

HYDRODYNAMIIKKA
763654S

Erkki Thuneberg

Fysiikan laitos
Oulun yliopisto
2011

Järjestelyjä

Kurssin verkkosivu on
<https://www oulu.fi/tf/hd/index.html>

Verkkosivulta löytyy luentomateriaali (tämä moniste), harjoitustehtävät ja myöhemmin myös harjoitustehtävien ratkaisut. Katso sieltä myös mahdolliset muutokset luento- ja harjoitusaikoihin.

Aikataulut 2011

Luennot: ti 10-12, sali TE320 (6.9.-29.11.)

Harjoitukset: ma 10-12, to 10-12, sali TE320 (12.9.-1.12.)

Tentti:

Harjoitusassistentti: Matti Silveri

Kurssiin kuuluvat oleellisena osana laskuharjoitukset, joiden tehtävät laitetaan kurssin verkkosivulle pian vastaavan luennon jälkeen. Määräaikaan mennessä näytetyistä tehdyistä harjoituksista saa yhden arvosanapykälän korotuksen loppuarvosanaan. (Ei pisterajoja, jokainen tehtävä vaikuttaa paitsi että loppuarvosana pyöristetään kokonaisluvuksi.) Korostettakoon että nämä lisäpisteet ovat vain pieni lisä siihen hyötyyn, joka laskuharjoitusten tekemisestä on kurssin asian ymmärtämiselle ja siten tenttimenestykselle.

Harjoitustehtäviä kannattaa yrittää laskea ensin itsenäisesti esim. kotona, varsinkin jos ei pääse kuin toiseen harjoitusajoista.

1. Johdanto

Hydrodynamiikka tarkoittaa suoraan käännettynä veden liikeoppia. Nykyisin hydrodynamiikalla tarkoitetaan paljon yleisempää käsitettä. Kaikkein yleisimmässä mielessä *hydrodynaaminen teoria* tarkoittaa makroskooppista teoriaa eli vastakohtaa *mikroskooppiselle teorialle*. Mikroskooppisessa teoriassa materian käyttäytymistä pyritään selittämään lähtien yksittäisistä hiukkasista. Tapauksesta riippuen nämä hiukkaset voivat olla esimerkiksi elektroneja, atomeja tai molekyyliä. (Joissain tapauksessa hiukkaset saattavat olla tähtiä jotka muodostavat galaksin.) Hydrodynaamisessa teoriassa hiukkasjoukkoa tarkastellaan mittakaavalla L , joka on paljon suurempi kuin hiukkasten välimatka a , siis $L \gg a$. Tällöin yksittäisten hiukkasten liikkeen sijasta käsitellään niiden keskimääräistä liikettä. Monissa tapauksissa aineen hiukkasmainen rakenne voidaan kokonaan jättää huomiotta, ja käsitellä ainetta täysin jatkuvana.

Yksinkertainen esimerkki yleisestä hydrodynaamisesta teoriasta on *Hooken laki*. Sen mukaan voima F , joka tarvitaan sauvan venyttämiseksi, on verrannollinen sauvan venymään s sekä poikkipinta-alaan A ja kääntäen verrannollinen sauvan pituuteen l . Kaavana

$$F = Y \frac{As}{l}. \quad (1)$$

Verrannollisuuskertoimena esiintyy materiaalia kuvaava parametri Y , Youngin moduuli. Hydrodynaamisissa teorioissa esiintyy tällaisia ainetta kuvaavia parametreja, joiden arvot useimmiten tiedetään mittausten perusteella. Y :n arvo on seurausta aineen atomien välisistä voimista, ja periaatteessa se voitaisiin laskea mikroskooppisella teorialla. Useimmiten tällaisen mikroskooppisen laskun tekeminen on epäkäytännöllistä, ellei mahdotonta.

Yllä olevassa mielessä hydrodynaaminen teoria voidaan muodostaa kaikille materian olomuodoille. Samaten siinä voi esiintyä sähköisiä ja magneettisia voimia. Tapauksesta riippuen kutsutaan teorioita eri nimillä.

- nesteet ja kaasut (englanniksi “fluid”)
 - ei sähkömagneettisia voimia: hydrodynamiikka
 - sähkömagneettiset voimat: magnetohydrodynamiikka ...
- kiinteät aineet
 - ei sähkömagneettisia voimia: elastisuusteoria
 - sähkömagneettiset voimat: dielektrisyysteoria ...

Suppeassa mielessä *hydrodynamiikka* tarkoittaa siis sähkövarauksettomien kaasujen ja nesteiden teoriaa mittakaavalla, jossa aineen atomaarinen rakenne ei ole oleellinen.

Suppeassakin mielessä hydrodynamiikka on hyvin laaja ala. Erikoistapauksina se sisältää mm. relativistisen, nestekiteiden ja supranesteiden hydrodynamiikan (viimeinen on oma tutkimusalani).

Tässä kurssissa tarkastelemme vain yksinkertaisten nesteiden ja kaasujen epärelativistista hydrodynamiikkaa.

Sisältö

- johdanto
- jatkuvuusyhtälö
- esimerkkivirtauksia
- nestestatiikka
- liikeyhtälön johto
- Navier-Stokes-yhtälön ratkaisuja
- Eulerin yhtälön ratkaisuja
- ääniaallot
- turbulenssi
- nesteen pinta-aallot

Esitiedot

- Fysiikan matematiikkaa
- Mekaniikka
- (Aaltoliike ja optiikka)
- (Termofysiikka)

Muiden kurssien osaaminen helpottaa kurssin ymmärtämistä, mutta ei ole välttämätöntä.

Kirjoja

Tähän kurssimonisteeseen on koottu luennoilla esitettävän materiaalin pääosa. Kuvia on kuitenkin karsittu ja suluissa oleva teksti "(kuva)" viittaa luennoilla piirrettävään kuvaan. Luentomateriaalin syventämiseksi on tarpeen perehtyä alan kirjallisuuteen. Kirjoja on lukemattomia erilaisia, joissa samat pääasiat.

- L.D. Landau ja E.M. Lifshitz, *Fluid mechanics*. Erinomaisen hyvä teoreettisesti, mutta käsittelee pääsääntöisesti ongelmia, joilla on selkeä ratkaisu. (Samassa sarjassa myös yleisen hydrodynaamisen teorian piiriin kuuluvat *Theory of elasticity* ja *Electrodynamics of continuous media*.)

- A.R. Paterson, *A first course in fluid dynamics* (1983). Pääkirjana tällä kurssilla. Kompromissi yllä ja alla olevan vaihtoehdon väliltä. Ongelmana kokeellisen datan puuttuminen.
- Y. Nakayama ja R. Boucher, *Introduction to Fluid Mechanics* (1999). Teknillisen tiedekunnan Nestemekaniikan kurssilla käytetty oppikirja. Enemmän käytännön tarpeisiin kuin tieteellisesti orientoitunut kirja.
- G.K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics* (1967). Hyvin täydellinen kirja, sisältää myös valokuvia virtauksista.

Demonstraatiofilmejä

Monet tässä kurssissa tutkitut virtaukset ja lukemattomia muita on toteutettu ja kuvattu filmeille, jotka ovat vapaasti saatavissa verkkosivulla <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>

Monia lyhyempiä ja uudempia filmipätkiä selityksineen: Multimedia Fluid mechanics, Second edition, Homsy et al (Cambridge University Press).

2. Peruskäsitteitä

2.1 Vektorimatematiikkaa

Tätä on käsitelty liitteessä.

2.2 Olomuodot

- Kiinteä aine: muotoutuu pienestä voimasta mutta palaa alkuperäiseen muotoonsa voiman poistuttua.
- Nesteet ja kaasut (fluidit): muotoutuu rajattomasti pienen voiman vaikutuksesta
 - Neste: pinta, vähän kokoonpuristuva
 - kaasu: ei pintaa, kokoonpuristuva

2.3 Jatkumomalli

Hydrodynamiikan voimassaoloalue voidaan määrittellä käyttämällä *Knudsenin lukua*

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L}. \quad (2)$$

Tässä λ on hiukkasten vapaa matka, ja L tarkasteltavaa systeemiä kuvaava pituusmitta. Hydrodynaamista teoriaa voidaan käyttää kun $L \gg \lambda$, eli $\text{Kn} \ll 1$. Muussa tapauksessa on käytettävä mikroskooppista teoriaa.

Nesteissä vapaa matka on samaa suuruusluokkaa kuin atomien koko, ~ 0.1 nm. Normaalipaineisessa ja lämpöisessä ilmassa se on jonkin verran suurempi, $\lambda \sim 100$ nm. Kaasussa vapaa matka kasvaa paineen laskiessa (kääntäen verrannollisesti paineeseen).

Keskimääräinen tiheys määritellään massan ja tilavuuden osamääränä, $\bar{\rho} = M/V$. Aineen atomaarisesta rakenteesta johtuen se ei ole hyvin määritelty kun $V \rightarrow 0$. Kuitenkin hydrodynamiikassa käytetään tiheyttä $\rho(\mathbf{r}, t)$, jonka oletetaan olevan hyvin määritelty funktio. Sillä oletetaan olevaksi esim. gradientti $\nabla\rho(\mathbf{r}, t)$. $\rho(\mathbf{r}, t)$ voidaan ymmärtää keskimääräiseksi tiheydeksi yli tilavuuden, jonka sisältää suuren määrän hiukkasia, mutta on silti hyvin pieni verrattuna L :ään.

2.4 Nopeuskenttä

Virtausta voidaan kuvata seuraamalla nestealkion liikkeitä (esim. värjäämällä ja ottamalla valokuvia).

Nestealkion paikasta $\mathbf{r}(t)$ eri ajanhetkillä määrätään nopeus

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Selvittämällä kaikkien hiukkasten radat, saadaan nopeuskenttä $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ kaikilla \mathbf{r} ja t .

Toisin päin: kun tunnetaan nopeuskenttä $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, voidaan nestealkioiden radat laskea.

Usein nopeuskenttä on tavattoman monimutkainen (esim. turbulenssi), jota ei voi esittää analyttisillä menetelmillä. Näissäkin tapauksissa keskiarvoistettu virtaus on kuitenkin jotenkin hallittavissa.

2.5 Esimerkkivirtauksia

Esimerkki 1) $\mathbf{v} = (ay, -ax, 0)$. Hiukkasradat (oik. nestealkioiden radat) saadaan yhtälöistä

$$\frac{dx}{dt} = ay, \quad \frac{dy}{dt} = -ax, \quad \frac{dz}{dt} = 0. \quad (4)$$

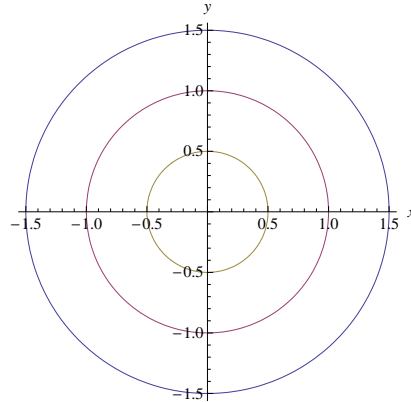
Ratkaisemalla alkuarvoilla $x = x_0, y = y_0, z = z_0, t = 0$, saadaan

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos at + y_0 \sin at \\ y &= -x_0 \sin at + y_0 \cos at \\ z &= z_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Eliminoimalla t saadaan

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x_0^2 + y_0^2 = \text{vakio} \\ z &= z_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Kyseessä on ympyrävirtaus z -akselin ympäri. Oheinen kuva esittää joitakin hiukkasratoja.



Virtauksen luonne on selvemmin nähtävissä sylinterikoordinaatistossa (r, θ, z) :

$$\begin{aligned} v_r &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta = 0 \\ v_\theta &= -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta = -ar. \end{aligned} \quad (7)$$

Kaavoja (4) vastaten saamme

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad r \frac{d\theta}{dt} = -ar, \quad \frac{dz}{dt} = 0, \quad (8)$$

mistä $r = r_0, \theta = \theta_0 - at$ ja $z = z_0$. Kyseessä on tasainen pyöriminen z -akselin ympäri.

Esimerkki 2) $\mathbf{v} = (ay, -a(x - bt), 0)$. Hiukkasratojen yhtälöt ovat samantapaisia kuin yllä. Ne voidaan kirjoittaa muotoon

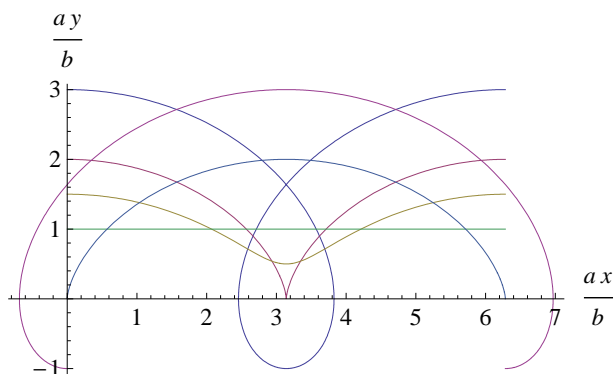
$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = a^2bt$$

$$\begin{aligned} ay &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Ratkaisemalla ensimmäinen ja sitten sijoittamalla toiseen saadaan

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos at + (y_0 - b/a) \sin at + bt \\ y &= -x_0 \sin at + (y_0 - b/a) \cos at + b/a \\ z &= z_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Tämä esittää pyörimisliikettä säteellä $\sqrt{x_0^2 + (y_0 - b/a)^2}$ ympäri pisteen $(bt, b/a, z_0)$, joka liikkuu tasaisella nopeudella. Tällaista rataa kutsutaan sykloidiksi.



Kuvassa muutamia hiukkasratoja ($x_0 = 0, at = [0, 2\pi]$).

Esimerkki 3a) $\mathbf{v} = (a(t)x, -a(t)y, 0)$, yleinen $a(t)$.
Hiukkasratojen yhtälöt

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = -a(t)y, \quad \frac{dz}{dt} = 0. \quad (11)$$

Yksi tapa on ensin ratkaista

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}, \quad (12)$$

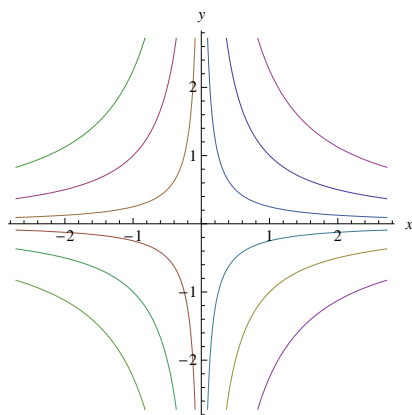
josta saadaan

$$xy = \text{vakio}. \quad (13)$$

Aikariippuvuudeksi saadaan

$$x = x_0 e^{A(t)}, \quad y = y_0 e^{-A(t)}, \quad z = z_0, \quad (14)$$

missä $A(t) = \int_0^t a(t') dt'$. Ratkaisut ovat hyperbelejä.



3b) Tapaus $a = \text{vakio}$,

$$\mathbf{v} = (ax, -ay, 0). \quad (15)$$

Tämä voisi kuvata seinämää kohtaavaa virtausta (esim. $y > 0$), jossa nopeus pisteessä $x = 0, y = 0$ häviää.

Myöhemmin osoitetaan että tämä virtaus on perusteltavissa tietyin edellytyksin, paitsi että aivan seinämän lähellä virtaus ei voi olla tätä muotoa (koska oikeassa virtauksessa nopeus kiinteällä pinnalla täytyy hävitä).

2.6 Määritelmiä

Kaksiulotteinen virtaus: $v_z \equiv 0$.

Pysyvä virtaus (steady flow): $\rho(\mathbf{r}), \mathbf{v}(\mathbf{r})$ jne. ajasta riippumattomia (esim. 1 ja 3b).

Pysähtymispiste (stagnation point): $\mathbf{v} = 0$. (esim. 1 ja 3: ajasta riippumaton piste, esim. 2: $x = bt, y = 0$)

Eulerin tarkastelutapa: kentät ilmaistu muuttujilla \mathbf{r} ja t , esim. $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Lagrangen tarkastelutapa: kentät ilmaistu muuttujilla \mathbf{r}_0 ja t , esim. $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$. Tässä \mathbf{r}_0 kuvaa hiukkasten paikkaa ajanhetkellä $t = 0$. Matemaattisesti hankalampi kuin Eulerin.

Kuvataan tarkastelutapojen eroja esimerkiksi 3b, jossa

$$x = x_0 e^{at}, \quad y = y_0 e^{-at}, \quad z = z_0, \quad (16)$$

Nopeus Lagrangen muodossa on

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}_0} = (ax_0 e^{at}, -ay_0 e^{-at}, 0). \quad (17)$$

Eulerin muoto taas on (annettu esimerkin alussa):

$$\mathbf{v} = (ax, -ay, 0). \quad (18)$$

Lasketaan kiihtyvyys samojen muuttujien mukaan.

$$\text{Lagrange : } \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}_0} = a^2(x, y, 0)$$

$$\text{Euler : } \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} = 0. \quad (19)$$

Tämä voidaan ymmärtää siten että hiukkaset kiihtyvät, mutta virtaus ei. Koskeen tuleva tukki kiihtyy koska veden nopeus sen kohdalla kasvaa. Sen sijaan rannalla oleva tarkkailija, joka katsoo vain joen yhtä kohtaa, näkee vakionopeuden.

2.7 Virtaviivat

Tarkastellaan nopeuskenttää $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ yhdellä ajanhetkellä. Sellaista käyrää joka joka paikassa \mathbf{r} on nopeusvektorin suuntainen kutsutaan *virtaviivaksi*. Esimerkiksi sääkarttaan, jossa tuulen nopeus on merkitty nuolin,

voidaan piirtää jatkuva viiva kulkien aina kussakin paikassa olevien nuolten suuntaan. (kuva)

Huomaa että virtaviiva yleisesti on eri kuin hiukkasen rata. Virtaviiva piirretään yhdellä hetkellä vallitsevan nopeuskentän mukaan. Oikealle hiukkaselle kestää aikaa kulkea paikasta toiseen. Tänä aikana virtauskenttä yleisesti on muuttunut, ja siksi hiukkanen kulkeutuu toisaalle kuin aiemman hetken mukaiset virtaviivat. Yleisesti jokaiselle hetkelle saadaan erilaiset virtaviivat. Kuitenkin jos virtaus on pysyvä, ovat virtaviivat kaikilla hetkillä samat, ja ne yhtyvät hiukkasten ratoihin.

Merkitään virtaviivan paikkavektoria $\mathbf{p}(s)$:llä, missä s on viivan parametri. Virtaviivojen yhtälö on

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \lambda \mathbf{v}(\mathbf{p}, t). \quad (20)$$

Tässä λ on mielivaltainen vakio. Siitä voidaan päästä eroon määrittelemällä s uudelleen. Tällöin saadaan virtaviivojen yhtälöksi

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{p}, t). \quad (21)$$

Tämä eroaa hiukkasen radan yhtälöstä (3) koska yhtälössä (21) t on vakio. Jos virtaus on pysyvä $[\mathbf{v}(\mathbf{p}, t) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{p})]$, voidaan s valita samaksi kuin aika, jolloin yhtälöt ovat samat.

Esimerkki 1) $\mathbf{v} = (ay, -ax, 0)$. Virtaus on pysyvä, joten sekä virtaviivat että hiukkasten radat ovat ympyröitä.

Esimerkki 2) $\mathbf{v} = (ay, -a(x - bt), 0)$. Virtaviivoille saadaan yhtälöt

$$\frac{dx}{ds} = ay, \quad \frac{dy}{ds} = -a(x - bt), \quad \frac{dz}{ds} = 0. \quad (22)$$

Näistä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} + a^2x &= a^2bt \\ ay &= \frac{dx}{ds} \\ \frac{dz}{ds} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Ratkaisemalla ensimmäinen ja sitten sijoittamalla toiseen saadaan

$$\begin{aligned} x &= (x_0 - bt) \cos as + y_0 \sin as + bt \\ y &= -(x_0 - bt) \sin as + y_0 \cos as \\ z &= z_0, \end{aligned} \quad (24)$$

missä virtaviiva arvolla $s = 0$ on valittu kulkemaan pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta. Virtaviivat ovat ympyröitä säteellä $\sqrt{(x_0 - bt)^2 + y_0^2}$ keskipisteenä $(bt, 0, z_0)$.

3. Massan säilyminen ja virtafunktio

3.1 Jatkuvuusyhtälö

Newtonin mekaniikassa massa on vakio. Jatkuvan aineen mekaniikassa massan säilymlaki ilmaistaan *jatkuvuusyhtälöllä*, joka seuraavassa johdetaan.

Tarkastellaan tiheyskenttää $\rho(\mathbf{r}, t)$. Merkitään V :llä jotain osaa avaruudesta, joka ei riipu ajasta. Tämän alueen sisällä olevalle massalle saadaan

$$M_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (25)$$

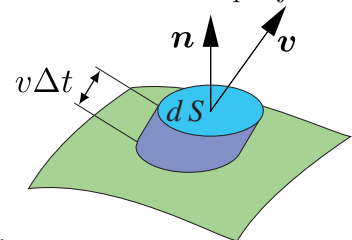
Lasketaan nyt massan $M_V(t)$ aikaderivaatta:

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV, \quad (26)$$

missä derivaatan ottaminen integraalin sisään on sallittua koska integrointialue on vakio. Toisaalta massan muutos täytyy aiheutua siitä, että massaa virtaa alueelle V ja pois sieltä. Tämä muutos voidaan ilmaista pintaintegraalina alueen V sulkevan pinnan S yli:

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \quad (27)$$

sillä $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \Delta t$ antaa pintaelementin dS läpi ajassa Δt



ulos kulkeneen massan.

Tässä $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$ on vektori, jonka pituus on pintaelementin pinta-ala dS ja sen suunta \mathbf{n} on pinta-elementin normaali osoittaen alueesta V ulospäin.

Pintaintegraali (27) voidaan Gaussin lausetta käyttäen muuttaa tilavuusintegraaliksi

$$- \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV. \quad (28)$$

Kaavoista (26)–(28) saadaan

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (29)$$

Koska alue V on mielivaltainen, täytyy integrandin olla nolla kaikkialla. Tämä antaa jatkuvuusyhtälön

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.} \quad (30)$$

Tämä on yksi keskeisimmistä hydrodynamiikan yhtälöistä.

Jos ρ on vakio, redusoituu jatkuvuusyhtälö muotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (31)$$

Jos virtaus on pysyvä (ajasta riippumaton), saadaan

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (32)$$

Seuraavassa tutkitaan vielä muita jatkuvuusyhtälön muotoja.

3.2 D/Dt

Paikassa \mathbf{r} ajanhetkellä t tiheys on $\rho(\mathbf{r}, t)$. Hetkellä $t + \delta t$ neste-elementti on paikassa $\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t$ ja sen tiheys on

$$\rho(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, t + \delta t). \quad (33)$$

Tiheyden muutos on siis

$$\begin{aligned} & \rho(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, t + \delta t) - \rho(\mathbf{r}, t) \\ &= \delta t(\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}) + O(\delta t^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Tästä voidaan päätellä, että neste-elementin tiheyden muutosnopeus on tämä jaettuna infinitesimaalisella aika-askellella δt , siis

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (35)$$

Tälle käytetään merkintää $D\rho/Dt$, siis

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho. \quad (36)$$

Tämä siis antaa Lagrangen muutoksen (seurataan hiukkasta) käyttäen Eulerin tarkastelutapaa (muuttujat \mathbf{r} ja t).

Yleisemmin D/Dt -merkintää käytetään muillekin suureille, joten kirjoitetaan

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (37)$$

[Huom! D/Dt on sama kuin kokonaisderivaatta d/dt muuttujien (\mathbf{r}, t) funktiosta. Isoa D :tä käytetään, jotta se selkeämmin erottuisi osittaisderivaatasta $\partial/\partial t$.]

Jatkuvuusyhtälö (30) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (38)$$

mikä taas on sama kuin

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (39)$$

Kokoonpuristumattomalle nesteelle $D\rho/Dt = 0$, joten

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (40)$$

Kun D/Dt -merkintää sovelletaan nopeuteen saadaan

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (41)$$

Tällä selittyy edellä olevassa esimerkissämme todettu Eulerin ja Lagrangen kiihtyvyyksien ero. Ne voidaan nyt kirjoittaa

$$\begin{aligned} \text{Lagrange : } & \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = a^2(x, y, 0) \\ \text{Euler : } & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

ja ero näiden välillä täytyy tulla termistä $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Käyttäen nopeuskenttää (18) tämä voidaan todeta laskemalla

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = (ax, -ay, 0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = ax \frac{\partial}{\partial x} - ay \frac{\partial}{\partial y}$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= (ax \frac{\partial}{\partial x} - ay \frac{\partial}{\partial y})(ax, -ay, 0) \\ &= (a^2x, a^2y, 0) = a^2(x, y, 0). \end{aligned} \quad (43)$$

3.3 Virtafunktio

Tutkitaan kokoonpuristumatonta virtausta, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, joka on kaksiulotteista

$$\mathbf{v} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}, \quad (44)$$

Kokoonpuristumattomuusehto voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (45)$$

Tästä nähdään että funktiot u ja v eivät ole riippumattomia. Systemaattisin tapa siirtyä vain yhden funktion käyttöön on määritellä *virtafunktio* $\psi(x, y)$ siten että

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (46)$$

Sijoittamalla nämä kaavaan (45) todetaan että se toteutuu automaattisesti. Patersonin kirjassa osoitetaan, että kaavojen (46) määrittelemän funktio ψ todella on olemassa.

Edellä oleva on erikoistapaus yleisemmästä teoreemasta. Se sanoo että kun

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (47)$$

niin on olemassa vektoripotentiali \mathbf{A} siten että

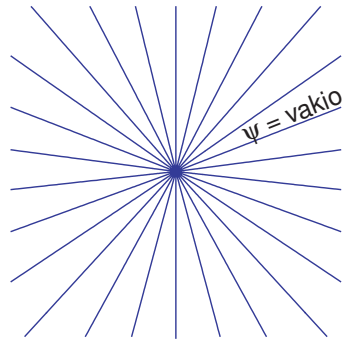
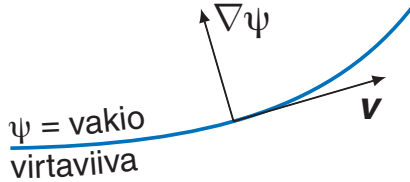
$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (48)$$

Kaksiulotteinen tapaus (46) saadaan tästä erikoistapauksena $\mathbf{A} = \psi \mathbf{k}$.

Edellä olevien määritelmien mukaan voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{v} = (\nabla\psi) \times \mathbf{k}. \quad (49)$$

Tästä nähdään, että ψ :n gradientti on kohtisuorassa \mathbf{v} :tä vastaan. Tiedetään että $\nabla\psi$ on kohtisuorassa ψ vakiokäyriä vastaan, ja \mathbf{v} taas on virtaviivan suuntainen. Saadaan että ψ on vakio virtaviivaa pitkin.



Esimerkki 4) ympyrävirtaus $v_r = 0, v_\theta(r)$. Tyypillisesti esiintyvät tapaukset ovat jäykkä pyöriminen

$$v_\theta = Dr, \quad (54)$$

missä kerroin $D = \Omega$ on kulmanopeus, ja "pyörreviiva"

$$v_\theta = \frac{C}{r}. \quad (55)$$

Jälkimmäiselle

$$\psi = -C \ln(r/a), \quad (56)$$

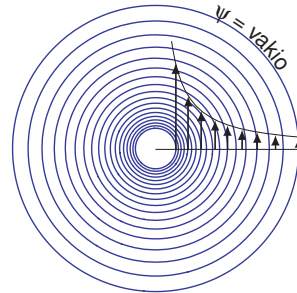
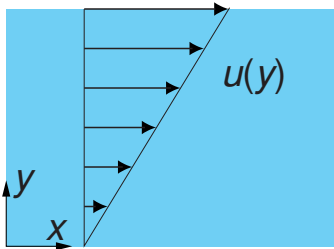
missä a on jokin pituudenlaatuinen vakio. Pyörreviivassa nopeus kasvaa rajatta viivaa lähestyttäessä, joten aivan viivan lähellä yllä oleva nopeuskenttä ei voi olla oikea.

Esimerkki 1) x -akselin suuntainen vakiovirtaus.

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = U, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad (50)$$

mistä $\psi = Uy$.

Esimerkki 2) x -akselin suuntainen tasainen "leikkausvirtaus" $u = \beta y$. (Esimerkiksi tuuli maan pinnan lähellä.) Saadaan $\psi = \frac{1}{2}\beta y^2$.



Seuraavissa esimerkeissä tarvitsemme napakoordinaatistoa, jossa

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\nabla\psi) \times \mathbf{k} = \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) \times \mathbf{k} \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial\psi}{\partial r}, \end{aligned} \quad (51)$$

ja siksi

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (52)$$

Esimerkki 3) radiaalinen virtaus $v_\theta = 0$, missä v_r sama kaikkiin suuntiin. Ratkaisu $\psi = A\theta$,

$$v_r = \frac{A}{r}. \quad (53)$$

Koska nopeus divergoi kun $r \rightarrow 0$, ei tämä virtaus voi olla realistinen origon läheisyydessä, missä virtauksella täytyy olla lähde (tai nielu jos $A < 0$). Vakio A kuvaa lähteen voimakkuutta.

Pyörteen voimakkuutta kuvaa sen *sirkulaatio*. Yleisesti sirkulaatio määritellään viivaintegraalina

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \quad (57)$$

missä integrointi on jostain nesteessä olevaa suljettua polkua l pitkin. Tämä voidaan helposti laskea pyörreviivalle (55) käyttäen polkuna origokeskeistä ympyrää. Saadaan

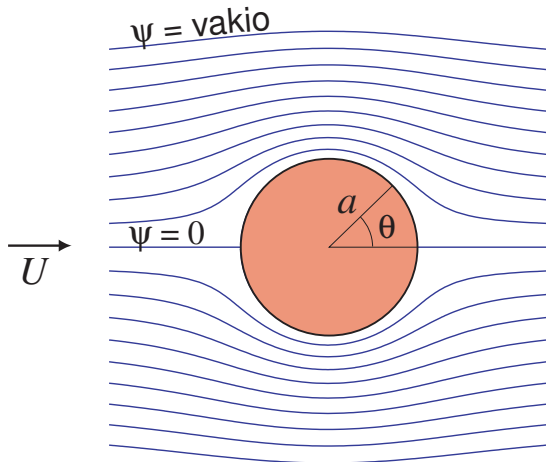
$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = 2\pi C, \quad (58)$$

mikä tulos ei riipu käytetyn ympyrän säteestä. Siten voidaan kaavoissa (55) ja (56) kirjoittaa $C = \Gamma/2\pi$.

5) Tarkastellaan virtafunktiota

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin\theta. \quad (59)$$

Osoita harjoitustehtävänä, että tämä on mahdollinen virtaus a -säteisen sylinterin ohi ainakin siinä mielessä, että mitään virtaa ei kulje pinnan $r = a$ läpi.



Myöhemmin osoitetaan että tämä virtaus on perusteltavissa tietyin edellytyksin, paitsi että aivan seinämän lähellä virtaus ei voi olla tätä muotoa (koska oikeassa virtauksessa nopeuden täytyy hävitä kiinteällä pinnalla).

4. Pyörteisyyys

Edellä tarkasteltiin suuretta $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Toinen tärkeä suure on *pyörteisyyys* $\nabla \times \mathbf{v}$, jota nyt tutkitaan. Yleisesti voidaan sanoa, että jos on annettu

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= f(\mathbf{r}), \\ \nabla \times \mathbf{v} &= \mathbf{g}(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (60)$$

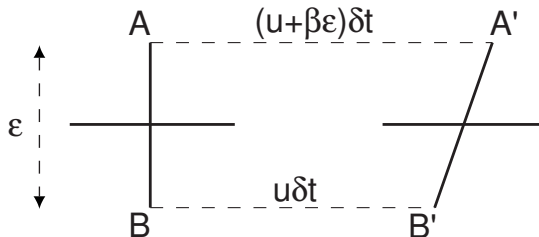
niin näistä yhtälöistä (sopivien reunaehtojen kanssa) voidaan määrätä \mathbf{v} :n kaikki kolme komponenttia.

Esimerkki pyörteisyydestä leikkausvirtauksessa:

$$\begin{aligned}u &= \beta y, & v &= 0, \\ \psi &= \frac{1}{2}\beta y^2.\end{aligned}\quad (61)$$

Tälle virtaukselle $\nabla \times \mathbf{v} = -\beta \mathbf{k}$.

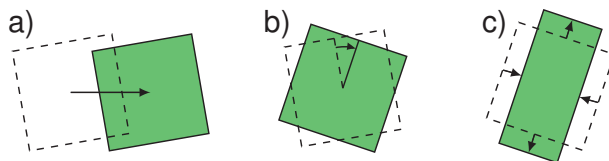
Ajatellaan laitettavaksi virtaukseen kaksi ristikkäistä tikkua ja tutkitaan niiden liikettä virtauksen mukana.



Nähdään että viiva $A'B'$ on kiertynyt kulmalla $\beta\delta t$. Koska vaakasuora viiva ei kierry, on keskimääräinen kulmanopeus $\frac{1}{2}\beta$.

4.1 Lokaali muutos

Seuraavassa on tarkoitus analysoida neste-elementin liikettä siten että se voidaan jakaa osiin a) siirtyminen, b) pyöriminen, c) muodon ja tilavuuden muutos.



Tutkitaan liikettä kahdesta alkupisteestä \mathbf{x} ja $\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$ nopeuskentässä $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Lyhyen ajan δt kuluttua ensimmäinen hiukkanen on paikassa

$$\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\delta t. \quad (62)$$

Toinen taas on paikassa

$$\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} + \mathbf{v}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)\delta t. \quad (63)$$

Taylorin sarjan alimpien termien mukaan tämä on

$$\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\delta t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{v}\delta t. \quad (64)$$

Vertaamalla pisteitä voidaan tunnistaa tasainen siirtyminen $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\delta t$. Pisteiden liikkeiden ero tulee termistä

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{v} \delta t = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \xi_j \delta t. \quad (65)$$

(Huomaa että tässä oletetaan summaus j :n yli vaikka summamerkkiä ei ole kirjoitettu.) Sama lauseke voidaan kirjoittaa myös matriisien avulla muodossa

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{v} \delta t = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \delta t. \quad (66)$$

Olellaisena tässä on tensori

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (67)$$

(Matriisia kirjoitettaessa v :n indeksi on tulkittu ensimmäiseksi, jolloin v_1 esiintyy ylimmällä vaakarivillä, v_2 seuraavalla jne.)

[Mikä on tensori?

Vektori on suure jolla on kolme komponenttia v_i , $i = 1, 2, 3$. Se eroaa mielivaltaisesta kolmen luvun joukosta sillä perusteella, että kun muutetaan koordinaatistoa (esim. karteesisesta sylinterikoordinaatistoon), nämä luvut muuttuvat, mutta silti ne tarkoittavat samaa vektoria. Täysin analogisesti, (toisen kertaluvun) tensori voidaan ilmoittaa käyttäen yhdeksää lukua A_{ij} , missä $i = 1, 2, 3$ ja $j = 1, 2, 3$, ts. matriisia

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Kun muutetaan koordinaatistoa, nämä luvut muuttuvat, mutta silti ne tarkoittavat samaa tensoria.

Koordinaattimuunnoksista on lyhyesti kerrottu liitteessä.]

Antisymmetrinen osuus

Jokainen tensori A_{ij} voidaan jakaa symmetriseen ja antisymmetriseen osaan

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}). \quad (69)$$

Sovelletaan tätä tensoriin $\partial v_i / \partial x_j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= e_{ij} + r_{ij}. \end{aligned} \quad (70)$$

Antisymmetrinen osuus r_{ij} vastaa matriisia

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_{21} & r_{13} \\ r_{21} & 0 & -r_{32} \\ -r_{13} & r_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Tämä voidaan yhtä hyvin kirjoittaa

$$\begin{pmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Suhteellinen liike (65) voidaan nyt kirjoittaa

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \xi_j \delta t = (e_{ij} + r_{ij}) \xi_j \delta t. \quad (73)$$

Tämän antisymmetrinen osuus siirtää hiukkasen paikasta ξ_i paikkaan

$$\xi_i + r_{ij} \xi_j \delta t. \quad (74)$$

ts.

$$\boldsymbol{\xi} \longrightarrow \boldsymbol{\xi} + (R_2 \xi_3 - R_3 \xi_2, R_3 \xi_1 - R_1 \xi_3, R_1 \xi_2 - R_2 \xi_1) \delta t, \quad (75)$$

eli

$$\boldsymbol{\xi} \longrightarrow \boldsymbol{\xi} + \mathbf{R} \times \boldsymbol{\xi} \delta t. \quad (76)$$

Tämä on vektorin $\boldsymbol{\xi}$ jäykkä pyöriminen kulmanopeudella \mathbf{R} . Kulmanopeuden komponentit saadaan vertaamalla kaavoja (70) ja (72):

$$\begin{aligned} R_1 &= r_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})_1 \\ R_2 &= r_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})_2 \\ R_3 &= r_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})_3. \end{aligned} \quad (77)$$

Todetaan että pyörimisen kulmanopeus on $\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$. Tämä yleinen tulos on sama kuin pääteltiin leikkausvirtaukselle edellä.

Symmetrinen osuus

Koska siirtyminen ja pyöriminen ovat ainoat liikkeet, joihin ei sisällä muodonmuutosta, kuvaa jäljellä oleva liike

$$\xi_i \longrightarrow \xi_i + e_{ij} \xi_j \delta t \quad (78)$$

muodonmuutosta. Lineaarialgebrasta tiedetään että jokainen symmetrinen matriisi on sopivalla kannanvaihdoilla saatavissa diagonaaliseen muotoon, siis

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Tällaisessa koordinaatistossa siis

$$\begin{aligned} \xi_1 &\longrightarrow \xi_1 + e_1 \xi_1 \delta t, \\ \xi_2 &\longrightarrow \xi_2 + e_2 \xi_2 \delta t, \\ \xi_3 &\longrightarrow \xi_3 + e_3 \xi_3 \delta t. \end{aligned} \quad (80)$$

eli kolmessa kohtisuorassa suunnassa tapahtuu venytys tekijöillä $(1 + e_1 \delta t)$, $(1 + e_2 \delta t)$ ja $(1 + e_3 \delta t)$. Negatiivinen e_1 vastaa kokoonpuristumista 1-suunnassa, ja vastaavasti muissa suunnissa.

Tilavuus muuttuu tekijällä

$$(1 + e_1 \delta t)(1 + e_2 \delta t)(1 + e_3 \delta t) = 1 + (e_1 + e_2 + e_3)\delta t + O(\delta t^2). \quad (81)$$

Lineaarialgebrasta (toivottavasti) myös tiedetään, että matriisin jälki (diagonaalelementtien summa) on riippumaton kannan valinnasta. Siis

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (82)$$

Siis tilavuuden muutosnopeus on verrannollinen $\nabla \cdot \mathbf{v}$:hen. Kokoonpuristumattomalle nesteelle tämä häviää, kuten on luonnollista.

Esimerkkejä

Tasainen leikkausvirtaus

$$u = \beta y, \quad v = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = -\beta \mathbf{k}. \quad (83)$$

Tälle virtaukselle

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (84)$$

mistä saadaan antisymmetriselle ja symmetriselle osuudelle

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \beta/2 & 0 \\ -\beta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \beta/2 & 0 \\ \beta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Pyörimisen kulmanopeudelle saadaan $\mathbf{R} = -\frac{1}{2}\beta \mathbf{k}$. Koska symmetrisen osuuden diagonaalelementtien summa on nolla, ei tapahdu tilavuuden muutosta.

Muodonuutos sen sijaan tapahtuu siten, että nestealkio venyy suunnassa $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja puristuu kasaan suunnassa $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Matemaattisesti tämän voi todeta etsimällä ominaisarvot e ja ominaisvektorit \mathbf{a} , joilla

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Jotta yhtälöllä olisi nollasta poikkeava ratkaisu, täytyy determinantin

$$\begin{vmatrix} e_{11} - e & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - e & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - e \end{vmatrix} = 0, \quad (87)$$

mistä ominaisarvot voidaan ratkaista.

Esimerkkitapauksessamme ominaisarvot ovat $\beta/2$, $-\beta/2$ ja 0, ja vastaavat ominaisvektorit $(1, 1, 0)/\sqrt{2}$, $(-1, 1, 0)/\sqrt{2}$ ja $(0, 0, 1)$.

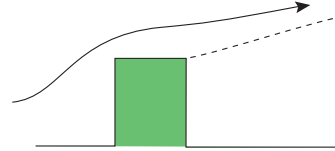
Epätasaiselle leikkausvirtaukselle

$$\mathbf{v} = u(y)\mathbf{i} \quad (88)$$

saadaan pyörteisyys

$$\nabla \times \mathbf{v} = -u'(y)\mathbf{k}. \quad (89)$$

Jos $u(y)$ muuttuu nopeasti kahden vakioarvon välillä, saadaan "pyörrepinta", jossa pyörteisyys on rajoittunut vain ohueen kerrokseen. Tällainen pyörrepinta syntyy esimerkiksi tuulessa jonkin esteen taakse.



Kaksiulotteisen virtauksen pyörteisyydelle saadaan napakoordinaatistossa lauseke (katso liite)

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{r} \left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right). \quad (90)$$

Katsotaan ympyrävirtausta $v_r = 0$, $v_\theta(r)$. Jäykälle pyörimiselle $v_\theta = Dr$ saadaan

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2D\mathbf{k}. \quad (91)$$

Pyörreviivalle $v_\theta = C/r$ lasketaan kaavasta (90)

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (92)$$

kun $r \neq 0$. Siis pyörreviivassa pyörteisyys näyttäisi olevan nolla. Miksi tätä silti kutsutaan pyörrevirtaukseksi johtuu siitä, että virtauksen keskipisteessä pyörteisyys välttämättä on nollasta poikkeava. $v_\theta = C/r$:n singulariteetti voidaan katkaista esim. jäykästi pyörivällä ratkaisulla $v_\theta = Dr$ kun $r < a$. Kun vaaditaan että v_θ on jatkuva $r = a$:ssa saadaan $D = C/a^2$, jolloin pyörteisyydelle keskialueessa saadaan $2C/a^2$.

5. Hydrostatiikka

Hydrostatiikka on hydrodynamiikan osa-alue, jossa tutkitaan levossa olevaa nestettä tai kaasua. Levossa kaikki voimat kumoavat toisensa. Voimat voidaan jakaa tilavuusvoimiin ja jännitysvoimiin.

Tilavuusvoima on ulkoisesta kentästä neste-elementtiin vaikuttava voima. Yleisin esimerkki tästä on gravitaatiovoima. Tilavuusvoimalle määritellään voima massaa kohti,

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dM} = \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{F}}{dV}, \quad (93)$$

missä jälkimmäinen muoto seuraa koska massa $dM = \rho dV$. Tilavuusvoima (93) esiintyy jatkossa usein differentiaalisessa muodossa

$$d\mathbf{F} = \rho \mathbf{f} dV, \quad (94)$$

missä tilavuusvoiman verrannollisuus tilavuuteen on selvästi näkyvissä. Lisäksi määritellään potentiaali Φ kaavalla

$$\mathbf{f} = -\nabla\Phi. \quad (95)$$

Tasaiselle gravitaatiovoimalle voidaan helposti todeta

$$\mathbf{f} = -g\hat{z}, \quad \Phi = gz, \quad (96)$$

missä g on gravitaatiokiihtyvyyden ja z pystysuora koordinaatti.

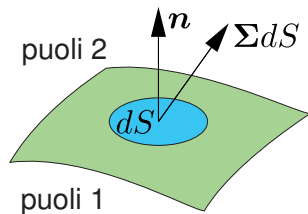
Pyörimisliikkeeseen kulmanopeudella Ω liittyy myös kiihtyvyyden $\Omega^2 r$. Pyörivässä koordinaatistossa tätä vastaava näennäinen keskipakoisvoima ja sen potentiaali ovat

$$\mathbf{f} = \Omega^2 r \hat{r}, \quad \Phi = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2, \quad (97)$$

kun pyöriminen on z -akselin ympäri sylinterikoordinaateissa (r, θ, z) .

Toisen luokan voimia muodostavat *jännitysvoimat*, jotka vaikuttavat nesteosasten välillä. Tarkastellaan kuvaa, jossa puoleen 1 kohdistuu pintaelementin dS kautta voima

$$d\mathbf{F} = \Sigma dS \quad (98)$$



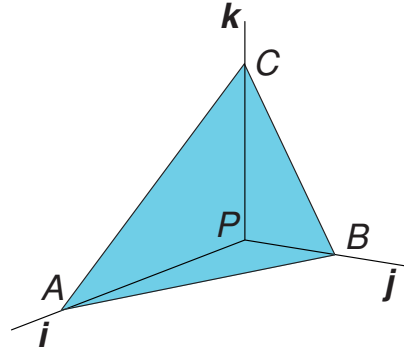
Pinnan normaali \mathbf{n} valitaan voiman kohteesta (puoli 1) pois päin. Tällöin kuvan tapaus, missä $\Sigma \cdot \mathbf{n} > 0$, vastaa vetoa. Ehkä yleisempi tapaus on kuitenkin puristus, missä $\Sigma \cdot \mathbf{n} < 0$, ja kuvassa Σ siten osoittaisi alaspäin.

5.1 Jännitystensori

Pyritään seuraavaksi määrittämään kuinka jännitysvoima Σ riippuu pinnan suunnasta \mathbf{n} . Tässä ei vielä tehdä oletusta levossa olevasta nesteestä, joten käsittely pätee yleisesti.

Heti aluksi päätellään Newtonin kolmannesta laista, että saman pintaelementin dS kautta puoleen 2 kohdistuva voima on vastakkaismerkkinen kuin puoleen 1 kohdistuva voima. Puolen 2 normaalivektori on $-\mathbf{n}$, joten tämä voidaan kirjoittaa kaavana

$$\Sigma(-\mathbf{n}) = -\Sigma(\mathbf{n}). \quad (99)$$



Yleisemmän tuloksen saamiseksi tarkastellaan kuvan pyramidia. Sen tahkojen pinta-alat olkoon

$$\begin{aligned} BPC &: \delta A_1, \\ APC &: \delta A_2, \\ APB &: \delta A_3, \\ ABC &: \delta A. \end{aligned} \quad (100)$$

Tahkojen ulospäin suunnatut normaalit ovat

$$\begin{aligned} BPC &: -\mathbf{i}, \\ APC &: -\mathbf{j}, \\ APB &: -\mathbf{k}, \\ ABC &: \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (101)$$

Pinta-alojen ja normaalien välille saadaan relaatiot

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \delta A, \\ \delta A_2 &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \delta A, \\ \delta A_3 &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \delta A. \end{aligned} \quad (102)$$

Ulkopuolelta kohdistuu pinnan BPC läpi sisäpuoleen voima

$$\int_{BPC} \Sigma(-\mathbf{i}, \mathbf{r}) dS \quad (103)$$

Taylorin kehittämällä saadaan

$$\Sigma(-\mathbf{i}, \mathbf{r}) = \Sigma(-\mathbf{i}, P) + O(\delta \mathbf{r} \cdot \nabla \Sigma). \quad (104)$$

Näin ollen saadaan voimaksi

$$\Sigma(-\mathbf{i}, P) \delta A_1 + O(\delta A_1 \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \Sigma). \quad (105)$$

Samaan tapaan saadaan eri seinien kautta tulevat voimat

$$\begin{aligned} BPC &: \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{i}, P)\delta A_1, \\ APC &: \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{j}, P)\delta A_2, \\ APB &: \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{k}, P)\delta A_3, \\ ABC &: \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, P)\delta A, \end{aligned} \quad (106)$$

lisättynä korjaustermeillä suuruusluokkaa $\delta A_i \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \boldsymbol{\Sigma}$. Pyramidin liikeyhtälö on nyt (\mathbf{a} on kiihtyvyys, jätetään P merkitsemättä)

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{a} \delta V &= \rho \mathbf{f} \delta V + \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}) \delta A \\ + \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{i}) \delta A_1 &+ \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{j}) \delta A_2 + \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{k}) \delta A_3 \\ + \text{korjauksia} & \end{aligned} \quad (107)$$

Jaetaan tämä δA :lla ja annetaan pyramidin koon (muotoa muuttamatta) lähestyä nollaa. Saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}) + \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{i})\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \\ + \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{j})\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} &+ \boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{k})\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} + 0 \end{aligned} \quad (108)$$

Käyttämällä kaavaa (99) saamme vihdoin

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{i})\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{j})\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{k})\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \quad (109)$$

Määritellään vielä ($r = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \sigma_{rn} &= [\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n})]_r, \\ \sigma_{r1} &= [\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{i})]_r, \\ \sigma_{r2} &= [\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{j})]_r, \\ \sigma_{r3} &= [\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{k})]_r. \end{aligned} \quad (110)$$

Tällöin (109) saa muodon

$$\sigma_{rn} = \sigma_{r1}n_1 + \sigma_{r2}n_2 + \sigma_{r3}n_3 \quad (111)$$

Jännitysvoima (98) saa nyt muodon

$$dF_i = \sigma_{ij}dS_j, \quad (112)$$

mistä riippuvuus pinnan suunnasta $dS_j = dS n_j$ on heti todettavissa. Sanallisesti: jännitys suuntaa \mathbf{n} saadaan laskemalla jännitykset suuntiin \mathbf{i} , \mathbf{j} ja \mathbf{k} ja laskemalla ne yhteen n_i :llä painotettuina.

Suuretta

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (113)$$

kutsutaan *jännitystensoriksi*. Voidaan osoittaa että tämä tensori on symmetrinen,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (114)$$

Lasku noudattaa samaa ideaa kuin yllä paitsi että voimien sijasta lasketaan voimien momenttia. Muodostamalla liikeyhtälö nähdään, että kaikki muut

termit menevät nolliin rajalla $V \rightarrow 0$ paitsi σ_{ij} :n epäsymmetrisyydestä tuleva termi, jonka siis täytyy olla nolla. Lasku on esitetty Patersonin kirjassa.

Yleisen teoreeman mukaan symmetrinen (ja reaalinen) tensori voidaan aina saattaa diagonaaliseen muotoon valitsemalla koordinaattiakselit sopivasti. Tällaisessa koordinaatistossa siis

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (115)$$

Tällainen matriisi voidaan aina esittää summana isotrooppisesta (= kaikkiin suuntiin samanlainen) ja epäisotrooppisesta matriisista

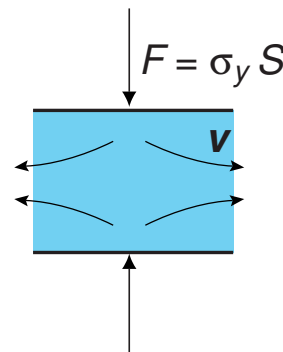
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\sigma_{ii} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (116)$$

missä $\sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Epäisotrooppisen osuuden diagonaalelementtien summa on nolla.

Jännitystensori nesteissä ja kaasuissa

Yllä oleva jännitystensorin käsittely on riippumaton aineen olomuodosta, ja onko se liikkeessä vai levossa. Seuraavaksi tarkastellaan vain nesteitä ja kaasuja.

Pääväittäämä on että nesteissä ja kaasuissa, kun ne ovat levossa, jännitystensori on isotrooppinen. Ajatellaan esimerkiksi tapausta, jossa olisi $\sigma_2 > \sigma_1$. Tämä saisi aikaan nesteen virtauksen, ts. sitä ei voi esiintyä tasapainotilassa.



Tasapainossa esiintyvä isotrooppinen jännitys tulkitaan hydrostaattiseksi paineeksi p , siis

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (117)$$

Miinusmerkki johtuu siitä että paine vastaa puristusta, missä neste-elementtiin kohdistuva jännitysvoima on sisäänpäin,

$$d\mathbf{F} = -pd\mathbf{S} = -p dS \mathbf{n}. \quad (118)$$

[Katso määritelmät kaavan (98) yhteydessä.]

Kun neste virtaa, on epäisotrooppinen osuus yleisesti nollasta poikkeava. Tähän palataan myöhemmin.

5.2 Tasapainoehto

Tutkitaan tiettyyn alueeseen V kohdistuvia voimia. Sen ulkopuolelta siihen kohdistuu jännitysvoima (112)

$$\int_S \sigma_{ij} dS_j. \quad (119)$$

Lisäksi vaikuttaa tilavuusvoima (94)

$$\int_V \rho f_i dV. \quad (120)$$

Tasapainon vallitessa näiden summa täytyy olla nolla,

$$\int_V \rho f_i dV + \int_S \sigma_{ij} dS_j = 0. \quad (121)$$

Käyttämällä kaavaa (117) ja divergenssilauseetta (liite) saadaan

$$\int_V (\rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}) dV = 0. \quad (122)$$

Tämä täytyy toteutua kaikille mahdollisille alueille. Tällöin ainoa mahdollisuus on, että integroitava häviää, eli

$$\rho \mathbf{f} - \nabla p = 0, \quad (123)$$

mikä on hydrostaattinen tasapainoyhtälö.

Esimerkkejä

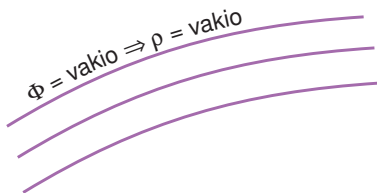
Kirjoitetaan tasapainoyhtälö käyttäen potentiaalia $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$:

$$\nabla p = -\rho \nabla\Phi. \quad (124)$$

Ottamalla $\nabla \times$ molemmista puolista saadaan

$$\nabla \rho \times \nabla\Phi = 0. \quad (125)$$

Tästä nähdään että ρ :n ja Φ :n gradientit ovat samansuuntaisia. Siis pinnalla missä Φ on vakio, täytyy myös ρ :n olla vakio. Erityisesti tämä koskee nesteen vapaata pintaa, minkä täytyy siis vastata Φ :n vakioarvoa.



1) Tasaisen gravitaation tapauksessa $\Phi = gz$. Edellisestä päätellään, että tasapainossa tiheys voi olla vain z :n funktio, $\rho(z)$. Samoin paine on samaa muotoa ja sille saadaan kaavasta (124)

$$\frac{dp(z)}{dz} = -g\rho(z), \quad (126)$$

mistä integroimalla saadaan

$$p(z) = p(0) - g \int_0^z \rho(\zeta) d\zeta. \quad (127)$$

Jos tiheys voidaan olettaa vakioksi saadaan

$$p(z) = p(0) - g\rho z. \quad (128)$$

2) Tasaisesti pyörivässä nesteessä tulee potentiaaliin lisäksi keskipakoisvoimasta tuleva osuus. Pystysuoralle pyörimisakselille z potentiaali on

$$\Phi = gz - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \quad (129)$$

Nesteen pinta vastaa tämän vakioarvoa, eli pinta on paraboloidi $z = z_0 + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2/g$. Paine nesteen sisällä saadaan yhtälöstä (124):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho\Omega^2 r, \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g. \end{aligned} \quad (130)$$

Olettamalla tiheys vakioksi saadaan

$$p = p_0 - \rho gz + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2. \quad (131)$$

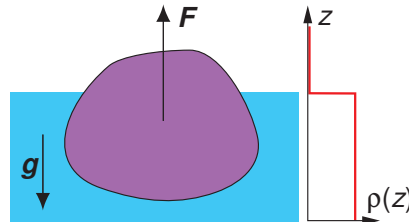
5.3 Hydrostaattiset voimat

Edellä tarkasteltua jännitysvoimaa (118) voidaan käyttää myös laskettaessa kiinteisiin kappaleisiin tai seinämiin kohdistuvia voimia. Tutkitaan tätä tasaisen gravitaation tapauksessa $\Phi = gz$.

Kiinteään kappaleeseen kohdistuvalle voimalle saadaan lauseke

$$\mathbf{F} = - \int_S p d\mathbf{S}, \quad (132)$$

missä integrointi on kappaleen pinnan S yli. Edellä johdettiin että kaasussa/nesteessä vallitseva paine p (127) samoin kuin tiheys ovat vain koordinaatin z funktioita, $p(z)$ ja $\rho(z)$. Seuraavassa yleistetään p ja ρ tarkoittamaan näitä funktioita kaikkialla, myös kappaleen sisällä.



Divergenssilauseesta (liite) saadaan

$$\mathbf{F} = - \int_S p(z) d\mathbf{S} = - \int_V \nabla p(z) dV. \quad (133)$$

Käyttämällä tasapainoehtoa $\nabla p = \rho \mathbf{f} = -\rho g \hat{z}$ saadaan

$$\mathbf{F} = g \hat{z} \int_V \rho(z) dV, \quad (134)$$

missä siis integroidaan nesteen/kaasun tiheysfunktiota $\rho(z)$ kappaleen tilavuuden V yli. Tämä on Arkhimedeen laki. Sanallisesti ilmaistuna kappaleeseen kohdistuu noste, joka on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän neste/kaasumäärän paino. Olettamalla $\rho = \text{vakio}$, vastaten esimerkiksi nesteessä upoksissa olevaa kappaletta, saadaan

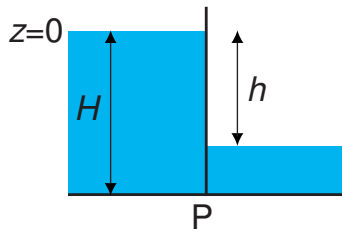
$$\mathbf{F} = g \rho V \hat{z}. \quad (135)$$

Momentti on sama kuin jos koko voima (138) vaikuttaisi pisteeseen korkeudella

$$\zeta = \frac{\frac{1}{6}[H^3 - (H-h)^3]}{\frac{1}{2}[H^2 - (H-h)^2]} \quad (142)$$

kanavan pohjasta.

Kanavan luokkuun kohdistuva voima



Vasemmalta vaikuttaa voima (l on luokun leveys, p_0 ilman paine)

$$\int_{-H}^0 (p_0 - \rho g z) l dz = p_0 H l + \frac{1}{2} \rho g H^2 l. \quad (136)$$

Oikealta vaikuttaa voima

$$\begin{aligned} p_0 h l + \int_{-H}^{-h} [p_0 - \rho g(z+h)] l dz \\ = p_0 H l + \frac{1}{2} \rho g l (H-h)^2. \end{aligned} \quad (137)$$

Kokonaisvoimaksi saadaan

$$F = \frac{1}{2} \rho g l [H^2 - (H-h)^2], \quad (138)$$

missä p_0 :n vaikutusta ei enää näy. Ehkä yllättävästi, voima ei riipu pelkästään nestepintojen korkeuserosta h , vaan myös kanavan syvyydestä H .

Lasketaan vielä voimien momentti pisteen P suhteen. Jättäen p_0 pois saadaan vasemmalta

$$\int_{-H}^0 (-\rho g z l)(z+H) dz = \frac{1}{6} \rho g l H^3 \quad (139)$$

ja oikealta

$$\int_{-H}^{-h} [-\rho g z l (z+h)](z+H) dz = \frac{1}{6} \rho g l (H-h)^3. \quad (140)$$

Kokonaismomentti siis on

$$\frac{1}{6} \rho g l [H^3 - (H-h)^3]. \quad (141)$$

6. Liikelyhtälö

Muodostamme nyt liikelyhtälön. Tarkastelemme paikallaan olevaa aluetta ja laskemme kuinka paljon sen sisällä oleva liikemäärä muuttuu. Tämä muutos aiheutuu kolmesta osasta.

1) Liikemäärän kulkeutuminen alueen V pinnan S läpi virtauksen mukana. Samaan tapaan kuin jatkuvuusyhtälön tapauksessa (27), tästä aiheutuu sisällä olevan liikemäärän muutosnopeus

$$\frac{dP_i^{(1)}}{dt} = - \int_S \rho v_i \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \quad (143)$$

sillä liikemäärän tiheys on ρv_i .

2) Voimat jotka vaikuttavat suoraan tilavuuden sisälle. Newtonin lain mukaan näistä aiheutuu liikemäärän muutosnopeus

$$\frac{dP_i^{(2)}}{dt} = \int_V \rho f_i dV. \quad (144)$$

3) Pinnan S läpi jännitystensorista aiheutuva voima. Kun normaali on ulospäin, aiheutuu tästä sisällä olevaan liikemäärään muutosnopeus

$$\frac{dP_i^{(3)}}{dt} = \int_S \sigma_{ij} dS_j, \quad (145)$$

Toisaalta liikemäärä V :n sisällä on

$$P_i = \int_V \rho v_i dV. \quad (146)$$

Tämän muutosnopeus siis

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \int_S \rho v_i \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \int_V \rho f_i dV + \int_S \sigma_{ij} dS_j. \quad (147)$$

Kirjoitetaan $\rho v_i \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \rho v_i v_j dS_j$ ja muutetaan kaikki tilavuusintegraaleiksi. Saadaan

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} - \rho f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV = 0. \quad (148)$$

Koska tämän pitää olla voimassa kaikille alueille V , on ainoa mahdollisuus että integroitava häviää,

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (149)$$

Käyttämällä jatkuvuusyhtälöä

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (30)$$

voidaan liikelyhtälön (149) vasen puoli kirjoittaa yksinkertaisempaan muotoon

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (150)$$

Huomataan että vasemman puolen toinen termi on $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Vasen puoli on siis tiheys kertaa nopeuden konvektiivinen derivaatta (41). Liikelyhtälö voidaan kirjoittaa siis myös

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (151)$$

Jotta liikelyhtälöä voitaisiin soveltaa, on tunnettava σ_{ij} . Jos käytämme tälle samaa muotoa kuin päätelimme hydrostaatiikassa $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ (117), saamme

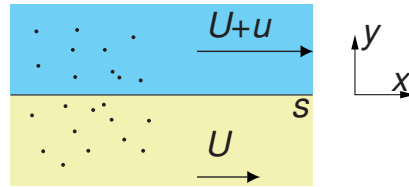
$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p. \quad (152)$$

Tämä tunnetaan *Eulerin yhtälönä*.

Eulerin yhtälö toimii hyvin monissa tapauksissa, mutta toisissa se johtaa selvästi virheellisiin tuloksiin. Pyritään seuraavassa ymmärtämään, mitä olennaista vielä puuttuu.

Viskositeetti

Jos aine olisi täysin jatkuvaa, olisi Eulerin yhtälö varmaankin riittävä. Aine kuitenkin koostuu hiukkasista (atomeista tai molekyyleistä). Sen lisäksi että nämä virtaavat keskimääräisellä nopeudella \mathbf{v} , kulkee kukin hiukkanen omaa varsin satunnaista rataansa, kun se törmäilee muihin hiukkasiin. Tätä kutsutaan *diffuusioksi*.



Tutkitaan tapausta, jossa meillä pinnan S eri puolilla on erisuuret keskimääräiset nopeudet, molemmat pinnan suuntaisia. Satunnaisliikkeen takia hiukkasia kulkeutuu pinnan läpi molempiin suuntiin. Yläpuolelta tulevilla hiukkasilla on kuitenkin keskimäärin suurempi liikemäärä x -suuntaan kuin alapuolelta tulevilla. Siksi liikemäärää kulkeutuu pinnan läpi vaikka keskimääräinen massan virtaus pinnan läpi häviää. Tällaista liikemäärän kulkeutumista kutsutaan *viskositeetiksi*. (Se että tämä vastaa kokemustamme, että esim. öljyllä on suurempi viskositeetti kuin vedellä, tulee ilmeiseksi vasta myöhemmin.)

Nopeuden epäjatkuvuutta realistisempi tapaus on jatkuva nopeuden muutos $U(y)$. Hydrodynamiikassa oletetaan, että diffuusiosta aiheutuva liikemäärän kulkeutuminen on pientä. Tällöin voidaan olettaa, että se on suoraan verrannollista nopeuden derivaattaan dU/dy . Tämä tarkoittaa että mahdollisista korkeammista derivaatoista tai dU/dy :n korkeammista potensseista tulevat korjaukset oletetaan mitättömiksi.

Liikemäärän kulkeutumisen takia ylä- ja alapuolen välillä vaikuttaa jännitysvoima, joka voidaan ottaa mukaan

jännitystensorin komponentilla σ_{xy} . Yllä olevan mukaan sen oletetaan olevan muotoa

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (153)$$

Tässä esiintyy ainetta kuvaavaa verrannollisuuskerroin μ . Pyrimme nyt selvittämään viskositeetin yleisen muodon. Kirjoitamme

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (154)$$

missä σ'_{ij} on viskoosinen jännitystensori. Tasainen liike ei voi johtaa viskositeettitermeihin, joten $\sigma'_{ij} = 0$ jos \mathbf{v} on vakio. Toisaalta oletamme viskositeettitermit pieneksi, joten niiden täytyy olla suoraan verrannollisia nopeuden derivaattaan, eli tensoriin $\partial v_i / \partial x_j$ (67). Yleisesti tällainen verrannollisuus on neljännen asteen tensori A_{ijkl} :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k}. \quad (155)$$

Seuraavaksi väitämme että tasainen pyöriminen ei myöskään voi johtaa nollasta poikkeavaan σ'_{ij} :hin. Perusteluna voidaan esittää, että tasainen pyöriminen on tasapainotila, jossa liike-energia ei voi muuttua lämmöksi (kuten energialle viskositeetin vaikutuksesta yleisesti tapahtuu). Tämän perusteella σ'_{ij} voi riippua ainoastaan tensorin $\partial v_i / \partial x_j$ symmetrisestä osuudesta

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (156)$$

Seuraavaksi väitämme että ainoa mahdollinen relaatio (155) on muotoa

$$\sigma'_{ij} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + b\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \quad (157)$$

Perusteluna on lähinnä se, että yritäpä keksiä jokin yleisempi muoto, joka ei asettaisi mitään avaruuden suuntaan erityisasemaan toisiin nähden.

On tapana kirjoittaa (157) ekvivalenttiin muotoon

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + K\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \quad (158)$$

joka samalla määrittelee vakiot μ ja K . Tämä on jatkossa käytännöllisempi muoto, koska sulkulausekkeen jälki häviää. Todetaan että yksinkertaisen nesteen tai kaasun viskositeetin kuvaamiseksi tarvitaan kaksi viskositeettikerrointa, μ ja K . Nestettä/kaasua jonka viskoosinen jännitystensori on kaavan (158) mukainen kutsutaan *newtonilaiseksi*.

6.1 Navier-Stokes-yhtälö

Sijoitetaan nyt jännitystensori (154) ja (158) liikeyhtälöön (151), jolloin saadaan

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(K - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right]. \quad (159)$$

Tämä on *Navier-Stokes-yhtälö* yleisimmässä muodossaan.

Useimmissa tapauksissa voidaan μ ja K olettaa vakioiksi. Tällöin Navier-Stokes-yhtälö saa muodon

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \left(K + \frac{1}{3}\mu \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (160)$$

Jos neste/kaasu on myös kokoonpuristumatonta, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, saa Navier-Stokes-yhtälö muodon

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}}. \quad (161)$$

Jos viskositeetti ei ole olennainen, voidaan olettaa $\mu \approx K \approx 0$, ja saadaan Eulerin yhtälö

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p}. \quad (152)$$

Paikallaan olevalle nesteelle ($\mathbf{v} = 0$) Navier-Stokes-yhtälö (159) redusoituu hydrostaattiseksi tasapainoyhtälöksi

$$\rho \mathbf{f} - \nabla p = 0. \quad (123)$$

Erityisesti yllä olevia kehystettyjä yhtälöitä tullaan tarkastelemaan jatkossa.

Viskositeettikerroimet μ ja K tiedetään mittauksista. Kerroin μ saadaan mittaamalla leikkausvirtausta, jota tarkastellaan myöhemmin. Kerroin K liittyy kokoonpuristuvuuteen, ja sen arvo voidaan päätellä ääniaallon vaimenemisesta. Yleisesti K on samaa suuruusluokkaa kuin μ .

Jakamalla Navier-Stokes-yhtälö (161) tiheydellä saadaan

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (162)$$

missä on määritelty *kinemaattinen viskositeetti* $\nu = \mu / \rho$. Alla muutamia arvoja tiheydelle ρ ja viskositeeteille μ ja ν .

aine	ρ (kg/m ³)	μ [kg/(m s)]	ν (m ² /s)
ilma	1,2	1.8×10^{-5}	1.5×10^{-5}
vesi	999	1.1×10^{-3}	1.1×10^{-6}
elohopea	13610	1.6×10^{-3}	1.2×10^{-7}
oliiviöljy	918	0.10	1.1×10^{-4}
glyseriini	1260	2.33	1.8×10^{-3}

Oleellisempaa kuin viskositeetin arvot sinänsä on verrata eri termien suuruuksia. Usein keskeinen suure on inertiaalitermin $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ ja viskoosin termin $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$ suhde. Jos esimerkiksi virtaus nopeudella U kulkee kappaleen ohi, ja kappaleen kokoa kuvaa pituus a , on termien suuruusluokkien suhde

$$\text{Re} = \frac{\rho U a}{\mu}, \quad (163)$$

mitä kutsutaan *Reynoldsin luvuksi*. Esimerkiksi ilman virtaus nopeudella 1 m/s ja $a = 10$ cm antaa

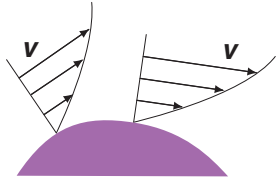
$$\text{Re} = 6.7 \times 10^3. \quad (164)$$

Tässä tapauksessa viskoositermi on hyvin pieni verrattuna inertiaalitermiin. Tästä huolimatta viskoositermillä voi olla olennainen vaikutus virtaukseen, kuten myöhemmin tullaan näkemään.

Navier-Stokes on vektoryhtälö, joten komponentteina kirjoitettuna se vastaa kolmea yhtälöä. Yhdessä jatkuvuusyhtälön kanssa ne muodostavat neljän yhtälön ryhmän. Niissä esiintyy tuntemattomina neljä kenttää $v_x(\mathbf{r}, t)$, $v_y(\mathbf{r}, t)$, $v_z(\mathbf{r}, t)$ ja $p(\mathbf{r}, t)$. Ilman todistusta väitetään, että kyseiset neljä yhtälöä määräävät juuri nämä neljä kenttää. Lisätietoina tarvitaan kuitenkin, miten tiheys riippuu paineesta, $\rho(p)$, mikäli aine on kokoonpuristuvaa. Lisäksi tarvitaan reunaehtoja. Tyypillisin reunaehto on että nopeus \mathbf{v} häviää,

$$\mathbf{v} = 0, \quad (165)$$

kiinteän kappale pinnalla (olettaen että kappale on paikallaan). Tämä on luonnollista nopeuden normaalikomponentille, mutta se pätee varsin hyvin myös tangentialikomponentille.



On syytä mainita että täydellisessä hydrodynaamisessa teoriassa on vielä yksi lisämuuttuja ja sitä vastaava differentiaaliyhtälö. Muuttajaksi voidaan valita vaikka sisäinen energia ϵ , lämpötila T tai entropia. Lisäyhtälö saadaan energian säilymisestä. Kirjoitetaan se tässä ilman johtoa,

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = -\nabla p + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)^2 + K(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + \nabla \cdot (k\nabla T). \quad (166)$$

Huomataan että tässä esiintyvät samantyyppiset termit kuin viskoosin jännitystensorin σ'_{ij} lausekkeessa (158). Nähdään että aina kun $\sigma'_{ij} \neq 0$, sisäinen energia kasvaa. Tämä tarkoittaa, että virtauksen energia muuttuu viskositeetin vaikutuksesta lämmöksi. Toinen huomattava seikka on, että kun lämpötila ei ole vakio, lämpö johtuu kuumemmasta kylmempään. Tätä kuvaa yhtälön (166) viimeinen termi, ja vakio k on lämmönjohtavuus.

Jatkossa tarkastelemme tapauksia, joissa lämpötila ei ole oleellinen muuttuja. Siksi meille riittää Navier-Stokes- ja jatkuvuusyhtälö, emmekä tarvitse energiayhtälöä (166).

Pyörivä koordinaatisto

Pienenä lisäyksenä Navier-Stokes-yhtälöön käsittelemme pyörivää koordinaatistoa. Mekaniikan kurssissa on (toivottavasti) johdettu, että jos pyörivässä koordinaatistossa mielivaltaiselle vektorille $\mathbf{A}(t)$ laskettu aikaderivaatta on $(D\mathbf{A}/Dt)_r$, on vastaava aikaderivaatta inertiaalikoordinaatistossa

$$\left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)_i = \left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (167)$$

Tämä on lyhyesti johdettu myös liitteessä D. Tässä $\boldsymbol{\Omega}$ on kulmanopeusvektori, jolla pyörivä koordinaatisto pyörii. Soveltamalla sääntöä paikkavektoriin saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \left(\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right)_i = \left(\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \\ &= \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (168)$$

Soveltamalla sääntöä toistamiseen saadaan

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} \right)_i &= \left(\frac{D}{Dt} \right)_r (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{D\mathbf{v}_r}{Dt} \right)_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (169)$$

missä on oletettu että $\boldsymbol{\Omega}$ on vakio. Sijoitetaan tämä Navier-Stokes-yhtälöön. Koska jatkossa kaikki ilmaistaan pyörivässä koordinaatistossa, voidaan indeksi r jättää pois, jolloin Navier-Stokes-yhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \rho\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \text{viskositeettitermit}. \end{aligned} \quad (170)$$

Tässä termi $2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ kuvaa Coriolisvoimaa, ja termi $\rho\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ keskipakovoimaa.

Yhtälöä (170) saadaan yksikertaistettua seuraavasti. Hydrostaattisessa tapauksessa ($\mathbf{v} = 0$) se redusoituu muotoon

$$\begin{aligned} \rho\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ = \rho\mathbf{f} - \nabla p_1, \end{aligned} \quad (171)$$

missä painetta on merkitty p_1 :lla. Tämä vastaa tasaista pyörimistä, ja se ratkaistiin edellä [kaava (131)]. Vähentämällä (171) liikeyhtälöstä ja merkitsemällä $p_2 = p - p_1$ saadaan

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla p_2 + \text{visk}. \quad (172)$$

Jatkossa on oleellista verrata termien

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad \text{ja} \quad 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (173)$$

suuruuksia. Oletetaan että tarkastellaan ilmastoa, jolloin tyypillinen mittakaava on 1000 km ja nopeus 10 m/s. Koska $\boldsymbol{\Omega} = 7.27 \times 10^{-5}$ 1/s, on näiden kahden termin suuruusluokat yksiköissä m/s²

$$10^2/(1000 \times 1000) \quad \text{ja} \quad 1.5 \times 10^{-4} \times 10 \quad (174)$$

eli

$$10^{-4} \text{ ja } 1.5 \times 10^{-3} \quad (175)$$

Nähdään että Coriolistermi on dominoiva tässä tapauksessa. Jos virtauksen mittakaava olisi yksi metri, Coriolistermi olisi häviävän pieni, ja siksi sillä ei ole merkitystä ammeesta tyhjentävän veden tapauksessa.

Ilmaston tapauksessa voidaan ensimmäisessä approksimaatioissa jättää aikaderivaatta ja viskoosit termit pois, jolloin saadaan

$$2\rho\Omega \times \mathbf{v} = -\nabla p_2. \quad (176)$$

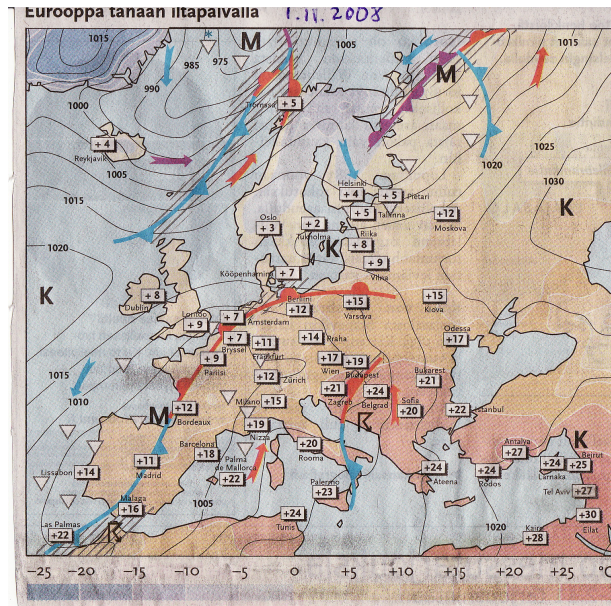
Tällä on ratkaisu

$$\mathbf{v} = v_\theta \hat{\theta}, \quad \Omega = \Omega \mathbf{k}, \quad (177)$$

ja

$$p_2(r) = p_2(0) + \int_0^r 2\rho\Omega v_\theta(r) dr. \quad (178)$$

Nähdään että ilma virtaa vakiopaineikäyriä pitkin. Coriolisvoima ja painegradientti kumoavat toisensa. Pohjoisella pallonpuoliskolla ($\Omega > 0$) tuulet kiertävät matalapainealueita ($dp_2/dr > 0$) positiiviseen kiertosuuntaan ($v_\theta > 0$).



Oheisessa sääkartassa tuulet ovat lähes vakiopaineikäyrien suuntaiset, ja kiertosuunta on yllä olevan tuloksen mukainen. (Lähde: Helsingin sanomat)

7. Navier-Stokes-yhtälön ratkaisuja

Kokoonpuristumattomalle virtaukselle on ratkaistava yhtälöt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (179)$$

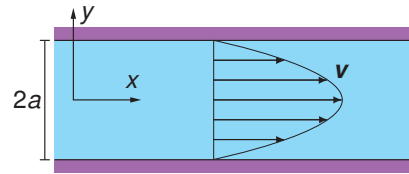
(Tässä termi $\rho \mathbf{f}$ on eliminoitu vähentämällä hydrostaattinen yhtälö $\rho \mathbf{f} - \nabla p_1 = 0$, ja merkitsemällä $p_2 = p - p_1$:tä yksikertaisesti p :llä.)

Näistä neljästä yhtälöstä pitäisi ratkaista neljä tuntematonta \mathbf{v} ja p . Näillä yhtälöillä on muutamia helposti saatavia ratkaisuja, joita nyt tarkastelemme.

7.1 Virtaus kahden tason välissä

Oletetaan paikallaan olevat seinät $y = \pm a$ ja virtaus

$$\mathbf{v} = U(y)\mathbf{i}. \quad (180)$$



Jatkuvuusyhtälö toteutuu automaattisesti. Liikeyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 U}{dy^2}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (181)$$

Kahdesta jälkimmäisestä saadaan, että p on vain x :n funktio, $p(x)$. Todetaan että ensimmäisessä yhtälössä $-dp/dx$ voi riippua vain x :stä ja $\mu d^2 U/dy^2$ voi riippua vain y :stä. Jotta tämä olisi mahdollista, täytyy kummankin termin olla vakio, siis

$$\frac{dp}{dx} = -G, \quad \mu \frac{d^2 U}{dy^2} = -G. \quad (182)$$

Tässä G on painegradientti, ja paineen pitää olla suurempi vasemmalla, jotta virtaus olisi oikealle (x -akselilla). Paineelle saadaan $p = c_1 - Gx$. Myös nopeus saadaan helpolla integroinnilla

$$U = c_2 + c_3 y - \frac{G}{2\mu} y^2, \quad (183)$$

missä c_1 , c_2 ja c_3 ovat vakioita. Reunaehtoina vaaditaan $U = 0$ kun $y = \pm a$. Tästä saadaan nopeudelle

$$U = \frac{G}{2\mu} (a^2 - y^2). \quad (184)$$

Tulokset voi ilmaista myös merkitsemällä paineita kanavan päissä $p = p_0$ kun $x = 0$ ja $p = p_1$ kun $x = l$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} p &= p_0 - \frac{p_0 - p_1}{l}x, \\ U &= \frac{p_0 - p_1}{2\mu l}(a^2 - y^2). \end{aligned} \quad (185)$$

Lasketaan vielä seinään kohdistuva voima. Alapinnalla pinnan normaali $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ (siis voiman kohteesta pois päin). Olemme erityisesti kiinnostuneet voimasta suuntaan \mathbf{i} . Tällöin voima pinta-alayksikköä kohti saadaan [kaavan (112) mukaan] jännitystensorin komponentista σ_{12} . Tälle lasketaan käyttäen kaavoja (154) ja (158)

$$\sigma_{12} = \sigma'_{12} = \mu \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=-a} = \frac{(p_0 - p_1)a}{l}. \quad (186)$$

Tämä siis seinälle $y = -a$. Seinälle $y = +a$ saadaan vastakkaismerkkinen σ'_{12} mutta molempiin seinämiin kohdistuu sama voima (koska normaalin suunta on vastakkainen).

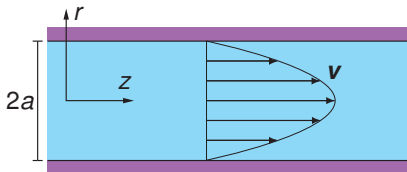
Lasketaan nesteeseen vaikuttava kokonaisvoima. Merkitään kanavan leveyttä z suuntaan L :llä. Voiman x -komponentille saadaan 1) ylä- ja alaseinistä $-2(p_0 - p_1)aL$, 2) vasemmalta $2aLp_0$ ja 3) oikealta $-2aLp_1$. Nähdään että kokonaisvoima häviää niin kuin kuuluukin, sillä muuten liike olisi kiihtyvää.

Tästä esimerkistä nähdään, että viskositeetti μ vastaa kokemustamme viskositeetista: samalla paine-erolla virtausnopeus pienenee kun viskositeetti kasvaa, tai tarvitaan suurempi paine-ero saman virtauksen aikaansaamiseen.

7.2 Virtaus putkessa

Tutkitaan virtausta pyöreässä putkessa ja oletetaan

$$\mathbf{v} = U(r)\mathbf{k}. \quad (187)$$



Ratkaisu on hyvin samantyyppinen kuin edellä. Hankaluutta lisää kuitenkin se että liikeyhtälö on lausuttava sylinterikoordinaateissa. Erityisesti $\nabla^2 \mathbf{v}$ ei löydy normaaleista taulukkokirjoista, mutta se on useimmissa hydrodynamiikan kirjoissa. Seuraten Patersonia perustellaan lauseke vain erikoistapausta (187) varten. Koska \mathbf{k} on vakiovektori, $\nabla^2(U(r)\mathbf{k}) = \mathbf{k}\nabla^2 U(r)$. Tälle saadaan liitteestä B

$$\mathbf{k}\nabla^2 U(r) = \mathbf{k} \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right). \quad (188)$$

Liikeyhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right). \end{aligned} \quad (189)$$

Nämä ratkaistaan kuten edellä ja saadaan

$$\begin{aligned} p &= p_0 - Gz, \\ U &= \frac{G}{4\mu}(a^2 - r^2). \end{aligned} \quad (190)$$

Tämä ratkaisu tunnetaan Poiseuillen kaavana. Virtausnopeus on parabolinen ja maksimissaan $U_{\max} = Ga^2/4\mu$ kun $r = 0$.

Seinämiin kohdistuva leikkausjännitys voidaan laskea jännitystensorista (158), missä tarvittavan muodonmuutostensorin $2e_{ij}$ (156) lauseke sylinterikoordinaateissa on johdettu liitteessä B, kaava (356). Saadaan ($\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{r}}$, ollaan kiinnostuttu voimasta $\|\hat{\mathbf{z}}\|$)

$$-\sigma_{zr} = -\sigma'_{zr} = -\mu \left(\frac{dU}{dr} \right)_{r=a} = \frac{1}{2}Ga, \quad (191)$$

ja kokonaisvoima

$$F = 2\pi a l \times \frac{1}{2}Ga = \pi a^2 l G. \quad (192)$$

Keskinopeus on

$$U_{\text{ave}} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a U(r) 2\pi r dr = \frac{Ga^2}{8\mu} = \frac{1}{2}U_{\max}. \quad (193)$$

Nähdään että kokonaisvirtaus $Q = \pi a^2 U_{\text{ave}} = \pi Ga^4/8\mu$ on verrannollinen painegradienttiin ja putken halkaisijan neljänteen potenssiin.

7.3 Dimensioanalyysi

Dimensioanalyysi on käsite, joka usein esitetään hydrodynamiikan yhteydessä, vaikka kysymyksessä on asia joka on yhteinen kaikelle fysiikalle, ja muillekin matemaattisille tieteille. Esitän tässä dimensionanalyysin yhdistettynä yhtälöiden numeeriseen ratkaisuun, ja palataan vasta sen jälkeen muihin käyttötapoihin.

Oletetaan että olisi ratkaistava numeerisesti Navier-Stokes-yhtälöryhmä

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (179)$$

Tietokoneen muistipaikoille voi kuitenkin syöttää vain lukuja, ei laatuja. Siksi esim. koordinaatille x kirjoitamme

$x = X x_0$, missä X on tietokoneen muistipaikkaan sijoitettava laaduton luku. Kertova tekijä x_0 on "laatu" (dimensio). Se voi olla esim. $x_0 = 1$ m tai 20 mm. Usein ei kuitenkaan ole tarvetta kiinnittää sille mitään numeroarvoa. Esimerkiksi, jos tutkitaan virtausta putkessa, jonka halkaisija on D , on hyvä valinta $x_0 = D$.

Samaan tapaan valitaan laadut muille suureille. Esimerkiksi nopeudelle $v = V v_0$ ja ajalle $t = T t_0$. Nopeuden laaduksi on luonnollista valita $v_0 = x_0/t_0$.

Yhtälön (179) ratkaisuna halutaan nopeuskenttä $v(x, y, z, t)$. Tietokoneen muistissa se on muodossa $\mathbf{V}(X, Y, Z, T)$. [Muistin rajallisuuden takia \mathbf{V} on laskettu vain diskreeteissä pisteissä, ja muissa pisteissä sen arvo saadaan interpoloimalla. Ei kiinnitetä huomiota tähän tällä kertaa.] Fysikaalinen $v(x, y, z, t)$ saadaan kaavasta

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{V}\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{x_0}, \frac{z}{x_0}, \frac{t}{t_0}\right)v_0 \quad (194)$$

ja vastaavasti painekenttä

$$p(x, y, z, t) = P\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{x_0}, \frac{z}{x_0}, \frac{t}{t_0}\right)p_0. \quad (195)$$

Sijoitetaan kentät yhtälöihin (179). Merkitään nablaa laaduttomien yksiköiden suhteen

$$\nabla_R = \left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z}\right). \quad (196)$$

Saadaan

$$\begin{aligned} \nabla_R \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial T} + \mathbf{V} \cdot \nabla_R \mathbf{V} &= -\frac{p_0}{\rho v_0^2} \nabla_R P + \frac{\mu}{\rho v_0 x_0} \nabla_R^2 \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (197)$$

Kiinnitetään nyt paineen yksikkö $p_0 = \rho v_0^2$ ja Reynoldsin luku

$$Re = \frac{\rho x_0 v_0}{\mu}, \quad (198)$$

niin saadaan yhtälöryhmäksi

$$\begin{aligned} \nabla_R \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial T} + \mathbf{V} \cdot \nabla_R \mathbf{V} &= -\nabla_R P + \frac{1}{Re} \nabla_R^2 \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (199)$$

Todetaan että tämä riippuu ainoastaan parametrilla Re . Reunaehdoista riippuen yhtälöryhmän ratkaisut riippuvat myös muista laaduttomista parametreista. Esimerkiksi virtaus suorakaiteen muotoisessa putkessa riippuu suorakaiteen sivujen pituuksien suhteesta.

Yllä olevalla on voitettu se, että numeerinen lasku on suoritettava vai kerran kullakin Reynoldsin luvun arvolla. Fysikaalinen ratkaisu kahta paksummalla putkella mutta puolella virtausnopeudella (tai kaksinkertaisella viskositeetin arvolla) saadaan samasta numeerisesta ratkaisusta vaihtamalla laatuja.

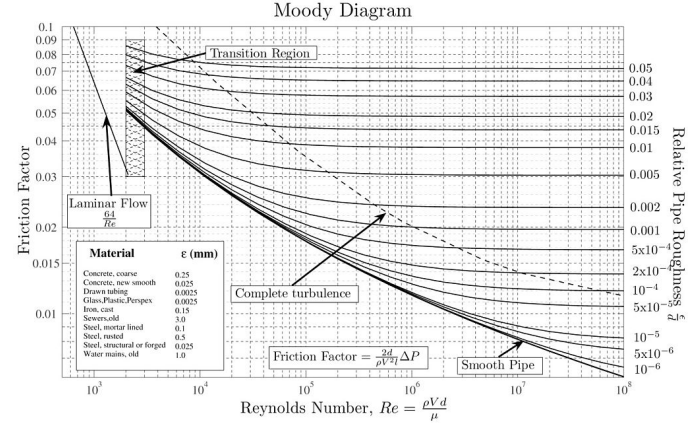
Edellistä tulosta voidaan käyttää myös koetulosten yleistämiseen. Riittää tutkia vain yhtä nestettä yhdessä

putkessa eri virtausnopeuksilla. Näin saaduista tuloksista voidaan päätellä tulokset eri kokoisille putkille ja eri viskositeetin ja tiheyden nesteille. Testit erikokoisilla putkilla osoittavat kokeiden tukevan edellä johdettuja skaalauslakeja.

Oheisessa kuvassa on esitetty kokeellisesti mitattu paine-ero putkessa muodossa

$$\frac{p_0 - p_1}{l} = \frac{\rho U_{ave}^2}{2D} f\left(\frac{\rho D U_{ave}}{\mu}, \frac{e}{D}\right). \quad (200)$$

Funktio f (friction factor) riippuu Reynoldsin luvun lisäksi putken pinnan epätasaisuuksien korkeudesta e .



(Kuva Wikipediasta:

http://en.wikipedia.org/wiki/Moody_chart)

Kun $Re < 2000$, on Poiseuillen laminaarinen ratkaisu (190) yhtäpitävä koetulosten kanssa. (Ratkaise f :n lauseke tässä tapauksessa.) Suuremmilla arvoilla havaitaan kokeissa useimmiten epäsäännöllinen ja aikariippuva turbulenti virtaus.

Turbulenti virtaus on suuri ongelma teoreettisesti. Mitään tarkkaa analyttistä ratkaisua ei ole löydetty. Suuruusluokat kyllä pystytään arvioimaan.

Navier-Stokes-yhtälöitä voidaan ratkaista myös numeerisesti (esimerkkisimulaatiota), mutta nämä vaativat runsaasti laskentaa, ja täysin turbulentin tapauksen käsittely on silti hyvin vaikeaa. Insinöörit käyttävät turbulentille virtaukselle kaavoja, jotka perustuvat yksikertaisiin funktioihin, joiden parametrit on sovitettu kokeellisiin tuloksiin.

On syytä korostaa, että turbulenti virtaus on Navier-Stokes-yhtälöiden ratkaisu. (Numeeriset laskut tukevat tätä päätelmää.) Siis Navier-Stokes-yhtälöissä sinänsä ei ole mitään vikaa. Kysymyksessä on vain näiden yhtälöiden tavattoman monimutkainen ratkaisu. Tällaisia kaoottisia ratkaisuja esiintyy tyypillisesti epälineaarilla yhtälöillä. Navier-Stokes-yhtälön epälineaarisuus tulee termistä $\mathbf{V} \cdot \nabla_R \mathbf{V}$ kaavassa (199). Pienellä Reynoldsin luvulla tämän termin vaikutus on pieni, jolloin virtaus on laminaarista. Suurella Reynoldsin luvulla viskoositermi ei riitä vaimentamaan epälinearisesta termistä aiheutuvaa epästabiiliisuutta.

Edellä käsiteltiin virtausta putkessa. Nämä tulokset voidaan kvalitatiivisesti yleistää muihinkin tapauksiin, esimerkiksi virtaukseen jonkin kappaleen ohitse. Pienillä Reynoldsin luvuilla virtaus on laminaarista. Suurilla Reynoldsin luvuilla virtaus on turbulenttia. Millä Reynoldsin luvulla laminaarinen virtaus tulee epästabiiliksi, riippuu kappaleen muodosta ja siitä kuinka huolellisesti koe tehdään (esim. kuinka laminaarista virtaus alun perin on).

Perustellaan vielä kaavan (200) muoto. Edellä johdettiin että numeerinen lasku laaduttomilla suureilla antaa, että paine on muotoa (195), missä laaduton funktio P lisäksi voi riippua vain Reynoldsin luvusta ja suhteellisista pinnan epätasaisuuksista e/x_0 . Siis

$$p(x, y, z, t) = p_0 P\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{x_0}, \frac{z}{x_0}, \frac{t}{t_0}, \frac{\rho x_0 v_0}{\mu}, \frac{e}{x_0}\right). \quad (201)$$

Toisaalta keskiarvopaine-ero pitkässä putkessa ei voi riippua x :tä, y :stä eikä ajasta t . Lisäksi sen tulee olla lineaarinen z :ssa. Saadaan siis jollain toisella funktiolla F

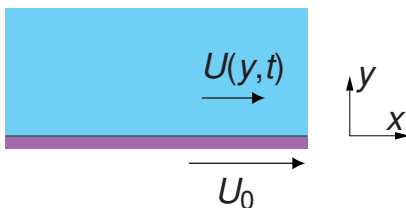
$$\frac{p(z)}{p_0} = \text{vakio} + \frac{z}{x_0} F\left(\frac{\rho x_0 v_0}{\mu}, \frac{e}{x_0}\right). \quad (202)$$

Tämä on sama kuin yhtälö (200), kun vain yksiköt x_0 ja v_0 on valittu sopivasti.

Vielä joitain huomioita skaalauksesta. Kun katsoo yhtälöä (199), jossa ei esiinny mitään muita ykkösestä poikkeavia kertoimia kuin Reynoldsin luku, luulisi naivisti, että vaihtuminen kahden eri ratkaisutyyppin välillä tapahtuisi suunnilleen kun $Re \sim 1$. Se että todellisuudessa tämä tapahtuu lähellä arvoa $Re \sim 2000$ on mielenkiintoinen osoitus siitä, että edellinen päättely ei aina toimi hyvin.

Skaalaus mahdollistaa mallikokeiden tekemisen. Sen sijaan että kokeiltaisiin laivan pohjan, potkurin tai lentokoneen muotoja täysikokoisina, voidaan tehdä niistä pienoismalleja. Jotta pienoismalleilla saatavat tulokset olisivat skaalattavissa täysikokoiseen tapaukseen, on huolehdittava että Reynoldsin luku on sama mallissa ja todellisuudessa. Joissain tapauksissa skaalauksen tarkkuus heikkenee, kun yhtälö (179) ei enää ole riittävä approksimaatio. Näin esimerkiksi kun gravitaatio (esim. laivan synnyttämät aallot) tai kaasun kokoonpuristuvuus (esim. lentäminen lähellä äänen nopeutta) tulevat olennaisiksi.

7.4 Rajakerros



Tutkitaan ongelmaa jossa neste/kaasu on aluksi levossa levyn $y = 0$ yläpuolella. Hetkestä $t = 0$ alkaen levy alkaa

liikkua vakionopeudella $U_0 \mathbf{i}$. Oletetaan että nopeuskenttä on muotoa

$$\mathbf{v} = U(y, t) \mathbf{i}. \quad (203)$$

Täsmällisemmin sanottuna reunaehdot ovat

$$\begin{aligned} U(0, t) &= U_0 && \text{kun } t > 0, \\ U(y, 0) &= 0 && \text{kun } y > 0, \\ U(y, t) &\rightarrow 0 && \text{kun } y \rightarrow \infty, \text{ kaikilla } t. \end{aligned} \quad (204)$$

Jatkuvuusyhtälö toteutuu automaattisesti, ja Navier-Stokes-yhtälö antaa

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (205)$$

Nähdään että paine ei voi riippua y :stä eikä z :sta. Mutta se ei voi riippua myöskään x :stä eikä t :stä, sillä muutoin levyn liike vaikuttaisi jopa rajalla $y \rightarrow \infty$. Siis $p = \text{vakio}$. Jäljelle jää yhtälö

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (206)$$

Tämä tunnetaan *diffuusioyhtälönä*. Yhtälö on aivan sama, kuin tutkittaisiin molekyylien leviämistä huokoisessa aineessa ($U \rightarrow$ molekyylien konsentraatio) tai lämmön johtumista kiinteässä aineessa ($U \rightarrow$ lämpötila).

Seuraten Patersonia, ratkaistaan yhtälö (206) seuraavasti. Ensinnäkin, yhtälö on lineaarinen U :ssa. Siten nopeuskentän tulee olla suoraan verrannollinen U_0 :aan. Lisäksi yhtälössä esiintyy vain suureet y , t ja ν , joten ratkaisun täytyy olla muotoa

$$U(y, t) = U_0 f(y, t, \nu). \quad (207)$$

Nyt kuitenkin suureista y , t ja ν voi muodostaa vain yhden laaduttoman suureen. Jatko on helpointa, jos täksi valitaan

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}}. \quad (208)$$

Siis etsitään ratkaisua muodossa

$$U(y, t) = U_0 f\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right). \quad (209)$$

Reunaehdot vaativat että

$$\begin{aligned} U(0, t) = U_0 &\Rightarrow f(0) = 1, \\ U(y, 0) = 0 &\Rightarrow f(\infty) = 0, \\ U(\infty, t) = 0 &\Rightarrow f(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (210)$$

Sijoittamalla yhtälöön (206) saadaan

$$f''(\eta) = -2\eta f'(\eta). \quad (211)$$

Tämän ratkaisu on

$$f'(\eta) = Ae^{-\eta^2}. \quad (212)$$

Integroimalla ja vaatimalla reunaehto äärettömyydessä saadaan

$$f(\eta) = A \int_{\eta}^{\infty} e^{-s^2} ds. \quad (213)$$

Reunaehto $\eta = 0$:ssa vaatii

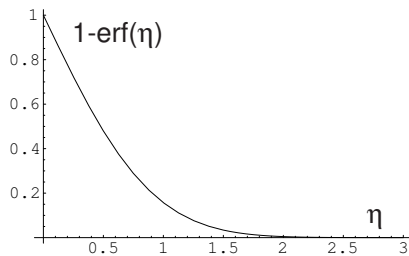
$$A = \left(\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds \right)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (214)$$

Ratkaisu on siten

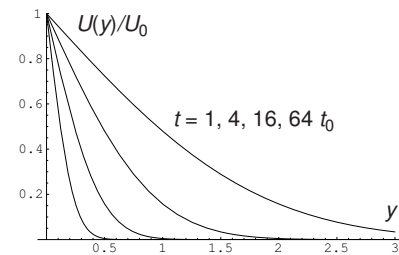
$$U(y, t) = U_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds. \quad (215)$$

Ratkaisu voidaan ilmaista myös erf-funktion avulla,

$$f(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta). \quad (216)$$



Ratkaisulla on mielenkiintoisia ominaisuuksia. 1) funktion muoto on sama kaikilla ajanhetkillä. Ajan nelinkertaistuessa leviää ratkaisu y -akselilla kaksinkertaiseksi.

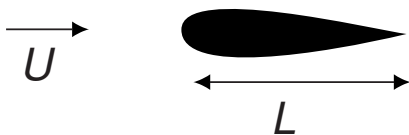


2) funktio on oleellisesti nolasta poikkeava vain kun $\eta < \approx 1.5$, eli levyä päällystää *rajakerros* paksuudelta $y \approx 3\sqrt{\nu t}$. Rajakerroksen ulkopuolella neste/kaasu on lähes levossa.

7.5 Yleinen virtaus kappaleen ohi

Virtaviivainen kappale

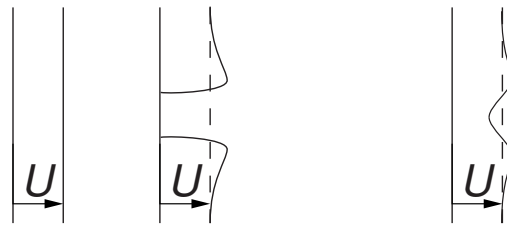
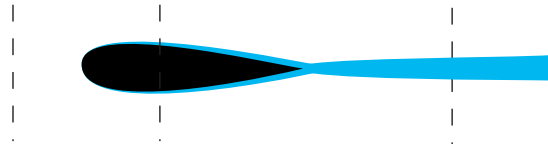
Tutkitaan virtausta virtaviivaisen kappaleen, esim. siiven, ohi.



Kun kappaleen pituus on L , kestää virtaus siiven ohi suunnilleen ajan $\Delta t \sim L/U$. Analogisesti edellisen laskun kanssa, muodostuu siiven pinnalle rajakerros. Sen paksuus siiven takaosassa on suuruusluokkaa

$$d \sim \sqrt{\nu \Delta t} \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = L \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}. \quad (217)$$

Nähdään, että rajakerros voi olla hyvin ohut siiven kokoon verrattuna, jos Reynoldsin luku on suuri. Esimerkiksi purjekoneella $U = 15$ m/s ja $L = 1$ m, saadaan $d \sim 1$ mm.

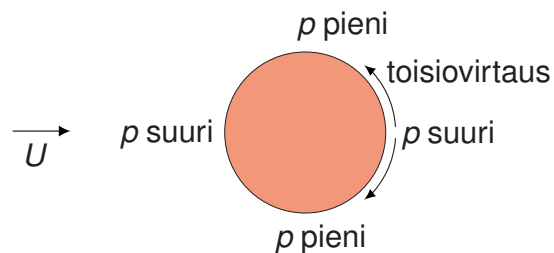


Oheisessa kuvassa on hahmoteltu virtausnopeus eri poikkileikkauksissa kun $Re \gg 1$. Siiven kohdalla virtausnopeus siiven ympärillä kasvaa sillä ilmamäärä, joka kulkee siiven ohi, on kaikissa poikkileikkauksissa oltava sama. Kuitenkin aivan siiven pinnalla nopeus siipeen nähden häviää reunaehdon $v = 0$ takia. Tämä nopeuden pudotus tapahtuu hyvin ohuessa rajakerroksessa, kun $Re \gg 1$. Rajakerroksessa virtaus on voimakkaasti pyörteistä, $|\nabla \times v| \sim U/d$. Tämä pyörteisyyttä säilyy ja leviää siiven jälkeisessä vanassa (wake), jonka paksuus $\sim \sqrt{\nu x/U}$ kasvaa kuten etäisyyden x neliöjuuri.

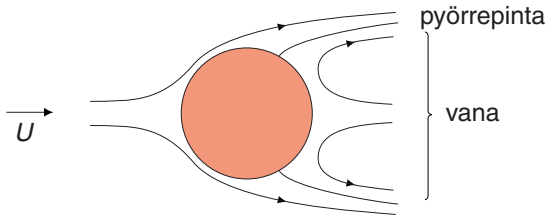
Jatkossa tullaan kehittämään ajatusta, että viskositeetti on merkityksellistä vain rajakerroksessa ja vanassa. Näiden ulkopuolella viskositeetti voidaan jättää huomiotta, jolloin Navier-Stokes-yhtälö redusoituu Eulerin yhtälöksi. Näin esimerkiksi nopeuden kasvu siiven ympärillä voitaisiin laskea Eulerin yhtälöstä.

Epävirtaviivainen kappale

Tarkastellaan esimerkiksi virtausta sylinterin ohi.



Rajakerroksen ulkopuolella tulemme tarkastelemaan Eulerin yhtälöä ja näemme, että suurempi virtausnopeus sylinterin sivuilla johtaa siihen että paine siellä on pienempi kuin sylinterin edessä ja takana, jossa nopeus on pieni. Esimerkiksi suurempi paine sylinterin takana jarruttaa nesteen nopeutta kun se siirtyy sivulta taakse. Sama painejakauma on voimassa myös rajakerroksessa. (Edellä olevassa laskussa paine oli vakio pinnan normaalin suunnassa.) Toisaalta aivan pinnan lähellä nopeus on pieni, joten mitään jarrutusta ei tarvita. Sen sijaan paine-ero saa aikaan toisiovirtauksen sylinterin pinnalla, joka suuntautuu takaa sivuille. Riittävän suurella Reynoldsin luvulla tämä saa aikaan rajakerrosvirtauksen irtoamisen sylinterin pinnalta. Syntyy pyörrepinta ja leveä vana.



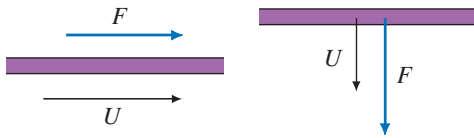
Pieni Reynoldsin luku

Edellä on keskitytty suuriin Reynoldsin lukuihin. Jos luku on pieni, ulottuu viskositeetin vaikutus laajalle, eikä ole järkevää erotella mitään rajakerrosta. Kun Re on hyvin pieni, $Re < 1$, voidaan Navier-Stokes-yhtälöä (179) yksinkertaistaa jättämällä pois epälineaarinen termi $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Tällöin voidaan johtaa mm. että nestevirtauksessa paikallaan olevaan palloon kohdistuva voima on (Stokesin kaava)

$$F = 6\pi\mu aU, \quad (218)$$

missä a on pallon säde ja U nopeus kaukana pallosta.

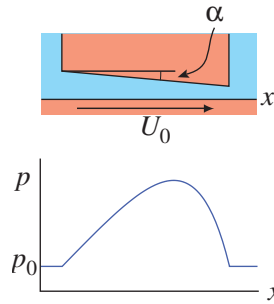
Voidaan laskea myös sylinteriin kohdistuva voima. Hankalan laskun tuloksena saadaan, että samalla voimalla saadaan sylinteri liikkumaan akselinsa suunnassa kaksi kertaa nopeammin kuin akselia kohtisuorassa. (Voimat molemmissa tapauksissa ovat liikkeen suuntaan.)



Uiminen, sillä tavalla kuin me sen tunnemme, perustuu olennaisesti nesteen hitauteen. Siksi sama tyyli ei onnistu pienen Reynoldsin luvun tapauksessa. Bakteerit voivat uida pyörittämällä siimaa. Esimerkiksi pyörittäessään korkkiruuvien muotoista siimaa syntyy liike eteenpäin johtuen edellä mainitusta tekijän 2 erosta sylinterin nopeudessa eri liikesuuntiin.

Teknisesti erittäin tärkeä pienen Reynoldsin luvun ilmiö on *voitelu*. Tarkastellaan nestettä (tai kaasua) kapenevassa välissä, missä alempi seinämä liikkuu

nopeudella $U_0 \hat{i}$.



Jos kapenemiskulma α on pieni, virtausprofiili on hyvin tarkasti sama kuin laskettiin edellä kaavassa (183), mutta nyt "vakiot" c_2 , c_3 ja G ovat x :n funktiota. Nähdään että jos kyseessä olisi puhdas leikkausvirtaus ($G \equiv 0$), niin väliin pakkautuisi vasemmalta enemmän nestettä kuin oikealta virtaisi pois. Jotta saavutettaisiin tasapainotilanne, syntyy väliin ympäristöä suurempi paine (kuva), joka ajaa ylimääräisen nesteen pois [$G(x) \neq 0$]. Tämä ylipaine estää kiinteiden pintojen suoran kosketuksen, jolloin sekä vastusvoima liikkeelle että osien kuluminen on ratkaisevasti pienempi kuin suorassa kosketuksessa.

8. Viskoositon virtaus

Edellisen perusteella viskositeetti on keskeinen 1) aina kun Reynoldsin luku on pieni, ja 2) suurella Reynoldsin luvulla rajakerroksessa. Myös pyörrepinnalla ja vanassa viskositeetilla on vaikutusta, mutta se ei välttämättä ole dominoiva. Näiden alueiden ulkopuolella viskositeetin merkitys on pieni.

Seuraavassa pyritään tutkimaan alueita, joissa viskositeetti voidaan jättää huomiotta, mukaan lukien likimääräisesti myös pyörrepinnat ja vana. Tutkitaan siis Eulerin yhtälöä (152). Sen parina on jatkuvuusyhtälö (30)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p.\end{aligned}\quad (219)$$

Yksikertaisuuden vuoksi tarkastellaan kokoopuristumatonta virtausta, ja kirjoitetaan voima potentiaalin avulla (95), jolloin yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla \left(\Phi + \frac{p}{\rho} \right).\end{aligned}\quad (220)$$

8.1 Pyörteisyyys

Edellä on määritelty sirkulaatio polun l yli kaavalla

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad (57)$$

Tähän läheisesti liittyvä suure on pyörteisyyys $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$. Tämä johtuu siitä että Stokesin lauseen (331) mukaan viivaintegraali (57) voidaan muuttaa pintaintegraaliksi pinnan yli, jonka reunan polku muodostaa. Siis

$$\Gamma = \int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}. \quad (221)$$

Tarkastellaan esimerkiksi pyörreviivaa. Tässä $\Gamma \neq 0$, mutta virtaus pyörteen ytimen ulkopuolella on pyörteetöntä. Tällainen viiva ei voi päättyä nesteeseen/kaasun sisällä. Sillä jos näin olisi, voitaisiin integrintipinta valita kokonaan pyörteettömässä alueessa kulkeväksi, ja silloin Γ häviäisi. Päättelemme siis että virtauspyörteet voivat vain sulkeutua itseensä (esim. savurengas) tai päättyä johonkin rajapinnalle (esim. tornado). Sama pätee pyörrepintoihin.

Lasketaan nyt kuinka paljon sirkulaatio muuttuu, kun samalla annetaan polun muuttua virtauksen mukana. Lasketaan siis

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (222)$$

Nyt on derivoitava myös viivaelementtiä $d\mathbf{r}$, koska se muuttuu virtauksen mukana. Saadaan

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \frac{Dd\mathbf{r}}{Dt} \right). \quad (223)$$

Jälkimmäisessä termissä voidaan vaihtaa D :n ja d :n järjestystä ja saadaan

$$\oint \mathbf{v} \cdot \frac{Dd\mathbf{r}}{Dt} = \oint \mathbf{v} \cdot d \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \oint d\left(\frac{1}{2}v^2\right). \quad (224)$$

Käyttäen Eulerin yhtälöä (220) saadaan

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint d\left(\Phi + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}v^2\right) = 0, \quad (225)$$

sillä sulkulausekkeen sisällä on yksikäsitteinen funktio, jonka muutos suletulla polulla täytyy hävitä. Tulos

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (226)$$

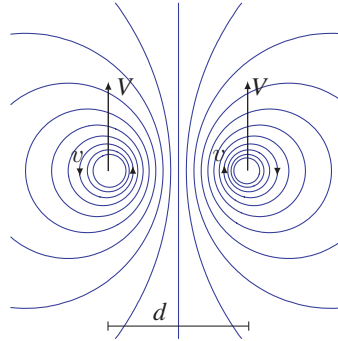
tunnetaan *Kelvinin teoreemana*. Siis virtauksen mukana liikkuvan polun yli laskettu sirkulaatio pysyy vakiona. Oletuksena oli viskoositon, kokoonpuristumaton virtaus.

Usein viskositeetti ei ole häviävän pieni. Silloin Kelvinin teoreema ei ole tarkasti voimassa, mutta saattaa silti olla hyvä approksimaatio kun ei tarkastella kovin pitkää aikaväliä.

Kelvinin teoreeman mukaan pyörreviivat ja -pinnat liikkuvat virtauksen mukana. Edellä on tarkasteltu pyörreviivan nopeuskenttää, joka sylinterikoordinaateissa on

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (55)$$

Tarkastellaan nyt esimerkkinä kahta pyörreviivaa, joiden sirkulaatio on vastakkaisiin suuntiin.



Vasemmanpuoleinen pyörre aiheuttaa oikeanpuoleisen kohdalla nopeuden $V = \Gamma/2\pi d$, missä Γ on yhden pyörteen sirkulaatio ja d on pyörteiden etäisyys. Oikeanpuoleinen taas aiheuttaa saman suuruisen ja suuntaisen nopeuden vasemman pyörteen kohdalla. Tuloksena on että pyörrepari ja samalla koko virtauskenttä etenee muotoaan muuttamatta samaan suuntaan nopeudella $\Gamma/2\pi d$.

Edellinen esimerkki kuvaa myös pyörrengasta (jonka näkyvä muoto on savurengas), sillä siinä vastakkaisilla laidoilla pyörimissuunta on vastakkaisen. Myös pyörrengas etenee muotoaan muuttamatta, kun Kelvinin teoreeman oletukset on täytetty. (Pyörrengaan nopeus on hieman hankalampi laskea kuin pyörreparin

koska pitää laskea renkaan itseensä indusoima nopeus, ja se riippuu myös pyörteen ytimen rakenteesta, mutta on samaa suuruusluokkaa kun pyörreparille kun d on renkaan halkaisija.)

Esimerkkejä pitkäikäisistä pyörteistä: 1) trombit ja hurrikaanit.

2) Tuuli maa pinnan lähellä muistuttaa leikkausvirtausta, ja on siksi pyörteistä. Kelvinin teoreeman mukaan pyörreviivat eivät voi leikata esimerkiksi savupiippua, ja siksi ne taipuvat sen ympäri, ja aiheuttavat alaspäinvirtauksen savupiipun takana. (kuva)

3) lentokoneesta aiheutuvat pyörreviivat, joita tarkastellaan jäljempänä.

Toinen tärkeä seuraus Kelvinin teoreemasta on että jos virtaus alun perin on pyörteetön, se myös jää pyörteettömäksi. Palataan tähän hetken päästä.

8.2 Bernoullin yhtälö

Jos nopeuskenttä on tiedossa, voidaan Eulerin yhtälö tulkita yhtälöksi paineelle. Pyritään nyt ratkaisemaan paine. Rajoitutaan pysyvään (ajasta riippumattomaan) virtaukseen.

Liitteessä on johdettua identiteetti (327), joka nopeusvektoriin sovellettuna on

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (227)$$

Käytetään tätä Eulerin yhtälössä (220), jolloin saadaan

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} \right). \quad (228)$$

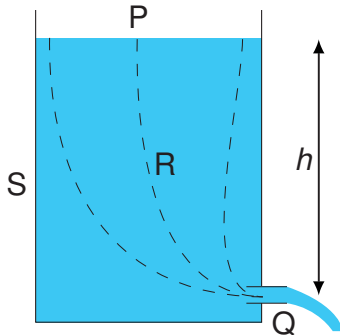
Otetaan tämän pistetulo nopeuden suuntavektorin \mathbf{s} kanssa. Vasen puoli häviää, joten

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (229)$$

Tästä seuraa että

$$\frac{1}{2} v^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} = \text{vakio virtaviivaa pitkin}. \quad (230)$$

Tämä on *Bernoullin yhtälön* eräs muoto.



Sovelletaan Bernoullin yhtälöä virtaukseen astiasta kuvan tapauksessa. Pisteissä P (nopeus V , poikkipinta-ala A) ja Q (nopeus v , poikkipinta-ala a) saadaan

$$\frac{1}{2} V^2 + gh + \frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho}, \quad (231)$$

missä p_0 on ilmanpaine. Massan säilyminen antaa toisen yhtälön

$$\rho V A = \rho v a. \quad (232)$$

Näistä saadaan

$$V^2 \left(\frac{A^2}{a^2} - 1 \right) = 2gh. \quad (233)$$

Tästä saadaan

$$\frac{dh}{dt} = -V = -\sqrt{\frac{2gha^2}{A^2 - a^2}}. \quad (234)$$

Olettamalla $a \ll A$ saadaan

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2gha^2}{A^2}}. \quad (235)$$

Ratkaisemalla differentiaaliyhtälö saadaan

$$h = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{ga^2}{2A^2} t} \right)^2. \quad (236)$$

Tyhjentymisajaksi saadaan

$$\frac{A}{a} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \quad (237)$$

Verrataan pisteitä P ja R. Koska nopeus on molemmissa saman, on paine pisteessä R hydrostaattisen paineen verran suurempi. Kuljettaessa virtaviivaa eteenpäin, paine alkaa lopulta pudota ja neste kiihtyä, kunnes paine on taas ilmanpaine pisteessä Q.

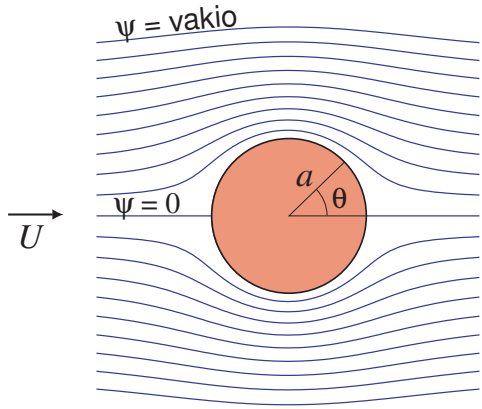
Yllä olevissa tuloksissa ei ole huomioitu viskositeettia. Viskositeetin vaikutuksesta tyhjennysputken reunoille muodostuu rajakerros. Yllä olevat tulokset pitävät likimäärin paikkansa jos rajakerroksen paksuus on pieni verrattuna tyhjennysputken halkaisijaan.

Sylinteriin kohdistuva voima

Harjoitustehtävänä on virtausta sylinterin ympäri kuvattu virtafunktiolla

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta. \quad (59)$$

Jäljempänä tullaan perustelemaan, että tämä on Eulerin yhtälön ratkaisu. Siksi sitä voi käyttää kuvaamaan virtausta suurilla Reynoldsin luvuilla rajakerroksen ja vanan ulkopuolella. Lasketaan tätä käyttäen sylinteriin kohdistuva voima.



Sylinterin pinta vastaa virtaviivaa $\psi = 0$, ja sillä

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{vakio} = \frac{1}{2}U^2 + \frac{p_0}{\rho}. \quad (238)$$

Virtafunktiosta saadaan nopeudeksi pinnalla $-2U \sin \theta$, joten

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\sin^2 \theta). \quad (239)$$

Virtaussuuntaan vaikuttavaksi kokonaisvoimaksi (pituusyksikköä kohti) saadaan

$$F_{\parallel} = - \int_{-\pi}^{\pi} pa \cos \theta d\theta, \quad (240)$$

koska jokaisessa pinta-elementissä $ad\theta$ voima kohdistuu sylinterin keskusta. Saadaan $F_{\parallel} = 0$. Tätä kutsutaan *d'Alembertin paradoksiksi*.

Todellisuudessa sylinterin pinnalle muodostuu rajakerros ja perään vana. Tämän tarkka laskeminen ei ole helppoa, mutta voidaan tehdä karkea suuruusluokka-arvio samaan tapaan kuin arvioitiin rajakerroksen paksuutta d (217). Näin saadaan

$$F_{\parallel} \sim a\sigma_{12} \sim a\mu \frac{U}{d} \sim \frac{a\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (241)$$

Tässä siis oletetaan nopeuden olevan sen verran pieni, että rajakerros ei irtoa.

Kun suuremmalla nopeudella rajakerros irtoaa sylinterin pinnalta, ei yllä oleva lasku päde ollenkaan. Kun virtaus irtoaa, putoaa paine sylinterin takasyrjällä lähelle tasapainopainetta p_0 , kun taas sylinterin etupuolella p on oleellisesti sama kuin edellä. Tästä päättelemme vastusvoimalle karkean arvion

$$F_{\parallel} \sim a\rho U^2. \quad (242)$$

Verrattaessa irtoamattoman rajakerroksen tapaukseen (241), on tämä vastusvoima huomattavasti suurempi, tekijällä $\sqrt{\text{Re}}$. Jos halutaan minimoida vastusvoima, on kappale siten suunniteltava niin että virtauksen irtoamista tapahtuisi mahdollisimman vähän. Tässä suhteessa edellä käsitelty virtaviivaisen kappaleen muoto, pyöreä utureuna, litteä muoto ja suippo takareuna, on ideaalinen.

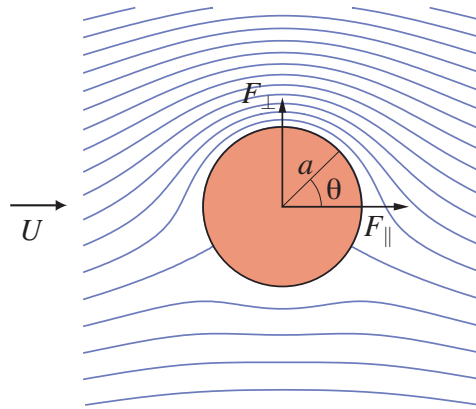
Tarkastellaan vielä tapausta, jossa sylinterin ympäri on pyörreviivaa vastaava virtaus. Pyörreviivalle johdettiin edellä virtafunktio (56) sekä todettiin sirkulaatioksi $\Gamma = 2\pi C$, joten virtafunktio voidaan kirjoittaa

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a}. \quad (243)$$

Yhdistetään tämä virtaus edelliseen, jolloin koko virtafunktio on

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a}. \quad (244)$$

Oheisessa kuvassa on piirretty ψ :n tasaväliset vakioarvokäyrät kun $\Gamma = -2\pi aU$.



Laskemalla kaavoista (52) virtausnopeus sylinterin pinnalla todetaan, että virtauksella on olemassa pysäyttymispiste kun

$$|\Gamma| \leq 4\pi aU. \quad (245)$$

Oletetaan että näin on, jolloin saadaan Bernoullin yhtälöstä

$$p + \frac{1}{2}\rho \left(2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2. \quad (246)$$

Voimalla voi nyt olla sekä virtauksen suuntainen että sitä vastaan kohtisuora komponentti. Laskemalla saadaan

$$F_{\parallel} = - \int_{-\pi}^{\pi} pa \cos \theta d\theta = 0, \quad (247)$$

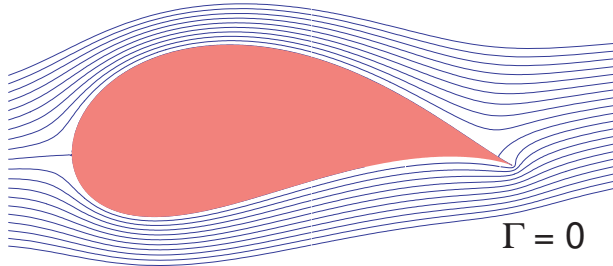
ja

$$\begin{aligned} F_{\perp} &= - \int_{-\pi}^{\pi} pa \sin \theta d\theta \\ &= - \frac{\rho U \Gamma}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= -\rho U \Gamma. \end{aligned} \quad (248)$$

Saadaan siis virtausta vastaan kohtisuora voima. Se voidaan kvalitatiivisesti ymmärtää siten että toisella puolen sylinteriä nopeus on suurempi kuin toisella ja siksi näissä on paine-ero.

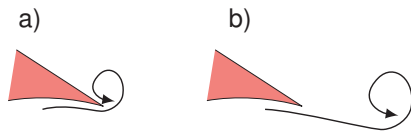
Siipi

Potentiaaliteorialla (seuraava luku) voidaan muodostaa Eulerin yhtälön ratkaisu myös siipimäisen muodon, ns. Zhukovskin siipiprofilin (Patersonin kirjassa “Joukowski aerofoil”) ympärillä. Oheisessa kuvassa siiven paksuus on valittu suureksi paremman näkyvyyden saavuttamiseksi.

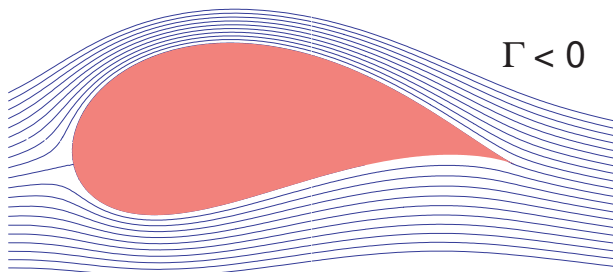


Kuvassa on esitetty virtaviivat siinä tapauksessa että sirkulaatio siiven ympäri häviää, $\Gamma = 0$. Tällöin myös siiven nostovoima häviää, $F_{\perp} = 0$, ts. edellä laskettu tulos sylinterille pätee riippumatta kappaleen muodosta. Tämä kuvaa virtausta pienillä nopeuksilla, niin hyvin kuin viskoositon teoria siihen pystyy.

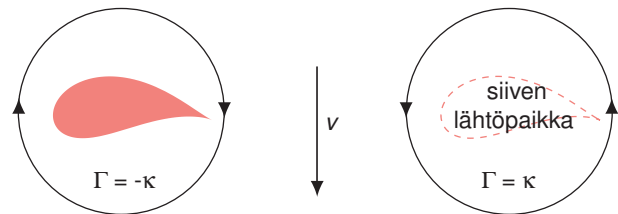
Yllä olevassa kuvassa kiinnittää huomiota, että pysähtymispiste siiven jättöpuolella on siiven yläpinnalla siiven takareunan etupuolella. Siten alapuolelta kulkeva virtaus joutuu tekemään jyrkän mutkan siiven takareunan ympäri. Tämän takia alapuolelta tuleva rajakerros helposti irtoaa siivestä.



Siivestä irtoaa pyörre, jonka ympäri sirkulaatio $\kappa > 0$. Koska kokonaissirkulaatio säilyy, muodostuu tämän seurauksena siiven ympärille sirkulaatio $\Gamma = -\kappa$. Tällöin siipeen kohdistuu nostovoima $F_{\perp} \neq 0$. Sirkulaation seurauksena pysähtymispiste siirtyy lähemmäs siiven takareunaa. Sirkulaatiota irtoaa kunnes pysähtymispiste on siirtynyt siiven takareunalle. Tällöin nopeus on tasainen siiven takareunan kohdalla, kuten seuraavassa kuvassa.



Ajatellaan että siipi ja ilma on aluksi paikallaan, mutta ajanhetkellä $t = 0$ siipi lähtee liikkeelle nopeudella U . Edellä kuvatun prosessin seurauksena syntyy kaksi pyörrettä.



Näin syntyy siiven ja sen lähtöpaikan väliin alaspäin suuntautuva ilmavirtaus. Ajatellen lentokonetta, jossa siipien kärkiväli on L , syntyy suorakaiteen muotoinen suljettu pyörreviiva pinta-alaltaan LUt . Kokonaisliikemäärä tässä virtauksessa on Newtonin lain mukaan gMt , missä M on lentokoneen massa (vähennettynä sen syrjäyttämän ilman massalla). Lentokone pysyy ilmassa koska siivet siirtävät painovoimasta johtuvan pystysuoran liikemäärän muutoksen tälle pyörrevirtaukselle.

Bernoullin yhtälön muita sovellutuksia

- pitotputki
- kuristusputki
- Kokeile itse
- puhallus kahden riippuvan pallon väliin
- pallo nousevassa ilmavirrassa
- lankarulla ja levy: puhallus rullan läpi estää alla olevaa levyä putoamasta

9. Potentiaaliteoria

Tutkitaan millä edellytyksillä virtaus voidaan olettaa pyörteettömäksi,

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (249)$$

Tarkastellaan esimerkiksi virtausta jonkin kappaleen ohi. Pyörteisyyden muutosta virtauksen mukana voidaan tutkia Kelvinin teoreemalla (226). Jos voidaan olettaa, että alkutilassa (kaukana kappaleesta) virtaus on pyörteetöntä, tämä osoittaa että virtaus säilyy pyörteettömänä. Siis virtaus suurella Reynoldsin luvulla voidaan jakaa kahteen alueeseen: 1) rajakerrokseen ja vanaan, joissa virtaus on pyörteellistä. 2) Näiden ulkopuoliseen alueeseen, jossa virtaus on pyörteetöntä (249). Pyörteettömyys koskee myös esimerkiksi ammeessa aluksi paikallaan olevaa vettä. Kun ammeen tulppa avataan, säilyy virtaus pääosin pyörteettömänä. Poikkeuksena ovat pyörteen ydin ja rajakerros ammeen pohjalla, missä viskositeetti on olennainen.

Pyörteettömyysoletus on voimassa myös ääniaaltojen ja veden pinta-aaltojen tapauksessa, joita tutkitaan myöhemmin.

Pyörteettömälle virtaukselle on järkevää määritellä nopeuspotentiaali ϕ kaavalla

$$\mathbf{v} = \nabla\phi. \quad (250)$$

Tällöin pyörteettömyysehto (249) on automaattisesti toteutunut. (Tehtävä: vertaa nopeuspotentiaalin ja virtafunktion määritelmiä.)

Usein voidaan olettaa, että virtaus on sekä pyörteetöntä että kokoonpuristumatonta,

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \text{ ja } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (251)$$

Tästä seuraa että nopeuspotentiaali toteuttaa Laplace-yhtälön

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (252)$$

Todetaan, että useat edellä perusteluitta esitetyt virtaukset toteuttavat molemmat ehdot (251). Näitä ovat virtaus kohti seinää (15), radiaalinen virtaus (53), pyörreviiva (56), virtaus sylinterin ohi (59) ja Zhukovkin siipiprofilivirtaus, sekä kaikki niiden yhdistelmät. Nämä voidaan nyt perustella seuraavasti.

Väitetään että virtaus, joka toteuttaa ehdot (251), on aina Navier-Stokes-yhtälön (161) ratkaisu. Sen sijaan reunaehdot eivät useimmiten kuitenkaan ole oikeat.

Todistus: Käyttäen kaavoja (227), (250) ja $\rho = \text{vakio}$ saadaan Navier-Stokes-yhtälö muotoon

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \nabla\phi. \quad (253)$$

Nähdään että vasemman puolen termit häviävät koska $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ja $\nabla^2\phi = 0$ (nablojen järjestys voidaan

vaihtaa). Jäljelle jää vain ehto

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (254)$$

missä $f(t)$ on jokin vain ajasta riippuva funktio. Tämä on Bernoullin yhtälön vaihtoehtoinen muoto. Huomaa, että siinä esiintyvä suure (254) ei ole vakio vain virtaviivaa pitkin, vaan kaikkialla. Olemme siis osoittaneet, että virtauskenttä, joka toteuttaa kaavat (251), on myös Navier-Stokes-yhtälön ratkaisu, ja paine määräytyy Bernoullin yhtälöstä (254). ■

Lähes poikkeuksetta ehdot (251) toteuttava virtaus ei toteuta Navier-Stokes-yhtälön ratkaisuilta vaadittavia reunaehdoja (165). Sen vuoksi tällaista virtausta on korjattava käsittelemällä rajakerros erikseen.

Nähdään että ehdot (251) toteuttavien virtausten systemaattinen etsiminen johtaa Laplacen yhtälön (252) ratkaisemiseen. Tätä kutsutaan *potentiaaliteoriaksi*. Potentiaaliteoria on myös käytössä sähköopissa, sillä ajasta riippumattoman sähkö- ja magneettikentän potentiaalit toteuttavat sen.

Ratkaisumenetelmiä

Laplacen yhtälö on lineaarinen, joten sille on paljon helpompi löytää ratkaisuja kuin Navier-Stokes-yhtälölle. Yhteen Laplace-yhtälön ratkaisumenetelmään, muuttujien erotteluun, olemme jo tutustuneet harjoitustehtävissä ja liitteessä C. Mainitaan tässä toinen menetelmä, jolla voidaan ratkaista kaksiulotteisia potentiaaleja.

Muodostetaan paikkakoordinaateista x ja y kompleksiluku $z = x + iy$. Ajatellaan että meillä on jokin analyyttinen funktio $f(z)$, esim $f(z) = z^3$ tai $f(z) = \cos(z)$. Funktio $f(z)$ voidaan jakaa reaali- ja imaginaariosiin $f = u + iv$. Matematiikan kurseissa osoitetaan että analyyttinen funktio toteuttaa Cauchy-Riemann-yhtälöt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (255)$$

Näiden perusteella voi helposti osoittaa, että sekä $u(x + iy)$ että $v(x + iy)$ toteuttavat Laplace-yhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (256)$$

Lisäksi nähdään, että jos f :n reaaliosa tulkitaan nopeuspotentiaaliksi, $u = \phi$, on imaginaariosa sama kuin virtafunktio, $v = \psi$. Nähdään siis että jokainen analyyttinen funktio voidaan tulkita joksikin virtaukseksi. Virtausongelmia ratkaistaessa taas on konstruoitava sopiva analyyttinen funktio, jonka muodostama virtaus toteuttaa annetut ehdot. Esimerkiksi virtaus sylinterin ohi (59) saadaan funktiosta

$$f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right). \quad (257)$$

Mainittakoon että Zhukovskin siipivirtaus saadaan implisiittisesti määritellystä funktiosta

$$f(z) = e^{-i\alpha} \frac{w - \mu}{a} + \frac{a}{e^{-i\alpha}(w - \mu)} + i\gamma \ln \frac{w - \mu}{a},$$

$$z = w + \frac{1}{w} \quad (258)$$

missä $a = |1 - \mu|$ takaa siiven terävän takareunan, ja esimerkiksi $\mu = -0.4 + 0.3i$. α kuvaa virtauksen tulosuuntaa ja γ sirkulaatiota.

Lisää esimerkkejä potentiaalteorian käytöstä löytyy Patersonin kirjan luvusta XI, sekä täydellisempi selitys kompleksisesta potentiaalista ja sen käytöstä luvuista XVI ja XVII.

10. Ääniaallot

Ääniaallot ovat paineessa ja aineen tiheydessä tapahtuvia vaihteluja, jotka etenevät varsin nopeasti. Niitä esiintyy kaikissa kolmessa olomuodossa, mutta tässä tarkastellaan vain nesteitä ja kaasuja. Ääniaallon nopeus ilmassa on 330...340 m/s ja vedessä 1400...1450 m/s. Kiinteissä aineissa se yleensä on suurempi. Tyypillinen paineenvaihtelu ääniaallossa ilmassa on $10^{-4} \dots 1$ N/m². Suhteellinen paineenvaihtelu on siten välillä $10^{-9} \dots 10^{-5}$, joskin on mahdollista synnyttää paljon voimakkaampiakin aaltoja (esim. räjähdykset).

Ihminen kuulee ääniaaltoja noin väliltä 20...20 000 Hz. Matalimmat taaajuudet tunnetaan värinä. Korkeampia taaajuuksia kutsutaan ultraääniksi.

Seuraavassa johdamme aaltoyhtälön ääniaalloille. Patersonin kirjasta poiketen lähdetään liikkeelle periaatteessa jatkuvuusyhtälöstä ja Navier-Stokes-yhtälöstä. Koska kuitenkin oletamme viskositeetin häviävän pieneksi, voimme korvata Navier-Stokesin Eulerin yhtälöllä. Siis

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p. \quad (259)$$

Huomaa että toisin kuin useimmiten edellä, emme oleleta ainetta kokoonpuristumattomaksi. Ääniaallot ovat perusesimerkki tapauksesta missä nesteen/kaasun kokoonpuristuvuus on olennaista.

Tietäen että paineen vaihtelu ääniaallossa on vähäistä, ratkaistaan yhtälöt (259) linearisoinnilla. Tarkastellaan ensin tasapainotilaa, missä $p = p_0$ ja $\rho = \rho_0$ ovat vakioita ja $\mathbf{v} \equiv 0$. Tällöin yhtälöt (259) toteutuvat identtisesti. Seuraavaksi kirjoitamme

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'. \quad (260)$$

Suureet p' ja ρ' , ja \mathbf{v}' oletetaan nyt niin pieniksi, että kun lausekkeet (260) sijoitetaan yhtälöihin (259), voidaan jättää pois kaikki termit, jotka ovat toista tai korkeampaa astetta pilkutetuissa suureissa. Erityisesti termistä $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ ei siten tule mitään kontribuutiota. Näin saadaan linearisoidut yhtälöt

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' = 0. \quad (261)$$

Jotta päästäisiin eteenpäin, meidän on tiedettävä kuinka paine muuttuu tiheyden mukana. Koska muutokset ovat pieniä, riittää lineaarinen vastaavuus

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho', \quad (262)$$

missä indeksi s tarkoittaa että entropia pitää olla vakio. (Ts. tiheyden muutos tapahtuu sen verran nopeasti että lämmönjohtumista ei ehdi tapahtua.) Käyttäen ideaalikaasulle pätevää adiabaattista tilanyhtälöä $p = k\rho^\gamma$ ($k = \text{vakio}$) saadaan helposti

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma k \rho_0^{\gamma-1} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}. \quad (263)$$

Sijoittamalla yhtälöön (261) saadaan yhtälöpari p' :lle ja \mathbf{v} :lle,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' &= 0. \end{aligned} \quad (264)$$

Operoimalla jälkimmäiseen $\nabla \cdot$:lla ja käyttämällä ylempää yhtälöä voidaan \mathbf{v} eliminoida, ja saadaan paineelle

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = 0. \quad (265)$$

Tämä on *aaltoyhtälö*. Siinä esiintyy parametri

$$c = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}, \quad (266)$$

joka voidaan tunnistaa etenevän aallon nopeudeksi, kuten pian perustellaan. Ilmalle normaaliolosuhteissa voidaan olettaa

$$\gamma = 1.4, \quad p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2, \quad \rho_0 = 1.23 \text{ kg/m}^3, \quad (267)$$

josta saadaan

$$c = 339 \text{ m/s}. \quad (268)$$

Tämä on lähellä mitattua arvoa kuivalle ilmalle.

Samanlainen aaltoyhtälö kuin p' :lle voidaan myös muodostaa ρ' :lle ja myös nopeuspotentiaalille ϕ (250).

Tutkitaan tasoaaltoa. Tällä tarkoitetaan että $p(\mathbf{r}, t)$ riippuu vain yhdestä paikkakoordinaatista, esim. $p(x, t)$. Tässä tapauksessa aaltoyhtälö (265) saa muodon

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (269)$$

Tämän yleinen ratkaisu on

$$p(x, t) = a(x - ct) + b(x + ct), \quad (270)$$

missä $a(\xi)$ ja $b(\xi)$ ovat mielivaltaisia (kahdesti derivoituvia) yhden muuttujan funktiota. Sijoittamalla voi helposti todeta, että yrite (270) toteuttaa yhtälön (269). Tutkimalla ratkaisua (270) eri ajanhetkillä voi todeta, että ensimmäinen termi kuvaa $+x$ suuntaan nopeudella c liikkuvaa ratkaisua ja jälkimmäinen termi $-x$ suuntaan nopeudella c liikkuvaa ratkaisua.

Nesteiden/kaasujen ääniaalloilla on monia yhteisiä piirteitä kiinteässä aineessa esiintyvien aaltojen kanssa. Samoin sähkömagneettisilla aalloilla on monia yhteisiä piirteitä. Yhteiset ominaisuudet perustuvat siihen että nämä kaikki toteuttavat saman aaltoyhtälön (265). Aaltoliikkeen yleisiin ominaisuuksiin on tutustuttu kurssilla "Aaltoliike ja optiikka", joten ei käsitellä tätä aihetta enempää tässä.

11. Turbulenssi

Seuraavassa tarkastellaan lyhyesti turbulenssin skaalausteoriaa. Tätä aihetta ei ole käsitelty Patersonin kirjassa, mutta se löytyy Landau-Lifshitzistä.

Tutkitaan virtausta hyvin suurella Reynoldsin luvulla

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu} \gg 1, \quad (271)$$

ja oletetaan virtaus täysin turbulentiksi. Tällä tarkoitetaan, että epäsäännöllistä liikettä esiintyy jatkuvasti laajalla alueella eikä vain ajoittain tai paikallisesti.

Idea on seuraava. Virtaukseen syntyy aluksi pyörteitä, joiden mittakaava (karkealla tarkkuudella) on L , geometrialle karakteristinen pituus, esimerkiksi putken halkaisija. Näissä pyörteissä nopeus on vastaavasti karakteristisen nopeuden V suuruusluokkaa. Nämä pyörteet synnyttävät pyörteitä, joiden mittakaava on hieman pienempi. Nämä taas synnyttävät edelleen pienempiä pyörteitä. Siis virtauksen energia vähitellen siirtyy isoilta pyörteiltä pienemmille.

Mikä on sitten pienin esiintyvä pyörre? Tutkitaan pyörteitä, joiden kokoluokka on l . Merkitään tämän kokoiisiin pyörteisiin liittyvää nopeutta v_l :llä. Nyt voidaan määritellä myös Reynoldsin luku eri kokoisille pyörteille erikseen,

$$\text{Re}_l = \frac{v_l l}{\nu}. \quad (272)$$

Suurimmille pyörteille tämä on hyvin suuri ($\text{Re}_L \sim \text{Re}$), ja niiden tapauksessa viskositeetti ei siksi ole merkityksellinen. Kun mennään pienempiin pyörteisiin, Re_l pienenee (olettaen että v_l ei kasva samalla, mikä perustellaan pian). Näillekin viskositeetti on merkitykseton sikäli kun $\text{Re}_l \gg 1$. Pyörteiden pienetessä jossain vaiheessa saavutetaan $\text{Re}_l \sim 1$. Tässä mittakaavassa viskositeetti tulee olennaiseksi, ja pyörteiden virtausenergia muuttuu lämmöksi. (Huomaa että kyseessä varsin karkea suuruusluokka-arviointi, sillä jopa arvo $2000 \sim 1$.)

Inertiaalisella mittakaava-alueella, missä $\text{Re}_l \gg 1$, viskositeetti ei ole merkityksellinen, ja siksi Navier-Stokes-yhtälön sijasta voidaan käyttää Eulerin yhtälöä. Eulerin yhtälössä taas ei ole mitään laadutonta parametria. [Katso yhtälö (199) rajalla $\text{Re} \rightarrow \infty$.] Siis ratkaisut eri mittakaavan pyörteille saadaan toisistaan pelkällä skaalauksella.

Nyt voidaan v_l -riippuvuus ratkaista dimensioanalyysin avulla. Ainoa järjestelmässä esiintyvä vakio on energiavirta suuremmista pyörteistä pienempiin, jonka täytyy olla vakio inertiaalisella alueella. Käytännössä on kätevinä valita täksi vakioksi energiavirta massayksikköä kohti, $\dot{\epsilon}$. Sen laatu on

$$[\dot{\epsilon}] = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg s}} = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} \quad (273)$$

Ainoa mahdollinen relaatio joka voi sitoa tätä, nopeutta $[v_l] = m/s$ ja mittakaavaa $[l] = m$ on

$$\frac{\dot{\epsilon}l}{v_l^3} = \text{vakio} \sim 1. \quad (274)$$

Siis

$$v_l \sim (\dot{\epsilon}l)^{1/3}, \quad (275)$$

eli v_l pienenee l :n mukana kuin l :n kuutiojuuri.

Energiavirta itsessään ei voi riippua siitä mitä tapahtuu pienillä mittakaavoilla. Siksi se voi riippua vain suureista L ja V . Sama dimensioargumentti kuin edellä antaa

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{V^3}{L}. \quad (276)$$

Ehto $Re_l \sim 1$ antaa pienimpien pyörteiden mittakaavaksi

$$l_{\min} \sim \frac{L}{Re^{3/4}}. \quad (277)$$

Se että energiavirta (276) on riippumaton viskositeetin ν arvosta on sopusoinnussa sen kanssa, että virtaus putkessa tulee riippumattomaksi Reynoldsin luvusta kun $Re \gg 1$. [Katso kaavan (200) yhteydessä oleva kuva.]

12. Nesteiden pinta-aallot

Ääniaaltojen ohella nesteissä esiintyy aaltoliikettä, jossa määrävänä tekijänä on nesteiden pinta. Olennaista pinta-aalloille on gravitaatio tai pintajännitys, joka pyrkii palauttamaan pinnan suoraksi. Nesteiden kokoonpuristuvuus ei pinta-aalloissa ole olennaista, ja yksinkertaisuuden vuoksi neste voidaan olettaa kokoonpuristumattomaksi.

Tässä pyritään kuvaamaan joitakin yksinkertaisimpia tapauksia nesteiden pinta-aalloista.

Linearisoidut yhtälöt

Oletetaan että viskositeetti on mitätön. Otetaan alkutilanteeksi täysin levossa oleva neste alueessa $z < 0$, jolloin se luonnollisestikin on myös pyörteetön, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Kun aalto saapuu tutkittavaan alueeseen, ei pyörteisyys voi muuttua Kelvinin teoreeman mukaan. Virtausnopeutta voidaan siis kuvata nopeuspotentiaalilla

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (250)$$

Kun tämän lisäksi oletetaan nesteiden kokoonpuristumattomuus ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), todetaan nopeuspotentiaalilla toteuttavan Laplace-yhtälön

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (252)$$

Tämä yhtälö kuuluu ratkaista alueessa (kuva)

$$-\infty < z < \zeta(x, y, t), \quad (278)$$

missä $\zeta(x, y, t)$ on nesteiden pinnan z -koordinaatti. Jotta voisimme tämän ratkaista meidän on tarkasteltava reunaehdot. Samoin kuin ääniaaltojen tapauksessa, pidetään mukana vain ensimmäisen kertaluvun poikkeamat tasapainotilasta.

(i) Hyvin syvällä oletetaan nesteiden olevan paikoillaan,

$$\nabla \phi \rightarrow 0, \quad \text{kun } z \rightarrow -\infty. \quad (279)$$

(ii) Nesteiden pinnalla paine oletetaan vakioksi, $p = p_0$. Toisaalta paine nesteissä määräytyy edellä johdetusta Bernoullin yhtälöstä (254)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (254)$$

Nyt $\Phi = gz$. Linearisoitua yhtälöä muodostettaessa voidaan $v^2/2$ -termi jättää huomiotta, ja suureet $f(t)$ ja p_0 voidaan sisällyttää ϕ :hin, koska ne eivät vaikuta nopeuteen (250). Sovellettaessa kaavaa (254) nesteiden pintaan saadaan siis

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} + g\zeta = 0. \quad (280)$$

Lausutaan ensimmäinen termi Taylorin sarjana pisteen $z = 0$ suhteen. Koska sekä $\partial \phi / \partial t$ että ζ oletetaan

pieniksi, jää tästä vain alin termi, jolloin saadaan linearisoitu reuna-ehto

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0} + g\zeta = 0. \quad (281)$$

(iii) Nesteen liike pystysuunnassa

$$v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (282)$$

vaikuttaa pinnan korkeuteen. Yksinkertaisimmillaan

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \quad (283)$$

Tarkempi reunaehto saataisiin kaavasta

$$0 = \frac{D}{Dt}(z - \zeta) = v_z - \frac{\partial\zeta}{\partial t} - v_x \frac{\partial\zeta}{\partial x} - v_y \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \quad (284)$$

mutta linearisoinnissa kaksi viimeistä termiä kuitenkin häviää. Kun vielä linearisoidaan ehto (283) samoin kuin kaava (280), saadaan reunaehto

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \quad (285)$$

Yhteenvedon saadaan linearisoidut yhtälöt

$$\nabla^2\phi = 0, \text{ kun } z \leq 0 \quad (286)$$

sekä yhdistämällä (281) ja (285) saadaan

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \text{ kun } z = 0. \quad (287)$$

Kun nämä on ratkaistu, saadaan pinnan korkeus kaavasta

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0}. \quad (288)$$

Pyritään nyt ratkaisemaan Laplace-yhtälö. Käytetään *muuttujien erottelua*, mitä on myös tarkasteltu liitteessä. Ratkaisua etsitään muodossa

$$\phi(x, y, z, t) = f(z)\phi_0(x, y, t). \quad (289)$$

Sijoittamalla Laplace-yhtälöön saadaan

$$f(z) \left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2}\right) + \phi_0 f''(z) = 0 \quad (290)$$

eli

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = -\frac{1}{\phi_0} \left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2}\right) \quad (291)$$

Koska vasen puoli riippuu vain z :sta ja oikea vain x :stä, y :stä ja t :stä, on ainoa mahdollisuus, että molemmat puolet ovat vakioita. Merkitään tätä vakiota k^2 :lla, jolloin vasemmalta puolelta saadaan yhtälöksi

$$f''(z) - k^2 f(z) = 0. \quad (292)$$

Tämän yleinen ratkaisu on

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}. \quad (293)$$

Reunaehto (279) rajaa ratkaisuksi

$$f(z) = e^{kz}, \quad (294)$$

missä k on positiivinen reaaliluku. (A voidaan siirtää funktion ϕ_0 .)

Laplace-yhtälöstä jää ratkaistavaksi yhtälö

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2} + k^2\phi_0 = 0. \quad (295)$$

Ennen kuin mennään eteenpäin, kommentoidaan yleisesti muuttujien erottelu -menetelmää. Joissain onnekkaimissa tapauksissa sattuu, että separoitu yrite (289) toteuttaa myös kaikki reunaehdot. Useimmiten kuitenkin näin ei ole. Ratkaisu voidaan kuitenkin esittää summana erotelluista ratkaisuista, tässä tapauksessa

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_k A_k f(z, k) \phi_0(x, y, t, k) \quad (296)$$

jollain kertoimilla A_k . Katso esimerkkiä liitteestä.

Etsitään lopuissa muuttujissa tasoaltotyypistä ratkaisua

$$\phi(x, z, t) = Be^{kz} e^{i(qx - \omega t)}. \quad (297)$$

Tässä kompleksisessä yritteessä vain reaaliosa vastaa fysikaalista ratkaisua. Sijoittamalla yhtälöön (295) todetaan että se toteutuu kun $q = k$, eli

$$\phi(x, z, t) = Be^{kz} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (298)$$

Sijoittamalla pintaehtoon (287) saadaan

$$-\omega^2 + gk = 0 \quad (299)$$

eli *dispersiorelaatio*

$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (300)$$

(Sekä q :lle että ω :lle saadaan myös vastakkaismerkkiset juuret, mutta ne eivät johda merkittävästi erilaisiin ratkaisuihin.)

Ratkaisu (298) esittää pinta-aaltoa, jonka aaltoluku on k ja siten aallonpituus $\lambda = 2\pi/k$. Se tunkeutuu nesteeseen oleellisesti syvyydelle $z \sim -\lambda$, sillä $\exp(-2\pi) = 0.0018$. Aallon nopeus on

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (301)$$

Ääniaalloista poiketen *pinta-aallon nopeus riippuu aallonpituudesta*. Lyhyet aallot kulkevat hitaammin kuin pitkät. Oheisessa taulukossa on arvoja vedelle maanpäällisissä olosuhteissa, ja $T = 2\pi/\omega$ on värähdysaika.

λ (m)	0.1	1	10	100	1000
c (m/s)	0.4	1.25	4	12.5	40
T (s)	0.25	0.8	2.5	8	25

Taulukon arvoja lyhyemmille aalloille veden pintajännitys tulee olennaiseksi. Osoittautuu että lyhyemmät kuin 4.4 cm aallot kulkevatkin nopeammin (katso esim. Landau-Lifshitz).

Pinta-aallot edustavat aaltoliikettä, joka ei kuitenkaan tottele tavallista aaltoyhtälöä. Paterson tosin kirjoittaa aaltoyhtälön (269) myös tässä tapauksessa, mutta se on harhaanjohtavaa koska siinä nopeus c riippuu ratkaisun aaltovektorista.

Tutkitaan vielä nopeuskenttää pinta-tasoaallossa. Merkitään pinnan korkeuden amplitudia A :lla,

$$\zeta = Ae^{i(kx-\omega t)} \quad (302)$$

jolloin kaavasta (288)

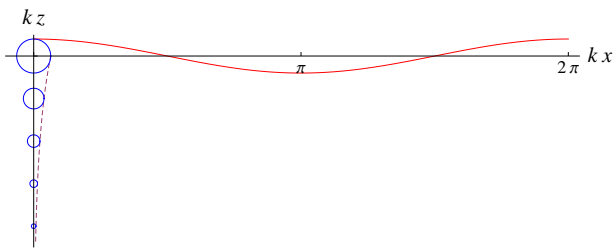
$$B = -\frac{igA}{\omega} \quad (303)$$

Tästä saadaan nopeus

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = ikBe^{kz} e^{i(kx-\omega t)} \\ v_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = kBe^{kz} e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (304)$$

Tästä nähdään että molempien suuntaiset liikkeet ovat saman suuruiset mutta poikkeavat vaiheella $\pi/2$. Laskemalla hiukkasten radat todetaan että ne ovat ympyröitä joiden säde on

$$\frac{k|B|}{\omega} e^{kz} = |A|e^{kz}. \quad (305)$$



Kuvassa ympyrät kuvaavat hiukkasten liikeratoja ja aaltoviiva nesteen pintaa. Huomaa että tämä kuvaus on tarkka vain sillä rajalla että aallon korkeus on pieni verrattuna aallon pituuteen.

Ryhmänopeus

Edellä laskettiin "monokromaattisen" aallon nopeus. Yhdistämällä eritaajuisia aaltoja voidaan muodostaa aaltopaketti, jolla on vain rajallinen kesto. Osoittautuu, että aaltopaketin nopeus poikkeaa aaltojen nopeuksista.

Yksinkertaisuuden vuoksi tutkimme vain kahden eri aaltovektorin aallon yhdistämistä. Tällä ei voida

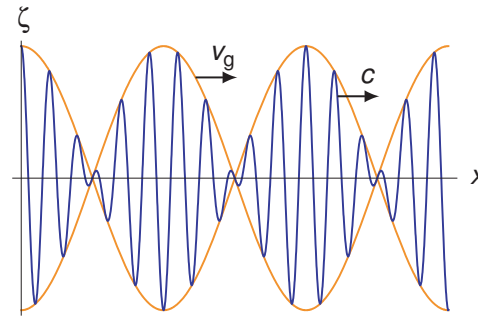
muodostaa rajattua pakettia, mutta paketin nopeus saadaan silti laskettua. Oletetaan aallot lähekkäisillä aaltovektoreilla $k \pm \delta k$,

$$\zeta = Ae^{i[(k+\delta k)x-(\omega+\delta\omega)t]} + Ae^{i[(k-\delta k)x-(\omega-\delta\omega)t]}. \quad (306)$$

Tämä on sama kuin

$$\zeta = 2A \cos(kx - \omega t) \cos(\delta kx - \delta\omega t). \quad (307)$$

Tässä lyhytaaltoisen aallon ($\lambda = 2\pi/k$) amplitudi on moduloitu pitkäaaltoisella aallolla ($\lambda = 2\pi/\delta k$), ts. se esittää sarjaa aaltopaketteja joiden välillä on vain pientä aaltoilua.



Nyt moduloivan aallon nopeus antaa aaltopaketin nopeuden, jota kutsutaan *ryhmänopeudeksi*,

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}. \quad (308)$$

Ääniaallolle $\omega = ck$ ja siksi $v_g = c$, ts. kaikki aallot liikkuvat samalla nopeudella ja aaltopaketin muoto pysyy muuttumattomana. Nesteen pinta-aalloille taas $\omega = \sqrt{gk}$ (300), joten

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{c}{2}. \quad (309)$$

Siis aaltopaketin muodostavat aallot liikkuvat tuplasti nopeammin kuin itse paketti. Aallot näyttävät syntyvän paketin loppupäässä, etenevän sen läpi ja sitten taas häviävän aaltopaketin edellä. Tämän voi havaita esimerkiksi tarkastelemalla moottoriveneen synnyttämää aaltoa.



Laivan aallot Tukholman saaristossa

Veden syvyyden vaikutus

Edellä oletettiin neste paljon syvemmäksi kuin aallonpituus. Matalammassa tapauksessa laskua voidaan korjata vaatimalla että virtaus ei kulje pohjan läpi,

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0. \quad (310)$$

(Se että myös pohjan suuntainen nopeus häviää johtaa rajakerrostarkasteluun. Koska viskositeetti oletettiin pieneksi, on rajakerros ohut, ja ei siten olennaisesti vaikuta aaltoihin.)

Reunaehdon (310) toteuttamiseksi ratkaisu (293) kirjoitetaan muotoon

$$f(z) = \cosh k(z+h), \quad (311)$$

mille $f'(-h) = 0$. Nopeuspotentiaali on sitten

$$\phi(x, z, t) = B \cosh k(z+h) e^{i(kx-\omega t)}. \quad (312)$$

Pintaehto (287) antaa nyt

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (313)$$

Aallon nopeus on

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}. \quad (314)$$

Tästä saadaan kaksi rajatapausta vastaten syvää ja matalaa vettä,

$$c = \begin{cases} \sqrt{g/k} & \text{kun } hk \gg 1 \\ \sqrt{gh} & \text{kun } hk \ll 1 \end{cases} \quad (315)$$

Vaihtoehtoisesti tapauksia voisi kutsua lyhyen ja pitkän aallon tapauksiksi. Nähdään että hyvin pitkät aallot syvässä meressä kulkevat nopeasti. Esim. $h = 2000$ m, $\lambda > 3 \times 10^4$ m saadaan $c = 140$ m/s ja $T > 200$ s.

Aallot syvyyden muuttuessa

Tässä olisin halunnut käsitellä mitä aalloille tapahtuu veden syvyyden muuttuessa, mutta aika ei riittänyt kunnon matemaattiseen käsittelyyn. Todetaan seuraavaa. Matalassa vedessä voidaan muodostaa aaltoyhtälö, sillä aallon nopeus on riippumaton aallonpituudesta. Kun pohjan syvyys muuttuu, voidaan tarkastella kahta eri rajatapausta.

(i) kun muutos on äkkinäinen osa aallosta taittuu ja osa heijastuu, kuten yleisesti aaltoliikkeellä.

(ii) kun syvyys muuttuu hitaasti (aallonpituuden mittakaavalla) ei heijastumista oleellisesti tapahdu. Kun syvyys pienenee, täytyy aallon amplitudin kasvaa, koska aallon energia säilyy. Jossain vaiheessa lineaarinen approksimaatio ei enää toimi, kun aallon amplitudi lähestyy veden syvyyttä.

Lopuksi

Tähän päättyy hydrodynamiikan kurssi. Toivottavasti olette pitäneet siitä. Muistutetaan vielä että laskuharjoitusten laskeminen on olennaista asioiden omaksumiselle. Toivotan hyvää menestystä tenttiin.

Liitteet

A. Vektorilaskua

Tässä lyhyt kertaus vektorilaskennasta. Lue tarkemmin Fysiikan matematiikkaa -kursista.

Kirjoitamme vektorin komponentteihin

$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ ortonormeeratussa kannassa $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Vektori voidaan ilmaista myös muodossa

$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Joissain tapauksissa on käytännöllisempää indeksoida komponentit ja kantavektorit numeroilla, jolloin sama vektori kirjoitetaan $\mathbf{A} = A_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + A_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + A_3 \hat{\mathbf{e}}_3$. Vektoreille määritellään skalaarilla kertominen $\Phi \mathbf{A}$ ja yhteenlasku $\mathbf{A} + \mathbf{B}$,

$$\Phi \mathbf{A} = (\Phi A_x, \Phi A_y, \Phi A_z) \quad (316)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z). \quad (317)$$

Kahden vektorin skalaaritulo määritellään

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A_i B_i, \quad (318)$$

missä viimeisessä muodossa i oletetaan summattavan 1:stä 3:een. Ristitulo määritellään

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i A_j B_k, \quad (319)$$

missä oletetaan summaus i :n, j :n ja k :n yli ja ε_{ijk} on permutaatioisymboli

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{kun } ijk = 123, 312 \text{ tai } 231 \\ -1 & \text{kun } ijk = 132, 321 \text{ tai } 213 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases} \quad (320)$$

Nähdään että $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}$.

Jatkossa käytetään identiteettiä

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}, \quad (321)$$

missä vasemmalla puolella oletetaan summaus k :n yli ja

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kun } i = j \\ 0 & \text{kun } i \neq j. \end{cases} \quad (322)$$

[Kaavan (321) voi perustella siten että vasen puoli on nolosta poikkeava vain kun kaikki i, j ja k ovat eri lukuja (1, 2, 3) ja samoin m, n ja k , jolloin ainoat mahdollisuudet ovat $i = m$ ja $j = n$ tai $i = n$ ja $j = m$. Näitä tapauksia vastaavat arvot on helppo todeta kaavan (321) oikean puolen mukaisiksi.] Kaavaa (321) käyttäen voidaan johtaa vektorikolmitulolle

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (323)$$

[Tai jos tietää toisen näistä, siitä voi johtaa kaavan (321).]

Määritellään operaattori ∇ kaavalla

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (324)$$

Tätä voidaan käyttää lausekkeissa vektorin tapaan, ottaen huomioon tulon derivoimisäännön ∇ :n kohdistuessa useampaan tekijään ∇ :n oikealla puolella. Esim.

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \Phi = A_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad (325)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\Phi \mathbf{A}) &= \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial \Phi A_k}{\partial x_j} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_i \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} A_k + \Phi \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \right) \\ &= (\nabla \Phi) \times \mathbf{A} + \Phi \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (326)$$

Yksi hyödyllinen identiteetti on

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \left(\frac{1}{2} A^2 \right) - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A}, \quad (327)$$

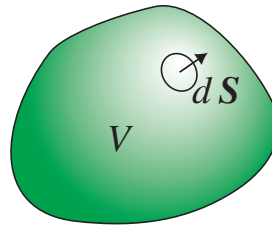
jonka todistus on

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i A_j \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \hat{\mathbf{e}}_i A_j \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_i A_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \hat{\mathbf{e}}_i A_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial A_j A_j / 2}{\partial x_i} - A_j \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i A_i}{\partial x_j} \\ &= \nabla \left(\frac{1}{2} A^2 \right) - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (328)$$

Hyödyllisiä integraalikaavoja. Gaussin lause sanoo

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV, \quad (329)$$

missä S on pinta joka rajoittaa tilavuutta V . Tässä $d\mathbf{S}$ osoittaa V :stä ulospäin.



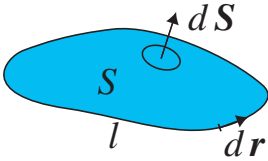
Gaussin lauseen muunnelmä skalaarikentälle Φ on

$$\int_S \Phi d\mathbf{S} = \int_V \nabla \Phi dV, \quad (330)$$

mikä saadaan johdettua soveltamalla Gaussin lausetta vektoreihin $\Phi \mathbf{i}$, $\Phi \mathbf{j}$ ja $\Phi \mathbf{k}$. Stokesin lause sanoo

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (331)$$

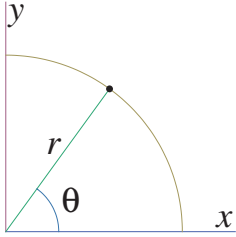
missä polku l on reunakäyrä pinnalle S . Integroitipolku on positiiviseen kiertosuuntaan $d\mathbf{S}$:n ympäri.



B. Käyräviivaiset koordinaatistot

Lähtökohdiana on suoraviivainen koordinaatisto, jonka paikkavektori kirjoitetaan

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (332)$$

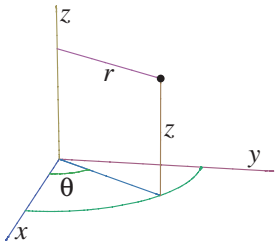


Napakoordinaatit r ja θ määritellään kirjoittamalla (oletetaan $z = 0$)

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}. \quad (333)$$

Napakoordinaatiston kantavektorit ovat

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (334)$$

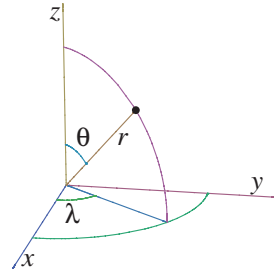


Sylinterikoordinaatit r , θ ja z määritellään kirjoittamalla

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (335)$$

Huomaa että tässä r on etäisyys z -akselista, ei etäisyys origosta. Sylinterikoordinaatiston kantavektorit ovat

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ \hat{\mathbf{z}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (336)$$



Pallokoordinaatit r , θ ja λ määritellään kirjoittamalla

$$\mathbf{r} = r \sin \theta (\cos \lambda \mathbf{i} + \sin \lambda \mathbf{j}) + r \cos \theta \mathbf{k}. \quad (337)$$

Pallokoordinaatiston kantavektorit ovat

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \lambda \mathbf{i} + \sin \theta \sin \lambda \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \lambda \mathbf{i} + \cos \theta \sin \lambda \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = -\sin \lambda \mathbf{i} + \cos \lambda \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (338)$$

Kaikki yllä olevat koordinaatistot ovat ortonormeerattuja, eli kantavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan olevia yksikkövektoreita. Napakoordinaatiston $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:n määritelmässä (334) esiintyvä nimittäjä $r \partial \theta$ voidaan ymmärtää kaaren pituudeksi kun θ muuttuu $\partial \theta$:n verran. Vastaavasti voidaan ymmärtää kaikki kantavektorien määritelmissä esiintyvät tekijät.

Suoraviivaisessa koordinaatistossa määritellään operaattori ∇ kaavalla

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (324)$$

Tämän avulla määritellään skalaarifunktion $\Phi(x, y, z)$ gradientti $\nabla \Phi$ kaavalla

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (339)$$

Nyt väitämme että sama saadaan tehtyä napakoordinaatistossa operaattorilla

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (340)$$

eli

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (341)$$

Vastaavasti sylinterikoordinaatistossa

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (342)$$

ja pallokoordinaatistossa

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\lambda}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}. \quad (343)$$

Nämä kaavat voidaan perustella sillä että kussakin pisteessä on kyseessä paikallinen suorakulmainen koordinaatisto, ja nimittäjissä esiintyvät tekijät selittyvät samoin kuin edellä.

Vektorifunktiolle $\mathbf{A}(x, y, z)$ määritellään divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ja roottori $\nabla \times \mathbf{A}$. Nablaoperaattorin eri muotoja voidaan käyttää myös näiden ilmaisemiseen eri koordinaatistoissa. Olennaista näissä on huomata että käyräviivaisten koordinaatistojen kantavektorit eivät ole vakioita, mikä pitää ottaa huomioon derivoitaessa. Esimerkiksi divergenssi napakoordinaatistossa

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta}) \\ &= \hat{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta}) + \hat{\theta} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta}) \\ &= \hat{r} \cdot \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \hat{\theta} \right) \\ &+ \hat{\theta} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} A_r \hat{\theta} - \frac{1}{r} A_\theta \hat{r} \right) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_r. \end{aligned} \quad (344)$$

Samaa menetelmää voidaan käyttää laskettaessa korkeampia derivoiteja, esim. $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi$. Tätä tekniikkaa käyttäen saadaan sylinterikoordinaatistossa

$$\nabla \Phi = \hat{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (345)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (346)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \\ &+ \hat{\theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \\ &+ \hat{z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (347)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (348)$$

Näiden usein taulukoista löytyvien lausekkeiden lisäksi kohdataan hydrodynamiikassa myös monimutkaisempia tapauksia kuten $\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$. Sen sijaan että laskettaisiin tälle yleinen lauseke, varaudutaan kulloinkin tarvittavien komponenttien laskuun yllä olevaa tekniikkaa käyttäen.

Hieman monimutkaisempaan esimerkkinä tarkastellaan symmetristä tensoria

$$2e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (349)$$

Jotta voisimme muodostaa tälle lausekkeen käyräviivaisissa koordinaateissa yllä olevaan tapaan, on

tensori lausuttava vektorien avulla. Yleisesti, kahdella vektorilla \mathbf{a} ja \mathbf{b} voidaan muodostaa tensori $A_{ij} = a_i b_j$. Tätä tensoria voidaan merkitä myös \mathbf{ab} . Tässä siis vektorit kirjoitetaan peräkkäin, ilman että niiden välillä olisi esimerkiksi skalaari- tai ristituloa. Myös tensori (349) voidaan kirjoittaa vektorien avulla muodossa

$$\mathbf{v} \overleftarrow{\nabla} + \nabla \mathbf{v}. \quad (350)$$

Tässä nuoli $\overleftarrow{\nabla}$:n päällä tarkoittaa, että derivointi kohdistuu operaattorin vasemmalle puolelle, eikä oikealle puolelle niin kuin tavallista on. Esimerkiksi napakoordinaatistossa tämä pitää ymmärtää seuraavasti

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}), \\ \mathbf{v} \overleftarrow{\nabla} &= (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial r}} \hat{r} + \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta}} \hat{\theta} \frac{1}{r} \right) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial r} (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}) \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}) \right] \hat{\theta}, \end{aligned} \quad (351)$$

eli molemmissa muodoissa derivointi kohdistuu samoihin suureisiin, ainoastaan vektorien järjestys on päinvastainen. Laskemalla derivaatat saadaan

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \hat{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{\theta} \right) \\ &+ \hat{\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} v_r \hat{\theta} - \frac{1}{r} v_\theta \hat{r} \right), \end{aligned} \quad (352)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \overleftarrow{\nabla} &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{\theta} \right) \hat{r} \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} v_r \hat{\theta} - \frac{1}{r} v_\theta \hat{r} \right) \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (353)$$

Näin ollen saadaan koko tensoriksi napakoordinaatistossa

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \overleftarrow{\nabla} + \nabla \mathbf{v} &= 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{r} \hat{r} \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) (\hat{r} \hat{\theta} + \hat{\theta} \hat{r}) \\ &+ 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \hat{\theta} \hat{\theta}, \end{aligned} \quad (354)$$

mistä voidaan identifoida kaikki $2e_{ij}$:n komponentit

$$\begin{aligned} 2e_{rr} &= 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ 2e_{r\theta} = 2e_{\theta r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \\ 2e_{\theta\theta} &= 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right). \end{aligned} \quad (355)$$

Toistamalla sama sylinterikoordinaatistossa voi todeta, että komponentit (355) ovat samat, ja että loput

komponentit ovat oleellisesti samat kuin ne laskettaisiin karteesisen koordinaatiston kaavoista,

$$\begin{aligned} 2e_{rz} = 2e_{zr} &= \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 2e_{\theta z} = 2e_{z\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ 2e_{zz} &= 2 \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (356)$$

C. Osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisu muuttujien erottelulla

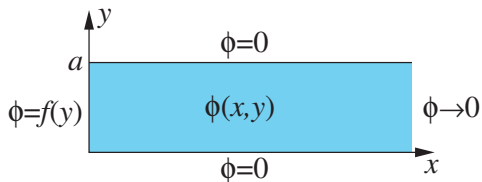
Tässä opettelemme muuttujien erottelu -nimisen tekniikan osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi. Tarkastellaan esimerkkinä Laplacen yhtälöä $\nabla^2 \phi = 0$ kahdessa ulottuvuudessa,

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (357)$$

Tarkastellaan tätä alueessa $x \geq 0$ ja $0 \leq y \leq a$ ja vaaditaan reuna-ehdot

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= 0 \\ \phi(x, a) &= 0 \\ \phi(0, y) &= f(y) \\ \phi(x, y) &\rightarrow 0 \text{ kun } x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (358)$$

missä $f(y)$ on jokin funktio. Fysikaalisesti $\phi(x, y)$ voisi olla lämpötila lämpöä johtavassa kappaleessa, jonka reunat pidetään reunaehtojen (358) määräämissä lämpötiloissa.



Muuttujien erottelussa etsitään ratkaisua separoituvassa muodossa

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (359)$$

Sijoittamalla Laplacen yhtälöön (357) ja järjestelemällä saadaan

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}. \quad (360)$$

Tässä vasen puoli riippuu vain x :stä ja oikea vain y :stä. Jotta tämä voisi päteä identtisesti, on molempien puolien oltava vakioita $= c$. Siis

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = cX, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -cY. \quad (361)$$

Näiden ratkaisut ovat eksponentiaalisia tai sini/kosini-muotoisia funktiota. Jotta saataisiin reunaehto

$x \rightarrow \infty$ toteutettua täytyy funktion olla tähän suuntaan vaimeneva,

$$X(x) = Ae^{-cx}, \quad (362)$$

missä $c = k^2$. Näin ollen yhtälön (361b) ratkaisu on

$$Y(y) = B \cos ky + C \sin ky. \quad (363)$$

Todetaan että kaksi ensimmäistä reunaehdoista (358) toteuvat vain jos $Y(0) = Y(a) = 0$. Näistä nähdään että $B = 0$ ja k voi saada vain tiettyjä arvoja $k = k_n = \pi n/a$, missä $n = 1, 2, \dots, \infty$. Tästä saadaan ratkaisuehdotukseksi ($D = AC$)

$$\phi_n(x, y) = De^{-k_n x} \sin k_n y. \quad (364)$$

Vielä olisi toteutettava reunaehto $\phi(0, y) = f(y)$. Yleisellä funktiolla $f(y)$ tämä voidaan toteuttaa vain jos esitetään ratkaisu separoituvien ratkaisujen (364) summana,

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-k_n x} \sin k_n y. \quad (365)$$

Reunaehto $\phi(0, y) = f(y)$ on nyt

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin k_n y. \quad (366)$$

Tästä voidaan ratkaista kertoimet D_n käyttämällä ratkaisujen ortogonaalisuutta. Kerrotaan $\sin(k_m y)$:llä ja integroidaan

$$\begin{aligned} &\int_0^a dy \sin(k_m y) f(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^a dy \sin k_n y \sin k_m y = \frac{D_m a}{2}. \end{aligned} \quad (367)$$

Tässä on käytetty hyväksi ortogonaalisuutta

$$\int_0^a dy \sin(k_n y) \sin(k_m y) = \frac{a}{2} \delta_{n,m}, \quad (368)$$

joka on seurausta ominaisarvoyhtälöstä (361b) ja sen reunaehdoista $Y(0) = Y(a) = 0$. Saadaan siis

$$D_n = \frac{2}{a} \int_0^a dy \sin(k_n y) f(y). \quad (369)$$

Lopullinen ratkaisu saatiin siis äärettömänä summana (365), jonka kertoimet saadaan kaavasta (369).

Samalla tekniikalla voidaan ratkaista Laplacen yhtälön lisäksi mm. aaltoyhtälöä ja diffuusioyhtälöä. Reunaehdoista riippuen muuttujien erottelu kannattaa tehdä karteesisen koordinaattien sijasta napa-, sylinteri- tai pallokoordinaateissa.

D. Pyörivä koordinaatisto

Tutkitaan ortonormeerattua koordinaatistoa joka pyörii kulmanopeudella Ω suhteessa paikallaan olevaan

inertiaalikoordinaatistoon. Pyörivän koordinaatiston kantavektorit \hat{e}_k siten pyörivät,

$$\frac{d\hat{e}_k}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{e}_k. \quad (370)$$

Pyörivässä koordinaatistossa vektori voidaan lausua $\mathbf{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 \equiv A_k\hat{e}_k$. Käyttämällä tulon derivoimissääntöä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{d(A_k\hat{e}_k)}{dt} = \frac{dA_k}{dt}\hat{e}_k + A_k\frac{d\hat{e}_k}{dt} \\ &= \frac{dA_k}{dt}\hat{e}_k + A_k\boldsymbol{\Omega} \times \hat{e}_k \\ &= \frac{dA_k}{dt}\hat{e}_k + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (371)$$

Tässä viimeisen muodon ensimmäinen termi voidaan tulkita vektorin \mathbf{A} aikaderivaataksi pyörivässä koordinaatistossa

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_r \equiv \frac{dA_k}{dt}\hat{e}_k \quad (372)$$

Merkitsemällä vastaavasti inertiaalikoordinaatistoa alaindeksillä i , voidaan saatu tulos kirjoittaa

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_i = \left(\frac{dA_k}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (373)$$

E. Koordinaatiston muutos

Tarkastellaan muutosta kahden ortonormeeratun kannan välillä. Lähdetään siitä, että uudet kantavektorit \hat{e}'_i on lausuttavissa vanhan kannan \hat{e}_i avulla kaavalla

$$\hat{e}'_i = \sum_j \hat{e}_j U_{ji}. \quad (374)$$

Kantojen ortonormeerauksen takia saadaan

$$\delta_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \sum_{kl} \hat{e}_k \cdot \hat{e}_l U_{ki} U_{lj} = \sum_{kl} \delta_{kl} U_{ki} U_{lj} = \sum_k U_{ki} U_{kj} \quad (375)$$

siis

$$\sum_k U_{ki} U_{kj} = \delta_{ij}. \quad (376)$$

Mielivaltaiselle vektorille \mathbf{a} voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{a} = \sum_i \hat{e}'_i a'_i = \sum_{ij} \hat{e}_j U_{ji} a'_i, \quad (377)$$

mistä nähdään, että vektorin komponentit vanhassa kannassa ovat

$$a_j = \sum_i U_{ji} a'_i. \quad (378)$$

Kertomalla tämä U_{jk} :llä, summaamalla ja käyttämällä (376) saadaan

$$a'_i = \sum_j a_j U_{ji}. \quad (379)$$

Sijoittamalla tämä takaisin relaatioon (378) ja vaatimalla, että se pätee mielivaltaiselle vektorille \mathbf{a} , saadaan

$$\sum_k U_{ik} U_{jk} = \delta_{ij}. \quad (380)$$

Tensorilta vaaditaan, että sen komponentit muuttuvat analogisesti kaavan (379) kanssa:

$$A'_{ij} = \sum_{kl} A_{kl} U_{ki} U_{lj}. \quad (381)$$

Lasketaan matriisin jälki uudessa kannassa ja käytetään (380):

$$\sum_i A'_{ii} = \sum_{ikl} A_{kl} U_{ki} U_{li} = \sum_{kl} A_{kl} \delta_{kl} = \sum_k A_{kk}. \quad (382)$$

Siis matriisin jälki on kannasta riippumaton.

Symmetrisen tensorin diagonaalisointi

Pyritään valitsemaan U_{ji} siten että A'_{ij} olisi diagonaalinen

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (383)$$

Tätä varten kerrotaan (381) U_{mi} :llä, summataan ja saadaan

$$\sum_i U_{mi} A'_{ij} = \sum_l A_{ml} U_{lj}. \quad (384)$$

Olettaen muodon (383) on vasen puoli yhtä kuin $\lambda_j U_{mj}$.

Saadaan

$$\sum_l A_{ml} U_{lj} = \lambda_j U_{mj}. \quad (385)$$

Tämä tarkoittaa että meidän on löydettävä kolme ratkaisua [vastaten indeksin j eri arvoja yhtälössä (385)] yhtälölle

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (386)$$

Vielä olisi osoitettava että kun tensori A on symmetrinen, tällä yhtälöllä on kolme ratkaisua vastaten reaaliarvoisia λ_j , ja että vastaavista ominaisvektoreista $\mathbf{a}^{(j)}$ koottu käännösmatriisi $U_{mj} = a_m^{(j)}$ toteuttaa ortogonaalisuusehdot (376) ja (380).