma}{c}(l_2 - \gamma l_1).$$

Laitteiston kiertämisen pitäisi siirtää interferenssijuovia määrällä, joka on suoraan verrannollinen aikojen Δt ja $\Delta \bar{t}$ erotukseen

$$\Delta = \Delta t - \Delta \bar{t} = \frac{2\gamma}{c}(\gamma - 1)(l_1 + l_2).$$

Siirtymän suuruus verrattuna interferenssijuovien etäisyyteen on

$$S = \frac{\Delta}{T} = \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda} \gamma(\gamma - 1), \quad (17)$$

missä $T = \lambda/c$ on värähdysaika ja λ valon aallonpituus.

Pienten nopeuksien ($v \ll c$) kyseessä ollen kerroin γ voidaan approksimoida lausekkeella

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (18)$$

(Tässä on käytetty hyväksi Taylorin sarjaa, katso liite A.) Suurelle S saadaan

$$S \approx \frac{(l_1 + l_2)v^2}{\lambda c^2}. \quad (19)$$

Michelson ja Morley käyttivät laitteistoa, jolle $l_1 + l_2 \approx 22$ m. Jos käytetyn valon aallonpituus on 5.5×10^{-7} m ja v :n oletetaan olevan maan ratanopeuden suuruusluokkaa ($v \approx 30$ km/s), saadaan yhtälöstä (19) $S \approx 0.4$. Näin suuri interferenssijuovien suhteellinen siirtymä olisi varmuudella havaittu. Siirtymää ei kuitenkaan havaittu alkuperäisissä kokeissa eikä myöhemminkään koetta uusittaessa.

Oltiin siis päätelty että eetteri täytyi olla olemassa mutta miten Maa olisi voinut olla levossa sen suhteen? Seuraavassa luetellaan muutamia tämän ongelman selitysyhteyksiä ja niiden heikkouksia:

1. Maa kuljettaa eetterin mukanaan.

Tämä on selitys, jota Michelson itse ehdotti. Tähtivalon aberraatio, joka havaittiin jo 1729, osoittaa kuitenkin selityksen vääräksi. Aberraatiolla ymmärretään tähtien aseman näennäistä siirtymistä vuodenaikojen mukaan pitkin ympyränkehää, jonka näkökulma on $41''$. ($1'' = 1$ kaarisekunti $= \frac{1}{3600}$ astetta.) Siirtyminen johtuu maan rataliikkeestä. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi

suoraan maan ratatason yläpuolella olevaa tähteä. Kun sen valo kulkee siihen suunnatun l -pituisen kaukoputken läpi, siirtyy kaukoputki maan rataliikkeen suuntaan matkan $s = vt = vl/c$. Jotta tähti nähtäisiin, on putkea kallistettava kulma α , jonka suuruus on noin $s/l = v/c \approx 10^{-4}$ rad. Kuuden kuukauden kuluttua maan rataliike on vastakkaissuuntainen ja aberraation suunta siten myös vastakkainen. Kokonaisaberraatiokulma $2\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$ rad $= 41''$ on erinomaisen hyvin sopusoinnussa havaintojen kanssa. Valon aberraatiosta voidaan päätellä, ettei eetteri kulje maan mukana. Mikäli se kulkisi, niin eetteri olisi levossa maan suhteen, jolloin kaukoputkea ei tarvitsisi kallistaa eikä mitään aberraatiota myöskään havaittaisi.

2. Kaikki kappaleet kutistuvat liikesuunnassaan tekijällä $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Tämä Lorentzin esittämä oletus selittäisi Michelsonin ja Morleyn kokeen tuloksen. Pelkästään sellaisenaan oletus on kuitenkin ristiriitainen, kuten myöhemmin tullaan näkemään.

3. Sähkömagnetismin teoria on virheellinen.

Useimmat "korjatuista" teorioista perustuvat oletukselle, että valonnopeus on c valolähteen suhteen ja on riippumaton sen väliaineen liiketilasta, jonka läpi valo kulkee. Tällaisia teorioita kutsutaan emissioiteorioiksi. Koska Michelsonin ja Morleyn kokeessa sekä valolähde että havaitsija ovat maan lepokoordinaatistossa, niin emissioiteoriat selittävät kokeen lopputuloksen automaattisesti. Emissioiteoriat on kuitenkin voitu kokeellisesti kumota. Ensiksikin, Michelsonin ja Morleyn koe on suoritettu auringonvaloa käyttäen eikä mitään interferenssijuovien siirtymistä havaittu. Toisaalta, tutkittaessa nopeiden pionien hajoamista, on syntyvän säteilyn nopeuden todettu olevan riippumaton hajoavien hiukkasten nopeudesta. Samaan johtopäätökseen valonnopeuden riippumattomuudesta valolähteen nopeudesta on tultu myös kaksoistähtihavaintojen perusteella.

2.5 Ongelman ratkaisu

Ongelma oli siis että Galilein muunnoksen perusteella valon nopeus voi olla vakio vain yhdessä koordinaatistossa, mutta vaikka maan täytyi liikkua sen suhteen, tätä liikettä ei havaittu. Ratkaisun ydin on että tässä päättelyssä oli hiljaisesti oletettu että aika on absoluuttinen eli kaikille havaitsijoille sama. Einsteinin suuri oivallus oli, että kun tästä oletuksesta luovutaan, koko ongelma häviää. Hyvin lyhyesti: osoittautuu että Galilein muunnosta täytyy korjata. Tämän seurauksena valon nopeus on vakio ja Maxwellin yhtälöt pätevät kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Mitään eetteriä ei tarvita.

Einstein esitti teoriansa loogisesti lähtemällä liikkeelle kahdesta peruspostulaatista. Nämä ovat

1) Kaikki inertiaalikoordinaatit ovat kaikkien fysiikan lakien suhteen samanarvoisia.

2) Valonnopeus tyhjiössä on vakio c .

Ensimmäistä peruspostulaattia kutsutaan *suhteellisuuseriaatteeksi*. Koska mitkään koetulokset eivät tukeneet absoluuttisen lepokoordinaatiston olemassaoloa, Einstein hylkäsi koko eetterikäsitteen asettamalla kaikki inertiaalikoordinaatit tasavertaiseen asemaan.

Valonnopeuden vakioisuuden seurauksena on, että *aika riippuu havaitsijan liiketilasta*. Koska nopeus on aikayksikössä kuljettu matka ja matka on käytetystä koordinaatistosta riippuva, on välttämätöntä, että myös aika on suhteellista. Näin suhteellisuusteorian toinen peruspostulaatti "romuttaa" Newtonin mekaniikan absoluuttisen ajan käsitteen sekä Galilein muunnosyhtälöt.

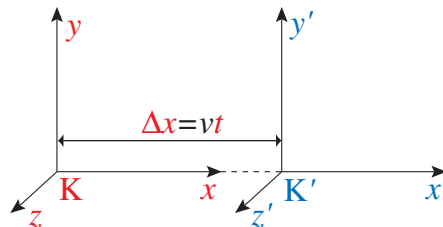
Toinen peruspostulaatti antaa mahdollisuuden eri paikoissa ja eri liiketiloiissa olevien kellojen osoittamien aikojen keskinäiseen vertailuun. Vertailu voidaan suorittaa eri suuntiin yhtä suurella nopeudella etenevillä valosignaaleilla.

Peruspostulaattien lisäksi käytetään sellaisia luonnollisia oletuksia kuin että avaruus ja aika ovat homogeenisia ja avaruus on isotrooppinen. Homogeenisuus tarkoittaa että mikään paikka tai aika ei ole erityisasemassa (nämä tavallaan sisältyvät postulaattiin 1). Isotrooppisuus tarkoittaa että kaikki avaruuden suunnat ovat yhdenvertaisia.

3. Lorentzin koordinaatistomuunnos

3.1 Muunnoksen johto

Pyrkimyksenä on suhteellisuusteorian peruspostulaattien avulla löytää muunnosyhtälöt kahden inertiaalikoordinaatiston välille. Kuten edellä, oletetaan koordinaatit K ja K' siten että vastinakselit ovat yhdensuuntaiset, koordinaatistojen origot yhtyvät hetkellä $t = t' = 0$ sekä että koordinaatiston K' liike tapahtuu yhteisen x - ja x' -akselin suunnassa.



Jotain mikä tapahtuu tietyssä paikassa tiettyyn aikaan kutsutaan *tapahtumaksi*. Olkoot jonkin tapahtuman koordinaatit x, y, z ja t koordinaatistossa K , sekä x', y', z' ja t' koordinaatistossa K' . Tarkastellaan aluksi etäisyyksiä liikesuuntaan nähden kohtisuorilla suunnilla. Havaitisijoilla K ja K' ajatellaan olevan metrimitat, jotka on todettu yhtä pitkiksi vertaamalla niitä levossa toisiinsa ja jotka on asetettu y - ja y' -akselien suuntaisiksi. Mikäli olisi $y' \neq y$, niin hetkellä, jolloin mitat ohittavat toisensa, olisi toinen niistä toista lyhyempi. Oletetaan, että K :n mielestä K' :n mitta, joka liikkuu, on hänen omaansa lyhyempi. Vastaavasti (avaruuden isotrooppisuuden perusteella) K' :n mielestä K -koordinaatisto liikkuu ja siihen kiinnitetty mitta on lyhyempi. Koska mittojen vertailu tapahtuu samassa pisteessä samalla ajanhetkellä (mittojen ohitushetkellä), on ainoa ratkaisu, että $y' = y$. Vastaavasti $z' = z$.

Edellä jo päätelimme, että $t' \neq t$. On luonnollista olettaa, että uudet paikka- ja aikakoordinaatit riippuvat alkuperäisistä paikka- ja aikakoordinaateista eli

$$\begin{aligned} x' &= x'(x, t) \\ t' &= t'(x, t). \end{aligned} \quad (20)$$

Seuraavaksi päättelemme että näiden funktioiden täytyy olla lineaarisia, esim. $x'(x, t) = A_1x + B_1t + C$. Jos näin ei olisi, se tarkoittaisi että avaruus ei olisi homogeeninen, ts. tyhjän avaruuden yksi paikka olisi erilainen kuin toinen. Vastaavasti ajan suhteen. Koska lisäksi oletimme, että koordinaatistojen origot yhtyvät hetkellä $t = t' = 0$, myös vakiotermit häviävät, jolloin

$$\begin{aligned} x' &= A_1x + B_1t \\ t' &= A_2x + B_2t. \end{aligned} \quad (21)$$

Kertoimet A_1, A_2, B_1 ja B_2 voidaan määrittää seuraavista ehtoista:

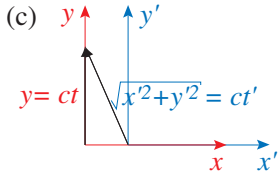
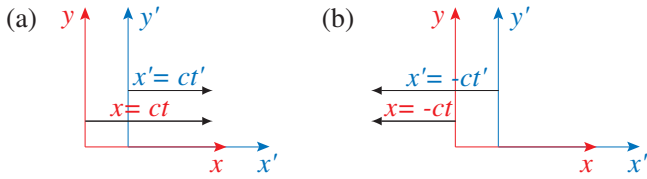
1° K' :n nopeus K :n suhteen on v .

2° Valonnopeus c on sama molemmissa koordinaatistoissa.

Ensimmäisestä ehdosta saadaan että kun $x' = 0$ täytyy olla $x = vt$. Sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön (21) saadaan $(A_1v + B_1)t = 0$. Koska tämän täytyy toteutua kaikilla t saadaan $B_1 = -vA_1$. Muunnos (21) saa siis muodon

$$\begin{aligned} x' &= A_1(x - vt) \\ t' &= A_2x + B_2t. \end{aligned} \quad (22)$$

Jatkossa sovelletaan ehtoa 2° hetkellä $t = t' = 0$ origosta lähtevään valoon. Tutkitaan ensin positiivisen x -akselin suuntaan etenevää valoa. Ehto 2° sanoo että jos $x = ct$ niin myös $x' = ct'$. Tämä on havainnollistettu kuvassa kohdassa (a).



Sijoittamalla yhtälöihin (22) saadaan

$$c^2A_2 + cB_2 = (c - v)A_1. \quad (23)$$

Seuraavaksi sovelletaan ehtoa negatiivisen x -akselin suuntaan etenevään valoon, mikä antaa ehdon että jos $x = -ct$ niin myös $x' = -ct'$ (kuvan b-kohta).

Sijoittamalla yhtälöihin (22) saadaan

$$c^2A_2 - cB_2 = -(c + v)A_1. \quad (24)$$

Yhtälöparista (23)-(24) saadaan ratkaistua $A_2 = -(v/c^2)A_1$ ja $B_2 = A_1$. Muunnos (22) saa siis muodon

$$\begin{aligned} x' &= A_1(x - vt) \\ t' &= A_1\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Kertoimen A_1 määrittämiseksi käytämme ehtoa 2° vielä yleiseen suuntaan etenevään valoon. Ehto 2° sanoo että $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ silloin kun $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$. Sijoitetaan jälkimmäiseen kaavat (25), $y' = y$ ja $z' = z$. Pienellä laskulla saamme ehdon siihen muotoon, että jos $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ niin myös

$$A_1^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (c^2t^2 - x^2) - y^2 - z^2 = 0. \quad (26)$$

y -akselin suuntaisen valon erikoistapauksessa ($x = 0$, $y = ct$, $z = 0$, kuvan c-kohta) saadaan tästä ehto $A_1^2(1 - v^2/c^2) - 1 = 0$. Tästä saadaan

$$A_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (27)$$

Vain plusmerkki kelpaa, koska muuten ajan suunta vaihtuisi muunnoksissa. Nähdään myös että välttämättä $|v| < c$ kun vaaditaan että A_1 :n täytyy olla äärellinen reaalityyppinen.

(Vaikka edellä olevassa johdossa käytettiin hyväksi ehtoa 2° vain kolmeen suuntaan kulkevalle valolle, voidaan helposti nähdä että muista suunnista ei tule mitään lisäehtoja. Siis ehto 2° toteutuu kaikkiin suuntiin kulkevalle valolle.)

Olemme näin johtaneet *Lorentzin koordinaatistomuunnoksen*:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (28)$$

missä $|v| < c$.

3.2 Lorentzin muunnoksen tarkastelua

Tutkitaan ensimmäiseksi tapausta missä $v \ll c$.

Matemaattisesti voidaan ajatella että $c \rightarrow \infty$. Totea että tässä rajatapauksessa Lorentzin muunnos (28) on identtinen Galilein muunnoksen (3) kanssa ja $t' = t$. Siis valoa huomattavasti hitaamman liikkeen tapauksessa Lorentzin muunnos redusoituu Galilein muunnokseksi.

Osoita että ratkaisemalla muunnoksesta (28) x , y , z ja t saadaan

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Tämä on Lorentz-muunnoksen (28) käänteismuunnos.

Todetaan että samaan tulokseen olisi tultu soveltamalla alkuperäistä Lorentz-muunnosta K' :n suhteen nopeudella $-v$ liikkuvaan K :hon.

Olkoot kahden tapahtuman 1 ja 2 koordinaatit (x_1, y_1, z_1, t_1) ja (x_2, y_2, z_2, t_2) koordinaatistossa K . Koordinaatistossa K' samoja tapahtumia merkitään vastaavasti pilkutettuina (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) ja (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) . Merkitään

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta x' = x'_2 - x'_1, \quad (30)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1, \quad (31)$$

jne. y ja z -koordinaateille. Tällöin voidaan todeta suoralla laskulla että myös nämä erotukset toteuttavat samat Lorentz-muunnokset (28) ja (29) eli

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \\ \Delta t' &= \frac{\Delta t - (v/c^2)\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\end{aligned}\quad (32)$$

ja sen käänteismuunnos

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \Delta y &= \Delta y' \\ \Delta z &= \Delta z' \\ \Delta t &= \frac{\Delta t' + (v/c^2)\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}\quad (33)$$

Tämä on seurausta Lorentz-muunnoksen lineaarisuudesta. Osoita harjoitustehtävänä että "intervallin neliö", joka määritellään lausekkeella

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \quad (34)$$

säilyy muuttumattomana Lorentz-muunnoksessa, ts.

$$\begin{aligned}c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \\ = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.\end{aligned}\quad (35)$$

[Tämän erikoistapaus $(\Delta s)^2 = 0$ mainittiin jo edellä.]

Samanaikaisuuden suhteellisuus

Koska y - ja z -koordinaatit eivät muutu Lorentzin muunnoksessa (28), keskitytään seuraavassa vain koordinaatteihin x ja t .

Tarkastellaan koordinaatistossa K' samanaikaisia tapahtumia, $\Delta t' = 0$. Niiden aikaväli koordinaatistossa K [kaavasta (33)] on

$$\Delta t = \frac{v\Delta x'}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Tämä ei häviä jos $\Delta x' \neq 0$. Näin ollen eripaikkaisten tapahtumien samanaikaisuus on koordinaatistosta riippuva käsite.

Esimerkki. Jos oletetaan $\Delta x' = 1$ m ja $v = 0.5c$, saadaan $\Delta t = 1.9$ ns.

Pituuden kutistuminen (kontraktio)

Tarkastellaan x -akselin suuntaista sauvaa, joka on levossa K' :ssa. Sauvan *lepopituus* l_0 on sen tässä koordinaatistossa mitattu pituus $l_0 = \Delta x' = x'_2 - x'_1$, missä x'_1 ja x'_2 ovat

sen päiden koordinaatit. Tarkasteltaessa sauvaa koordinaatistosta K , on luonnollista määrätä sauvan pituus niin, että sen päiden koordinaatit luetaan *samalla ajanhetkellä* K :n mukaan, eli $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$. Olkoot lukemat x_1 ja x_2 . Koordinaatistossa K mitattu sauvan pituus on siis $l = \Delta x = x_2 - x_1$. Muunnoksesta (32) saadaan nyt $l_0 = \Delta x' = l/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ eli

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (36)$$

Lauseke (36) osoittaa, että *liikkuva kappale on kutistunut liikkeensä suunnassa*, $l < l_0$.

Esimerkki. Jos oletetaan $l_0 = 1$ m ja $v = 0.5c$, saadaan $l = 0.87$ m.

Ajan venyminen (dilataatio)

Tarkastellaan kappaletta, johon on kiinnitetty kello. Tämän kellon mittaamaa aikaa τ kutsutaan kappaleen *ominaisajaksi* tai itseisajaksi. (Näin myös kiihtyvässä liikkeessä olevalle kappaleelle.)

Oletetaan että kappale on levossa koordinaatistossa K' . Siis kahdelle tapahtumalle (x'_1, t'_1) ja (x'_2, t'_2) sen historiassa $\Delta x' = 0$ ja ominaisajan erotus $\Delta\tau = \Delta t'$. Koordinaatistossa K mitataan samojen tapahtumien aikaeroksi Δt . Kaavasta (33) saadaan

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (37)$$

Tätä tulosta kutsutaan *ajan venymäksi*. Siis missä tahansa liikkuvassa koordinaatistossa on kappaleen kahden tapahtuman välille mitattu aikaero suurempi kuin kappaleen ominaisaikaero, $\Delta t > \Delta\tau$. Lyhyemmin sanottuna liikkuva kello näyttää jätättävän.

Esimerkki. Jos oletetaan $\Delta\tau = 1$ s ja $v = 0.5c$, saadaan $\Delta t = 1.15$ s.

Esimerkki

Ajan venymistä ja pituuden kutistumista voidaan havainnollistaa kosmisen säteilyn myonien hajonnan mittauksilla. Elektronien kaltaisia mutta niitä noin 200 kertaa raskaampia myoneja syntyy π -mesonien eli pionien hajotessa. Pioneja puolestaan syntyy ylemmissä ilmakerroksissa esim. kahden protonin törmätessä toisiinsa. Myoni on epästabili hiukkanen, jonka puoliintumisaika on $T_0 = 1.5 \mu\text{s}$ hiukkasen lepokoordinaatistossa mitattuna. (Puoliintumisaika on aika jossa keskimäärin puolet alkuperäisistä hiukkasista on hajonnut.) Tarkastellaan esimerkkinä maata kohti korkeudesta $l_0 = 3000$ m nopeudella $v = 0.99c$ lentävää myoniparvea.

(a) Ensimmäkeltä myonit ehtivät puoliintumisajassa kulkea matkan $vT_0 \simeq 450$ m. Näyttäisi siis siltä että suurin osa myoneista hajoaa jo korkealla maan pinnan

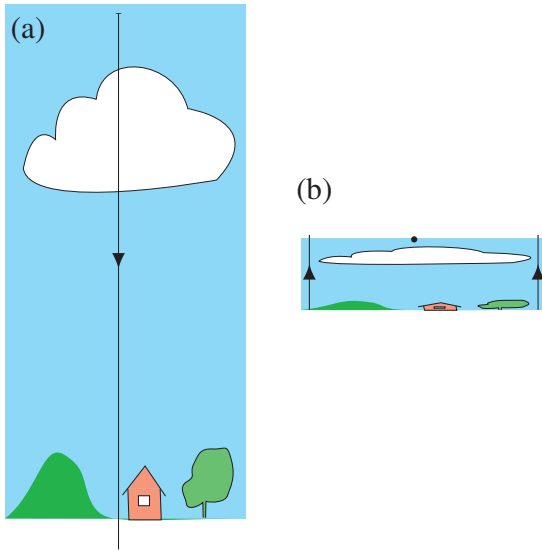
yläpuolella. Puoliintumisaika oli kuitenkin annettu myonien lepokoordinaatistossa. Tätä vastaava aika maan lepokoordinaatistossa on huomattavasti pidempi. Ajan venymäkaavasta (37) saadaan

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 11 \mu\text{s}. \quad (38)$$

Siten myonin puoliintumisajassa kulkema matka on

$$vT \simeq 3200 \text{ m}. \quad (39)$$

Koska tämä on suurempi kuin etäisyys maahan, todetaan että oikeasti yli puolet myoneista saapuu maan pinnalle ennen hajoamistaan.



(b) Yllä oleva tarkastelu oli tehty maan lepokoordinaatistossa. Toinen vaihtoehto on tarkastella asiaa myonien lepokoordinaatistossa. Tässä koordinaatistossa puolet myoneista on hajonnut puoliintumisajassa $T_0 = 1.5 \mu\text{s}$. Tässä koordinaatistossa maa kuitenkin liikkuu myoneja kohden nopeudella v . Siksi etäisyys maahan on kaavan (36) mukaan kutistunut pituudeksi

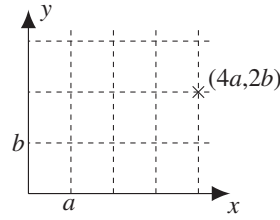
$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq 420 \text{ m}. \quad (40)$$

Nopeudella $v = 0.99c$ lähestyvä maa törmää myoneihin ajassa $l/v \simeq 1.4 \mu\text{s}$. Koska tämä on lyhyempi kuin myonin puoliintumisaika, todetaan että maa törmää myoneihin ennen kuin yli puolet niistä on hajonnut. Molemmissa koordinaatistoissa pääteltiin siis tämä sama lopputulos.

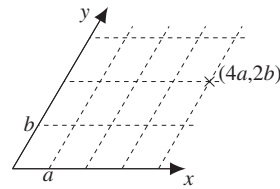
3.3 Geometrinen tulkinta

Koskien ajan venymistä voidaan ihmetellä että jos liikkuva kello 1 jätättää kelloon kelloon 2 nähden, mutta taas kellon 1 lepokoordinaatistosta katsoen kellon 2 pitäisi jätättää. Tämä ja monet muut vastaavat kysymykset on kätevä selvittää käyttäen ns. Minkowskin diagrammeja.

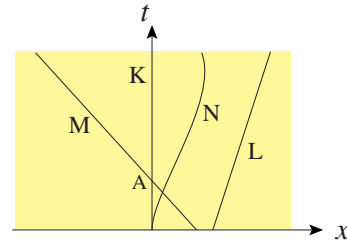
Totutellaan aluksi vinokulmaiseen koordinaatistoon. Normaalisti x - ja y -akselit piirretään toisiaan vastaan kohtisuoriksi.



Tason pisteet voidaan kuitenkin hyvin esittää myös vinokulmaisilla koordinaateilla x ja y . Tason pisteen koordinaattien lukeminen tässä tapauksessa on havainnollistettu kuvassa.

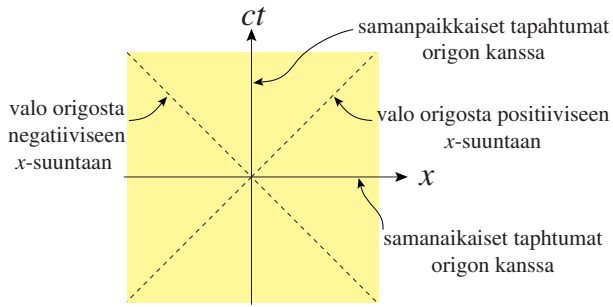


Minkowskin diagrammeissa tarkastellaan tapahtumia x - t tasossa. Tällaisen diagramman pisteet ovat tapahtumia. Kappaleiden liikkeitä kuvaavia viivoja kutsutaan *maailmanviivoiksi*.



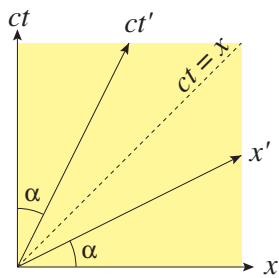
Kuvassa on esimerkkinä kappaleiden K, L, M ja N maailmanviivat: K on levossa, L liikkuu positiivisen x -akselin suuntaan ja M negatiivisen x -akselin suuntaan tasaisella nopeudella ja N on kiihtyvässä liikkeessä. Kappaleet K ja M kohtaavat tapahtumassa A.

Periaatteessa sekä x :n että t :n yksiköt voitaisiin valita vapaasti, esim. 1 m ja 1 s. On kuitenkin käytännöllistä valita akseleiksi x ja ct , jolloin niiden yksiköt voidaan valita samoiksi, esim. 1 m. Huomaa että tätä vastaava aikayksikkö on varsin lyhyt, 3.34 ns (se aika, joka kuluu valolta kulkea 1 m).

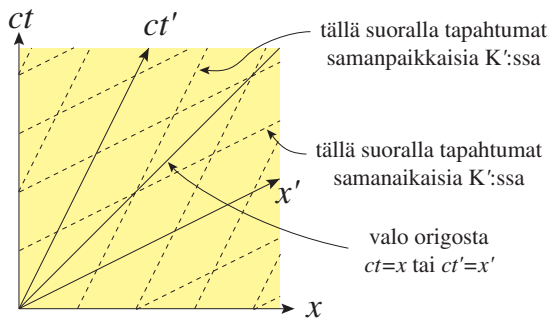


Oheisessa Minkowskin diagrammassa koordinaatiston K samanpaikkaiset tapahtumat sijaitsevat samalla pystyviivalla $x = \text{vakio}$. Samanaikaiset tapahtumat taas sijaitsevat samalla vaakasuoralla viivalla $t = \text{vakio}$. Koska akseleille x ja ct on valittu samat yksiköt, valon etenemistä kuvaavat suorat $x = \pm ct + \text{vakio}$ ovat 45 asteen kulmassa.

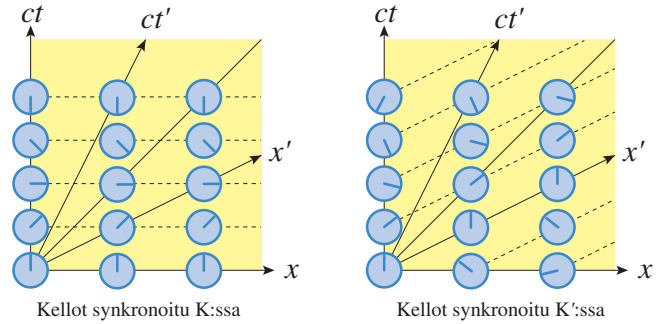
Tarkastellaan Lorentzin muunnosta Minkowskin diagrammissa. Koordinaatiston K' x' -akseli määräytyy ehdosta $t' = 0$. Kaavasta (28) saadaan, että tämä vastaa suoraa $ct = (v/c)x$. Vastaavasti t' -akseli määräytyy ehdosta $x' = 0$, jolle saadaan $ct = (c/v)x$. Nämä akselit ovat kiertyneet akseleista x ja t kulmalla α kohti valon viivaa $ct = x$. Kiertymiskulmalle α saadaan $\tan \alpha = v/c$.



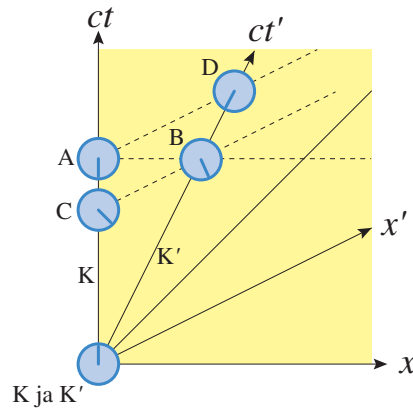
Nyt tapahtumien samanpaikkaisuus sekä aikajärjestys K' -koordinaatistossa saadaan lukemalla tätä vinokulmaista koordinaatistoa.



Seuraavassa kuvassa on vielä havainnollistettu tapahtumien aikojen synkronointi sekä K:ssa että K':ssa.



Seuraavassa kuvassa tutkitaan tapausta missä kummassakin koordinaatistossa K ja K' on yksi levossa oleva kello, jotka kohtaavat ja näyttävät samaa aikaa Minkowskin diagrammin origossa. K näkee tapahtumat A ja B samanaikaisina, ja toteaa että hänen oma kellonsa näyttää enemmän kuin K' :n kello, kuten ajan venymisen mukaan kuuluu. Toisinpäin taas K' näkee tapahtumat B ja C samanaikaisiksi, ja myös hän toteaa että hänen oma kellonsa näyttää enemmän kuin K:n kello, kuten ajan venymisen mukaan kuuluu. Näistä ei synny ristiriitaa sen takia että tapahtumat A ja C eivät ole samat, vaan C on tapahtuman A menneisyyttä.



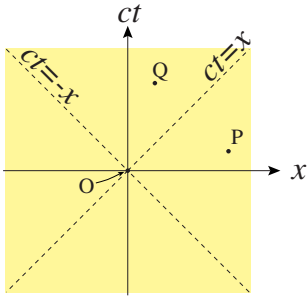
Myös K' kokee että K mittaa hänen menneisyyttään, sillä hänen mielestään A:ta pitäisi verrata D:hen eikä B:hen. Siis molemmat havaintajat toteavat toistensa kellojen jätättävän koska he havaitsevat toistensa menneisyyttä. (Huomautetaan vielä että tässä ei ole kysymys signaaliviiveistä vaan sama tulos saadaan käyttämällä aikaisemman kuvan synkronoituja kelloja ja vertaamalla niitä vain samoissa paikoissa.)

Minkowskin diagrammit ovat erityisen hyödyllisiä kun pyritään ymmärtämään tapahtumien järjestys ajan tai paikan suhteen eri koordinaatistoissa. Sen sijaan tarkat vertailut aika- ja paikkakoordinaateista on varmempi laskea Lorentz-muunnoksesta [kaavat (28) ja (29)] tai, mikäli mahdollista, käyttäen pituuden kutistumisen ja ajan venymän kaavoja [(36) ja (37)].

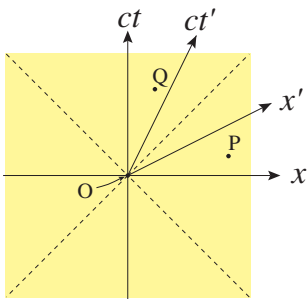
Kausaalisuus

Tarkastellaan Minkowskin avaruuden tapahtumaa P jonka

koordinaateille (x_P, ct_P) on voimassa $x_P > ct_P$, ja $t_P > 0$.

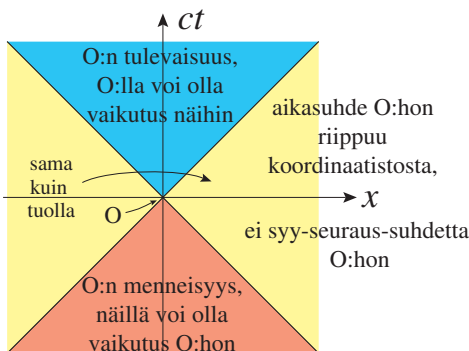


Nyt voidaan löytää nopeus v joka on suurempi kuin $c^2 t_P / x_P$ mutta silti pienempi kuin c . Kun tehdään Lorentz-muunnos koordinaatistoon jonka nopeus on v , asetuu sen x' akseli tapahtuman P ja valoviivan $ct = x$ väliin.



Nähdään että K:ssa P on myöhäisempi kuin origo O (sillä $t > 0$), mutta K':ssa P on aikaisempi kuin origo O (sillä $t' < 0$). Nähdään siis että tapahtuma P voi olla O:hon nähden joko tulevaisuudessa tai menneisyydessä, riippuen siitä missä koordinaatistossa asiaa katsotaan.

Katsotaan seuraavaksi tapahtumaa Q jonka koordinaateille (x_Q, ct_Q) on voimassa $ct_Q > |x_Q|$. Nähdään että missä tahansa inertiaalikoordinaatistossa K' tämä tapahtuma on myöhäisempi kuin O. Näin siksi että x' -akseli on aina rajattu loivemmaksi kuin valoviivat, joten piste Q on aina on x' -akselin yläpuolella). Vastaavalla tavalla päätellään että tapahtumat voidaan luokitella O:n suhteen seuraavasti.



O:n tulevaisuus tarkoittaa tapahtumia, joiden aika kaikissa koordinaatistoissa on myöhempi kuin O:n. Jos O:ssa tapahtuu jotain, esimerkiksi lähetetään signaali,

sillä voi olla vaikutusta näihin tapahtumiin, esim. lamppu syttyy signaalin saapuessa. O:n menneisyys tarkoittaa tapahtumia, joiden aika kaikissa koordinaatistoissa on aikaisempi kuin O:n. Näillä tapahtumilla voi olla vaikutusta O:hon, esimerkiksi O:ssa syttyy lamppu kun signaali aikaisemmasta tapahtumasta saapuu. Näiden alueiden ulkopuolelle jää epämääräisyysalue, jossa tapahtumien aikajärjestys riippuu valitusta koordinaatistosta. Tällaisilla tapahtumilla ei voi olla mitään syy-seuraus-suhdetta (=kausaalisuus) O:n kanssa. Tämä päätellään seuraavasti. Jos tapahtuma P olisi seuraus jostain tapahtumasta O:ssa, edellä olevan mukaan löytyy myös koordinaatisto, jossa P on aikaisempi kuin O. Tässä siis seuraus olisi ennen syytä, mikä ei ole mahdollista. Siis P ei voi olla O:n seuraus, eikä myöskään toisin päin.

Lisäksi päätellään että mikään syy-seuraus-suhde ei voi edetä nopeammin kuin valo. Siis mitään hyödyllistä informaatiota ei voi siirtää valoa nopeammin.

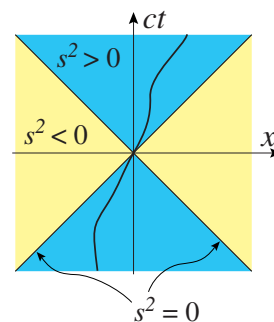
Edellä tutkittiin intervallin neliötä $(\Delta s)^2$ (34).

Verrattaessa yhtä tapahtumaa origoon ($x_2 = x, x_1 = 0$ jne.) ja tarkasteltaessa vain x ja t koordinaatteja se saa muodon

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2. \quad (41)$$

Kaavassa (35) todettiin että tämä on koordinaatistosta riippumaton. Laskemalla s^2 :n arvoja nähdään helposti että sillä on yksinkertainen yhteys edellä tehtyyn tapahtumien luokitteluun:

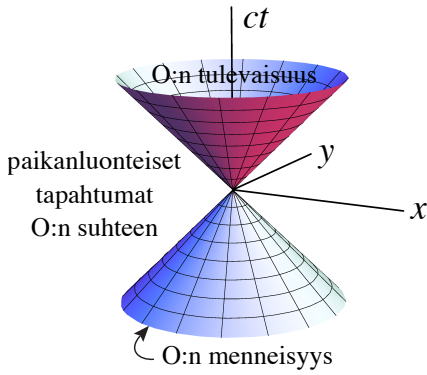
- kun $s^2 > 0$ on tapahtuma origon absoluuttista menneisyyttä tai tulevaisuutta, tapahtumilla voi olla syy-seuraus-suhde, sanotaan että s^2 on *ajanluonteinen*
- kun $s^2 < 0$ riippuu tapahtuman aikajärjestys origoon nähden koordinaatistosta, tapahtumilla ei voi olla syy-seuraus-suhdetta, sanotaan että s^2 on *paikanluonteinen*
- kun $s^2 = 0$ on tapahtuma origon suhteen *valonluonteinen* eli origosta lähtevä valon nopeudella kulkeva signaali juuri saapuu tähän tapahtumaan.



Kuvaan on piirretty erään kappaleen maailmanviiva. Koska sen nopeus $|u| < c$, täytyy maailmanviivan

tangentin kulmakertoimen dct/dx itseisarvo olla suurempi kuin 1 jokaisessa maailmanviivan pisteessä.

Vaikka yllä tarkasteltiin s^2 -suuretta vain $x - ct$ tasossa, samat päätelmät saadaan myös neliulotteisessa $x - y - z - ct$ Minkowskin avaruudessa. Tästä on vaikea piirtää kuvaa, mutta ohessa on kuva kolmiulotteisen $x - y - ct$ -avaruuden *valokartiosta*.



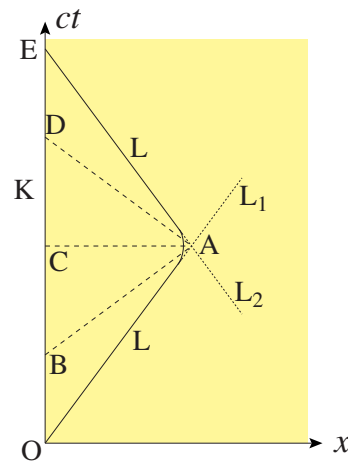
Kaksosparadoksi

Suhteellisuusteoria johtaa moniin tuloksiin, jotka ensi näkemältä vaikuttavat ristiriitaisilta. Usein ongelmien syy on, että ajan suhteellisuus unohtuu. Edellä kuvatut Minkowskin diagrammat ovat usein hyödyllisiä tällaisten ongelmien selvittelyyn. Tarkastellaan tässä esimerkkinä *kaksosparadoksia*.

Kaksosista Kaisa (K) ja Liisa (L) lähtee L suurella nopeudella liikkuvalla aluksella pitkälle avaruusmatkalle. Oletetaan että alus liikkuu tasaisella nopeudella alku-, käännös- ja loppuvaiheen kiihdytysvälejä lukuun ottamatta. Ajan venymäkaavan (37) mukaan L:n kello käy menomatalla K:n mielestä hänen omaa kelloaan hitaammin. Suhteellisuusperiaatteen mukaan voimme päätellä edelleen, että L:n kellon tavoin myös L:n sydämenlyönnit, ajatukset ja kaikki elintoiminnot hidastuvat K:n näkemänä. Liisa ei kuitenkaan huomaa tapahtumien tempossa mitään epätavallista. Mikäli hän huomaisi, hän voisi siitä päätellä liikkuvansa suurella nopeudella, mikä suhteellisuusperiaatteen mukaan on mahdotonta havaita. Koska nopeus esiintyy ajan venymäkaavassa (37) neliöterminä, L:n kello käy myös paluumatkalla K:n kelloa hitaammin. Näin ollen L:n palattua matkalta hän on sisarustaan nuorempi. Mikäli aluksen nopeus olisi lähellä valonnopeutta, sisarusten ikäero olisi todella huomattava.

On ehdotettu että ristiriita syntyi seuraavasti. Tarkastellaan samaa tilannetta alukseen kiinnitetystä L:n koordinaatistosta. Tällöin maapallo ja sen pinnalla oleva K näyttävät tekevän avaruusmatkan. Koska liikkuvan koordinaatiston aika käy lepokoordinaatiston aikaa hitaammin, K olisi L:n mielestä häntä nuorempi matkan jälkeen. Tämä päättely on kuitenkin virheellinen.

Piirrämme kuvatusta tilanteesta avaruusaikadiagrammin. K:n maailmanviiva on maapallon ominaisaika-akselin suuntainen suora. L:n maailmanviiva koostuu avaruusmatkan tapahtumien osalta kahdesta arviolta suorasta L_1 ja L_2 , joista L_1 vastaa meno- ja L_2 paluumatkaa. Suhteellisuusperiaate asettaa inertiaalihavaintajat tasavertaiseen asemaan. K on inertiaalihavaintaja, mutta L, jonka idealisoitukin maailmanviiva koostuu kahdesta suorasta, ei ole. Voimme ajatella havaintajan L korvatuksi kahdella inertiaalihavaintajalla, joista L_1 poistuu maasta ja L_2 lähestyy maata tasaisella nopeudella. Havaintajat K ja L_1 sekä K ja L_2 ovat samanarvoisia. Sen sijaan K ja L eivät ole samassa asemassa, koska L_2 liikkuu L_1 :n suhteen. Ts. mitään oikeaa paradoksia ei ole olemassa. Sisarusten kohdatessa L todella on nuorempi kuin K.



Kaaviosta nähdään että tulos liittyy olennaisesti L:n tekemään käännökseen tapahtuman A luona. Ennen käännöstä L vertaa itseään K:hon joka on tapahtumassa B. Käännöksen aikana L:n oma kello ei paljon ehdi käydä, mutta samalla hänen mielestään K vanhenee todella nopeasti, sillä käännöksen jälkeen hän vertaa itseään K:hon tapahtumassa D.

Kaikki tietävät että kahden paikan välillä voi kulkea reittejä jotka ovat eripituisia. Suhteellisuusteorian mukaan sama koskee myös aikaa: kahden tapahtuman välinen aikaero riippuu kuljetusta reitistä niiden välillä.

3.4 Nopeuden muunnoskaavat

Edellä pääteltiin että kappaleen nopeus ei voi ylittää valon nopeutta. Mutta eikö laskemalla kaksi nopeutta yhteen voisi ylittää valon nopeutta?

Tarkastellaan liikettä, jonka hetkellinen nopeus on $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ koordinaatistossa K ja $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ koordinaatistossa K'. Differentioimalla koordinaattien muunnosyhtälöt (28) saadaan

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (42)$$

$$dy' = dy \quad (43)$$

$$dz' = dz \quad (44)$$

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Nopeus saadaan muodostamalla osamäärä

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - (v/c^2)dx} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}. \quad (45)$$

Vastaavasti tehdään y ja z komponenteille, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Kuten aiemmin, käänteinen muunnos saadaan muuttamalla v :n etumerkki ja vaihtamalla pilkulliset ja pilkuttomat u :t keskenään:

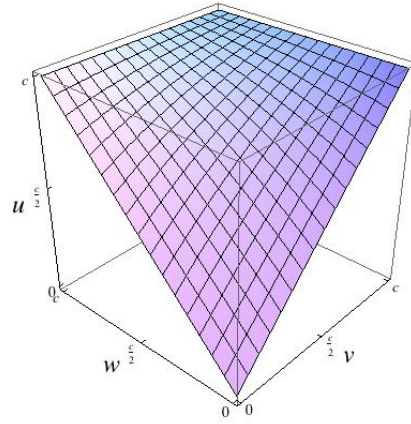
$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_z &= \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Totea että nopeuden muunnoskaavat (46) palautuvat Galilein muunnokseen (4) rajalla $c \rightarrow \infty$.

Tarkastellaan erikoistapauksena vain x -suunnassa tapahtuvaa liikettä. Määrittelemällä $w = u'_x$ voidaan ensimmäinen yhtälöistä (47) kirjoittaa muotoon

$$u = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}. \quad (48)$$

Tämä tunnetaan *suhteellisuusteorian mukaisena nopeuksien yhteenlaskukaavana*, missä nopeudet v ja w yhdistettynä antavat nopeuden u . Tässä nimittäjä antaa poikkeaman Galilein muunnoksen (4) mukaisesta yhteenlaskusta $u = v + w$. Kaava (48) voidaan esittää seuraavalla kuvaajalla.



Kuvasta nähdään että jos $v < c$ ja $w < c$, niin aina myös $u < c$. Ts. lisäämällä toisiinsa alle valon nopeuksia, ei koskaan voida saavuttaa valon nopeutta. Lisäämällä alle valon nopeus valon nopeuteen saadaan valon nopeus. Totea tämä laskemalla suoraan kaavasta (48).

4. Dynamiikkaa

Edellä on tutkittu *kinematiikkaa*. Siinä tarkastellaan kappaleiden liikkeitä, puutumatta siihen mikä liikkeen aiheuttaa. Seuraavaksi tutkitaan *dynamiikkaa*, missä pyritään selvittämään liikkeen syyt.

4.1 Liikemäärä

On havaittu että liikettä voidaan hyvin tarkasti kuvata Newtonin lakien pohjalta kun kappaleiden nopeus on pieni verrattuna valon nopeuteen. Osoittautuu kuitenkin, että kun hiukkasen nopeus lähentelee valon nopeutta, Newtonin teoria ei aivan sellaisenaan enää toimi.

Pienimmillä muutoksilla Newtonin teoriaan selvittää, kun lausutaan Newtonin lait uudestaan seuraavassa muodossa.

N I: Jos mikään voima ei vaikuta hiukkaseen niin se jatkaa liikettään vakionopeudella tai pysyy paikallaan.

N II: Voima \mathbf{f} on sama kuin liikemäärän \mathbf{p} aikaderivaatta, kaavana

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (49)$$

N III: Jos hiukkanen vaikuttaa toiseen hiukkaseen jollakin tietyllä voimalla niin tämä toinen hiukkanen vaikuttaa ensimmäiseen hiukkaseen täsmälleen saman suuruisella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla.

Tässä kaikki muu on samaa kuin alkuperäisesti Newtonilla, paitsi että *liikemäärää ei enää määritellä vakio kertaa nopeutena*. Sen sijaan on käytettävä yleisempää määritelmää

$$\mathbf{p} = m_{\text{rel}}(u)\mathbf{u}. \quad (50)$$

Tässä *liikemassa* eli relativistinen massa $m_{\text{rel}}(u)$ on jokin funktio joka riippuu nopeudesta u . (Se siis riippuu nopeuden suuruudesta $u = |\mathbf{u}|$ mutta ei suunnasta $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/u$.) Tämän funktion lausekkeen selvitämme hetken päästä.

Tärkeä seuraus toisesta ja kolmannelsta laista on *liikemäärän säilyminen*. Kun kaksi hiukkasta, joiden liikemäärät ovat \mathbf{p}_1 ja \mathbf{p}_2 , vuorovaikuttavat niin kokonaisliikemäärä

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (51)$$

on vakio. Kokonaisliikemäärän säilymisen laki pätee myös useamman kuin kahden hiukkasen joukossa. [Oikeastaan liikemäärän säilymistä voi pitää perustavimpana luonnonlakina, ja voima on vain apusuure, joka määritellään kaavalla (49).]

Pyritään määrittämään funktio $m_{\text{rel}}(u)$. Ensinnäkin, koska Newtonin teorian tiedetään toimivan hyvin pienillä nopeuksilla, täytyy olla $m_{\text{rel}}(u) \approx m$ kun $u \ll c$. Tässä m

on kappaleen Newtonin teorian mukainen massa. Erotukseksi liikemassasta sitä kutsutaan *lepomassaksi*.

Ajatellaan hiukkasta jonka nopeus K:ssa $\mathbf{u} = (0, u, 0)$. Sama nopeus K':ssa on kaavasta (46) $\mathbf{u}' = (-v, u/\gamma, 0)$. Näissä tapauksissa saadaan liikemäärän y -komponentille

$$p_y = m_{\text{rel}}(u)u \approx mu$$

$$p'_y = m_{\text{rel}}(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2})\frac{u}{\gamma} \approx m_{\text{rel}}(v)\frac{u}{\gamma}, \quad (52)$$

missä jälkimmäiset muodot on saatu olettaen $u \ll c$. Arvataan nyt (ja perustellaan kohta), että x -suuntainen koordinaattimuunnos ei voi muuttaa hiukkasen liikemäärän y -komponenttia. Ehdosta $p_y = p'_y$ saadaan liikemassalle lauseke $m_{\text{rel}}(v) = \gamma m$ eli

$$m_{\text{rel}}(u) = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (53)$$

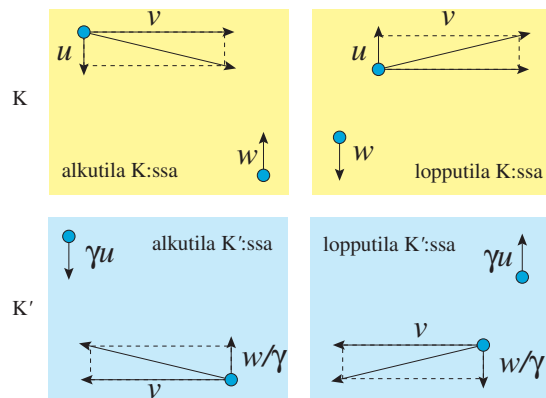
Liikemäärän (50) yleiseksi lausekkeeksi saadaan

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (54)$$

Täsmällisempi perustelu. Edellisen arvauksen saa perusteltua soveltamalla liikemäärän säilymisen lakia kahden hiukkasen elastiseen törmäykseen. (“Elastinen” tarkoittaa että hiukkaset eivät muutu törmäyksessä.) Oletetaan identtiset hiukkaset 1 ja 2. Oletetaan että K:ssa hiukkasen 1 nopeus alkutilassa on $(u_x, u_y) = (v, -u)$ ja lopputilassa $(u_x, u_y) = (v, u)$. Hiukkaselle 2 oletetaan $(u_x, u_y) = (0, w)$ alkutilassa ja $(u_x, u_y) = (0, -w)$ lopputilassa. Vaatimalla että liikemäärät ovat samat alku- ja lopputilassa saadaan ehto

$$m_{\text{rel}}(\sqrt{v^2 + u^2})u - m_{\text{rel}}(w)w = 0. \quad (55)$$

(Johda tämä.)



Katsotaan nyt samaa törmäystä koordinaatistossa K' joka liikkuu nopeudella $(v, 0)$ K:hon nähden. Käyttämällä nopeuden muunnoskaavaa (46) saadaan hiukkasen 1 nopeudeksi $(u'_x, u'_y) = (0, -\gamma u)$ alkutilassa ja $(u'_x, u'_y) = (0, \gamma u)$ lopputilassa. Vastaavasti hiukkaselle 2 saadaan $(u'_x, u'_y) = (-v, w/\gamma)$ alkutilassa ja

$(u'_x, u'_y) = (-v, -w/\gamma)$ lopputilassa. Liikemäärän säilyminen koordinaatistossa K' johtaa ehtoon

$$m_{\text{rel}}(\gamma u)\gamma u - m_{\text{rel}}(\sqrt{v^2 + w^2/\gamma^2})\frac{w}{\gamma} = 0. \quad (56)$$

Olettaen $u \ll c$ ja $w \ll c$ päädytään yhtälöryhmästä (55) ja (56) samaan tulokseen kuin kaavoissa (53) ja (54). ■

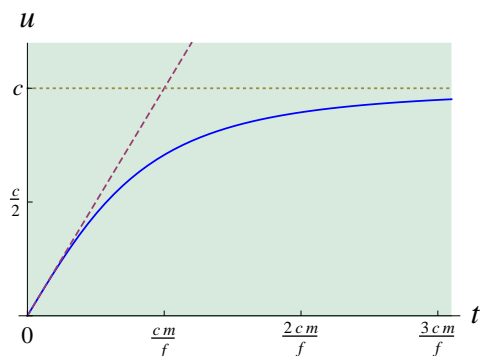
Tarkastellaan aluksi levossa olevaa kappaletta, johon kohdistuu vakiovoima \mathbf{f} . Kaavasta (49) saamme integroitua helposti $\mathbf{p} = \mathbf{f}t$ eli

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \mathbf{f}t. \quad (57)$$

Koska kaikki vektorit ovat samaan suuntaan voimme tarkastella vain suuruuksia. Pienellä laskulla voimme ratkaista yhtälöstä (57) nopeuden

$$u = \frac{1}{\sqrt{(m/ft)^2 + 1/c^2}}. \quad (58)$$

Tämä on esitetty seuraavassa kuvassa (jatkuva viiva).



Toisin kuin Newtonin teorian mukainen nopeus $u = ft/m$ (katkoviiva), joka kasvaa rajatta, suhteellisuusteorian mukainen nopeuden kasvu hidastuu kun nopeus lähenee valon nopeutta. Ajan kuluessa nopeus lähestyy valon nopeutta mutta ei saavuta sitä koskaan.

Liikemassan riippuvuus hiukkasen nopeudesta pystytään tarkasti mittaamaan esim. hiukkaskiihdyttimissä, ja tulokset ovat tarkasti suhteellisuusteorian mukaiset.

4.2 Energia

Liikemäärän säilymisen lain lisäksi mekaniikassa toinen tärkeä säilymlaki on *energian säilymisen laki*. Myös suhteellisuusteoriassa lähdetään siitä että energian säilymisen laki on voimassa. Jotta tähän päästäisiin, on Newtonin mekaniikasta tuttua kineettisen energian lauseketta $E_k = \frac{1}{2}mu^2$ korjattava.

Samoin kuin Newtonin mekaniikassa, hiukkasen kineettisen energian muutos on sama kuin hiukkaseen kohdistuvien voimien tekemä työ, $dE_k = dW = f dx$. Tarkastellaan hiukkasta joka on aluksi paikallaan $x = 0$:ssa ja $t = 0$:ssa. Siihen kohdistuvan voiman ansiosta

sen kineettinen energia hetkellä t saadaan voiman tekemää työtä integroimalla,

$$E_k(t) = \int_0^{x(t)} f(x) dx. \quad (59)$$

Tehdään muuttujan vaihdos $x = x(t)$ jolloin $dx = (dx/dt)dt = u dt$ ja

$$E_k(t) = \int_0^t f(t)u(t) dt. \quad (60)$$

Sijoittamalla liikeyhtälö (49) ja liikemäärän lauseke (54) ja laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} E_k(t) &= \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) u dt \\ &= \int_0^t \frac{mu}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{du}{dt} dt. \end{aligned} \quad (61)$$

Tehdään muuttujan vaihdos $u(t) = u$ jolloin $(du/dt)dt = du$ ja

$$E_k(u) = \int_0^u \frac{mu}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} du. \quad (62)$$

Tästä jo nähdään että tulos riippuu vain nopeudesta, ei siitä miten hiukkanen tähän nopeuteen kiihdytetään. Integroimalla saadaan

$$E_k(u) = \int_0^u \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (63)$$

mistä saadaan lopputuloksena hiukkasen *kineettinen energia*

$$E_k(u) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - mc^2. \quad (64)$$

Käyttäen kaavaa (53) voidaan tämä lauseke voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$E_k(u) = [m_{\text{rel}}(u) - m]c^2, \quad (65)$$

tai että *kineettisen energian muutos on vakio c^2 kertaa liikemassan muutos*,

$$\Delta E_k = c^2 \Delta m_{\text{rel}}. \quad (66)$$

Tämän pohjalta Einstein teki huomattavasti yleisemmän päätelmän, nimittäin *mitä tahansa energiaa E vastaa massa m_{rel} ja myös massaa vastaa energia niin että*

$$E = c^2 m_{\text{rel}}. \quad (67)$$

Kerrataan vielä E :n ja m_{rel} :n määritelmät: E on suure jonka olennainen ominaisuus on että se säilyy, siis se voi muuttua muodosta toiseen mutta sen kokonaismäärä pysyy muuttumattomana. Massa m_{rel} taas ilmenee

hitautena, kaava (50). Se ilmenee myös painovoimana vastaten kaavaa (7), vaikka sitä ei tässä voida osoittaa. Einsteinin kaavan (67) mukaan energia ja liikemassa ovat olennaisesti sama asia, ts. ne eroavat vain vakiotekijällä c^2 . Tarkastellaan seuraavassa joitakin tämän tärkeän tuloksen seurauksia.

Kaavasta (67) nähdään että arkipäiväisiin kappaleisiin liittyy valtava energia, esim. 1 kg massa vastaa energiaa 9×10^{16} J. Tämä vastaa yhden ydinvoimalan muutaman vuoden tuottoa. Käytännössä tämä kappaleiden sisältämä energia näkyy meille ainoastaan massana, siis siinä että painovoima vaikuttaa siihen sekä hitautena. Miksi se ei näy energiana johtuu siitä, että ehdottomasti suurin osa siitä on sitoutuneena stabiileihin hiukkasiin, jotka eivät muutu normaaliolosuhteissa. Ydinreaktioissa nämä kuitenkin voivat muuttua, jolloin osa energiasta voi vapautua (tai sitä voi sitoutua lisää). Osa kappaleen energiasta on sitoutuneena siinä oleviin kemiallisiin sidoksiin, jotka voivat muuttua kemiallisissa reaktioissa. Kemiallisista reaktiosta johtuva massan muutos on kuitenkin häviävän pieni verrattuna kappaleen lepomassaan m . Esim. 1 kg puuta palaessa vapautuu 1.5×10^7 J, mikä on sama kuin massan muutos 1.7×10^{-7} g. Tämän mittaaminen vaatisi merkittävästi suurempaa tarkkuutta kuin nykyisin pystytään.

Toisaalta materiaan varastoitunut suuri energia antaa mahdollisuuden selittää esim. radioaktiivisuuden, missä hyvin energieettistä säteilyä syntyy ydinreaktiossa. Vain 1 kg:n massan muutos ydinpolttoaineessa saa ydinvoimalan käymään muutaman vuoden. Kaava (67) on voitu osoittaa päteväksi vertaamalla hiukkasten massojen muutoksia ydinreaktiossa.

Kun kappale pannaan liikkeelle sen liikemassa kasvaa kaavan (53) mukaan. Tällöin kappaleen energia kaavan (67) mukaan on

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (68)$$

Kehitetään tämä Taylorin sarjaksi u :ssa. Saadaan

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ &= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots\right) \\ &= mc^2 + \frac{1}{2} mu^2 + \frac{3}{8} m \frac{u^4}{c^2} + \dots \end{aligned} \quad (69)$$

Tässä ensimmäinen termi on *lepoenergia*, josta juuri keskusteltiin. Vertaamalla kaavaan (64) todetaan, että loput termit yhteensä ovat sama kuin kineettinen energia

$$\begin{aligned} E_k &= E - mc^2 \\ &= \frac{1}{2} mu^2 + \frac{3}{8} m \frac{u^4}{c^2} + \dots \end{aligned} \quad (70)$$

Tunnistetaan että tässä ensimmäinen termi on täsmälleen Newtonin mekaniikasta tuttu kineettinen energia.

Korkeammat termit ovat pieniä, kun kappaleen nopeus $u \ll c$. Suurissa nopeuksissa (missä $u \sim c$) on Taylorin sarjan (70) sijasta parempi käyttää kineettisen energian täsmällistä lauseketta (64).

Tapauksessa, missä tutkittavien kappaleiden rakenne pysyy muuttumattomana, on lepoenergia vakio. Tällöin energian säilyminen esimerkiksi hiukkasten törmäessä on sama kuin kineettisen energian säilyminen. Jos hiukkasten nopeudet ovat pieniä valon nopeuteen verrattuna, johtaa energian säilyminen suhteellisuusteoriassa samaan ehtoon kuin Newtonin teoriassa.

Tarkastellaan vielä potentiaalienergiaa. Uskoen kaavaan (67) täytyy tähänkin liittyä massa. Tämä massa on siis varastoitunut kenttään joka synnyttää potentiaalin, esimerkiksi sähkökenttään. Makroskooppisten kappaleiden tapauksessa tätä kenttään liittyvää massaa on vaikea suoraan mitata, mutta teorian yleisen järkevyyden perusteella meidän lienee pakko siihenkin uskoa.

Yhteenvetona, kaikki energiamuodot näkyvät kappaleen hitautena ja painovoiman vaikutuksena siihen. Siis esim. kappaleessa oleviin kemiallisiin sidoksiin liittyy energia, ja siksi myös hitaus ja painovoima, joskin tämä on pieni osuus koko kappaleen hitaudesta ja painovoimasta.

Koska kappaleen liikemassa m_{rel} (53) on tekijää c^2 lukuun ottamatta sama kuin sen energia, on tarpeetonta puhua näistä eri käsitteinä. Käytännöksi onkin muovautunut puhua tässä yhteydessä energiasta, ja massalla useimmiten tarkoitetaan kappaleen lepomassaa m .

5. Suhteellisuusteoriaa nelivektoreilla esitettynä

Suhteellisuusteorian mukaan kaikkien luonnonlakien täytyy päteä samanlaisina kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Edellä olemme käyttäneet tätä ehtoa paikoitellen hyväksi, mm. päätellessä liikemäärän lauseketta. Kuitenkin järjestelmällisempi tapa on määritellä kaikki suureet siten, että ne olisivat riippumattomia käytetystä koordinaatistosta. Tällöin kaikki lait mitä niille kirjoitetaan ovat automaattisesti voimassa kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Osoittautuu että tähän päästään käyttämällä nelivektoreita. Jo aikaisemmin olemme kuvanneet tapahtumaa neljällä koordinaatilla (ct, x, y, z) , mutta nyt on tarkoitus käyttää samanlaista kuvausta myös muille suureille.

5.1 Määritelmiä

Nelivektorin määritelmä

Ajatellaan neljää lukua, joita merkitään $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$. Yhteisesti näitä voidaan kutsua nimellä λ^μ , missä indeksi μ saa arvot 0, 1, 2 ja 3. (Huomaa että näitä yläindeksejä ei pidä sekoittaa λ :n potensseihin, asiayhteydestä pitäisi selvittää kummasta on kysymys.) Tällainen neljän luvun yhdistelmä voidaan tulkita vektoriksi jossain neliulotteisessa avaruudessa. Tällaista vektoria voidaan merkitä lyhyesti vain λ^μ :lla

$$\lambda^\mu = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3). \quad (71)$$

Vaihtoehtoinen merkintä on käyttää isoa kirjainta ja jättää indeksi pois

$$\Lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3). \quad (72)$$

Jatkossa nelivektori tullaan usein ilmaisemaan muodossa, jossa komponentit $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ annetaan kolmiulotteisen avaruuden vektorin $\mathbf{l} = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ avulla, siis

$$\lambda^\mu = (\lambda^0, \mathbf{l}). \quad (73)$$

Osaa λ^0 kutsutaan nelivektorin aikakomponentiksi ja osaa \mathbf{l} avaruusosaksi. Nelivektorin indeksinä useimmiten käytetään kreikkalaista kirjainta, siis μ :n paikalla yllä voisi yhtä hyvin olla $\alpha, \beta, \nu, \dots$

Jo edeltä tuttu sovellutus nelivektorista ovat tapahtumat, joita merkitään

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad (74)$$

missä nelivektorin x^μ komponentit ovat

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (75)$$

Tapahtumanelivektori voidaan myös ilmaista $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$, missä $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Tarkastellaan Lorentz-muunnosta (28). Käyttämällä koodinaatteja (ct, x, y, z) se saa muodon

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \\ x' &= \gamma(-\frac{v}{c}ct + x) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (76)$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Lorentz-muunnos on neliavaruuden koordinaatistomuunnos. Kuten normaalisti vektorille, sanotaan että vektori x^μ ei muutu tällaisessa muunnoksessa vaikka sen komponentit (75) muuttuvat. Sama asia esitettiin edellä geometrisesti Minkowskin diagrammien yhteydessä: tapahtuman koordinaatit riippuvat valitusta koordinaatistosta mutta itse tapahtumat eivät.

Edellä on kuvattu yleistä nelivektoria λ^μ , mutta nyt vasta määritellään se täsmällisesti.

Neljän luvun ryhmää λ^μ kutsutaan nelivektoriksi, jos koordinaatiston muunnoksissa sen komponentit muuttuvat samalla tavalla kuin tapahtumavektorin x^μ koordinaatit (ct, x, y, z) .

Erityisesti siis siirryttäessä koordinaatistosta K koordinaatistoon K', mikä liikkuu K:n suhteen x-akselin suuntaan nopeudella v, nelivektorin λ^μ komponenttien muunnoskaavat ovat

$$\begin{pmatrix} \lambda^{0'} \\ \lambda^{1'} \\ \lambda^{2'} \\ \lambda^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^0 \\ \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Harjoituksissa tutustutaan myös muihin neliavaruuden koordinaattimuunnoksiin.

Nelivektorin pituus

Nelivektorin λ^μ pituus s määritellään kaavalla

$$s^2 = (\lambda^0)^2 - (\lambda^1)^2 - (\lambda^2)^2 - (\lambda^3)^2. \quad (79)$$

Huomataan heti että miinusmerkkien takia tämä määritelmä olennaisesti eroaa tavallisesta euklidisen avaruuden pituuden määritelmästä, jossa kaikki komponenttien neliöt lasketaan yhteen, ei vähennetä. Erityisesti, s^2 voi olla negatiivinen. Myöskään ehdosta $s^2 = 0$ ei voi päätellä että vektori λ^μ olisi nollavektori $(0, 0, 0, 0)$.

Määritellään *neliskalaari*.

Neliskalaarilla tarkoitetaan lukua, joka pysyy muuttumattomana neliavaruuden koordinaattimuunnoksissa.

Todetaan heti että nelivektorin pituus (79) on neliskalaari, sillä se ei muutu Lorentz-muunnoksessa. Tämä asia todettiin jo edellä tapahtumapareille kaavassa (35), mutta voidaan laskea myös uudestaan määritelmästä (79) ja Lorentz-muunnoksesta (78).

Kaavassa (34) laskettiin nelivektorin pituus kahden tapahtuman erotukselle. Suuretta Δs voidaan siis kutsua tapahtumien "etäisyydeksi", kunhan muistetaan tämän määritelmän totutusta poikkeava luonne. Kaavan (41) yhteydessä kuvattiin sellaisten tapausten eroja missä s^2 on positiivinen, negatiivinen ja nolla.

Tarkastellaan kappaletta L, johon on kiinnitetty kello. Tämä kello näyttää kappaleen ominaisaikaa τ . Ominaisaika τ on neliskalaari, sillä kussakin maailmaniivian tapahtumassa sen arvo on riippumaton koordinaatistosta.

Otetaan L:n maailmaniivialta kaksi lähekkäistä tapahtumaa. Näiden koordinaattien erotuksia merkitään nelivektorilla $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$. Muodostetaan tämän pituuden neliö $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. [Huomaa että on käytetty lyhennysmerkintää $dx^2 \equiv (dx)^2$.] Oletetaan nyt että käytetty koordinaatisto on kappaleen (hetkellinen) lepokoordinaatisto. Tällöin $dx = dy = dz = 0$ ja aika on sama kuin ominaisaika, $dt = d\tau$. Nähdään siis että ominaisajan differentiaali

$$d\tau = \frac{ds}{c}. \quad (80)$$

Koska tässä relaatiossa kaikki suureet ovat neliskalaareja, on tämä tulos koordinaatistosta riippumaton.

Kaava (80) antaa tulkin kahden tapahtuman väliselle ds^2 :lle siinä tapauksessa että $ds^2 > 0$: ds/c on ominaisajan differentiaali hiukkaselle, jonka maailmaniivialla tapahtumat ovat.

Tarkastellaan nyt L:n maailmaniivivaa käyttäen mielivaltaista koordinaatistoa K. Tässä koordinaatistossa kappaleen paikka \mathbf{r} voidaan antaa ajan funktiona, $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$. Tällöin kappaleen nopeusvektori on

$$\mathbf{u} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (81)$$

Käyttäen kaavaa (80) voidaan kappaleen ominaisajan differentiaali kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (82)$$

Tämä on ajan venymän kaava (37) differentiaalisessa muodossa lausuttuna.

Ominaisaika pitimmällä aikavälillä saadaan integroimalla yhtälö (82) puolittain. Näin saadaan

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt. \quad (83)$$

Tätä kaavaa voi soveltaa mm. kaksosparadoksin käsittelyyn, sillä sitä käyttäen voi laskea kummankin kaksosen iän niin että myös kiihtyvä liike on otettu huomioon [kunhan vain riippuvuus $u(t)$ on tiedossa]. Laskematta tarkemmin nähdään heti kaavasta (83) että kun t_1 ja t_2 on kiinnitetty, on $\tau_2 - \tau_1$ suurin siinä tapauksessa että on paikallaan, $u = 0$, ja kaikille muille se on pienempi.

Nelinopeus

Kappaleen L maailmaniiva voidaan ilmaista myös antamalla sen aika-paikka-vektori ominaisajan funktiona, $x^\mu = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$. *Nelinopeus* määritellään tämän derivaattana ominaisajan suhteen

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (84)$$

Näin saatu nelinopeus u^μ on nelivektori. Tämä seuraa siitä että τ ja siksi myös $d\tau$ on neliskalaari, joka ei muutu neliavaruuden koordinaattimuunnoksissa, kun taas x^μ ja siksi myös dx^μ ovat nelivektoreita, täytyy näiden osamäärän olla nelivektori. Siis kaavana ilmaistuna

$$\begin{pmatrix} u^{0'} \\ u^{1'} \\ u^{2'} \\ u^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \quad (85)$$

kun koordinaateille pätee muunnos (77).

Katsotaan nelinopeuden komponentteja erikseen. Aikakomponentille saadaan

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (86)$$

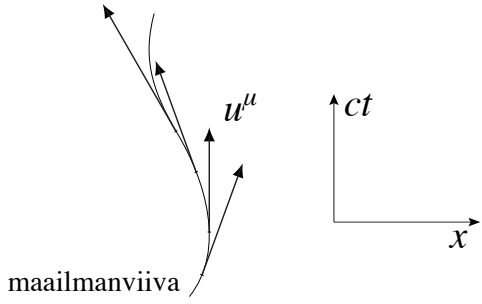
missä on käytetty kaavaa (82). x -komponentille saadaan

$$u^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (87)$$

missä on käytetty derivoinnin ketjusääntöä funktioon $x(t(\tau))$ sekä kaavaa (82). Laskemalla vastaavasti y - ja z -komponenteille saadaan

$$u^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right). \quad (88)$$

Nelinopeuden aikaosa u^0 ja avaruusosa (u^1, u^2, u^3) ovat siis valonnopeus c ja kolminopeus \mathbf{u} , molemmat kerrottuna tutulla tekijällä $(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$.



Geometrisesti tulkiten nelinopeus osoittaa kappaleen maailmanviivan tangentin suuntaan. Näin siksi että dx^μ on tangentin suuntainen. Lasketaan vielä nelinopeusvektorin pituus. Sen neliö

$$s^2 = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = \frac{c^2 - u^2}{1 - u^2/c^2} = c^2. \quad (89)$$

Pituus on siis neliskalaari c . Tämä ei ole kiinnostava suure koska se ei anna mitään tietoa kappaleesta tai sen liikkeestä.

Analisisesti nelinopeuden kanssa voidaan määrittellä nelikiihdyvyys

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}. \quad (90)$$

Ei kuitenkaan tutkita tätä suureta tässä sen enempää.

Skalaaritulo

Olkoon λ^μ ja σ^μ kaksi nelivektoria. Niiden skalaaritulo määritellään lausekkeella

$$\lambda^0\sigma^0 - \lambda^1\sigma^1 - \lambda^2\sigma^2 - \lambda^3\sigma^3. \quad (91)$$

Nähdään että nelivektorin skalaaritulo itsensä kanssa on sama kuin vektorin pituuden neliö s^2 (79). Samalla tavalla kuin s^2 :n tapauksessa, voidaan todeta että skalaaritulo on neliskalaari. Sisätuloon pätee samat varoitukset kuin s^2 :enkin, ts. sen ominaisuudet eivät ole samat kuin aiemmin olette skalaaritulon kanssa tottuneet.

Miten merkitä skalaarituloa? Kirjallisuudessa paljon käytetty merkintä on seuraava. Määritellään ensin kahdesta neli-indeksistä μ ja ν riippuva suure

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{kun } \mu = \nu = 0, \\ -1 & \text{kun } \mu = \nu \neq 0, \\ 0 & \text{kun } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (92)$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös matriisina

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Nyt voidaan skalaaritulo (91) kirjoittaa kaksinkertaisena summana

$$\lambda^0\sigma^0 - \lambda^1\sigma^1 - \lambda^2\sigma^2 - \lambda^3\sigma^3$$

$$= \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} \lambda^\mu \sigma^\nu. \quad (94)$$

Tämän voi ajatella myös matriisitulona

$$\begin{pmatrix} \lambda^0 & \lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix}. \quad (95)$$

(Tarkista että olet samaa mieltä näistä.) Lisäksi käytännöksi on tullut ns. Einsteinin summaussääntö, missä summamerkki jätetään merkittömättä. Tässä siis tulkitaan että kun sama indeksi esiintyy termissä kahdesti, pitää termi summata indeksin eri arvojen (0, 1, 2 ja 3) yli. Näin päädytään skalaaritulon (91) merkintään

$$\eta_{\mu\nu} \lambda^\mu \sigma^\nu = \lambda^0\sigma^0 - \lambda^1\sigma^1 - \lambda^2\sigma^2 - \lambda^3\sigma^3. \quad (96)$$

Muistutetaan vielä että summausindeksin symbolilla ei ole merkitystä, $\eta_{\mu\nu} \lambda^\mu \sigma^\nu = \eta_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \sigma^\beta$.

Tässä käytetty indeksimerkintä on hyvin tehokas merkintätapa, jota laajasti käytetään mm. yleisessä suhteellisuusteoriassa. Jossain tapauksissa se kuitenkin voi olla sekava, ja siksi voidaan nelivektorien skalaaritulolle käyttää myös merkintää

$$\Lambda \cdot \Sigma = \lambda^0\sigma^0 - \lambda^1\sigma^1 - \lambda^2\sigma^2 - \lambda^3\sigma^3, \quad (97)$$

kun on määritelty $\Lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ ja $\Sigma = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$.

Nelivektorin pituuden neliölle on aiemmin käytetty merkintää s^2 (79). Soveltamalla yllä olevaa merkintää voidaan nelivektorin λ^μ pituuden neliötä merkitä myös kirjoittamalla

$$\eta_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu = (\lambda^0)^2 - (\lambda^1)^2 - (\lambda^2)^2 - (\lambda^3)^2 \quad (98)$$

tai

$$\Lambda^2 = (\lambda^0)^2 - (\lambda^1)^2 - (\lambda^2)^2 - (\lambda^3)^2. \quad (99)$$

5.2 Neliliikemäärä

Tarkastellaan kappaletta jonka lepomassa on m . Kappaleen *neliliikemäärä* p^μ määritellään kaavalla

$$p^\mu = m u^\mu, \quad (100)$$

siis massa m kertaa nelinopeus u^μ . Tämän täytyy olla nelivektori sillä u^μ on nelivektori ja m on neliskalaari.

Neliliikemäärän komponentit saadaan suoraan laskettua vastaavista nelinopeuden komponenteista (88),

$$p^\mu = m u^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right). \quad (101)$$

Verrataan tätä edellä pääteltyihin energian (68) ja liikemäärän (54) kaavoihin

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (102)$$

Todetaan että neliliikemäärän (101) avaruusosa on täsmälleen sama kuin liikemäärä \mathbf{p} . Sen aikakomponentti taas on $p^0 = E/c$. Todetaan siis että *neliliikemäärän aikakomponentti on sama kuin energia* (epäoleellista vakiotekijää $1/c$ lukuun ottamatta). Koko neliliikemäärä voidaan siis kirjoittaa

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (103)$$

Tämä on kiinnostava tulos, koska Newtonin teoriassa energia ja liikemäärä näyttävät olevan aivan eri suureita, mutta suhteellisuusteoriassa ne ovatkin saman suuren eri komponentteja. Huomaa että tämä on mahdollista vain siinä tapauksessa että E sisältää kineettisen energian lisäksi kappaleen lepoenergian mc^2 .

Kirjoitetaan vielä auki neliliikemäärän muuntumien Lorentz-muunnoksessa,

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p_x' \\ p_y' \\ p_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad (104)$$

kun koordinaateille pätee muunnos (77).

Lasketaan neliliikemäärän pituuden neliö

$$\begin{aligned} & (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \\ &= m^2 c^2. \end{aligned} \quad (105)$$

Tässä ensimmäinen yhtäsuuruus on saatu kaavasta (103). Viimeinen muoto taas on saatu sijoittamalla neliliikemäärän komponentit kaavasta (101). Samoin kuin nelinopeuden pituus, ei neliliikemäärän pituus anna tietoa liiketilasta. Sen sijaan kaava (105) antaa kappaleen energian, lepomassan ja liikemäärän välille yhtälön

$$E^2 = c^4 m^2 + c^2 p^2. \quad (106)$$

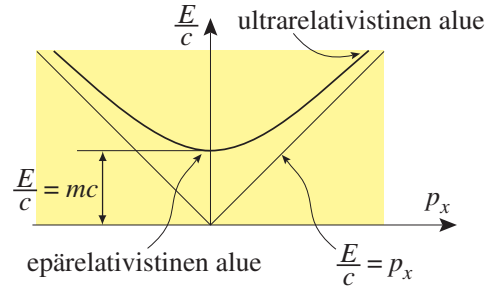
Vaihtoehtoinen tapa johtaa tämä kaava on eliminoida \mathbf{u} kaavoista (102).

Kaava (106) on erittäin hyödyllinen monissa yhteyksissä. Esimerkiksi jos hiukkasen liikemäärä tunnetaan, saadaan kaavasta (106) sen energia

$$E = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}. \quad (107)$$

Kineettinen energia saadaan vähentämällä lepoenergia mc^2 ,

$$E_k = E - mc^2 = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2} - mc^2. \quad (108)$$



Kuvassa on hahmoteltu relaatio (107) olettaen $p_y = p_z = 0$. Pienillä liikemäärillä $p \ll mc$ hiukkasen energia $E \approx mc^2 + p^2/2m$, siis lepoenergia ja Newtonin teorian kineettinen energia. Suurella liikemäärällä $p \gg mc$, mitä kutsutaan ultrarelativistiseksi rajaksi, hiukkasen energia lähenee asymptoottisesti arvoa $E = cp$.

Kaavoista (102) voidaan helposti johtaa myös

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{u}. \quad (109)$$

Tästä suoraan näkee, että kappaleen hitaus tulee sen energiasta. Laskemalla voi todeta, että yhdessä kaavat (106) ja (109) ovat ekvivalentteja kaavojen (102) kanssa. Jatkossa tullaan paljon käyttämään kaavaa (106), sillä usein tarvitaan relaatiota E :n ja \mathbf{p} :n välillä. Kun sitten E ja \mathbf{p} on tunnettu, voidaan nopeus laskea kaavasta (109).

Liikelyhtälö

Pohjautuen Newtonin lakiin (49), luonnollinen arvaus nelivektorimuotoiselle liikelyhtälölle on

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu. \quad (110)$$

Tämä voidaan ymmärtää *nelivoiman* f^μ määritelmäksi. Liikelyhtälön (110) fysikaalisen sisällön selvittämiseksi meidän on löydettävä nelivoiman f^μ yhteys Newtonin yhtälössä (49) käytettyyn voimaan \mathbf{f} . Tarkastellaan tätä varten yhtälön (110) x -komponenttia,

$$\begin{aligned} f^1 &= \frac{dp^1}{d\tau} = \frac{dp_x}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dp_x}{dt} \\ &= \frac{f_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (111)$$

missä viimeisessä yhtälössä on käytetty Newtonin lakia (49). Vastaava tulos saadaan myös y ja z -komponenteille. Saadaan

$$f^\mu = \left(f^0, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right). \quad (112)$$

Nelivoiman aikakomponentti f^0 voidaan määrätä seuraavasti. Kaavassa (105) laskettiin neliliikemäärän pituuden neliö, mikä tulos voidaan kirjoittaa muodossa

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2. \quad (113)$$

Derivoimalla tätä ominaisajan suhteen ja käyttämällä hyväksi tulon derivoinnin lauseketta saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d(\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu)}{d\tau} \\ &= \eta_{\mu\nu} \left(\frac{dp^\mu}{d\tau} p^\nu + p^\mu \frac{dp^\nu}{d\tau} \right). \end{aligned} \quad (114)$$

Tässä ensimmäisessä termissä voidaan muuttaa summausindeksejä

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \frac{dp^\mu}{d\tau} p^\nu &= \eta_{\alpha\nu} \frac{dp^\alpha}{d\tau} p^\nu = \eta_{\alpha\mu} \frac{dp^\alpha}{d\tau} p^\mu \\ &= \eta_{\nu\mu} \frac{dp^\nu}{d\tau} p^\mu = \eta_{\mu\nu} \frac{dp^\nu}{d\tau} p^\mu, \end{aligned} \quad (115)$$

missä viimeinen muoto on saatu käyttämällä $\eta_{\nu\mu} = \eta_{\mu\nu}$. Todetaan että lausekkeessa (114) molemmat termit ovat yhtäsuuret, joten

$$\begin{aligned} 0 &= 2\eta_{\mu\nu} p^\mu \frac{dp^\nu}{d\tau} \\ &= 2m \eta_{\mu\nu} u^\mu f^\nu. \end{aligned} \quad (116)$$

Saadaan siis että nelinopeuden ja nelivoiman skalaaritulo on nolla. (Tällä perusteella voidaan myös määritellä että nämä neliavaruuden vektorit ovat "toisiaan vastaan kohtisuorassa". Pitää kuitenkin muistaa että neliavaruudessa kohtisuoruus ei ole sama kuin mihin olemme euklidisessa avaruudessa tottuneet.) Sijoittamalla tähän u^μ :n ja f^ν :n lausekkeet (88) ja (112) saadaan

$$f^0 = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (117)$$

Kootaan vielä kaikki nelivoiman komponentit yhteen kaavaan

$$f^\mu = \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right). \quad (118)$$

Näemme siis että määritelmä (110) kiinnittää f^0 :n kun \mathbf{f} on tiedossa. Katsotaan mitä sitten yhtälön (110) nollas komponentti $dp^0/d\tau = f^0$ antaa. Vasen puoli on

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dE/c}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dE}{dt}. \quad (119)$$

Vertaamalla tätä oikeaan puoleen (117) saadaan $dE/dt = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$. Tämä on Newtonin mekaniikasta tuttu tehon lauseke, jonka yksiulotteista muotoa käytettiin edellä kaavassa (60). Todetaan siis että edellä postuloitu nelivektorimuotoinen likeyhtälö (110) on ekvivalentti aiemmin pääteltyjen energian ja liikemäärän kaavojen

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f} \quad (120)$$

kanssa. Näistä yhtälöistä voidaan hiukkasen liikerata laskea (ainakin periaatteessa), kun voima \mathbf{f} ja alkuehdot

ovat tunnettu. Suoraviivainen liike ratkaistiin edellä kaavassa (58), ja ympyräliikettä on tutkittu harjoitustehtävänä.

Neliliikemäärän säilyminen

Tutkitaan hiukkasia jotka vuorovaikuttavat keskenään. Keskitytään *sirontaan*, missä alkutilassa on joukko hiukkasia, jotka ovat etäällä toisistaan. Sitten ne kohtaavat ja vuorovaikuttavat toistensa kanssa. Lopputilassa hiukkaset ovat jälleen etäällä toisistaan. Oletetaan että hiukkasten neliliikemäärät alkutilassa ovat \tilde{p}_i^μ , missä $i = 1, 2, \dots, n$, ja lopputilassa neliliikemäärät ovat p_i^μ , missä $i = 1, 2, \dots, l$. Neliliikemäärän säilyminen tarkoittaa että neliliikemäärät alku- ja lopputilassa ovat samat. Kaavana

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i^\mu = \sum_{i=1}^l p_i^\mu. \quad (121)$$

Hajotettuna komponenttimuotoon tämä sisältää yhtälöt

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \dots + \tilde{E}_n &= E_1 + E_2 + \dots + E_l, \\ \tilde{p}_{1x} + \tilde{p}_{2x} + \dots + \tilde{p}_{nx} &= p_{1x} + p_{2x} + \dots + p_{lx} \\ \tilde{p}_{1y} + \tilde{p}_{2y} + \dots + \tilde{p}_{ny} &= p_{1y} + p_{2y} + \dots + p_{ly} \\ \tilde{p}_{1z} + \tilde{p}_{2z} + \dots + \tilde{p}_{nz} &= p_{1z} + p_{2z} + \dots + p_{lz}, \end{aligned} \quad (122)$$

missä esim. \tilde{p}_{2y} on hiukkasen kaksi liikemäärän y -komponentti ennen sirontaa ja E_l on hiukkasen l energia sironnan jälkeen. Kolmiliikemääriä ja energioita sitoo toisiinsa relaatiot (106), siis

$$\frac{E_i^2}{c^2} = c^2 m_i^2 + p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2 \quad (123)$$

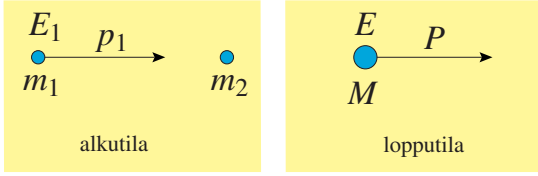
indekseillä $i = 1, \dots, l$, ja vastaavasti myös alkutilan hiukkasille.

Neliliikemäärän säilyminen on seurausta energian ja kolmiliikemäärän säilymisestä. Laki (121) on kuitenkin yleisempi kuin Newtonin teorian säilymlaki sillä se pitää sisällään myös hiukkasten muuttumisen toiseksi esim. ydinreaktioissa. Siksi hiukkasten lukumäärät voivat alku ja lopputilassa olla eri suuret. Koska energiassa on hiukkasten lepomassat mukana, myös muutokset hiukkasten lepoenergioissa tulevat automaattisesti mukaan neliliikemäärän säilymislaissa (121).

Nelivektoreiden välisenä yhtälönä yhtälö (121) pitää paikkansa missä tahansa inertiaalikoordinaatistossa. Nähdään että se mikä on energian säilymistä yhdessä koordinaatistossa, on yhdistettyä energian ja liikemäärän säilymistä toisessa koordinaatistossa. Näin energian ja kolmiliikemäärän säilymlait eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan ne vaihtuvat toisikseen siirryttäessä koordinaatistosta toiseen.

Esimerkki Tarkastellaan tapausta missä liikemäärällä \mathbf{p}_1 liikkuva hiukkanen (massa m_1) törmää levossa olevaan

hiukkaseen (massa m_2), ja ne absorboituvat toisiinsa. Lopputilassa on siis vain yksi hiukkanen, jonka massa M ja liikemäärä \mathbf{P} halutaan selvittää.



Neliliikemäärän säilymislaite (122) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} E_1 + c^2 m_2 &= E \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{P} \\ \frac{E_1^2}{c^2} &= c^2 m_1^2 + p_1^2 \\ \frac{E^2}{c^2} &= c^2 M^2 + P^2. \end{aligned} \quad (124)$$

Näistä yhtälöistä M ja \mathbf{P} pitäisi olla ratkaistavissa. Jatkossa tarkastellaan muutamia samantyyppisiä tapauksia. ■

Kysymys: päteekö neliliikemäärän säilyminen myös vuorovaikutuksen aikana, ei pelkästään alku ja lopputiloissa?

Vastaus: kyllä, mutta silloin neliliikemäärään on lisättävä myös vuorovaikutuksesta tuleva lisätermi $p_{\nu\nu}^\mu$. Yksinkertaisimmillaan tämä termi sisältää Newtonin teorian potentiaalienergiaa vastaavan energian, $p_{\nu\nu}^0 = E_{\text{pot}}/c$. Kuitenkin, kun hiukkasat liikkuvat, liikkuu myös potentiaali. Suhteellisuusteorian mukaan energiaan liittyy liikemassa, ja liikkuvaan energiaan myös kolmiliikemäärä $\mathbf{p}_{\nu\nu}$. Lisäksi pitää ottaa huomioon että hiukkasen liikkeen muutos näkyy sen aiheuttamassa potentiaalissa vasta viiveellä sillä suhteellisuusteorian mukaan suurin signaalin nopeus on valon nopeus. Kaikista näistä syistä $p_{\nu\nu}^\mu$ on varsin monimutkainen laskettava, eikä siihen tässä haluta mennä.

5.3 Fotonit

Tarkastellaan tapausta, missä hiukkasen lepomassa häviää, $m = 0$. Kaavan (107) mukaan pätee tällöin

$$E = pc \quad (125)$$

ts. hiukkanen on aina ultrarelativistisella rajalla. Sijoittamalla tämä yhtälön (109) skalaarimuotoon $p = (E/c^2)u$ saadaan $u = c$. Tämä tarkoittaa että lepomassaton hiukkanen liikkuu aina valon nopeudella. Myös toisinpäin, valon nopeudella liikkuvan hiukkasen lepomassan täytyy hävitä. Tämän perusteella tulkitaan että sähkömagneettisen säteilyn kvantti *fotoni* on tällainen hiukkanen.

Sähkömagneettinen säteily saadaan ratkaisuna (13) Maxwellin yhtälöistä (8)-(11) tyhjiössä. Sen nopeus (14) on valon nopeus. Sähkömagneettinen säteily on

aaltoliikettä, jota kuvaa myös aallonpituus λ ja taajuus ν . Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan aallon nopeus on $\lambda\nu$. Sähkömagneettisen aallon tapauksessa siis $c = \lambda\nu$. Taajuuden tai aallonpituuden mukaan sähkömagneettinen säteily jaetaan eri tyyppeihin, mm. radioaallot, mikroaallot, infrapuna, näkyvä valo, sekä ultravioletti-, röntgen- ja gammasäteily. Lisäksi aaltoa kuvaa sen amplitudi. Aallon energia on verrannollinen amplitudin neliöön.

Vuonna 1900 Max Planck esitti, että sähkömagneettisen säteilyn energia ei ole jatkuva vaan koostuu kvanteista, joita kutsutaan fotoneiksi. Hän esitti että fotonin energian E ja taajuuden ν välillä on yhteys

$$E = h\nu, \quad (126)$$

missä $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js on Planckin vakio. Soveltamalla kaavaa (125) fotonin saadaan että sillä on myös liikemäärä

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (127)$$

missä viimeinen muoto on sama kuin de Broglie esitti elektroneille 1924. Fotonille neliliikemäärä (103) on siis

$$p^\mu = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \hat{\mathbf{n}} \right), \quad (128)$$

missä $\hat{\mathbf{n}}$ on valon etenemissuuntaan osoittava yksikkövektori. Edellä tehdyn luokittelun mukaan fotonin neliliikemäärä on valonluonteinen, siis $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0$, kun taas massallisten hiukkasten neliliikemäärä on ajanluonteinen $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2 > 0$ [katso kaava (105)].

Suhteellisuusteoria ja kvanttiteoria ovat molemmat fysiikan keskeisiä teorioita. Nähdään että nämä teorit ovat hyvin sopusoinnussa keskenään kuvatessaan sähkömagneettisia aaltoja.

Koska fotoneilla on liikemäärä, aiheutuu niiden absorboitumisesta kappaleeseen voima. Tätä kutsutaan *säteilypaineeksi*. Myös peiliin, josta fotonit heijastuvat, aiheutuu säteilypaine (harjoitustehtävä). Meille tavanomaisissa yhteyksissä säteilypaine on verraten heikko ilmiö, mutta se on tärkeä esim. avaruusfysiikassa. (Keskustele radiometristä.)

5.4 Maxwellin yhtälöiden nelitensorimuoto

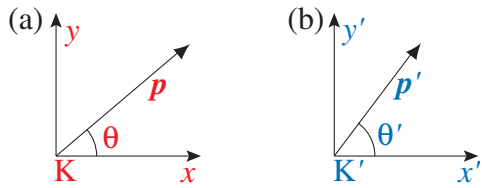
Maxwellin yhtälöt (8)-(11) voidaan ilmaista käyttäen nelitensoreita, mikä on nelivektoreiden yleistys. [Esimerkiksi yllä mainittu $\eta_{\mu\nu}$ (92) on nelitensori.] Tässä muodossa esitettynä on selvää että Maxwellin yhtälöt ovat voimassa kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa, ja saadaan määrättyä kuinka sähkö- ja magneettikentät muuntuvat Lorentz-muunnoksessa. Maxwellin yhtälöiden nelitensorimuoto johdetaan klassisen kenttäteorian kurssissa.

6. Hiukkaskinematikkaa

Tässä luvussa esitetään joukko esimerkkejä, joissa sovelletaan neliliikemäärän Lorentz-muunnosta ja säilymlakia.

Dopplerin ilmiö

Valoaalloilla esiintyy ääniaaltojen tavoin Dopplerin ilmiö. Dopplerin ilmiö tarkoittaa että havaitun valon taajuus riippuu valolähteen liikkeestä. Tämän selvittämiseksi tutkitaan samaa fonia kahdesta koordinaatistosta K ja K' nähtynä. Kuten edellä, oletetaan että K' liikkuu nopeudella v koordinaatiston K x -akselin suuntaan. K:ssa valonsäde etenee x -akseliin nähden kulmassa θ . Fotonin rata ja liikemäärä nähtynä kummassakin koordinaatistoissa on esitetty kuvissa (a) ja (b).



Yhtälöiden (126) ja (127) mukaan on

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ p_x &= \frac{h\nu}{c} \cos \theta. \end{aligned} \quad (129)$$

Soveltamalla Lorentzin muunnosta neliliikemäärän aikakomponenttiin saadaan kaavasta (104)

$$E' = \gamma(E - vp_x). \quad (130)$$

Tästä saadaan fotonin energiaksi koordinaatistossa K'

$$h\nu' = \gamma(h\nu - \frac{h\nu v}{c} \cos \theta).$$

Tästä saadaan

$$\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

eli

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \theta}. \quad (131)$$

Tulkitaan nyt että säteily on lähtenyt lähteestä, joka on levossa koordinaatistossa K'. Tällöin kaava (131) antaa havaitsijan mittaaman taajuuden ν , kun tunnetaan lähettäjän taajuus ν' , lähettäjän nopeus v ja signaalin etenemiskulma θ (suhteessa lähettäjän nopeuden suuntaan).

Jos valolähde lähestyy suoraan havaitsijaa kohti, on $\theta = 0$, joten

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\nu' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c} = \nu' \sqrt{\frac{(1 - v/c)(1 + v/c)}{(1 - v/c)^2}} \\ &= \nu' \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \end{aligned} \quad (132)$$

Tässä tapauksessa $\nu > \nu'$, siis havaitun säteilyn taajuus on suurempi, mitä kutsutaan *sinisiirtymäksi*. Suoraan havaitsijasta poispäin loittonevalle lähteelle $\theta = \pi$ ja

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} = \nu' \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (133)$$

Nyt $\nu < \nu'$, mitä kutsutaan *punasiirtymäksi*. Mikäli valolähde ohittaa havaitsijan näkökentän kohtisuorassa suunnassa, on $\theta = \pi/2$ eli $\cos \theta = 0$. Tällöin havaittu taajuus poikkeaa valolähteen lepotaajuudesta yhtälön

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (134)$$

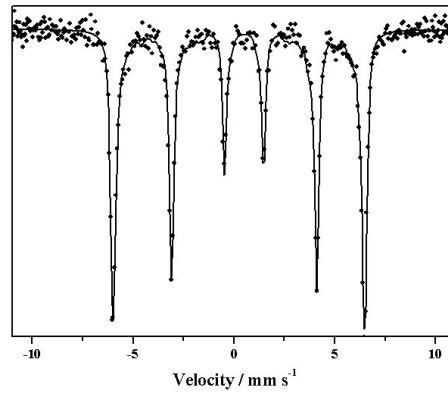
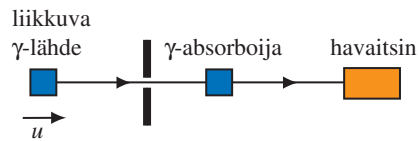
mukaan.

Dopplerin ilmiötä kuvaava lauseke (131) poikkeaa vastaavasta epärelativistisesta kaavasta tekijän $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1 - \frac{1}{2}v^2/c^2 + \dots$ osalta. Yleisenä piirteenä suhteellisuusteorian antamille korjauksille on se, että ne sisältävät v/c :n toisia tai korkeampia potensseja.

Dopplerin ilmiön tärkeä sovellus on tähtitieteessä.

Havaitaan että kaukaisista galakseista tulevalta valolla on samoja spektriviivoja kuin tietyillä alkuaineilla maan päällä mitattuna, mutta ne ovat punasiirtyneet. Punasiirtymä tulkitaan galaksien etääntymisenä meistä.

Mainitaan toisena esimerkkinä Mössbauer-spektroskopia. Jotkin radioaktiiviset ytimet lähettävät gamma-säteilyä, jonka kvantin energialla on hyvin täsmällinen arvo. Toinen samanlainen ydin (mutta eri ympäristössä oleva) voi absorboida tämän vain siinä tapauksessa että niiden suhteellinen nopeus on sopiva niin että Doppler-siirtymä kumoaa näiden energiatilojen erotuksen.



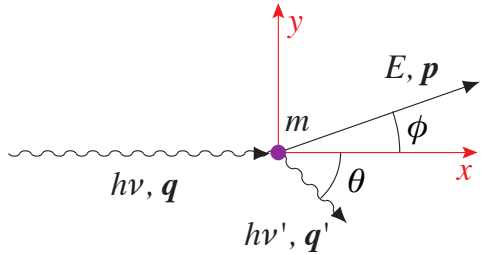
Kuvassa (lähde [Wikipedia](#)) on esimerkki Mössbauer-spektristä eli havaittu intensiteetti lähdekiteen nopeuden funktiona. Lähdekiteessä ydinreaktion $^{57}\text{Co} \rightarrow ^{57}\text{Fe}$ seurauksena ^{57}Fe on viritetyssä tilassa, joka purkautuu gammasäteilyinä, jonka kvantin energia on noin

14.4 keV. Absorboijakide on götiittiä FeO(OH), minkä magneettisuudesta johtuen absorptio ^{57}Fe :ssa voi tapahtua kuudella lähekkäisellä energia-arvolla. Tässä kuvattu Mössbauer-spektri voidaan havaita vain kiteessä olevilla ytimillä. Miksi, palataan siihen pian.

Comptonin sironta

Compton tutki röntgensäteiden sirontaa kevyistä alkuaineista 1920-luvulla. Kokeessa nähtiin että sironneen säteilyn taajuus oli pienentynyt alkuperäisestä. Compton selitti ilmiön säteilyn kvanttiteorian avulla. Kun säteilykvantti siroaa näytteen elektronista, elektroni kokee iskun. Näin fotonin menettää osan energiastaan, jolloin sen taajuus pienenee.

Alkutilassa on fotonin taajuudella ν ja liikemäärällä \mathbf{q} sekä levossa oleva elektroni, jonka lepomassa on m . Lopputilassa fotonin on sironnut liikemäärälle \mathbf{q}' kulmaan θ , ja sen taajuus on ν' . Elektronin liikemäärä ja energia lopputilassa ovat \mathbf{p} ja E .



Energioita ja liikemääriä sitovat relaatiot

$$\begin{aligned} h\nu &= cq \\ h\nu' &= cq' \\ E &= c\sqrt{c^2m^2 + p^2}. \end{aligned} \quad (135)$$

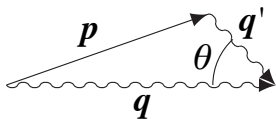
Energian ja liikemäärän säilymisytälöistä (122) saadaan

$$\begin{aligned} h\nu + c^2m &= h\nu' + E \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}' + \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (136)$$

Ilmaisemalla molemmat yhtälöt liikemäärien avulla saadaan

$$\begin{aligned} q + cm &= q' + \sqrt{c^2m^2 + p^2} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}' + \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (137)$$

Liikemäärän säilymlaki voidaan esittää liikemäärävektoreiden muodostaman kolmion avulla.



Pyritään eliminoimaan p yhtälöistä (137). Lausumalla $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{q}'$ ja neliöimällä saadaan

$$p^2 = q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta. \quad (138)$$

Sijoittamalla tämä energian säilymisen kaavaan (137) saadaan

$$q + cm = q' + \sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta + c^2m^2}.$$

Jotta tästä saataisiin ratkaistuksi q' , on päästävä eroon neliöjuuresta. Järjestelemällä ja neliöön korottamalla saadaan

$$(q - q' + cm)^2 = q^2 + q'^2 - 2qq' \cos \theta + c^2m^2. \quad (139)$$

Suorittamalla yhtälön (139) vasemmalla puolella neliöön korotus saadaan sievennyksen jälkeen

$$cm(q - q') = qq'(1 - \cos \theta), \quad (140)$$

josta tekijällä qq' jakaen ja yhtälöitä (135) hyväksi käyttäen saadaan

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{c^2m}(1 - \cos \theta). \quad (141)$$

Koska $1/\nu = \lambda/c$, yhtälö (141) antaa Comptonin sironnassa tapahtuvalle fotonin aallonpituuden muutokselle $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ lausekkeen

$$\Delta\lambda = \frac{h}{cm}(1 - \cos \theta). \quad (142)$$

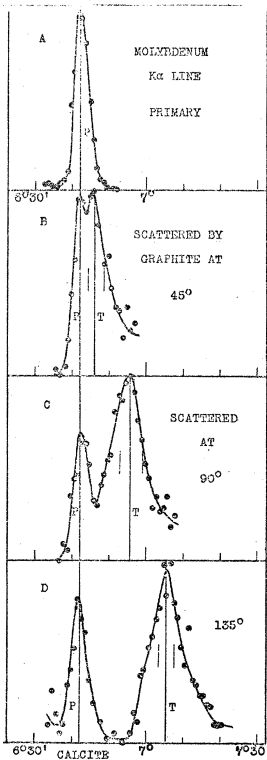
Suure $\lambda_0 = h/cm = 2.4 \times 10^{-12}$ m on ns. elektronin Comptonin aallonpituus. Koska kaavassa (142) esiintyy Planckin vakio päätellään, että tätä tulosta ei voi johtaa klassisesta fysiikasta lähtien.

Yhtälöstä (142) nähdään, että aallonpituuden muutos on suurin, kun $\theta = \pi$, jolloin fotonin siroaa alkuperäisen liikesuunnan kanssa vastakkaiseen suuntaan. Suurin siirtymä on siis

$$\Delta\lambda_{\max} = \frac{2h}{cm}. \quad (143)$$

Mikäli $\theta = 0$, ei aallonpituus muutu.

Yllä oleva lasku antaa ratkaisun Comptonin sirontaan niin paljon kuin asiasta voi pelkkien säilymlakien avulla päätellä.



Oheisessa kuvassa Comptonin alkuperäiset mittaustulokset [Physical Review **22**, 409 (1923)]. Röntgenputken kohtiona käytettiin molybdeeniä, josta emittoituu tietyn energistä ($E = 17.5$ keV, $\lambda = 71$ pm) röntgensäteilyä elektronien osuessa siihen (kuva A). Säteily siroaa grafiitin elektroneista ja se havaitaan kolmessa eri kulmassa (B: 45° , C: 90° , D: 135°). Sironneen säteilyn spektri saadaan selville kääntämällä kalsiittikidettä (CaCO_3), mistä säteily heijastuu Braggin lain mukaan. (Tämä opitaan kiinteän aineen fysiikan kursseilla.) Kuvissa vaaka-akselina on kiteen kääntökulma, joka on verrannollinen säteilyn aallonpituuteen.

Hiukkasen hajoaminen

Epästabiilit hiukkaset voivat hajota kahdeksi tai useammaksi tytärihuikkaseksi. (Tämän vastakkaisprosessia fuusiota tutkittiin jo lyhyesti edellä.) Hajoamisessa energia ja liikemäärä säilyvät. Prosessia on helpoin tutkia lähtöhiukkasen lepokoordinaatistossa, missä neliliikemäärän säilyminen antaa

$$\begin{aligned} Mc^2 &= E_1 + E_2 \\ 0 &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (144)$$

Tässä M on hajoavan hiukkasen massa ja tytärihuikkasille $E_1^2/c^2 = c^2m_1^2 + p_1^2$ ja $E_2^2/c^2 = c^2m_2^2 + p_2^2$. Liikemäärän säilymisestä saadaan $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$. Tämän jälkeen p :lle jää yhtälö

$$Mc = \sqrt{c^2m_1^2 + p^2} + \sqrt{c^2m_2^2 + p^2}. \quad (145)$$

p :n ratkaisu tästä vaatii ensin neliöjuurien eliminoimista. Tässä tapauksessa se onnistuu neliöön korottamalla

kahteen kertaan ja sopivasti järjestelemällä välissä. Käytetään kuitenkin vaihtoehtoista menetelmää kirjoittaa säilymisytälöt energioiden avulla muotoon

$$\begin{aligned} Mc^2 &= E_1 + E_2 \\ 0 &= \sqrt{E_1^2 - c^4m_1^2} - \sqrt{E_2^2 - c^4m_2^2}. \end{aligned} \quad (146)$$

Siirtämällä tässä neliöjuurilausekkeet eri puolille ja korottamalla neliöön saadaan yhtälöryhmä, missä ei esiinny neliöjuuria. Tämän ratkaisu on

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}c^2 \\ E_2 &= \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}c^2. \end{aligned} \quad (147)$$

Energiasta saadaan sitten ratkaistua myös liikemäärä

$$p_1 = p_2 = \frac{c}{2M} \sqrt{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2}. \quad (148)$$

Lasketaan vielä hiukkasen 1 kineettinen energia

$$E_{1\text{kin}} = E_1 - c^2m_1 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M}c^2. \quad (149)$$

Tämä voidaan tulkita hiukkasen 1 rekyylienergiaksi hiukkasen 2 emittoituessa. Tämän avulla voidaan hiukkasen 2 energia kirjoittaa muodossa

$$E_2 = (M - m_1)c^2 - E_{1\text{kin}}. \quad (150)$$

Tässä ensimmäinen termi kuvaa energiaa, joka vapautuu lähtöhiukkasen muuttuessa hiukkaseksi 1. Hiukkanen 2 saa tämän energian hiukkasen 1 rekyylienergialla vähennettynä. Tarkastellaan hajoamisen erikoistapauksia.

Esimerkki 1. Hajoaminen kahdeksi fotoniksi

Fotoneille $m_1 = m_2 = 0$. Kaavoista (147) saadaan että hajoavan hiukkasen energia jakautuu tasan kahden vastakkaisiin suuntiin etenevän fotonin kesken.

Esimerkki 2. Kaonin hajoaminen

Kaoni K^+ ($c^2M = 494$ MeV) voi hajota myoniksi μ^+ ($c^2m_1 = 106$ MeV) ja neutriinoksi ν , jonka lepomassa on mitätön. Neutriinon energiaksi K^+ :n leposysteemissä saadaan kaavasta (147) laskettuna 236 MeV.

Esimerkki 3. Fotonin emissio.

Edellä olevia kaavoja voi soveltaa myös atomiin tai atomiytimeen, jonka viritetty tila purkautuu fotonin emissiona. Tällöin $m_2 = 0$. Kaavasta (150) nähdään että lähtevän fotonin energia on rekyylienergialla pienempi kuin atomin/ytimen energiatilojen erotus $\Delta E = (M - m_1)c^2$.

Dopplerin ilmiön yhteydessä tarkasteltiin ^{57}Fe :n gamma-emissiota ja absorptioa. Jos lasketaan tästä yhdelle rauta-atomille aiheutuva rekyylienergia, todetaan että sen kompensoimiseen Doppler-siirtymällä tarvittava

nopeus on noin 40 m/s. Se että näin suuria nopeuksia ei tarvita, voidaan selittää että atomi on kiteessä, jolloin rekyyli voi jakautua koko kiteelle. Tällöin kaavassa (149) jakajana toimiva M on koko kiteen massa (vaikka $M - m_1$ on sama laskettuna yhdelle atomille tai kiteelle). Tämä suuri jakaja pienentää rekyylienergian häviävän pieneksi.

Esimerkki 4. Raketti.

Rakettimoottori toimii seuraavasti. Heitetään ulos osa massasta niin että rekyylinä loput massasta kiihtyisi. Kaavasta (149) nähdään että vakiolla massan vähennyksellä $M - m_1$, maksimaalinen rekyylienergia saadaan kun $m_2 = 0$, jolloin siis emittoidaan fotoneja. Tällaisen "fotoniraketin" ongelmana on, että fotoneita on vaikea varastoida tai tuottaa tehokkaasti. Vaikka rakettimoottori fuusiosi vetyä raudaksi, vain 0.9% massasta voisi muuttua fotoneiksi. Siksi käytännön raketeissa emittoidaan massallisia hiukkasia, esim. polttoaineen palamiskaasuja.

Massakeskipistekoordinaatisto

Tutkitaan hiukkasia joiden neliliikemäärät koordinaatistossa K ovat $p_i^\mu = (E_i/c, \mathbf{p}_i)$, missä $i = 1, 2, \dots$. Otetaan mukaan myös tapaus, jossa hiukkaset vuorovaikuttavat keskenään. Tällöin jotkin indeksin i arvot kuvaavat vuorovaikutuksista tulevia neliliikemääriä. Hiukkasten määrä voi olla mitä tahansa yhdestä ylöspäin. Mahdollisia esimerkkejä hiukkasjoukoista ovat mm. 1) kaksi vuorovaikuttamatonta hiukasta, 2) protoni, joka koostuu kvarkeista ja gluoneista, 3) makroskooppinen kappale, joka koostuu suurusluokkaa $\sim 10^{23}$:sta atomista tai 4) aurinkokunta, joka koostuu auringosta ja sitä kiertävistä planeetoista.

Muodostetaan koko järjestelmän neliliikemäärä summaamalla yksittäiset neliliikemäärät,

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = \sum_i p_i^\mu = \left(\frac{1}{c} \sum_i E_i, \sum_i \mathbf{p}_i\right). \quad (151)$$

Määritellään tämän järjestelmän *massakeskipisteen nopeus* kaavalla

$$\mathbf{u} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E} = \frac{c^2 \sum_i \mathbf{p}_i}{\sum_i E_i}. \quad (152)$$

Huomaa että relaatio \mathbf{u} :n, \mathbf{p} :n ja E :n välillä on sama kuin todettiin yhdelle kappaleelle kaavassa (109). Soveltamalla samaa kaavaa (109) yksittäisten hiukkasten liikemääriin \mathbf{p}_i , voidaan \mathbf{u} (152) kirjoittaa myös muotoon

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_i E_i \mathbf{u}_i}{\sum_i E_i}. \quad (153)$$

Tämä voidaan tulkita energioilla painotetuksi keskiarvonopeudeksi. Kun nopeudet ovat pieniä valon nopeuteen verrattuna, muodostavat hiukkasten lepoenergiat suurimman osan energiasta. Tällöin \mathbf{u} (153)

reduoituu hiukkasten lepomassoilla painotetuksi keskiarvoksi $\mathbf{u} \approx \sum_i m_i \mathbf{u}_i / \sum_i m_i$. Tämä on sama kuin massakeskipisteen nopeuden määritelmä Newtonin mekaniikassa.

Siirrytään koordinaatistosta K koordinaatistoon K^* , joka liikkuu K :n suhteen massakeskipisteen nopeudella $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ (152). Valitaan x -akseli \mathbf{u} :n suuntaan, jolloin voidaan käyttää Lorentz-muunnosta (104). Soveltamalla tätä kokonaisneliliikemäärään saadaan

$$\begin{aligned} E^*/c &= \gamma(E/c - \frac{v}{c}p) \\ p_x^* &= \gamma(-\frac{v}{c}E/c + p) \\ p_y^* &= 0 \\ p_z^* &= 0. \end{aligned} \quad (154)$$

Sijoittamalla $v = u$ kaavasta (152) p_x^* :n kaavaan todetaan että

$$p^* = 0. \quad (155)$$

Tällaista koordinaatistoa K^* , jossa kokonaisliikemäärä häviää, kutsutaan *massakeskipistekoordinaatistoksi*. Ensimmäisestä kaavasta (154) saadaan pienen laskun jälkeen kokonaisenergia massakeskipistekoordinaatistossa

$$E^* = \sqrt{E^2 - c^2 p^2}. \quad (156)$$

Toinen tapa johtaa kaava (156) on huomata että neliliikemäärävektorin (151) pituus $\sqrt{E^2/c^2 - p^2}$ on neliskalaari, jonka arvo on sama kaikissa koordinaatistoissa. Koska massakeskipistekoordinaatistossa $p^* = 0$, saadaan kaava (156).

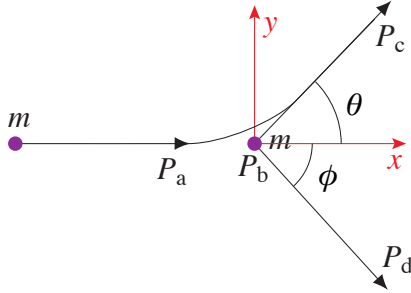
E^* voidaan tulkita hiukkasjoukon lepoenergiaksi, $E^* = c^2 m^*$. Näin nähtynä kaava (156) on ekvivalentti yhdelle kappaleelle johdetun kaavan (107) kanssa. Huomaa että näin määritelty hiukkasjoukon lepomassa m^* ei ole vain yksittäisten hiukkasten lepomassojen summa vaan se sisältää myös hiukkasten keskinäisistä nopeuksista tulevat kineettiset energiat ja vuorovaikutuspotentiaaleista tulevan osuuden. (Tämä on sama asia kuin mistä keskusteltiin energian yhteydessä luvussa 4.2).

On kiinnostavaa huomata että hiukkasjoukon kaavat (152) ja (156) ovat samat kuin vastaavat aiemmin yhdelle kappaleelle johdetut kaavat (109) ja (107). Näin ollen hiukkasen liikettä tutkimalla ei voi erottaa onko se alkeishiukkanen vai koostuuko se pienemmistä yhteen liittyneistä osista.

Elastinen sironta

Hiukkaskiihdyttimissä korkeisiin energioihin kiihdytetyt hiukkaset ohjataan törmäämään laboratorion suhteen levossa olevan kohteen hiukkasiin. Yksinkertaisin vuorovaikutus ammushiukkasen ja kohtiohiukkasen välillä

on elastinen sironta, jota käsittelemme tässä luvussa. Rajoitutaan tutkimaan tapausta missä ammus- ja kohtiohiukkasilla on sama massa.



Kuva esittää sirontaprosessia laboratoriokoordinaatistossa. Hiukkanen, jonka lepomassa on m ja neliliikemäärä P_a , törmää samamassaiseen levossa olevaan hiukkaseen, jonka neliliikemäärä on P_b . Törmäävä hiukkanen siroaa kulmaan θ ja sen neliliikemäärä törmäyksen jälkeen on P_c . Alun perin levossa oleva hiukkanen lähtee kulmaan ϕ neliliikemäärällä P_d . Valitaan koordinaatisto siten että hiukkanen a liikkuu ennen törmäystä x -akselin suuntaan ja sironta tapahtuu xy -tasossa. Yhtälöistä (103) ja (106) sekä oheisesta kuvasta saadaan hiukkasten a, b, c ja d neliliikemäärille seuraavat komponenttiesitykset:

$$\begin{aligned} P_a &= (E_a/c, p_a, 0) \\ P_b &= (E_0/c, 0, 0) \\ P_c &= (E_c/c, p_c \cos \theta, p_c \sin \theta) \\ P_d &= (E_d/c, p_d \cos \phi, -p_d \sin \phi), \end{aligned} \quad (157)$$

missä $p_i = \sqrt{E_i^2 - E_0^2}/c$ ja E_i ovat hiukkasen i liikemäärä ja energia vastaavasti ja $E_0 = mc^2$ on kunkin hiukkasen lepoenergia. Nelivektorien komponentit on lueteltu järjestyksessä (ct, x, y) .

Sirontaprobleema voitaisiin käsitellä suoraan laboratoriokoordinaatistossa ratkaisemalla neliliikemäärän säilymislaista

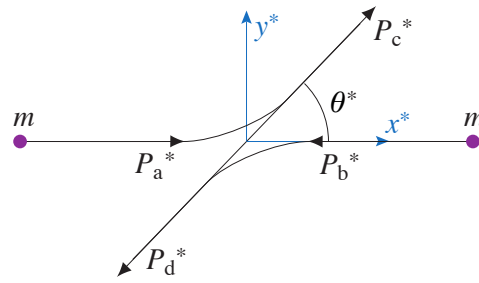
$$P_a + P_b = P_c + P_d \quad (158)$$

saatava kolmen komponenttiyhtälön ryhmä. Kuitenkin tällainen käsittely on työlästä neliöjuurilausekkeista ja kahden kulman trigonometrisista funktioista johtuen. Yksinkertaisempaa on käsitellä problemaa ensin massakeskipistekoordinaatistossa. Merkitään hiukkasten liikemääriä massakeskipistekoordinaatistossa ennen törmäystä \mathbf{p}_a^* ja \mathbf{p}_b^* . Määritelmän mukaan näille pätee

$$\mathbf{p}_a^* + \mathbf{p}_b^* = \mathbf{0}. \quad (159)$$

Hiukkaset siis liikkuvat toisiaan kohti yhtä suurilla mutta vastakkaisuuntaisilla liikemäärillä, $\mathbf{p}_b^* = -\mathbf{p}_a^*$. Koska hiukkasilla on yhtä suuret lepomassat, myös niiden energiat ovat samat, $E_a^* = E_b^*$ [kaavan (106) perusteella]. Kun valitaan alkutilan liikemäärät x -akselin suuntaisiksi saadaan

$$p_{a,x}^* = -p_{b,x}^* = \frac{1}{c} \sqrt{E_a^{*2} - m^2 c^4} = p_a^*. \quad (160)$$



Kuvassa hiukkasten neliliikemäärät massakeskipistekoordinaatistossa ennen sirontaa ovat P_a^* ja P_b^* sekä sirontan jälkeen P_c^* ja P_d^* . Sirontakulma on θ^* . Neliliikemäärän säilymisestä johtuen hiukkaset liikkuvat sirontan jälkeen toisistaan pois päin yhtä suurilla nopeuksilla ja energioilla. Hiukkasten neliliikemäärille massakeskipistekoordinaatistossa saadaan seuraavat komponenttiesitykset:

$$\begin{aligned} P_a^* &= (E_a^*/c, p_a^*, 0) \\ P_b^* &= (E_a^*/c, -p_a^*, 0) \\ P_c^* &= (E_a^*/c, p_a^* \cos \theta^*, p_a^* \sin \theta^*) \\ P_d^* &= (E_a^*/c, -p_a^* \cos \theta^*, -p_a^* \sin \theta^*). \end{aligned} \quad (161)$$

Probleema on ratkaistu massakeskipistekoordinaatistossa. Tulokset on kuitenkin lausuttava vielä laboratoriokoordinaatistossa, jossa mittaukset suoritetaan. Kaavoista (152) saadaan massakeskipistekoordinaatiston nopeus $v = u = c^2 p_a / (E_a + E_0)$. Kokonaisenergia $E^* = 2E_a^*$ saadaan kaavasta (156), mistä lasketaan

$$E_a^* = \sqrt{\frac{E_0(E_a + E_0)}{2}}. \quad (162)$$

Kaavasta (160) saadaan sitten

$$p_a^* = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{E_0(E_a - E_0)}{2}}. \quad (163)$$

Nyt on kaikki massakeskipistekoordinaatiston parametrit, jotka esiintyvät kaavoissa (161), kiinnitetty alkutilan parametrien funktioina paitsi θ^* , jota ei voi määrätä pelkistä säilymislaeista lähtien. Lopputilan suuret laboratoriokoordinaatistossa saadaan nyt neliliikemääräistä (161) käänteisellä Lorentzin muunnoksella

$$\begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^*/c \\ p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \end{pmatrix}. \quad (164)$$

Soveltamalla tätä lopputilan neliliikemääriin (157) ja (161) saadaan kaavat

$$\begin{aligned} E_c/c &= \gamma(E_a^*/c + \frac{v}{c} p_a^* \cos \theta^*) \\ p_c \cos \theta &= \gamma(\frac{v}{c} E_a^*/c + p_a^* \cos \theta^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_c \sin \theta &= p_a^* \sin \theta^* \\
E_d/c &= \gamma(E_a^*/c - \frac{v}{c} p_a^* \cos \theta^*) \\
p_d \cos \phi &= \gamma(\frac{v}{c} E_a^*/c - p_a^* \cos \theta^*) \\
-p_d \sin \phi &= -p_a^* \sin \theta^*.
\end{aligned} \tag{165}$$

Sijoittamalla kaikki suureet ensimmäisen yhtälön oikealle puolelle saadaan

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}[E_a + E_0 + (E_a - E_0) \cos \theta^*] \\
&= E_0 + \frac{1}{2}(E_a - E_0)(1 + \cos \theta^*) \\
&= E_0 + (E_a - E_0) \cos^2 \frac{\theta^*}{2}.
\end{aligned} \tag{166}$$

Neljännestä yhtälöstä saadaan vastaavasti

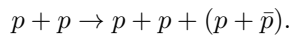
$$E_d = E_0 + (E_a - E_0) \sin^2 \frac{\theta^*}{2}. \tag{167}$$

Yhtälöistä (166) ja (167) todetaan, että ammuhiukkasen a kineettinen energia jakautuu sironnan jälkeisten hiukkasten c ja d kineettisiksi energioiksi osuuksilla $\cos^2(\theta^*/2)$ ja $\sin^2(\theta^*/2)$.

Hiukkasreaktion kynnyenergia

Kahden hiukkasen keskinäisessä sironnassa voi syntyä uusia hiukkasia, jos törmäysenergia on riittävän korkea. Uusien hiukkasten syntyyn tarvittava kynnyenergia on helpointa laskea massakeskipistekoordinaatistossa. Määritetään aluksi protoni-antiprotoniparin syntymiseen vaadittava energia törmäytettäessä vetyatomin ydintä eli protonia toiseen levossa olevaan protoniin.

Antiprotoni (\bar{p}) on protonin lepomassan omaava hiukkanen, jonka varaus on protonin varauksen suuruinen, mutta vastakkaismerkkinen. Protoni-antiprotoniparin syntyprosessi voidaan esittää reaktioyhtälönä



Pienin energia, joka vaaditaan $p - \bar{p}$ -parin syntymiseen riittää hiukkasten lepoenergiaan, muttei liike-energiaan, joten prosessin jälkeinen neljän hiukkasen systeemi on massakeskipistekoordinaatiston suhteen levossa. Jos protonin lepomassa merkitään m , ovat systeemin kokonaisenergia ja -liikemäärä siis

$$E^* = 4mc^2 \quad \text{ja} \quad p^* = 0. \tag{168}$$

Pyritään lausumaan kynnyenergiaehto (168) laboratorikoordinaatistossa. Tähän voidaan käyttää kaavaa (156), missä $E = E_a + E_0$ ja $p = p_a = \sqrt{E_a^2 - E_0^2}/c$. Ratkaisemalla E_a saadaan kynnyenergialle arvo

$$E_a = 7E_0. \tag{169}$$

Pelkästään energian säilymisen kannalta riittäisi että ammusprotonin energia olisi lepoenergiaan verrattuna kolminkertainen, mutta koska liikemäärän on myös säilyttävä, tarvitaan energia seitsemänkertaisena.

Parin muodostus

Säilymislaite estävät fotonia suoraan muuttumasta kahdeksi hiukkaseksi (harjoitustehtävä). Jos mukana on myös atomiydin, voi fotoni synnyttää kaksi hiukkasta, esim. elektronin ja sen antihhiukkasen positronin. Tätä kutsutaan parin muodostumiseksi. Atomytimen rooli on ottaa vastaan suuri osa fotonin liikemäärästä. Raskaana hiukkasena sen rekyylienergia on pieni. Tämän takia parin muodostuksen kynnyenergia on lähellä $E_{\text{fotoni}} = h\nu \approx 2c^2m = 1.02 \text{ MeV}$, missä m on elektronin lepomassa. (Positronin lepomassa on sama kuin elektronin). Parin muodostus ja Comptonin sironta ovat tärkeitä gamma-säteilyä vaimentavia prosesseja.

7. Satelliittipaikannus

GPS (Global positioning system) perustuu 24:ään maata n. 26000 km:n korkeudessa kiertävään satelliittiin, joissa on tarkat kellot ja joiden paikat tunnetaan tarkkaan. Nämä satelliitit lähettävät mikroaaltotaajuisia signaaleja, joissa on tieto satelliitin paikasta ja lähetysajasta t_1 . Vastaanottolaite pystyy tällaisen signaalin saapumisajasta t_2 laskemaan oman etäisyytensä s kuhunkin kuuluvissa olevaan satelliittiin kaavalla $s = c(t_2 - t_1)$. Näistä etäisyytiedoista ja satelliittien paikoista vastaanottolaite (esim. puhelimesi) pystyy päättämään oman sijaintinsa. Valon nopeuden suuresta arvosta johtuu, että jotta etäisyys saataisiin tarkasti, on aika mitattava hyvin tarkasti. Tarkastellaan miten suhteellisuusteoria vaikuttaa tähän.

Merkitään satelliitin nopeutta v :llä. Ajan venymäkaavan mukaan satelliitin kellon ominaisaika τ eroaa maanpäällisen kellon ajasta t kaavalla

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \approx \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt. \quad (170)$$

Tämän lisäksi yleinen suhteellisuusteoria, missä käsitellään painovoimaa, antaa lisäkorjauksen niin, että edellisen kaavan sijasta pitää kirjoittaa

$$d\tau = \left(1 + \frac{\Phi - \Phi_E}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt. \quad (171)$$

Tässä $\Phi = -GM/r$ on painovoimapotentiaali, M on maan massa, r etäisyys maan keskipisteestä, $\Phi_E = -GM/r_E$ on painovoimapotentiaali maan pinnalla ja r_E on maapallon säde. Testimassaan m kohdistuva painovoima saadaan potentiaalista kaavalla $\mathbf{f} = -m\nabla\Phi$. [Totea että tämä on ekvivalentti kaavan (7) kanssa.]

Ympyräradalla saadaan keskeiskiihtyvyydestä ja painovoimasta ehto

$$v^2 = \frac{GM}{r}. \quad (172)$$

Sijoittamalla tämä kaavaan (171) saadaan

$$d\tau = \left[1 + \frac{GM}{c^2 r_E} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_E}{r}\right)\right] dt. \quad (173)$$

Nähdään että matalilla radoilla, $r < \frac{3}{2}r_E$, ajan venymällä on suurempi vaikutus kuin painovoimalla ja satelliitin kello käy hitaammin kuin maassa. GPS-satelliittien radoilla on toisin päin, satelliitin kello käy korjaustekijällä 4.4×10^{-10} nopeammin. Jos tätä ei otettaisi huomioon GPS-järjestelmässä, joutuisivat satelliittien ja maan kellot jo 10 minuutin kuluttua sykronoinnista aikaeroon, joka vastaa 80 m:n paikannusvirhettä.

8. Lopuksi

Suhteellisuusteoriassa on suuri merkitys tieteelliselle maailmankuvalle. Se on selvittänyt mm.

- absoluuttista lepotilaa ei voida määrittää
- aika ei ole absoluuttista
- valoa nopeampia signaaleja ei ole
- energian ja massan ekvivalenssi
- mistä on peräisin auringon ja ydinreaktioiden energia

Suhteellisuusteoria on aivan keskeinen työkalu mittauksissa, joissa tutkitaan hiukkasia, joiden nopeus on lähellä valon nopeutta, mm. hiukkaskiihdyttimissä. Lukuun ottamatta valon äärellisen nopeuden vaikutusta, suhteellisuusteorian vaikutus arkipäivän tekniikkaan on vähäisempi, sillä useimmissa sovellutuksissa kappaleiden nopeudet ovat niin pieniä valon nopeuteen verrattuna, että suhteellisuusteoreettiset vaikutukset ovat mitättömiä. Kuitenkin esim. GPS paikannuksessa, jossa paikka mitataan eri satelliiteista tulevien signaalien aikaeroilla, on oleellista ottaa huomioon suhteellisuusteoriasta seuraavat vaikutukset satelliittien kelloihin.

Liitteet

A. Taylorin sarja

Oletetaan että on laskettavana $(1+x)^n$ missä x on hyvin pieni ykköseen verrattuna ($x \ll 1$), esimerkiksi $x = 10^{-15}$, ja n vaikkapa $1/2$ tai 2 . Useimmat laskimet pyöristävät vastaukseksi tasan 1 . Suhteellisuusteoriassa usein esiintyy laskuja, joissa tämä tarkkuus ei riitä, vaan luvun $(1+x)^n$ poikkeama ykkösestä on olennainen. Yleisesti tällainen ongelma ratkaistaan käyttämällä Taylorin sarjaa, missä yleinen funktio $f(x)$ kirjoitetaan potenssisarjana x :n suhteen,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (174)$$

Oletetaan että funktio $f(x)$ on hyvin käyttäytyvä pisteen $x = 0$ ympäristössä, jolloin sarja suppenee x :n ollessa riittävän pieni. Kertoimien a_k arvot saadaan seuraavasti. Sijoittamalla kaavaan (174) $x = 0$ saadaan $a_0 = f(0)$. Derivoimalla sarjaa (174) kertaalleen saadaan

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \quad (175)$$

Sijoittamalla tähän $x = 0$ saadaan $a_1 = f'(0)$. Derivoimalla edelleen ja sijoittamalla saadaan $a_2 = f''(0)/2$, $a_3 = f'''(0)/6$, jne. Sijoittamalla saadut kertoimet kaavaan (174) saa se muodon

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots \end{aligned} \quad (176)$$

Soveltamalla Taylorin sarjaa lausekkeeseen $(1+x)^n$ saadaan

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2), \quad (177)$$

missä $O(x^2)$ tarkoittaa termiä, joka on verrannollinen toiseen tai korkeampaan x :n potenssiin. Jos $x \ll 1$ on tämä termi vielä merkittävästi pienempi kuin termi nx , ja voidaan siksi useimmiten unohtaa. Kaava (177) on erittäin hyödyllinen monissa fysiikan ongelmissa. Siitä saadaan välittömästi erikoistapauksina mm. kaavat

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2), \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + O(x^2), \\ \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4), \\ \sqrt{1-x^2} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4), \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4), \dots \end{aligned} \quad (178)$$

[Päättele nämä kaavasta (177).]