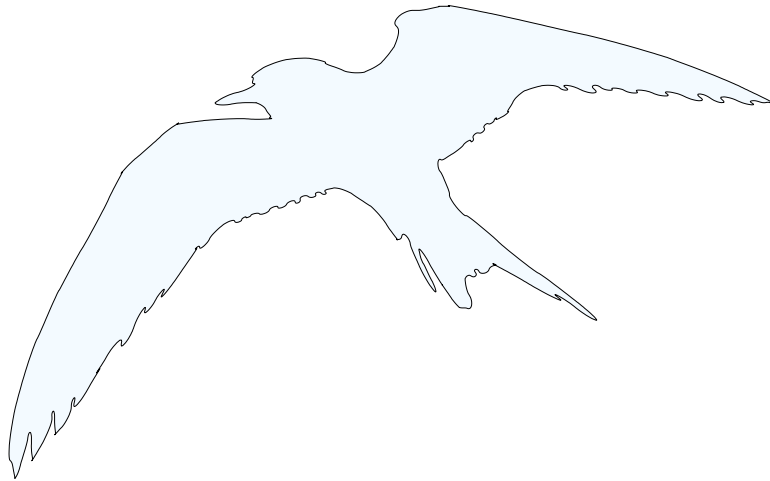


# Navigoinnin menetelmät Maa-6.3285

Martin Vermeer ([martin.vermeer@tkk.fi](mailto:martin.vermeer@tkk.fi))

21. lokakuuta 2015





# Kurssiesite

**Laajuus** 3 op

**Opetusjakso** I-II, Luennoidaan parittomien vuosien syksyinä.

**Osaamistavoitteet** Opiskelija ymmärtää “teknologisen navigaation” peruseikat: stokastiset prosessit, Kalman-suodatin, inertianavigaatio, GPS:n käyttö tosiajassa. Hän osaa johtaa relevantit kaavat jotka kuvaavat eri järjestelmien dynaamista käyttäytymistä ajassa, sekä käytettävien havaintoprosessien havaintoyhtälöt; ja miten niiden avulla rakennetaan toimiva Kalman-ratkaisu.

**Sisältö** Navigoinnin perusteet, stokastiset prosessit, Kalman-suodatin, inertianavigaatio ja mekanisaatio, tosiaikaisuus, GPS-navigaatio, ambiguiteettiratkaisu lennossa, GPS-tukiasemien käyttö, sen tietoliikennetarkaisut ja standardit; navigaatio ja paikantietojärjestelmät; ajankohtaiset aiheet.

**Esitiedot** Maa-6.203 tai Maa-6.2203 suositellaan.

**Korvaavuudet** Korvaa opintojakson Maa-6.285.

**Kohderyhmä**

**Suoritustavat** Kokonaissuoritus koostuu tentistä ja laskuharjoituksista.

**Työmäärä toteutustavoittain**

- ▷ Luennot  $13 \times 2 \text{ t} = 26 \text{ t}$
- ▷ Materiaalin itsenäinen opiskelu 24 t
- ▷ Laskuharjoitukset  $6 \times 5 \text{ t} = 30 \text{ t}$  (itsenäinen työskentely)
- ▷ Yhteensä 80 t

**Arvostelu** Tentin arvosana on kokonaissuorituksen arvosana , 1-5

**Oppimateriaalit** Luentomoniste. Taustamateriaalina STRANG and BORRE: Linear Algebra, Geodesy, and GPS [Strang and Borre \[1997\]](#)

**Opetuskieli** Englanti jos tarpeen, muuten suomi

**Kurssin henkilökunta ja yhteystiedot** Martin Vermeer, Gentti 4. krs, nimi@aalto.fi

**Vastaanottoajat** Sovitaan

**CEFR-taso**

**Lisätietoja**

## Kansikuva:

Navigaatio ei ole ihmisen keksintö. Lapin tiira (*Sterna paradisaea*) lentää joka vuosi pohjoiselta jäämereltä eteläiselle ja takaisin. [Egevang et al. \[2010\]](#)

# Sisältö

<b>Sisältö</b>	<b>iii</b>
<b>1 Navigoinnin perusteet</b>	<b>1</b>
1.1 Johdanto . . . . .	1
1.2 Historia . . . . .	1
Vanha historia . . . . .	1
Merenkulku . . . . .	3
Moderni aika . . . . .	4
1.3 Kulkuneuvon liikkeet . . . . .	4
1.4 Teknologiat . . . . .	6
1.5 Tosi aikaisuus . . . . .	6
1.6 Peruskäsitteet . . . . .	6
<b>2 Stokastiset prosessit</b>	<b>7</b>
2.1 Stokastiset suureet . . . . .	7
2.2 Stokastiset prosessit . . . . .	7
2.3 Otoskeskiarvosta . . . . .	8
2.4 Keskiarvon optimaalisuus . . . . .	10
2.5 Otoskeskiarvon laskeminen askel kerrallaan . . . . .	10
2.6 Kovarianssi, korrelaatio . . . . .	11
2.7 Stokastisen prosessin auto- ja ristikovarianssi . . . . .	13
2.8 “Valkoinen kohina” ja “random walk” . . . . .	13
2.9 Power Spectral Density . . . . .	16
Määritelmä . . . . .	16
Valkoinen kohina . . . . .	17
<b>3 Kalman -suodatin</b>	<b>19</b>
3.1 Tilavektori . . . . .	19
3.2 Dynaaminen malli . . . . .	20
3.3 Esimerkki: Kepler-rata . . . . .	21
3.4 Tilapropagaatio . . . . .	23
3.5 Havaintomalli . . . . .	26
3.6 Päivitys . . . . .	27
3.7 Kalman-päivityksen optimaalisuudesta . . . . .	28
3.8 Laskentaesimerkki . . . . .	30
<b>4 Kalman-suodatin käytännössä</b>	<b>33</b>

4.1	“Värillinen kohina”, Gauß-Markov -prosessi	33
	Gauss-Markov prosessin PSD	36
4.2	Realistisen tilastollisen käyttäytymisen mallinta	36
4.3	GPS-havainnot ja -tuntemattomat	38
	Satelliittiradan määrittäminen	38
	Maa-aseman paikan määrittäminen	40
	Kellon mallinnuksesta	41
	Kokonaislukutuntemattomien ratkaisemisesta	42
4.4	Esimerkkejä	42
	Kalman-suodatin (2)	42
	Kalman-suodatin (3)	45
<b>5</b>	<b>Inertianavigointi</b>	<b>47</b>
5.1	Periaate	47
5.2	Inertialaitteen osat	48
	Gyroskooppi	48
	Kiihtyvyyssmittari	51
5.3	Toteutus	52
	Strapdown-ratkaisu	52
	Stabilized platform -ratkaisu	53
5.4	Inertianavigaatio kiinteän Maan järjestelmässä	54
	Maan pyörihdys	54
	Kiihtyvyys	55
	Inertianavigaation perusyhtälö	56
5.5	Yhden akselin vakaa pöytä	56
5.6	Gyrokompassi	58
5.7	Schulerin heiluri	60
	Periaate	60
	Heiluri vaunussa	60
	Toteutus inertialaitteessa	62
	Eulerin kaavan käyttö	63
5.8	Mekanisaatio	63
5.9	Inertialaitteen initialisointi	65
<b>6</b>	<b>Navigaatio ja satelliittiradat</b>	<b>67</b>
6.1	Kepler-rata	67
6.2	Suorakulmaisten koordinaattien laskeminen rata-alkioista	69
6.3	Harjoitukset	71
	Kepler-rata	71
<b>7</b>	<b>Hill-koordinaattijärjestelmän käyttö</b>	<b>73</b>
7.1	Muunnos inertiaalisen ja Hill-systeemin välillä	74
7.2	Keskeisen voimakentän sarjakehitelmä	75
7.3	Liiketyhtälöt Hill-systeemissä	76
7.4	Hill-yhtälöiden ratkaiseminen	77
	$w$ -yhtälö	77
	$u, v$ -yhtälöt	78

7.5	Toinen ratkaisu . . . . .	78
7.6	Ratkaisujen yhdistäminen . . . . .	80
7.7	Tilansiirtomatriisi . . . . .	80
	Yleinen tapaus . . . . .	80
	Tapaus pieni $\Delta t$ . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Ilmagravimetria ja -gradiometria</b>	<b>83</b>
8.1	Vektori-ilmagravimetria . . . . .	84
8.2	Skalaari-ilmagravimetria . . . . .	84
8.3	Painovoimakentän tutkimus avaruudesta . . . . .	85
8.4	Kalman-suodattimen käyttö ilmagravimetriassa . . . . .	85
8.5	Ilmagravimetrian nykytila . . . . .	87
<b>9</b>	<b>GPS-navigaatio ja tukiasemat</b>	<b>89</b>
9.1	Differentiaalipaikannus . . . . .	89
9.2	RTCM-standardi . . . . .	90
9.3	Vaihetuettu koodimittaus . . . . .	90
9.4	Tukiasema ja korjaukset . . . . .	92
9.5	RTK-mittaukset . . . . .	92
	Muut virhelähteet . . . . .	95
	Kaksoiserotusten käyttö . . . . .	95
	Nopea ambiguiteettiratkaisu . . . . .	96
9.6	Verkko-RTK . . . . .	97
9.7	Globaalinen DGPS . . . . .	98
9.8	RTCM Internetin yli (NTRIP -protokolla) . . . . .	98
<b>10</b>	<b>Tosi aikaiset järjestelmät ja verkot</b>	<b>99</b>
10.1	Tietoliikenneverkot . . . . .	99
	Lähetysverkot . . . . .	99
	Switched connection networks . . . . .	100
	Packet forwarding networks . . . . .	103
10.2	Real time systems . . . . .	104
	Hardware . . . . .	104
	Operating systems . . . . .	104
	Interrupts, masking, latency . . . . .	104
<b>11</b>	<b>Navigointi ja paikkatietojärjestelmät</b>	<b>107</b>
11.1	Geosentriset koordinaattijärjestelmät . . . . .	107
11.2	Ei-geosentriset järjestelmät . . . . .	108
11.3	Korkeusjärjestelmät . . . . .	108
	<b>Kirjallisuutta</b>	<b>111</b>
	<b>Hakemisto</b>	<b>113</b>





# Navigoinnin perusteet

## 1.1 Johdanto

“Navigaatio” tulee latinalaisesta sanasta *navis* eli laiva. Eli navigaatio on merenkulku. Nykyisin navigaation merkitys on lähinnä: sopivan reitin löytäminen ja sen kautta kulkeminen. Tämä sisältää oikean sijainnin selvittämistä matkan aikana.

Navigaatio liittyy geodesiaan sillä tavalla, että myös geodesiassa tutkimuksen aiheena on *sijainti*. Kuitenkin geodesiassa maan pinnassa olevien pisteiden sijainti käsitellään yleensä vakioksi tai hyvin hitaasti muuttuvaksi.

Navigoinnin ja perinteisen geodeettisen paikanmäärityksen väliset erot ovat siis, että

1. navigoinnissa sijaintitiedot tarvitaan *heti*, tai korkeintaan tietyn maksimiviiveen jälkeen. Tätä formuloidaan yleensä *tosiaikaisuuden* vaatimuksena.
2. navigoinnissa sijaintitiedot ovat *muuttuvia*, ajasta riippuvaisia.

Nykyisin navigaatio ei enää rajoitu merenkulkuun. Lentokoneet, ohjukset ja avaruusalukset sekä kuivalla maalla liikkuvat kulkuneuvot, ja jopa jalankulkijat, “navigoivat”, usein nykYTEKNOLOGIOIDEN avulla. Tämä on kahden nykYTEKNOLOGIAN aiheuttama: GPS (Global Positioning System) ja inertianavigaatio . Myös tietojenkäsittelyteknologiat ovat kehittyneet, erityisesti lineaarinen rekursiivinen suodatus eli Kalman-suodatus.

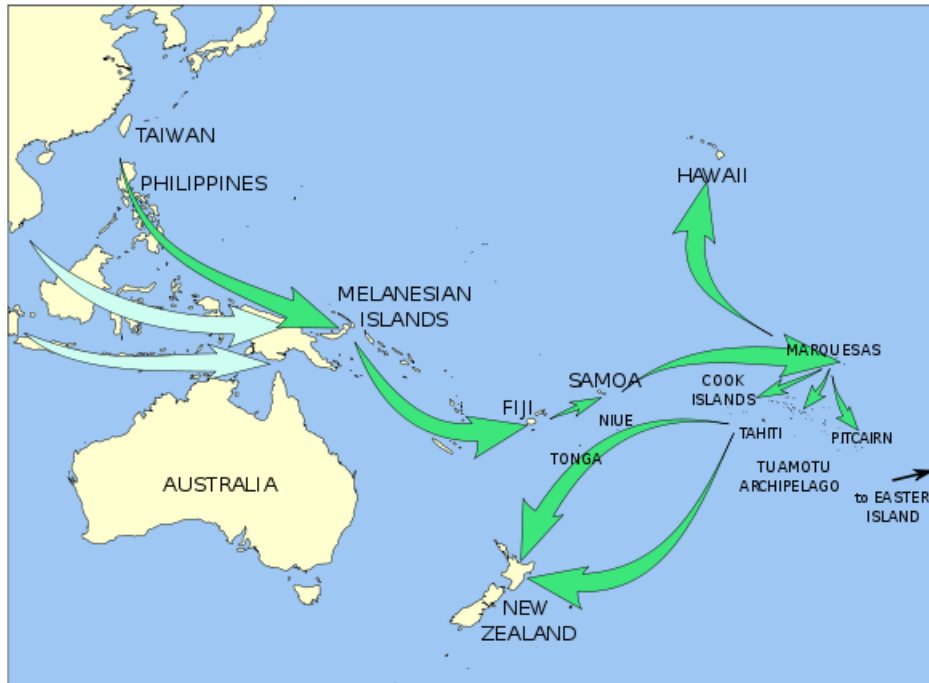
## 1.2 Historia

### Vanha historia

Ihminen on aina tutkinut ympäröivänsä maailma ja matkustanut kaukaakin Navigointi on ollut aina välttämättömyys<sup>1</sup>. Ennen modernien teknologisten mittaus- ja ohjausmenetelmien olemassaoloa elettiin maamerkkien ja matka-aikojen perusteella arvioitujen etäisyyksien varalla. Tästä syystä vanhat kartat, jotka piirrettiin matkustajien kertomusten ja muistiinpanojen perusteella, ovat usein omituisella tavalla vääristyneitä.

---

<sup>1</sup>“Navigare necesse est”.



**Kuva 1.1:** Polynesian migraatiopolut, © 2008 Wikimedia Commons / David Hall

Maamerkkien käyttö tällä tavoin tosin vaatii *kartoitusta* eli olemassa olevan maailman kuvausta kartan muodossa. Matka sitten *suunnitellaan* ja toteutetaan koko ajan vertailemalla todellista paikkaa matkasuunnitelman mukaisen tavoitepaikan kanssa.

Mikäli esim. merenkulussa maamerkit puuttuvat, voidaan käyttää menetelmää nimeltä *merkintälasku* (“dead reckoning”) ([http://en.wikipedia.org/wiki/Dead\\_reckoning](http://en.wikipedia.org/wiki/Dead_reckoning)). Tässä arvioidaan matkustussuunnan ja -nopeuden perusteella missä *pitäisi* olla. Virhelähteet tässä menetelmässä ovat ilmeisesti merivirtaukset (ilmailussa tuulet) ja yleisemmin se, että ennustus heikkenee aikaa myöten.

Näillä alkeellisilla menetelmillä merenkulku on joten kuten turvallista vain rannikon lähellä. Kuitenkin tällä tavoin uskotaan foinikialaiset matkustaneen jo Afrikan mantereen ympäri (<http://www.bbc.co.uk/news/world-africa-11615613>) ja Tyynen valtameren saaristot saivat ihmisasutuksensa (<http://www.paulwaters.com/migrate.htm>, [http://en.wikipedia.org/wiki/Polynesian\\_navigation](http://en.wikipedia.org/wiki/Polynesian_navigation), <http://www.exploratorium.edu/neverlost/>).

Ks. myös [Diamond \[1999\]](#).

Navigointia maamerkkien avulla, mutta huipputeknologian keinoin, käyttävät esim. *risteilyohjukset*: ne lentävät muistissa olevan digitaalisen maastomallin korkeuskäyriä pitkin.

Ja tietenkin *linnut* (<http://www.scq.ubc.ca/the-compasses-of-birds/>) ovat aina navigoineet.



**Kuva 1.2:** Valkoposkihanhet syysmuuttomatalla. © 2006 Wikipedia

## Merenkulku

Merenkulku avomerellä edellyttää *mittausta*, koska maamerkkejä ei ole.

- ▷ Suunta on kaiken helpointa. Yöllä Pohjantähti antaa pohjoissuuntaa. Päivällä auringo voidaan käyttää, tosin monimutkaisemalla tavalla. Pilvisellä päivällä voidaan käyttää taivaan valon polarisaatio hyväksi auringon paikan löytämiseksi.

Magneettinen kompassi teki pohjoissuunnan löytäminen helpoksi kaikissa olosuhteissa. Kuitenkin magneettinen pohjoinen ei ole maantieteellinen pohjoinen, ja niiden välinen ero riippuu paikasta ja muuttuu ajasta.

- ▷ Latitudi saadaan helposti. Taivaannavan korkeus horisontista. Päivällä auringosta.



**Kuva 1.3:** John HARRISONIN rakentama kronometri H5. © 2007 Wikipedia

- ▷ Longitudi on ongelma: edellyttää riittävän tarkan aikastandardin (*kronometrin*) käyttöä. Ks. Sobel [1995]. Vaihtoehtoisesti, tähtitieteelliset menetelmät kuten Jupiterin kuiden käyttö ”kellona”. Myöhemmin, aikamerkkien jakelu radioteitse, mikä on tullut mahdolliseksi vasta 1900-luvulla.

1900-luvuilla radiotekniset menetelmät tulivat kuvioihin mukaan. Tunnetuin on varmaan *DECCA*, joka perustuu *hyperboliseen* paikannukseen. Yksi ”master”-asema ja kaksi tai useampi ”slave”-asemaa lähettävät synkronoituja aikamerkkejä radioaalloille moduloituna. Laivalla oleva vastaanotin mittaa masterilta ja slavelta vastaanotettujen aaltojen kulku-aikaeron. Merikortilla on merkattu yhtäsuuren kulku-aika- eli etäisyyseron pistejoukko varillisenä käyränä, *hyperbolina*. Jokainen slave-asema muodostaa masterin kanssa yhden hyperbolikimpun, jolla on oma väri. Kahden hyperbolin leikkauspiste antaa laivan paikan. Eli: tarvitaan master-aseman lisäksi ainakin kaksi slavea.

Modernit satelliittipaikannusmenetelmät, kuten Transit (käytöstä poistettu) ja GPS (sekä GLONASS) perustuvat hyperbolimenetelmän kolmiulotteiseen vastineeseen.

## Moderni aika

Ilmailu ja avaruustutkimus ovat tuoneet mukanaan automaattisen, kolmiulotteisen navigoinnin tarvetta. Vaikka ensimmäiset lentokoneet voitiin vielä lentää käsin ilman instrumentteja, ensimmäinen moderni ohjus, saksalainen V2, sisälsi jo gyroskooppipohjaisen ohjausjärjestelmän. Tässä tapauksessa navigaatio on *ohjaus* (en. *guidance*).

V2:n ohjausjärjestelmä oli hyvin alkeellinen. Ohjus laukaistiin pystysuorasti ilmaan, jossa se kääntyi oikeaan suuntaan gyroskooppialustansa avulla, ja kiihtyi tiettyyn nopeuteen saakka, jolloin ajoinehanat suljettiin (*Brennschluss*). Fysikaalisesti suuntaminen tapahtui pienten pyrstöön kytkettyjen ”ilmaruorien” (”control vanes”) avulla, jotka muuttivat moottorista tulevien kuumien kaasujen suuntaa. Ks. [http://en.wikipedia.org/wiki/V2\\_rocket](http://en.wikipedia.org/wiki/V2_rocket)<sup>2</sup>.

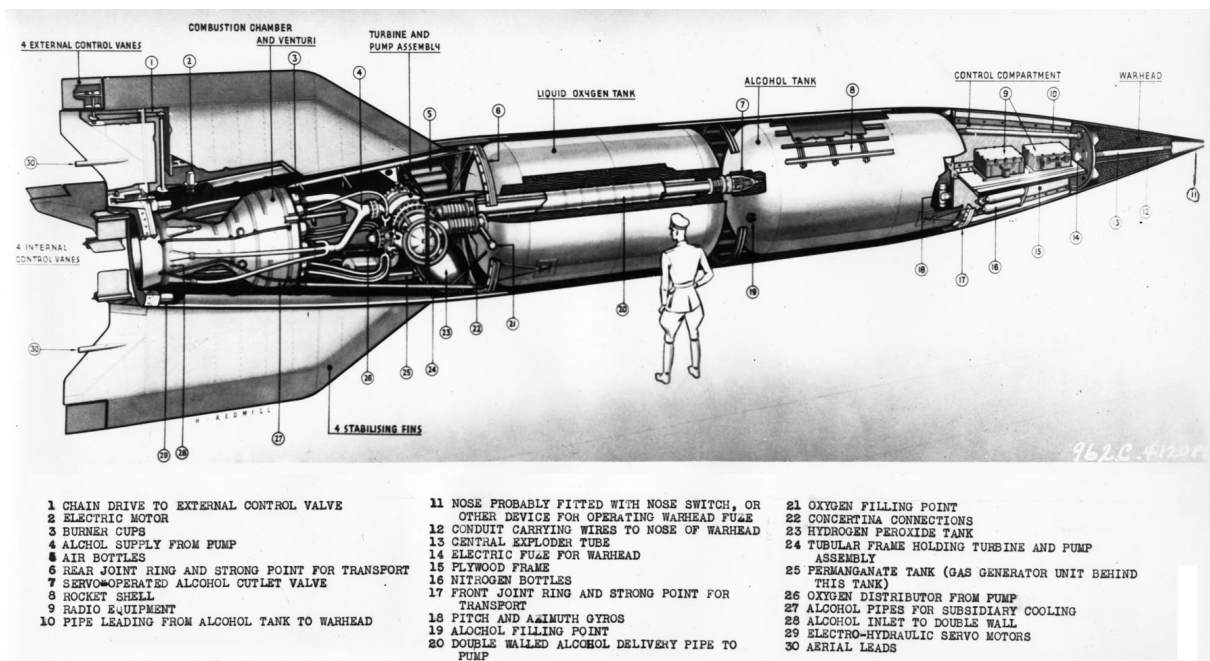
Nykyisin käytetään lentokoneissa ja avaruusaluksissa täydellinen inertianavigaatio. Monet muut modernit tietotekniikkaan perustuvat teknologiat, mm. satelliittipaikannus (GPS/GNSS), ovat nykyisin käytössä.

## 1.3 Kulkuneuvon liikkeet

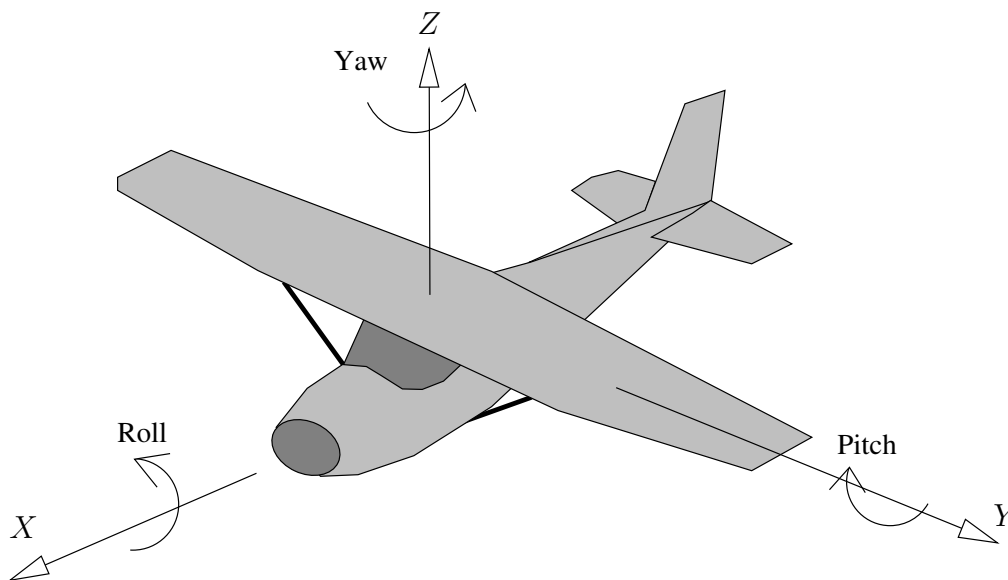
Kulkuneuvon asentoa voidaan kuvata kolmen akselin suhteen. Akselien nimet suomeksi ovat: pysty- vaaka- ja pituusakselit ainakin ilmailussa (en. *yaw, pitch and roll axes*). Pyörähdysliike matkasuunnan ympäri kutsutaan *rullaukseksi* (sv. *att rulla*), *vaakakierteeksi*, *keinumiseksi* tai (*sivuttais-*)*kallistumiseksi*, liike pystyakselin ympäri *jiiraukseksi* (sv. *att gira*), *luisuksi* tai *mutkailuksi*, ja liike vaaka-akselin (vasen-oika akselin) ympäri *jyskinäksi* (sv. *att stampa*) tai *pituuskallistukseksi*<sup>3</sup>. Nämä termit eivät ole suomen kielellä vakiintuneita. Fotogrammetriassa puhutaan EULER-kulmista.

<sup>2</sup>Itse asiassa ilmaruorit olivat kaksinkertaisia: moottorin kaasuihin ulottuva osa oli tehty grafiitista ja paloi nopeasti loppuun. Silloin raketilla oli jo niin paljon nopeutta, että ulkopuoliset ruorit alkoivat toimia.

<sup>3</sup>Kiitos Jukka VARONEN ja Kimmo PENTTILÄ!



Kuva 1.4: Saksalainen ohjusase V2. Kuva U.S. Air Force



Kuva 1.5: Kulkuneuvon asentokulmat

## 1.4 Teknologiat

Teknologiat jotka soveltuvat sekä navigaatioon että geodeettiseen paikanmäärittelyyn, ovat:

1. GPS, Global Positioning System; nykyisin puhutaan GNSS:stä, Global Navigation Satellite Systems, johon kuuluu myös GLONASS (Venäjä), Compass/Beidou (Kiina) ja tuleva Galileo (Eurooppa).
2. Inertianavigaatio
3. Kalman-suodatus
4. Automaattinen ohjaus, erityisesti raketeille, mutta myös lentokoneille ja kokeellisesti maakulkuneuvoille

## 1.5 Tosiakaisuus

Tosiakaisuuden määritelmä

*Taattu vasteaika* (latency).

Siis, prosessi jonka vasteaika on 1 kk voi olla tosiaikainen (jos 1 kk on *taattu*) mutta toinen prosessi jonka vasteaika on 1 msek ei ole tosiaikainen (jos vasteaika on yleensä alle 1 msek, mutta se voi joskus olla 2 msek, tai 10 msek, tai enemmänkin . . .)

## 1.6 Peruskäsitteet

- ▷ Stokastiset prosessit
- ▷ Lineaarinen estimaatio
- ▷ Kalman-suodatus, dynaaminen malli, havaintomalli, tilastollinen malli
- ▷ Inertianavigaatio, mekanisaatio
- ▷ Satelliittirata

Seuraavassa käsitellään nämä käsitteet systemaattisesti.

## Stokastiset prosessit

### 2.1 Stokastiset suureet

Ks. [Strang and Borre \[1997\]](#) ss. 515-541.

Ajassa muuttuvien, epävarmojen suureiden usein käytetty kuvaustapa on *stokastinen prosessi*.

Ensin määritellään *stokastinen suure* seuraavasti (alleiviivaus on perinteinen merkintätapa):

Stokastinen suure  $\underline{x}$  on sarja realisaatioita  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$ , eli  $x_i, i = 1, \dots, \infty$ .

Esimerkiksi nopanheitto. Jokainen heitto on yksi realisaatio. Tässä tapauksessa  $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Kolikonheitto.  $x_i \in \{0, 1\}$ , 0 = kruunu, 1 = klaava.

Stokastisen suureen arvoavaruus voi olla diskreetti joukko (kuten yllä) tai jatkuva joukko.

*Mittaus on stokastinen, yleensä reaaliarvoinen, suure.*

Mitattu etäisyys on reaaliarvoinen stokastinen suure  $\underline{s}$ . Realisaatiot  $s_i \in \mathbb{R}$ .

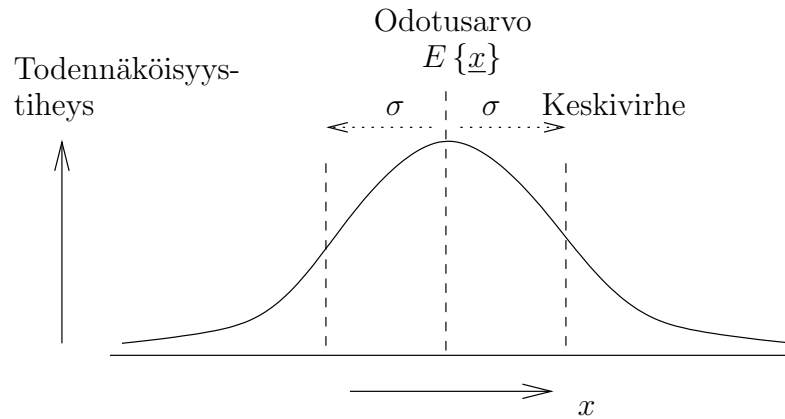
Mitattu vaakakulma  $\underline{\alpha}$ , realisaatiot  $\alpha_i \in [0, 2\pi)$ .

GPS:n tuottama vektorimittaus pisteestä  $A$  pisteeseen  $B$  on *stokastinen vektorisuure*  $\underline{\mathbf{x}}$ . Realisaatiot kuuluvat kolmiulotteiseen vektoriavaruuteen:  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$ .

### 2.2 Stokastiset prosessit

Stokastinen *prosessi* on stokastinen suure jonka arvoavaruus on *funktioavaruus*, eli jokainen stokastisen suureen realisaatio ("nopanheitto") on *funktio*. Yleensä funktion argumentti on *aika*  $t$ .

**Esimerkki:** Koelaitteen lämpötila  $\underline{T}(t)$  ajan  $t$  funktiona. Eri realisaatiot  $T_i(t)$  saadaan toistamalla koetta:  $i = 1, \dots, \infty$ .



Kuva 2.1: Gaussin kellokäyrä

Tosielämässä kokeen toistaminen voi olla käytännössä hankalaa tai mahdotonta. Esimerkkinä Helsingin Kaisaniemen lämpötila  $T^{\text{Kais}}(t)$ . Historia ei voida tarkasti toistaa, eli tästä stokastisesta prosessista meillä on vain yksi realisaatio  $T_1^{\text{Kais}}(t)$ , Kaisaniemen historiallinen aikasarja. Muut realisaatiot  $T_i^{\text{Kais}}(t)$ ,  $i = 2, \dots, \infty$  ovat olemassa vain teoreettisena konstruktiona ilman toivoa niiden havaitsemiseksi.

Sellaisissa tapauksissa usein oletetaan, että tulos tulee olemaan sama, jos käytetään realisaatioina *sama prosessi siirettynä ajassa*. Eli esim.

$$T_{i+1}(t) = T_i(t + \Delta t),$$

missä  $\Delta t$  on sopivasti valittu aikasiirtymä, joka tietysti tulee olemaan riittävän suuri. Tämä oletus kutsutaan *ergodisuushypoteesiksi*.

## 2.3 Otoskeskiarvosta

Usein tavataan tilanne, missä joku suure  $x$  on mitattu useita kertoja ja on käytettävissä stokastinen mittaussuureen  $\underline{x}$  realisaatiot, jotka tietysti kaikki poikkeavat eri tavalla “oikeasta” arvosta  $x$  – jota *ei tunneta*. *Estimaatio* on stokastisen mittaussuureen realisaatioista laskettu “mahdollisimman hyvä” arvio suurelle  $x$ . “Oikea arvo”  $x$  kun ei tiedetä: jos tiedettäisiin, ei tarvittaisi mitata!

Estimaatio on itse *estimaattorin realisaatio*: estimaattori on itse stokastinen suure, jonka eräs realisaatio on estimaatio.

Stokastisen suureen arvoavaruudella  $x$  on määritetty *todennäköisyystiheysfunktio*  $p(x)$ , joka kuvaa todennäköisyyttä, että erään realisaation arvo sattuisi kohdalle  $x$ . Usein (muttei aina!) voidaan olettaa, että  $p(x)$  on ns. *Gaussin käyrä* eli normaalijakauma eli “kellokäyrä”.

Alla esitetyt tulokset eivät riipu Gaussin jakauman oletuksesta ellei mainittu toisin.

Koska joku arvo täytyy  $x$ :llä olla, tiedetään että kokonaistodennäköisyys on 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$



Määritetään odotusarvo  $E$  seuraavaksi:

$$E \{ \underline{x} \} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx.$$

Odotusarvo ei ole samaa kuin keskiarvo; yhteys on se, että  $\underline{x}$ :n ensimmäisen  $n$  realisaation keskiarvo,

$$\bar{x}^{(n)} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.1)$$

on todennäköisesti sitä lähempää  $E \{ \underline{x} \}$ , mitä suurempi on  $n$ . Tämä kokemusperäinen laki kutsutaan *suurten lukujen* (empiiriseksi) *laiksi*.

Yllä oleva ensimmäisen  $n$  realisaation joukko kutsutaan *otokseksi*, ja  $\bar{x}^{(n)}$  otoskeskiarvoksi.

Nyt kun on tullut määritetyksi odotusarvo, voidaan seuraavaksi määrittää *varianssi*:

$$\text{Var}(\underline{x}) \equiv E \{ (\underline{x} - E \{ \underline{x} \})^2 \}.$$

Varianssin neliöjuuri on juuri standardipoikkeama eli *keskivirhe*  $\sigma$ , ks. ylläoleva kuva:

$$\sigma^2 = \text{Var}(\underline{x}).$$

Valitettavasti varianssi, kuten odotusarvo, ei ole suoraan laskettavissa. Sen sijaan sitä *estimoidaan* otoksesta  $x_i, i = 1, \dots, n$ . Jos otoskeskiarvo  $\bar{x}$  on jo olemassa, ja olettaen, että realisaatiot  $x_i$  ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan ja niillä on sama keskivirhe  $\sigma^1$ , seuraa varianssin  $\sigma^2$  estimaatio seuraavasti:

$$\hat{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Koska otanta voidaan mielivaltaisesti toistaa, on otoskeskiarvo  $\bar{x}^{(n)}$  myös stokastinen suure,

$$\bar{x}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i,$$

jossa  $\underline{x}_i$  on stokastinen suure jonka peräkkäiset realisaatiot ovat yksinkertaisesti  $x_i, x_{i+n}, x_{i+2n}, \dots$  ("haarukkasuure").

On intuitiivisesti selvä – ja oletamme ilman todistusta – että

$$\forall i : E \{ \underline{x}_i \} = E \{ \underline{x} \}.$$

Suureen  $\bar{x}^{(n)}$  odotusarvo on

$$E \{ \bar{x}^{(n)} \} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \{ \underline{x}_i \} = E \{ \underline{x} \},$$

<sup>1</sup>Tätä kutsutaan i.i.d.-olettamukseksi, "independent and identically distributed".

eli sama kuin  $\underline{x}$ :n odotusarvo; sellaista estimaattoria kutsutaan *harhattomaksi*.

Sen varianssi estimoidaan seuraavaksi:

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{\underline{x}}^{(n)}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}}^{(n)})^2 = \frac{1}{n} \widehat{\sigma}^2.$$

Toisin sanoen, näytekeskisarvon keskivirhe pienenee suhteessa  $\sqrt{1/n}$  kun otoksen koko  $n$  kasvaa.

Tätä kaikkea esitetään ilman tarkkaa todistusta, ks. tilastotieteen oppikirja.

## 2.4 Keskiarvon optimaalisuus

Kaikista harhattomista, näytteeseen  $\underline{x}_i, i = 1, \dots, n$  perustuvista  $x$ :n estimaattoreista

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^n a_i \underline{x}_i, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1,$$

keskiarvo

$$\hat{x} \equiv \bar{\underline{x}}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{x}_i \tag{2.2}$$

minimoi  $\hat{x}$ :n. Varianssi lasketaan seuraavasti:

$$\text{Var}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(\underline{x}_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

olettaen, että  $\underline{x}_i$  eivät korreloi keskenään, ja että  $\text{Var}(\underline{x}_i) = \sigma^2$ .

Nyt ilmaisun

$$\sum_{i=1}^n a_i^2$$

minimointi, lisäehtoa

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1$$

käyttäen, antaa

$$a_i = \frac{1}{n}.$$

Josta väite seuraa.

## 2.5 Otoskeskiarvon laskeminen askel kerrallaan

Otoskeskiarvon (2.2) suoran laskemisen sijasta se voidaan myös laskea *askel kerrallaan*, seuraavasti:

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}}^{(n+1)} &= \frac{n}{n+1} \bar{\underline{x}}^{(n)} + \frac{1}{n+1} \underline{x}_{n+1}, \\ \text{Var}(\bar{\underline{x}}^{(n+1)}) &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \text{Var}(\bar{\underline{x}}^{(n)}) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

Tämä on hyvin yksinkertainen esimerkki sekventiaalisesta lineaarisesta suodattimesta eli *Kalman-suodattimesta* (luku 3). Huomaa, että tällä menetelmällä voidaan laskea  $\underline{x}^{(n)}$ :n arvo "lennossa", kun havaintoja on vielä tulossa sisään, ennen kuin kaikki havainto-arvot ovat tiedossa. Tämä on juuri Kalman-suodattimen etuna.

## 2.6 Kovarianssi, korrelaatio

Kun on kaksi stokastista suuretta  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$ , voidaan laskea niiden välinen *kovarianssi*

$$\text{Cov}(\underline{x}, \underline{y}) \equiv E \{ (\underline{x} - E \{ \underline{x} \}) (\underline{y} - E \{ \underline{y} \}) \}.$$

Kovarianssi kuvaa miten stokastisten suureiden  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  satunnaiset vaihtelut käyttäytyvät samalla tavalla.

Kovarianssin lisäksi määritetään *korrelaatio*:

$$\text{Corr}(\underline{x}, \underline{y}) \equiv \frac{\text{Cov}(\underline{x}, \underline{y})}{\sqrt{\text{Var}(\underline{x}) \text{Var}(\underline{y})}}$$

Korrelaatio ei voi koskaan olla suurempi kuin 1.0 (tai pienempi kuin -1.0)<sup>2</sup>. Usein ilmaistaan korrelaatio prosentteina, 100% on sama kuin arvo 1.0.

Kun on kyse kahdesta stokastisesta suureesta, piirretään usein *virhe-ellipsi* (kuva 2.2). Vertaa tätä kuvaa aikaisemman kellokäyräpiirroksen kanssa. Siinä on merkattu odotusarvo  $E \{ \underline{x} \}$  (keskellä) ja keskivirhe  $\pm \sigma$ . Virhe-ellipsikuvassa ellipsin keskipiste edustaa  $\underline{x}$ :n ja  $\underline{y}$

<sup>2</sup>Eric WEISSTEIN antaa seuraava todistus (<http://mathworld.wolfram.com/StatisticalCorrelation.html>).

Määrittele *normalisoidut* suuret:

$$\underline{\xi} \equiv \frac{\underline{x}}{\sqrt{\text{Var}(\underline{x})}}, \quad \underline{\eta} \equiv \frac{\underline{y}}{\sqrt{\text{Var}(\underline{y})}}.$$

Silloin linearisuuden ansiosta:

$$\text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \frac{\text{Cov}(\underline{x}, \underline{y})}{\sqrt{\text{Var}(\underline{x}) \text{Var}(\underline{y})}} = \text{Corr}(\underline{x}, \underline{y}).$$

Seuraavat varianssit ovat positiivisia:

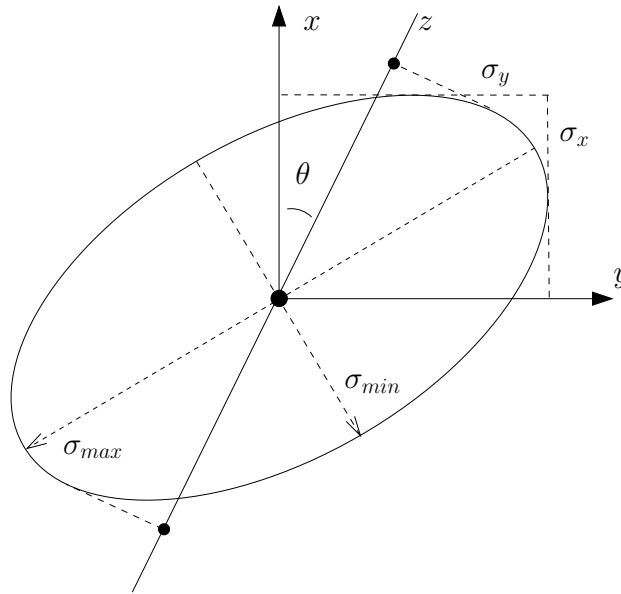
$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Var}(\underline{\xi} + \underline{\eta}) &= \text{Var}(\underline{\xi}) + \text{Var}(\underline{\eta}) + 2\text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \\ 0 \leq \text{Var}(\underline{\xi} - \underline{\eta}) &= \text{Var}(\underline{\xi}) + \text{Var}(\underline{\eta}) - 2\text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}); \end{aligned}$$

kun lisäksi

$$\text{Var}(\underline{\xi}) = \frac{\text{Var}(\underline{x})}{\left(\sqrt{\text{Var}(\underline{x})}\right)^2} = 1$$

ja samoin  $\text{Var}(\underline{\eta}) = 1$ , seuraa, että

$$-1 \leq \text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \text{Corr}(\underline{x}, \underline{y}) \leq 1.$$



**Kuva 2.2:** Virhe-ellipsi

:n odotusarvot; ellipsi itse vastaa keskiarvoihin  $\pm\sigma$ . Voidaan sanoa, että mittausarvo todennäköisesti tulee olemaan ellipsin sisällä (siksi nimi virhe-ellipsi). Jos ellipsiä leikataan suoralla  $z$ , saadaan suureiden  $\underline{x}$  ja  $\underline{y}$  lineaariyhdistelmä:

$$z = \underline{x} \cos \theta + \underline{y} \sin \theta,$$

jonka pistepari ellipsin tangentilla edustaa juuri suureen  $z$  keskiarvoa<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \text{Var}(z) &= E \{ [z - E\{z\}]^2 \} \\ &= E \left\{ [\cos \theta (\underline{x} - E\{\underline{x}\}) + \sin \theta (\underline{y} - E\{\underline{y}\})]^2 \right\} = \\ &= \cos^2 \theta \text{Var}(\underline{x}) + 2 \sin \theta \cos \theta \text{Cov}(\underline{x}, \underline{y}) + \sin^2 \theta \text{Var}(\underline{y}), \end{aligned}$$

ja tästä  $\sigma_z = \sqrt{\text{Var}(z)}$ . Keskiarvoilla  $\sigma_z$  on kaksi ääriarvoa,  $\sigma_{\min}$  ja  $\sigma_{\max}$ , ks. kuva.

Jos  $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$ , tai jos ellipsi on orientoitunut ääriarvojen  $\sigma_{\min}$  ja  $\sigma_{\max}$  akseleiden mukaan, korrelaatio  $\underline{x}$ :n ja  $\underline{y}$ :n välillä häviää. Siinä tapauksessa ne ovat todella toisistaan riippumattomia ja toisen todellisen arvon tietäminen ei auta toisen estimoinnissa.

<sup>3</sup>Matriisinotaatiolla voimme kirjoittaa

$$z = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$$

ja

$$\text{Var} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var}(\underline{x}) & \text{Cov}(\underline{x}, \underline{y}) \\ \text{Cov}(\underline{x}, \underline{y}) & \text{Var}(\underline{y}) \end{bmatrix};$$

tästä seuraa

$$\text{Var}(z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Var}(\underline{x}) & \text{Cov}(\underline{x}, \underline{y}) \\ \text{Cov}(\underline{x}, \underline{y}) & \text{Var}(\underline{y}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix},$$

eli sama tulos. Tämä on esimerkki *varianssien kasautumislaista*.

Jos korrelaatio ei haviää, tieto  $\underline{x}$ :n todellisesta arvosta – tai hyvä estimaatio – auttaa estimoimaan  $\underline{y}$  paremmin. Tätä kutsutaan *regressioksi*.

## 2.7 Stokastisen prosessin auto- ja ristikovarianssi

Jos meillä on stokastisen suureen sijasta stokastinen *prosessi*  $\underline{x}(t)$ , voidaan laskea johdannaisfunktio nimeltä *autokovarianssi* seuraavasti:

$$A_x(t_1, t_2) \equiv \text{Cov}(\underline{x}(t_1), \underline{x}(t_2)).$$

Usein, jos on kyse ns. *stationaarisesta* prosessista (ts. prosessin ominaisuudet eivät riipu absoluuttisesta ajassa vaan pysyvät vakioina), voidaan kirjoittaa

$$A_x(t_1, t_2) = A_x(t_1, t_2 - t_1) \equiv A_x(t, \Delta t) = A_x(\Delta t) \equiv \text{Cov}(\underline{x}(t), \underline{x}(t + \Delta t))$$

riippumatta  $t$ :n arvosta.

Jos meillä on kaksi stokastista prosessia  $\underline{x}(t)$  ja  $\underline{y}(t)$ , voidaan määrittää johdannaisfunktio nimeltä *ristikovarianssi*.

$$C_{xy}(t_1, t_2) \equiv \text{Cov}(\underline{x}(t_1), \underline{y}(t_2)),$$

ja stationaaristen prosessien tapauksessa taas

$$C_{xy}(\Delta t) \equiv \text{Cov}(\underline{x}(t), \underline{y}(t + \Delta t)).$$

Usein ristikovarianssiksi kutsutaan yksinkertaisesti

$$C_{xy} \equiv C_{xy}(0).$$

Näin määritettyjen kovarianssien perusteella voidaan tuttuun tapaan myös määrittää auto- ja ristikorrelaatiofunktiot.

## 2.8 “Valkoinen kohina” ja “random walk”

*Kohina* on stokastinen prosessi jonka odotusarvo on 0:

$$E\{\underline{n}(t)\} = 0.$$

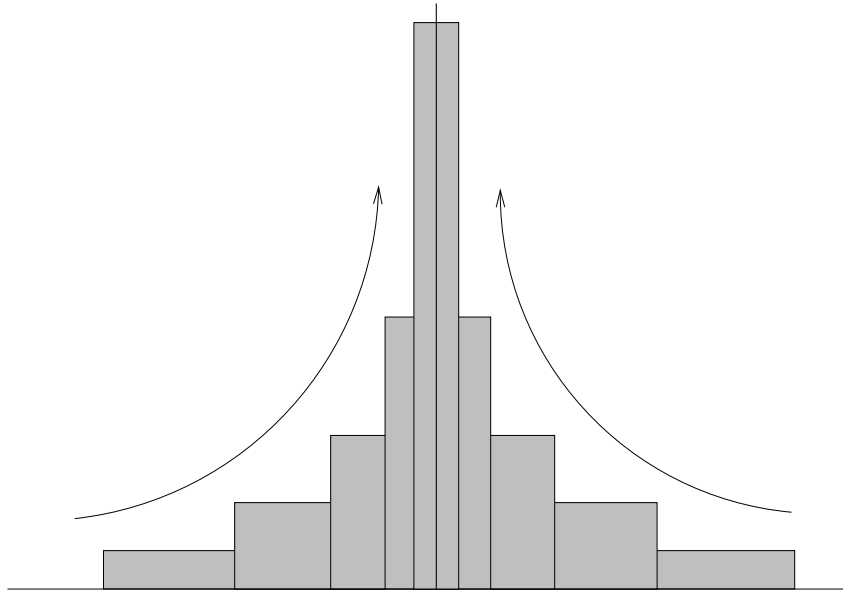
*Valkoinen kohina* on kohina joka koostuu kaikista mahdollisista taajuuksista. Matemaattinen kuvaustapa on sanoa, että autokovarianssi

$$A_n(\Delta t) = 0, \Delta t \neq 0.$$

Toisin sanoen, prosessin arvojen  $\underline{n}(t_1)$  ja  $\underline{n}(t_2)$  välillä ei ole yhtään korrelaatiota, vaikka  $t_2 - t_1$  olisi kuinka lähellä nollaa.

Kuitenkin olisi

$$A_n(0) = \infty.$$



**Kuva 2.3:** Diracin delta-funktio blokkifunktioiden limiittinä

Ja lisäksi pätee

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_n(\tau) d\tau = Q.$$

Tässä oletetaan koko aikaa stationaarisuutta.

Yllä olevat kaavat kannattaa katsella vähäksi aikaa. Tässä meillä on funktio  $A_n(\tau)$  joka on “melkein kaikkialla” nolla (eli, jos  $\tau \neq 0$ ) mutta ainoassa pisteessä jossa se ei ole nolla (eli, jos  $\tau = 0$ ) se on ääretön! Ja vielä lisäksi, *integraali* funktion  $\tau$ -domeenin yli tuottaa äärellisen arvon  $Q$ !

Sellainen funktio ei ole olemassakaan. Se on matemaattinen apuväline nimeltä *distributio*. Se on kvanttifyysikon Paul DIRACIN mukaan nimetty *delta-funktio*:

$$A_n(\tau) = Q\delta(\tau). \quad (2.3)$$

Voidaan intuitiivisesti kuvitella, miten sellainen “funktio” rakennetaan.

Määritetään ensin seuraava blokkifunktio:

$$\delta_b(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{jos } \tau > \frac{b}{2} \text{ tai } \tau < -\frac{b}{2} \\ \frac{1}{b} & \text{jos } -\frac{b}{2} \leq \tau \leq \frac{b}{2} \end{cases}$$

Ilmiselvästi tämän funktion integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_b(\tau) d\tau = 1 \quad (2.4)$$

ja  $\delta_b(\tau) = 0$  jos  $|\tau|$  riittävän suuri.

Anna nyt limiitissä  $b \rightarrow 0$ . Silloin  $\delta_b(0) \rightarrow \infty$ , ja jokaiselle  $\tau$ -arvolla  $\tau \neq 0$  löytyy aina vastaava raja-arvo  $b$ :lle, jonka alapuolella  $\delta_b(\tau) = 0$ .

Distribuutioiden käsittelysääntö on yksinkertaisesti, että ensin integroidaan, ja sitten saadussa tuloksessa annetaan  $b \rightarrow 0$ .

“Random walk” syntyy, jos valkoista kohinaa integroidaan ajassa. Olkoon kohinan  $\underline{n}$  autokovarianssi

$$A_n(\Delta t) = Q\delta(\Delta t).$$

Integroidaan tämä funktio:

$$\underline{x}(t) = \int_{t_0}^t \underline{n}(\tau) d\tau.$$

Huomaa, että

$$E\{\underline{x}(t)\} = \int_{t_0}^t E\{\underline{n}(\tau)\} d\tau = 0.$$

Autokovarianssifunktio saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} A_x(t_1, t_2) &= E\{(\underline{x}(t_2) - E\{\underline{x}(t_2)\})(\underline{x}(t_1) - E\{\underline{x}(t_1)\})\} = \\ &= E\{\underline{x}(t_2)\underline{x}(t_1)\} = \\ &= E\left\{\int_{t_0}^{t_2} \underline{n}(\tau_2) d\tau_2 \int_{t_0}^{t_1} \underline{n}(\tau_1) d\tau_1\right\} = \\ &= \int_{t_0}^{t_2} \left[\int_{t_0}^{t_1} E\{\underline{n}(\tau_1)\underline{n}(\tau_2)\} d\tau_1\right] d\tau_2. \end{aligned}$$

Tässä

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} E\{\underline{n}(\tau_1)\underline{n}(\tau_2)\} d\tau_1 = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} A_n(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 = \\ &= Q \int_{t_0}^{t_1} \delta(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 = \begin{cases} Q & \text{jos } t_1 > \tau_2 \\ 0 & \text{jos } t_1 < \tau_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Tästä taas seuraa, että

$$\begin{aligned} A_x(t_1, t_2) &= Q \int_{t_0}^{t_2} \left[\int_{t_0}^{t_1} \delta(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1\right] d\tau_2 = \\ &= Q(t_1 - t_0) + 0 \cdot (t_2 - t_1) = \\ &= Q(t_1 - t_0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tässä johtamisessa on oletettu, että kohinafunktion  $\underline{n}$  autokovarianssi on *stationaarinen*, ts., että  $Q$  on vakio. Tätä voidaan helposti yleistä tapaukselle, että  $Q(t)$  on ajan funktio, seuraavasti:

$$A_x(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} Q(t) dt. \tag{2.6}$$

Kummassakin yhtälössä (2.5, 2.6) oletetaan  $t_1 \leq t_2$ .

## 2.9 Power Spectral Density

### Määritelmä

Joskus haluamme tutkia nämä stokastiset prosessit *spektraalisesti*, eli mitkä eri taajuudet prosessi sisältää. Tämä voidaan tehdä *Fourier-muunnoksen* avulla.

Stationaariselle prosessille autokovarianssifunktion Fourier-muunnos kutsutaan *power spectral density* (PSD) -funktioiksi. Seuraavaksi <sup>4</sup>:

$$\widetilde{A}_x(f) = \mathcal{F}\{A_x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t) \exp(-2\pi i f t) dt, \quad (2.7)$$

olettaen, että se on olemassa. Tässä  $f$  on *taajuus*, yksikkönä Hz (Heinrich R. Hertzin mukaan), siis kierroksia/värähtelyjä sekunnissa eli  $s^{-1}$ . Aivan analogisesti voidaan määrittää myös kahden funktion risti-PSD:

$$\widetilde{C}_{xy}(f) = \mathcal{F}\{C_{xy}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(t) \exp(-2\pi i f t) dt.$$

Käänteinen operaatio käyttämällä Fourier-käänteismuunnos antaa

$$A_x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\widetilde{A}_x(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{A}_x(f) \exp(2\pi i f t) df.$$

Siksi, jos  $f = 0$  saadaan

$$A_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{A}_x(f) df,$$

siis prosessin  $\underline{x}$  varianssi on sama kuin sen PSD-käyrän kokonaispinta-ala.

Koska autokovarianssifunktio on symmetrinen, siis

$$A_x(\Delta t) = A_x(t_2 - t_1) = A_x(t_2, t_1) = A_x(t_1, t_2) = A_x(t_1 - t_2) = A_x(-\Delta t),$$

seuraa, että PSD on *reaaliarvoinen*; tämän lisäksi se on aina ei-negatiivinen,

$$\widetilde{A}_x(f) \geq 0 \quad \forall f.$$

Risti-PSD:lle tämä ei päde: meillä on

$$C_{xy}(t_2, t_1) = C_{yx}(t_1, t_2) \neq C_{xy}(t_1, t_2),$$

kun toisaalta

$$\begin{aligned} A_x(t_2, t_1) &= E\{(x(t_2) - E\{x(t_2)\})(x(t_1) - E\{x(t_1)\})\} = \\ &= E\{(x(t_1) - E\{x(t_1)\})(x(t_2) - E\{x(t_2)\})\} = A_x(t_1, t_2). \end{aligned}$$

.

<sup>4</sup>Note that we write here  $t$  for the time argument, which however represents a time *difference*. Earlier we used  $\Delta t$ .



## Valkoinen kohina

Valkoisen kohinan PSD voidaan laskea ilmaisulla (2.3):

$$A_n(t) = Q\delta(t),$$

josta

$$\widetilde{A}_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q\delta(t) \exp(-2\pi itf) dt = Q \exp(0) = Q \forall f,$$

käyttäen  $\delta$ -funktion integrointiominaisuus (2.4). Tässä nähdään miksi prosessi jolla on Dirac-tyyppinen autokovarianssifunktio kutsutaan *valkoiseksi kohinaksi*: PSD on vakio koko spektrin läpi, kaikille taajuuksille  $f$ , aivan kuten valkoisen valon tapauksessa.



## Kalman -suodatin

Ks. [Strang and Borre \[1997\]](#) ss. 543-583.

Linkkilista: <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/>.

Hyvä diasarja: [http://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001\\_Slides\\_08.pdf](http://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_Slides_08.pdf).

Kalman-suodatin on lineaarinen, prediktiivinen suodatin. Kuten kahvisuodatin suodattaa kahvia porosta, Kalman-suodatin suodattaa signaalia (ns. *state vector*, tilavektori) havaintoprosessin kohinasta.

Kalman-suodattimen keksijät olivat Rudolf KALMAN ja Richard BUCY vuosina 1960-1961 ([Kalman \[1960\]](#); [Kalman and Bucy \[1961\]](#)). Keksintö käytettiin laajasti avaruusohjelmassa sekä ohjusten ohjausjärjestelmien yhteydessä. Kuitenkin Kalman-suodatin on yleispätevä ja on käytetty paitsi navigaatiossa myös taloustieteessä, säätieteessä mm.

Kalman-suodatin koostuu kahdesta osasta:

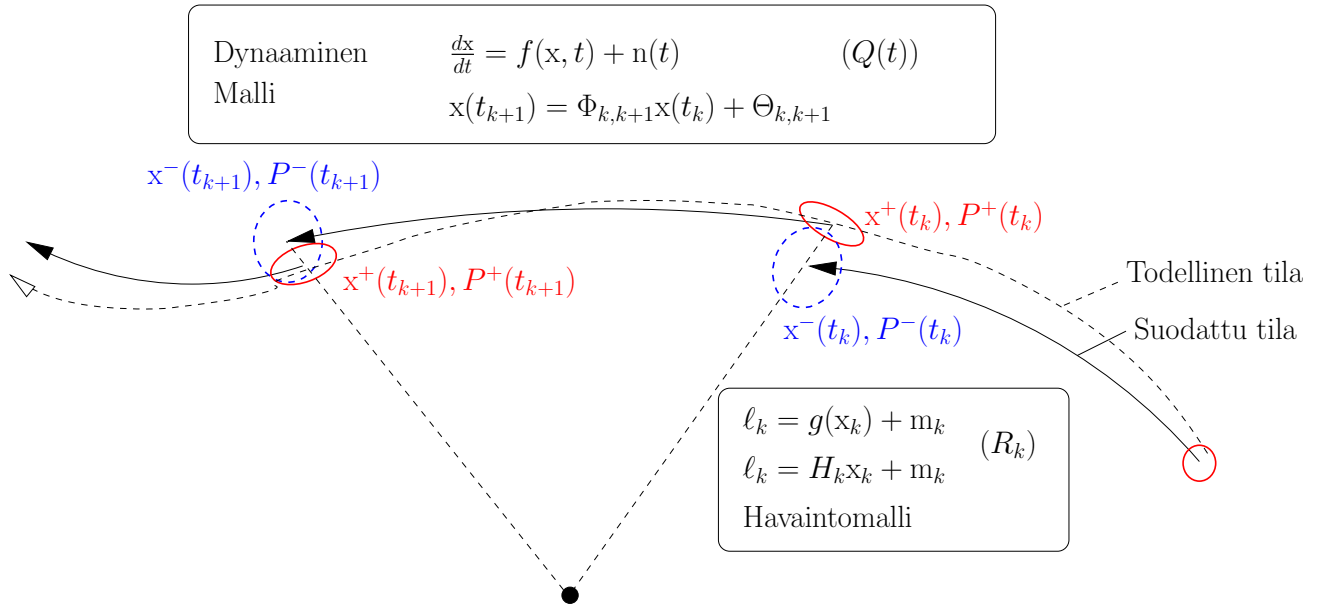
1. Dynaaminen malli; se kuvaa liikeprosessia, jonka mukaan *tilavektori* kehittyy ajassa.
2. Havaintomalli; se kuvaa prosessi millä saadaan havaintosuureet jotka kertovat jotain havaintohetken tilavektorista.

Kummatkin mallit sisältävät tilastollisia elementtejä: dynaaminen malli sisältää tilastollisen kuvauksen satunnaisista vaikutuksista järjestelmän kehitykseen ajassa, esim. satunnaisia satelliittiradan häiriöitä, kun havaintomalli taas sisältää havaintoepävarmuuden kuvauksen.

Kalman-suodattimelle erikoinen on se, että tilavektori propagoituu ajassa askel kerrallaan; myös havainnot käytetään tilavektorin korjaamiseksi vain havaintohetkellä. Tästä syystä Kalman-suodatin ei vaadi suurta laskentatehoa eikä käsittele suuria matriiseja. Sitä voidaan käyttää kulkuneuvon sisällä ja tosiaikaisesti.

### 3.1 Tilavektori

Tilavektori (en. *state vector*) on muodollinen vektori (siis abstraktin vektoriavaruuden alkio) joka kuvaa dynaamisen järjestelmän kokonaista tilaa. Esim. vapaasti avaruudes-



Kuva 3.1: Kalman-suodatin

sa liikkuvalla hiukkasella on kolme paikkakoordinaattia ja kolme nopeuskomponenttia; tilavektoriksi muodostuu

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

jossa paikkavektori on  $[x \ y \ z]^T$  ja nopeusvektori  $[\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ <sup>1</sup>. Tässä tapauksessa tilavektorilla on siis kuusi elementtiä eli *vapausastetta*.

Jos hiukkanen ei ole pistemäinen vaan kappale, tulee myös sen orientaatiokulmat (Eulerkulmat) mukaan tilavektoriin. Silloin on jo yhdeksän elementtiä. Usean hiukkasen järjestelmässä jokainen hiukkanen tuo omat elementit, kolme paikkaa ja kolme nopeutta, tilavektoriin.

Tilavektori voi sisältää myös elementtejä, jotka mallintavat mekaanisen laitteen, kuten inertianavigointilaitteen, käyttäytymisen.

## 3.2 Dynaaminen malli

Dynaaminen malli kuvaa tilavektorin käyttäytymisen ajassa. Tilavektori on (vektoriaalinen, siis vektoriarvoinen) stokastinen prosessi ajan  $t$  funktiona.

Dynaaminen malli on *lineaarisisessa tapauksessa* seuraavan näköinen:

<sup>1</sup>Vaihtoehtoinen kirjoitustapa: paikkavektori  $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ , nopeusvektori  $\dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2 + \dot{z}\mathbf{e}_3$ , jossa  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  ortonormaali kanta  $\mathbb{R}^3$ :ssa.

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \Phi \cdot \underline{x} + \underline{n}, \quad (3.2)$$

missä  $\underline{x} = \underline{x}(t)$  on tilavektori,  $\underline{n} = \underline{n}(t)$  on dynaaminen kohina (eli, kuinka epätarkasti yllä olevat liikeyhtälöt pitävät paikkansa) ja  $\Phi$  (myös mahdollisesti aikariippuvainen) on kerroinmatriisi.

Yleisempi *ei-lineaarinen* tapaus on seuraava:

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = F(\underline{x}) + \underline{n},$$

missä  $F(\cdot)$  on (vektori-)funktio. Tästä saa helposti lineaarinen tapaus valitsemalla *likiarvo*  $\underline{x}^{(0)}$  tilavektorille. Tästä likiarvosta (ajan funktio!) vaaditaan *yhteensopivuutta* dynaamisen mallin kanssa:

$$\frac{d}{dt}\underline{x}^{(0)} = F(\underline{x}^{(0)}).$$

Nyt *linearisoidaan* vähentämällä ja Taylor-kehittämällä:

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} - \underline{x}^{(0)}) = F(\underline{x}) + \underline{n} - F(\underline{x}^{(0)}) \approx \Phi \cdot (\underline{x} - \underline{x}^{(0)}) + \underline{n},$$

mikä on jo muotoa (3.2) jos kirjoitetaan  $\underline{x} - \underline{x}^{(0)} \rightarrow \Delta\underline{x}$ :

$$\frac{d}{dt}\Delta\underline{x} = \Phi \cdot \Delta\underline{x} + \underline{n},$$

josta voi pudottaa deltat pois.

Funktion  $F(\cdot)$  yllä käytetyn Jakobin matriisi  $\Phi$ :n alkioit ovat  $\Phi_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\underline{x})$ , jossa  $x_j$  ovat  $\underline{x}$ :n komponentit: esim. kaavan 3.1 tilavektorissa,  $x_2 = y$ ,  $x_6 = \dot{z}$ , jne.

Dynaamiselle kohinalle on annettava realistiset *tilastollisia* ominaisuuksia; usein oletetaan, että se on valkoinen kohina (ks. yllä) jonka autokovarianssi on

$$A_n(t_1, t_2) = Q(t_1) \delta(t_2 - t_1). \quad (3.3)$$

### 3.3 Esimerkki: Kepler-rata

Esimerkkinä voidaan kuvata avaruusaluksen liike Maan painovoimakentässä:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix},$$

missä  $n_x, n_y, n_z$  ovat esim. ilman kitkan tuntematon vaikutus tai Maan painovoimakentän epäsäännöllisyydet jne.

Valitettavasti tämä on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Pidennetään tilavektori liisäämällä siihen *nopeudet*:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = - \frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}.$$

Tämä yhtälöryhmä on epälineaarinen. Linearisointi antaa

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{GM}{r^5} (3x^2 - r^2) & \frac{GM}{r^5} 3xy & \frac{GM}{r^5} 3xz & 0 & 0 & 0 \\ \frac{GM}{r^5} 3yx & \frac{GM}{r^5} (3y^2 - r^2) & \frac{GM}{r^5} 3yz & 0 & 0 & 0 \\ \frac{GM}{r^5} 3zx & \frac{GM}{r^5} 3zy & \frac{GM}{r^5} (3z^2 - r^2) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

missä  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  on etäisyys maan keskipisteestä. On myös oletettu, että

1. on käytettävissä sopiva satsi likiarvoja  $[x^{(0)} \ y^{(0)} \ z^{(0)} \ | \ \dot{x}^{(0)} \ \dot{y}^{(0)} \ \dot{z}^{(0)}]^T$ , jonka suhteen  $\Delta$ -suureet on laskettu, ja että
2. *kerroinmatriisin elementit on laskettu näillä likiarvoilla.*

Jokainen tilavektorin alkio on ajan funktio:  $x^{(0)}(t)$  jne.

Yllä olevan kaavan “partitioitu” versio olisi:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix},$$

jossa

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{GM}{r^3} x \\ -\frac{GM}{r^3} y \\ -\frac{GM}{r^3} z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \frac{GM}{r} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \frac{GM}{r} = \\ &= \frac{GM}{r^5} \begin{bmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3yx & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3zx & 3zy & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

kutsutaan *painovoimagradienttitensoriksi* eli *Marussi-tensoriksi*.

Marussi-tensori on gravitaatiovektorin  $\frac{GM}{r^3}\mathbf{x}$  osittaisderivaattamatriisi paikan suhteen. Kun muistetaan, että gravitaatiovektori itse *geopotentialin gradientti*, seuraa, että tensori on myös geopotentialin  $\frac{GM}{r}$  kaksoisosittaisderivaattamatriisi paikan suhteen. Kaikki nämä kaavat olettavat keskistä gravitaatiokenttää.

Painovoimagradienttitensori kuvaa, miten pieni satelliitin paikan häiriö  $[\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^T$  kääntyy kiihtyvyyshäiriöksi  $\frac{d}{dt} [\Delta \dot{x} \ \Delta \dot{y} \ \Delta \dot{z}]^T = [\Delta \ddot{x} \ \Delta \ddot{y} \ \Delta \ddot{z}]^T$ .

Pääasia likiarvosatsia valitessa on, että se on *fysikaalisesti yhteensopiva*, ts. esittää tosiasiaa mahdollista rataliikettä oletetun gravitaatiokentän sisällä.

Keskisen gravitaatiokentän tapauksessa sopiva likiarvosatsi on Kepler-rata, tai vielä yksinkertaisemmin, tasainen ympyräliike. Yllä olevassa kaavassa voidaan likiarvosatsina valita juuri vetovoimakeskukseen ympäri tapahtuvan Kepler-rataliikettä kuvaavat arvot  $GM$  ympäri.

Jos meillä on gravitaatiokentän malli joka on keskisen kentän approksimaatiota tarkempaa, on likiarvojen integrointi suoritettava käyttämällä tätä, tarkempaa mallia. Kuitenkin yo. linearisoitu dynaaminen malli (3.4) kelpaa edelleen erosuureiden  $\Delta\mathbf{x}$ ,  $\Delta\mathbf{v}$  integroimiseksi, mikäli ne vaan ovat *numeerisilta arvoiltaan pieniä*. Tämä on linearisoinnin eräs etu.

## 3.4 Tilapropagaatio

Tilapropagaatio tapahtuu integroimalla kaava (3.2). Tarkemmin, integroidaan (taas lineaarisessa tapauksessa)

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}}(t) = \Phi \cdot \underline{\mathbf{x}}(t).$$

Tilan estimaattorin  $\underline{\mathbf{x}}^-$  tapauksessa<sup>2</sup> tämä on yksinkertaista:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}^-(t_1) &\approx \underline{\mathbf{x}}^-(t_0) + \Phi\Delta t \cdot \underline{\mathbf{x}}^-(t_0) = \\ &= (I + \Phi\Delta t)\underline{\mathbf{x}}^-(t_0) \end{aligned}$$

jos  $\Delta t = t_1 - t_0$  on pieni. Tästä nähdään heti, että  $\underline{\mathbf{x}}(t_1)$ :n alkiot ovat  $\underline{\mathbf{x}}(t_0)$ :n *alkioiden* lineaariyhdistelmiä. Jos  $t_1 - t_0 = n\delta t$ ,  $\delta t$  pieni, seuraa, toistuvasti soveltamalla yo. kaava, että

$$\underline{\mathbf{x}}^-(t_1) = (I + \Phi\delta t)^n \underline{\mathbf{x}}^-(t_0).$$

Matriisia

$$\Phi_0^1 = (I + \Phi\delta t)^n$$

kutsutaan *tilansiirtomatriisiksi* epookkien  $t_0$  ja  $t_1$  välillä; kirjoitetaan

$$\underline{\mathbf{x}}^-(t_1) = \Phi_0^1 \underline{\mathbf{x}}^-(t_0).$$

<sup>2</sup>Käytetty notaatio:  $\underline{\mathbf{x}}^-$  on tila-estimaattori ennen (myöhemmin käsiteltävä) päivitysaskel;  $\underline{\mathbf{x}}^+$  on tila-estimaattori päivitysaskelen jälkeen. Kirjallisuudessa löytyy myös notaatiot  $\hat{\mathbf{x}}^{i-1}$  ja  $\hat{\mathbf{x}}^i$ , joissa "hattu" on estimaattorin merkki.

Kun kirjoitetaan  $\delta t = \Delta t/n$ , saadaan

$$\Phi_0^1 = \left( I + \frac{\Phi \Delta t}{n} \right)^n.$$

Tavallisille numeroille on olemassa klassinen kaava

$$e^x = \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\nu} \right)^{\nu x} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\nu} \right)^\nu \right]^x,$$

jossa näkyy luvun  $e$  määritelmä:

$$e = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\nu} \right)^\nu.$$

Tästä syystä kirjoitetaan joskus (generalisoimalla exp-funktio neliön muotoisille matriiseille):

$$\Phi_0^1 = \exp \left\{ \ln \left( I + \frac{\Phi \Delta t}{n} \right)^n \right\} = \exp \left\{ n \ln \left( I + \frac{\Phi \Delta t}{n} \right) \right\} \approx \exp \left\{ n \frac{\Phi \Delta t}{n} \right\} = e^{\Phi(t_1 - t_0)}. \quad (3.6)$$

Voimme havaita, että tilansiirtomatriisille on olemassa *transitiivinen ominaisuus*, eli

$$\Phi_{t_0}^{t_2} = \Phi_{t_1}^{t_2} \cdot \Phi_{t_0}^{t_1},$$

toisin sanoen, tilan siirtämiseksi  $\underline{x}(t_0)$ :stä  $\underline{x}(t_2)$ :een, voit siirtyä ensin  $t_0$ :stä  $t_1$ :een ja sitten  $t_1$ :stä  $t_2$ :een.

**Määritelmä.** Määrittelemme tilavektorin *varianssiksi* sen *estimaattorin* kvadraatin erotus sen *oikeasta arvosta* – sekin stokastinen prosessi, johon siis emme pääse käsiiksi!<sup>3</sup> – eli seuraavasti:

$$P^-(t) = \text{Var}(\underline{x}^-(t)) \equiv E \left\{ (\underline{x}^-(t) - \underline{x}(t)) (\underline{x}^-(t) - \underline{x}(t))^T \right\}, \quad (3.7)$$

saadaan

$$P^-(t_1) = (\Phi_0^1)^T P^-(t_0) (\Phi_0^1) + \int_{t_0}^{t_1} Q(t) dt, \quad (3.8)$$

missä olemme käyttäneet hyväksi kaava (2.6), ja olettaneet että dynaaminen kohina  $\underline{n}$  on valkoinen.

Voimme myös johtaa differentiaaliyhtälöitä jotka kuvaavat tilavarianssimatriisin ja tilansiirtomatriisin kehitystä ajassa. Jos ajat  $t_0$  ja  $t$  ovat lähellä toisiaan, voimme kirjoittaa

$$\Phi_{t_0}^t \approx I + F(t)(t - t_0),$$

jossa *nyt* kerroinmatriisi  $F(t)$  saa olla ajan funktio. Silloin

<sup>3</sup>Tämä on mielenkiintoinen filosofinen kysymys. Onko metsän puiden suhina olemassa kun ei ole ketään kuuntelemaan?



$$\frac{d}{dt} (\Phi_{t_0}^t) = F(t) + \frac{dF}{dt} (t - t_0) \approx F(t).$$

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, jossa  $t$  ja  $t_1$  ovat lähellä toisiaan, mutta  $t_1$  ja  $t_0$  eivät ole. Silloin

$$\frac{d}{dt} (\Phi_{t_0}^t) = \frac{d}{dt} (\Phi_{t_1}^t \Phi_{t_0}^{t_1}) = \frac{d}{dt} (\Phi_{t_1}^t) \Phi_{t_0}^{t_1} \approx F(t) \Phi_{t_0}^{t_1} \approx F(t) \Phi_{t_0}^t. \quad (3.9)$$

Alkuehdon

$$\Phi_{t_0}^{t_0} = I$$

voimme numeerisella integroimalla saada matriisi  $\Phi_{t_0}^{t_1}$ . Voimme myös kirjoittaa (ilman todistusta), täysin analogisesti kaavan (3.6) kanssa:

$$\Phi_{t_0}^{t_1} = \exp \left\{ \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt \right\},$$

myös kätevä laskentakaava.

Tämä on kaavan (3.6) yleisempi tapaus siinä tapauksessa, että  $F$  on ajasta riippuvainen. (Notaatio  $\Phi_{t_0}^{t_1} = \Phi_0^1$  poikkeaa hieman aikaisemmasta.)

Differentiaaliyhtälön johtamiseksi tilavarianssimatriisille  $P$  lähdemme kaavasta (3.8):

$$P^-(t) = (\Phi_{t_0}^t) P^-(t_0) (\Phi_{t_0}^t)^T + \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau,$$

johon olemme sijoittaneet  $t \rightarrow \tau$  ja  $t_1 \rightarrow t$ . Mikäli  $t - t_0$  on pieni, on tulos, käyttämällä kaava (3.9)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P^-(t) &= \left( \frac{d}{dt} \Phi_{t_0}^t \right) P^-(t_0) (\Phi_{t_0}^t)^T + (\Phi_{t_0}^t) P^-(t_0) \left( \frac{d}{dt} \Phi_{t_0}^t \right)^T + Q(t) = \\ &= F(t) \Phi_{t_0}^t P^-(t_0) (\Phi_{t_0}^t)^T + \Phi_{t_0}^t P^-(t_0) (\Phi_{t_0}^t)^T F^T(t) + Q(t) = \\ &= F(t) P_0^-(t) + P_0^-(t) F^T(t) + Q(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

jossa  $P_0^-(t)$ :

$$P_0^-(t) = (\Phi_{t_0}^t) P^-(t_0) (\Phi_{t_0}^t)^T,$$

lasketaan integroimalla differentiaaliyhtälö

$$\frac{d}{dt} P_0^-(t) = F(t) P_0^-(t) + P_0^-(t) F^T(t). \quad (3.11)$$

Kaava (3.10) on sopiva differentiaaliyhtälö  $P$ -matriisin integroimiseksi myös, jos  $F$  on ajasta riippuvainen.

Tämä kaikki kuitenkin edelleen edellyttää, että matriisi  $F$  on olemassa, eli funktio  $F(\underline{x})$  voidaan linearisoida.

### 3.5 Havaintomalli

Tilavektorin kehitys ajassa ei ole kovin mielenkiintoista, ellei sitä voitaisiin *havaita* jollain tavalla. Havaintomalli (*lineaarinen tapaus*) on seuraava:

$$\underline{\ell} = H \cdot \underline{x} + \underline{m},$$

missä  $\underline{\ell}$  on havaintosuure (vektori),  $\underline{x}$  on tilavektori (“oikea arvo”) ja  $\underline{m}$  on havaintoprosessin “kohina”, siis mittauksen epävarmuus.  $H$  on *havaintomatriisi*<sup>4</sup>. Kohinan varianssina on annettu varianssimatriisi  $R$ ;  $E\{\underline{m}\} = 0$  ja  $E\{\underline{m}\underline{m}^T\} = R$  (koska  $E\{\underline{m}\} = 0$ , tämähän on kohina).

Olkoon havaintohetki  $t$ ; *tilavektorin estimaattori* propagoituna tähän hetkeen olkoon<sup>5</sup>  $\underline{x}^-(t) = \underline{x}^-$ . Tästä arvosta voidaan nyt laskea havaintosuure seuraavasti:

$$\widehat{\ell} = H\underline{x}^-.$$

Nyt voidaan konstruoida *nollasuure* (suure jonka odotusarvo  $E\{\cdot\}$  on nolla) seuraavasti:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \widehat{\ell} - \underline{\ell} = \\ &= H(\underline{x}^- - \underline{x}) - \underline{m} \end{aligned}$$

ja siis

$$\begin{aligned} E\{\underline{y}\} &= H(E\{\underline{x}^- \} - E\{\underline{x}\}) - E\{\underline{m}\} = \\ &= H \cdot 0 - 0, \end{aligned}$$

käyttämällä oletus että  $E\{\underline{x}^- \} = \underline{x}$ , eli  $\underline{x}^-$  on  $\underline{x}$ :n *harhaton estimaattori*.

*Epälineaarinen tapaus*: silloin  $H$  ei ole matriisi vain tilavektorin funktio  $H(\underline{x})$ .

$$\underline{\ell} = H(\underline{x}) + \underline{m}$$

ja

$$\widehat{\ell} = H(\underline{x}^-),$$

jonka jälkeen

$$\underline{y} = \widehat{\ell} - \underline{\ell} = H \cdot (\underline{x}^- - \underline{x}) - \underline{m},$$

ja matriisin  $H$  elementit määritetään seuraavasti

$$H_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} H_i(\underline{x}),$$

<sup>4</sup>Tämä on käytännössä sama kuin pienimmän neliösumman menetelmän  $A$ -matriisi eli “rakennematriisi”

<sup>5</sup>Minus- tai plusmerkin käyttö yläindeksina on usein käytetty tapa merkitä tilaa “ennen” ja “jälkeen” (*a priori*, *a posteriori*) havainnon käyttö päivityksessä. Myös muita merkintätapoja löytyy, mm. alaindeksit  $i$  ja  $i + 1$ .

Funktion  $H(\underline{x})$  jakobiaani eli osittaisderivaattojen matriisi.

Lasketaan myös

$$\begin{aligned}\text{Var}(\underline{y}) &= E\{\underline{y}\underline{y}^T\} = \\ &= HE\left\{(\underline{x}^- - \underline{x})(\underline{x}^- - \underline{x})^T\right\}H^T + R = \\ &= HP^-H^T + R,\end{aligned}$$

olettamalla että  $\underline{x}^-$  ja  $\underline{m}$  eivät korreloi keskenään.

Myös

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\underline{y}, \underline{x}^-) &\equiv E\left\{\underline{y}(\underline{x}^- - \underline{x})^T\right\} = \\ &= HP^-, \end{aligned}$$

olettaen, että  $\underline{m}$  ja  $\underline{x}^-$  ja  $\underline{x}$  eivät korreloidu (looginen oletus; yleensä havaintoprosessi on fysikaalisesti täysin riippumaton rataliikeprosessista, sekä eri epookkien havaintoprosessit toisistaan)

Samoin

$$\text{Cov}(\underline{x}^-, \underline{y}) = P^-H^T.$$

## 3.6 Päivitys

Päivitysaskel on nyt tiedon optimaalisesti hyväksi käyttäminen, että erolla estimoidusta tilavektorista  $\underline{x}^-$  lasketun havaintosuureen arvon  $\hat{\ell}$  ja tosiasiallisesti havaitun havaintosuureen  $\underline{\ell}$  välillä on odotusarvo nolla.

Konstruoidaan siis parannettu estimaattori

$$\begin{aligned}\underline{x}^+ &= \underline{x}^- + K\underline{y} = \\ &= \underline{x}^- + K(H(\underline{x}^- - \underline{x}) + \underline{m}),\end{aligned}$$

eli

$$(\underline{x}^+ - \underline{x}) = (I + KH)(\underline{x}^- - \underline{x}) + K\underline{m}.$$

Tässä matriisi  $K$  on nimeltään Kalmanin “gain matrix”.

Nyt määritelmän (3.7) mukaan saamme käyttää tätä kaavaa tilavarianssin propagaatio-kaavan johtamiseksi:

$$P^+ = (I + KH)P^-(I + KH)^T + KRK^T. \quad (3.12)$$

“Optimaalinen” ratkaisu saadaan valitsemalla

$$K = -P^-H^T(HP^-H^T + R)^{-1},$$

joka antaa ratkaisuksi tilapropagaatiokaava

$$\underline{x}^+ = \underline{x}^- - P^- H^T (HP^- H^T + R)^{-1} (H\underline{x}^- - \underline{\ell}).$$

Jos kutsutaan

$$\Pi \equiv (HP^- H^T + R)^{-1},$$

voimme kirjoittaa uudelleen kaava (3.12):

$$\begin{aligned} P^+ &= (I - P^- H^T \Pi H) P^- (I - P^- H^T \Pi H)^T + P^- H^T \Pi R \Pi H P^- = \\ &= P^- - P^- H^T \Pi H P^- - P^- H^T \Pi H P^- + \\ &\quad + P^- H^T \Pi H P^- H^T \Pi H P^- + P^- H^T \Pi R \Pi H P^- = \\ &= P^- - 2P^- H^T \Pi H P^- + P^- H^T \Pi H P^- = \\ &= P^- - P^- H^T \Pi H P^- = P^- - P^- H^T (HP^- H^T + R)^{-1} H P^-. \end{aligned}$$

Vedetty yhteen ehkä intuitiivisemmin:

$$\underline{x}^+ = \underline{x}^- - \text{Cov}(\underline{x}^-, \underline{y}) \text{Var}^{-1}(\underline{y}) \underline{y}, \quad (3.13)$$

$$\text{Var}(\underline{x}^+) = \text{Var}(\underline{x}^-) - \text{Cov}(\underline{x}^-, \underline{y}) \text{Var}^{-1}(\underline{y}) \text{Cov}(\underline{y}, \underline{x}^-), \quad (3.14)$$

jonkinlainen tilavektorin  $\underline{x}$  regressio “sulkuvirheen”  $\underline{y}$  suhteen.

Näin on löytynyt Kalman-suodattimen *päivityskaavat* sekä tilavektorille että sen varianssimatriisille.

**Huomautus.** Voimme vielä lyhentää yo. varianssin päivityskaava seuraavaksi:

$$P^+ = P^- - P^- H^T (HP^- H^T + R)^{-1} H P^- = (I + KH) P^-,$$

$K$ :n määritelmän perusteella.

Kirjallisuudessa löytyy monta tapaa laskea nämä kaavat tehokkaasti ja tarkasti. Kuitenkin pääasia on, että “sulkuvirheen” varianssimatriisi

$$\text{Var}(\underline{y}) = HPH^T + R$$

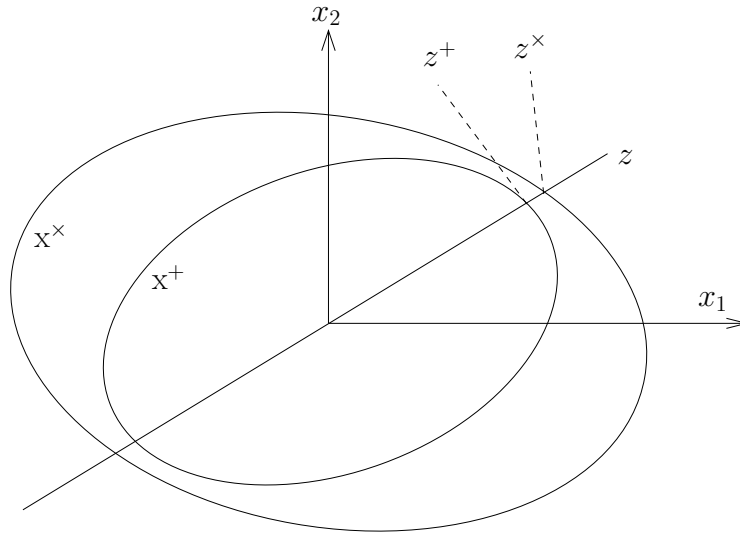
on vektorin  $\underline{y}$  kokoinen. Ja  $\underline{y}$ :n koko on samanaikaisten havaintojen määrä. Tästä syystä Kalman-suodatin kutsutaan myös *sekventiaaliseksi suodattimeksi*, koska se käsittelee havainnot epookki kerrallaan, ei (kuten esim. perinteinen tasoituslasku) kaikki yht'aikaa.

### 3.7 Kalman-päivityksen optimaalisuudesta

Kaavat (3.13, 3.14) ovat *optimaalisia* pienimmän neliösumman menetelmän merkityksessä. Sen todistaminen käy seuraavasti, hieman yksinkertaistaen.

Ensin lasketaan

$$\text{Cov}(\underline{x}^+, \underline{y}) = \text{Cov}(\underline{x}^-, \underline{y}) - \text{Cov}(\underline{x}^-, \underline{y}) \text{Var}^{-1}(\underline{y}) \text{Var}(\underline{y}) = 0 \quad (3.15)$$



**Kuva 3.2:** Optimaalisen estimaattorin virhe-ellipsi on kokonaan muiden estimaattorien virhe-ellipsien sisällä

(muista, että  $\text{Cov}(\underline{y}, \underline{y}) = \text{Var}(\underline{y})$ ). Eli päivitetty tilavektori  $\underline{x}^+$  on ortogonaali “sulkuvirhevektorin”  $\underline{y}$  kohtaan.

Oleta nyt, että olisi vaihtoehtoinen  $\underline{x}^x$ , joka olisi vieläkin  $\underline{x}^+$ :ää parempi. Kirjoita

$$\underline{x}^x = \underline{x}^+ + A\underline{y}.$$

Silloin, kaavan (3.15) ansiosta, olisi

$$\text{Var}(\underline{x}^x) = \text{Var}(\underline{x}^+) + A\text{Var}(\underline{y})A^T.$$

Eli, koska  $\text{Var}(\underline{y})$  on positiivis-definiitti, on aina,

$$\text{Var}(\underline{x}^x) - \text{Var}(\underline{x}^+) =$$

positiivis-semidefiniitti, ja

$$\text{Var}(\underline{x}^x) - \text{Var}(\underline{x}^+) = 0$$

tapahtuu, jos  $A = 0$ . Toisin sanoin, mielivaltaisella lineaariyhdistelmällä  $\underline{z} = \sum_i c_i \underline{x}_i$  (siis  $\underline{z}^x = c_i \underline{x}_i^x$ ,  $\underline{z}^+ = c_i \underline{x}_i^+$ ) pätee

$$\text{Var}(\underline{z}^x) - \text{Var}(\underline{z}^+) = 0$$

jos  $A = 0$ , ja muuten

$$\text{Var}(\underline{z}^x) - \text{Var}(\underline{z}^+) \geq 0.$$

Asia voidaan kaksiulotteisessa erikoistapauksessa esittää graafisesti kuten kuvassa 3.2. Siis optimaalisen estimaattorin  $\underline{x}^+$  varianssi-ellipsi (yleisemmin: (hyper-)ellipsoidi) on aina kokonaan vaihtoehtoisen estimaattorin  $\underline{x}^x$  varianssi-ellipsin sisällä (tai pahimmassa tapauksessa koskettamassa sitä sisältä), ja mielivaltaisen komponenttien lineaariyhdistelmän  $\underline{\ell}$  vastaaville variansseille pätee samoin.

### 3.8 Laskentaesimerkki

Kysymys:

Oleta, että tilavektorin dynaaminen malli

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

on

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}.$$

Tässä,  $n$  on valkoinen kohina jonka autokovarianssi on  $Q = 1$ . Oleta lisäksi, että alkutila on annettuna seuraavaksi:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, P(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

(Siis: oikeastaan tiedetään nopeudesta juuri mitään).

(Käytä *Matlab!*)

1. Laske tämä tila-informaatio eteenpäin hetkelle  $t = 5$ , siis laske  $x(5)$ ,  $P(5)$ .
2. Ajanhetkellä  $t = 5$  suoritetaan lisähavainto, arvo 3:

$$\ell = x^-(5) + \underline{m},$$

jossa  $\underline{m}$ :n varianssiksi on annettu 3. Laske *a posteriori* tila  $x^+(5)$ ,  $P^+(5)$ .

3. Laske vaihtoehtoisesti vastaus käyttäen standardi *pienimmän neliösumman ta-soitus*. Meillä on dynaaminen malli

$$x(t) = x(0) + v(0) \cdot t,$$

estimoitavissa olevat tuntemattomat  $x(0)$  ja  $v(0)$ , ja havaintoyhtälöt

$$\begin{aligned} \ell_1 + v_1 &= x(0) \\ \ell_2 + v_2 &= x(5) \end{aligned}$$

sekä havaintojen vektori

$$\ell = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, Q_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vastaus:

1.  $x(5) = x(0) + v(0) \cdot 5 = 4$ . Koska matriisi  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , saadaan tilansiirtomatriisi muotoon

$$\begin{aligned} \Phi_0^5 &= e^{F\Delta t} = e \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

koska

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n = 0, n > 1.$$

Sitten

$$\begin{aligned} P(5) &= \Phi_0^5 P(0) (\Phi_0^5)^T + Q \Delta t = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 25002 & 5000 \\ 5000 & 1005 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Matriisi  $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Siis  $HP^-H^T + R = 25002 + 3 = 25005$ .  $K$ -matriisi on

$$K = -P^-H^T (HP^-H^T + R)^{-1} = - \begin{bmatrix} 25002 \\ 5000 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{25005} = \begin{bmatrix} -0.999880023995201 \\ -0.199960007998400 \end{bmatrix}.$$

Seuraavasti lasketaan

$$\underline{y} = Hx^-(5) - \underline{\ell} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 = 1.$$

Silloin

$$x^+(5) = x^-(5) + K\underline{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.99988 \\ 0.19996 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 3.00012 \\ -0.19996 \end{bmatrix}.$$

(Voimme projisoida tämä takaisin hetkelle  $t = 0$ : löydämme  $\hat{x}(0) = 3.00012 - 5 \cdot (-0.19996) = 3.9999$ , ja  $\hat{v}(0) = v^+(5) = -0.19996$ .)

Matriisille  $P^+(5)$  löydämme

$$\begin{aligned} P^+(5) &= (I + KH)P^-(5) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 0.999880023995201 & 0 \\ -0.199960007998400 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25002 & 5000 \\ 5000 & 1005 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2.99964 & 0.59988 \\ 0.59988 & 5.19996 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.  $A$ -matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

ja  $Q_{\ell\ell}$ -matriisi ja  $\ell$ -vektori ovat annettuja. Saadaan:

$$A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A = \begin{bmatrix} 0.83333 & 1.66667 \\ 1.66667 & 8.33333 \end{bmatrix},$$

$$\hat{x} = (A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1} A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{\ell} = \begin{bmatrix} 4.00000 \\ -0.20000 \end{bmatrix}.$$

Melkein sama käytännössä kuin tulos kohdassa 2. Ratkaisun varianssiksi lasketaan

$$\text{Var}(\hat{\mathbf{x}}) = (A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{bmatrix},$$

mitä ei voida verrata suoraan aikaisempaan tulokseen, koska sen ajanhetki on  $t = 0$ . Tämän lisäksi sisältää Kalman-ratkaisu dynaamisen kohinan vaikutuksen  $Q$ , joka ei standardi pienimmän neliösumman menetelmässä ole mukana.



## Kalman-suodatin käytännössä

### 4.1 “Värillinen kohina”, Gauß-Markov -prosessi

Tutkitaan yksinkertainen dynaaminen yhtälö

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = -k\underline{x} + \underline{n}, \quad (4.1)$$

missä  $\underline{n}$  on valkoinen kohina, jonka autokovarianssifunktio on  $Q\delta(t_2 - t_1)$ , ja  $k$  on vakio. Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$\underline{x}(t) = e^{-kt} \left\{ \underline{x}(t_0) e^{kt_0} + \int_{t_0}^t \underline{n}(\tau) e^{k\tau} d\tau \right\}.$$

Ratkaisu täyttää myös alkuehdon.

Jos oletetaan, että alkuarvo  $\underline{x}(t_0)$  on virheetön, ja että  $\underline{n}$ :n autokovarianssifunktio on

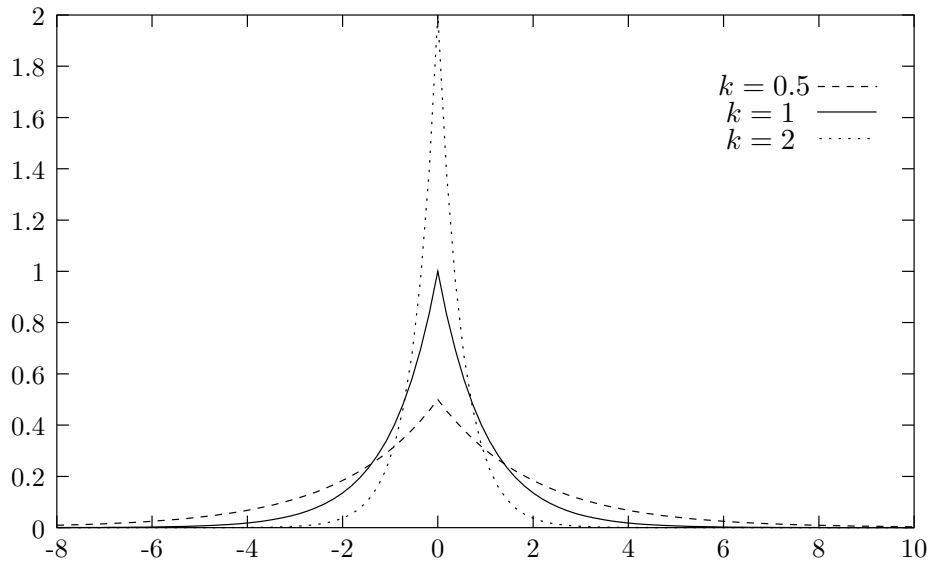
$$A_n(t_1, t_2) = Q(t_1) \delta(t_1 - t_2),$$

saadaan  $\underline{x}$ :n kovarianssifunktiolle:

$$\begin{aligned} A_x(t_1, t_2) &= \\ &= e^{-k(t_1+t_2)} E \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \underline{n}(\tau_1) e^{k\tau_1} d\tau_1 \int_{t_0}^{t_2} \underline{n}(\tau_2) e^{k\tau_2} d\tau_2 \right\} = \\ &= e^{-k(t_1+t_2)} \int_{t_0}^{t_1} e^{k\tau_1} \left[ \int_{t_0}^{t_2} E \{ \underline{n}(\tau_1) \underline{n}(\tau_2) \} e^{k\tau_2} d\tau_2 \right] d\tau_1. \end{aligned}$$

Tässä

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_2} E \{ \underline{n}(\tau_1) \underline{n}(\tau_2) \} e^{k\tau_2} d\tau_2 = \\ &= \int_{t_0}^{t_2} A_n(\tau_2 - \tau_1) e^{k\tau_2} d\tau_2 = \\ &Q \int_{t_0}^{t_2} \delta(\tau_2 - \tau_1) e^{k\tau_2} d\tau_2 = \begin{cases} Q e^{k\tau_1} & \text{jos } t_2 > \tau_1 \\ 0 & \text{jos } t_2 < \tau_1 \end{cases} \end{aligned}$$



**Kuva 4.1:** Gauss-Markov prosessin autokovarianssifunktio

Siis, olettaen, että  $t_2 < t_1$ :

$$\begin{aligned} A_x(t_1, t_2) &= Qe^{-k(t_1+t_2)} \left[ \int_{t_0}^{t_2} e^{2k\tau_1} d\tau_1 + \int_{t_2}^{t_1} 0 d\tau_1 \right] = \\ &= \frac{Q}{2k} e^{-k(t_1+t_2)} [e^{2kt_2} - e^{2kt_0}]. \end{aligned}$$

Tapauksessa, missä  $t_2 > t_1$  tämä antaa:

$$\begin{aligned} A_x(t_1, t_2) &= Qe^{-k(t_1+t_2)} \int_{t_0}^{t_1} e^{2k\tau_1} d\tau_1 = \\ &= \frac{Q}{2k} e^{-k(t_1+t_2)} [e^{2kt_1} - e^{2kt_0}]. \end{aligned}$$

Molemmissa tapauksissa saamme

$$A_x(t_1, t_2) = \frac{Q}{2k} [e^{-k|t_1-t_2|} - e^{-k(t_1+t_2-2t_0)}]. \quad (4.2)$$

Tapauksessa, jossa  $t_1, t_2 \gg t_0$  (stationaarinen tila kauan käynnistämisen jälkeen) saamme

$$A_x(t_2 - t_1) \equiv A_x(t_1, t_2) \approx \frac{Q}{2k} e^{-k|t_2-t_1|}. \quad (4.3)$$

Tässä (stationaarisessa) tapauksessa puhumme *värillisestä kohinasta* ja yllä oleva prosessi kutsutaan (ensimmäisen asteluvun) *Gauss-Markov prosessiksi*, myös autoregressiiviseksi (AR(1)) prosessiksi.

Kirjoitetaan vielä

$$Q \equiv qk^2.$$

Silloin pinta-ala  $A_x(t_2 - t_1)$  -käyrän alla on

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_x(\tau) d\tau = \frac{qk}{2} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{k\tau} d\tau = q,$$

vakio jos  $q$  on vakio.

Ääritapaus  $k \rightarrow \infty$  johtaa siihen, että autokovarianssifunktio  $A_x(t_2 - t_1)$  muuttuu äärettömän kapeaksi, mutta pinta-ala funktion käyrän alla ei muutu. Toisin sanoen:

$$A_x(t_2 - t_1) = q\delta(t_2 - t_1).$$

Tämä vastaa kaavan (4.1) degeneraatio, missä ei vain  $k \rightarrow \infty$ , vaan myös kohinan  $\underline{n}$  varianssi  $Q \rightarrow \infty$ . Eli:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = k\underline{x} - k\underline{\nu} \Rightarrow \underline{x} = \underline{\nu} - k^{-1} \frac{d\underline{x}}{dt} \approx \underline{\nu},$$

missä  $\underline{\nu} \equiv -\frac{\underline{n}}{k}$ :n varianssi on  $q = Qk^{-2}$ .

Toinen rajatapaus, missä  $k \rightarrow 0$ , on taas sama kuin yllä kuvattu tapaus (kappale 2.8). Eli “random walk” on Gauss-Markov prosessi jonka aikavakio on äärettömän pitkä. Siinä tapauksessa meidän on käytettävä koko kaava (4.2):

$$A_x(t_1, t_2) = \frac{Q}{2k} [e^{-k|t_1-t_2|} - e^{-k(t_1+t_2-2t_0)}].$$

Tässä tapauksessa, jos  $t_2 \approx t_1 \equiv t$ , saadaan

$$\begin{aligned} A_x(t) &= \frac{Q}{2k} [1 - e^{-2k(t-t_0)}] \approx \\ &\approx Q(t - t_0), \end{aligned}$$

käytännössä sama tulos kuin luvussa 2.8.

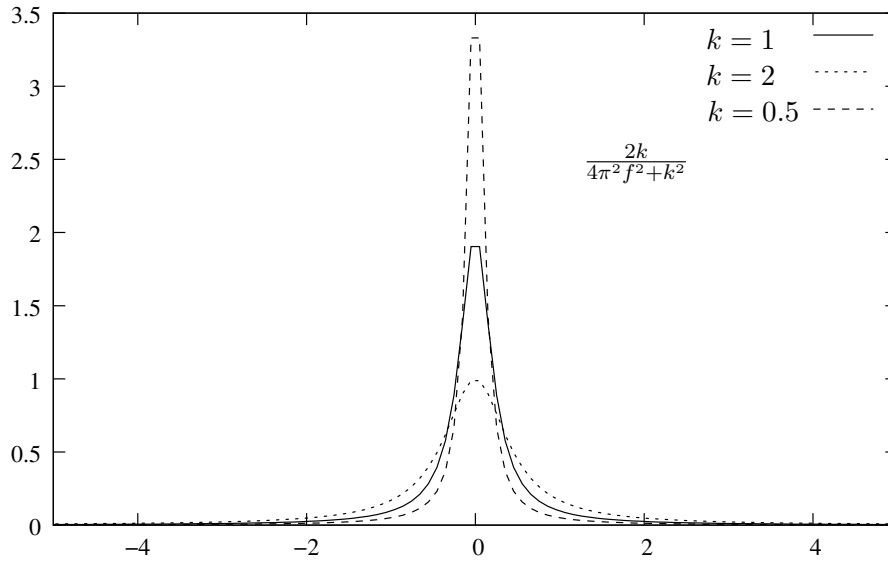
Vastaava dynaaminen yhtälö saadaan kaavasta (4.1) sijoittamalla  $k = 0$ :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{n},$$

eli  $\underline{x}$  on valkoisen kohinan  $\underline{n}$  aikaintegraali, kuten pitääkin.

Yhteenveto	$k$	dynaaminen malli	autokovarianssi
Random walk	0	$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{n}$	$Q(t - t_0)$
Gauss-Markov-prosessi	$\in (0, \infty)$	$\frac{d\underline{x}}{dt} = -k\underline{x} + \underline{n}$	$\frac{Q}{2k} e^{-k t_1-t_2 }$
Valkoinen kohina	$\infty$	$\underline{x} = \frac{\underline{n}}{k}$	$Qk^{-2}\delta(t_1 - t_2)$

Usein käytetään malli (4.1) “värillisen” kohinan – tai prosessin – generoimiseksi siinä tapauksessa, että tiedetään etukäteen, että prosessin ominaisuudet ovat sen tyyppisiä. Se onnistuu helposti lisäämällä yksi tuntematon  $x$  tilavektorille ja yksi yhtälö Kalman-suodattimen dynaamiselle mallille.



Kuva 4.2: Gauß-Markov prosessin tehon spektraalitiheys (PSD)

## Gauss-Markov prosessin PSD

Meillä on autokovarianssifunktio kaavana (4.3):

$$A_x(t) = \frac{Q}{2k} e^{-k|t|}.$$

Tästä saadaan PSD-funktio integroimalla (2.7):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t) \exp(-2\pi i f t) dt = \\ &= \frac{Q}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k|t|) \exp(-2\pi i f t) dt. \end{aligned}$$

Tämän integraalin ratkaisu ei ole aivan helppoa. Se löytyy integraalitulukoista ja on myös laskettavissa symbolisella kaavankäsittelyohjelmistolla, kuten Wolram Researchin on-line integraattorilla. Tulos on<sup>1</sup>

$$\tilde{A}_x(f) = \frac{Q}{4\pi^2 f^2 + k^2} = \frac{2k A_x(0)}{4\pi^2 f^2 + k^2}.$$

ks. Jekeli [2001] Kaava (6.75). Kuvan arvot on laskettu olettamalla  $Q = 2k$  – siis me pidämme  $\underline{x}$ :n varianssi, joka on  $A_x(0) = Q/2k$ , yhtä suuri kuin 1 – eri arvoille  $k = 0.5, 1, 2$ .

## 4.2 Realistisen tilastollisen käyttäytymisen mallinta

Värillistä kohinaa eli Gauss-Markov prosesseja käytetään usein mallintamaan tosielämän stokastisia prosesseja. Sanotaan vaikkapa, että tiedämme, että mitattu stokastinen prosessi

<sup>1</sup>Tämän muotoista kaavaa kutsutaan joskus Cauchy-Lorentz jakaumaksi.

$\underline{x}$  koostuu suureesta josta olemme kiinnostuneet,  $\underline{s}$  – joka saattaa vaihdella nopeasti nollan molemmin puolin –, ja systemaattinen “häiriö”, josta haluamme päästä eroon. Tiedämme myös, että häiriö vaihtelee hitaasti, aikavakiolla  $\tau_b$ . Kutsutaan tämä häiriö nimellä  $\underline{b}$ . Silloin voimme kirjoittaa tilavektori muotoon  $[\underline{s} \quad \underline{b}]^T$  ja dynaamiset yhtälöt vaikkapa muotoon

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_s & 0 \\ 0 & -1/\tau_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{n}_s \\ \underline{n}_b \end{bmatrix}.$$

Tässä  $\tau_b$  foron (pitkä) hitaasti vaihtelevan häiriö-prosessin aikavakio; aikavakiolle  $\tau_s$  saamme valita paljon lyhyempi arvo<sup>2</sup>. Sen pitää kuitenkin valita realistisesti. Jos mittaukset saadaan aikavälillä  $\Delta t$ , then we should havessilloin on oltava  $\tau_s \gg \Delta t$  siksi, että prosessin  $s$  voitaisiin realistisesti määrittää havainnoista.

Havaintoyhtälö, eli Kalmanin päivitysyhtälö, on

$$\underline{\ell} = \underline{s} + \underline{b} + \underline{m},$$

jossa  $\underline{m}$  (varianssi  $R$ ) edustaa havaintoepävarmuutta. Jos havainnot tehdään riittävän taaajasti ajassa, voidaan saada erikseen estimaatioita sekä signaaliprosessille  $\underline{s}$  että hitaasti vaihtelevalle kohinalle  $\underline{b}$ . Jotta tämä toimisi, on liitettävä realistisia aitokovariansseja prosesseille  $\underline{n}_s$  ja  $\underline{n}_b$ . Kuitenkin on tässä tapauksessa *vaatimuksena*, että  $E\{\underline{s}\} = 0$ . Ellei ole, prosessin  $\underline{s}$  systemaattinen osa joutuu suodattimen tuottamaan estimaattiin  $\hat{b}$  osaksi.

This is a case of spectral filtering by Kalman filter. The low frequency part, including zero frequency, goes to  $\underline{b}$ ; the high frequency part goes to  $\underline{s}$ . However, the boundary between the two spectral areas is not sharp.

Somewhat the opposite situation arises if we have a measured stochastic process consisting of a rapidly varying noise part, and a slowly varying signal. Assume that the noise is *not white*, but rather, “coloured”: let’s call it  $\underline{c}$ . It has a correlation length  $\tau_c$ . Now if we are interested only in the signal’s  $\underline{s}$  lower frequency constituents, we may again apply a Kalman filter:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_s & 0 \\ 0 & -1/\tau_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{n}_s \\ \underline{n}_c \end{bmatrix}.$$

Here, we choose  $\tau_s$  according to the part of the spectrum of  $\underline{s}$  that we are interested in (but always  $\tau_s > \tau_c$ );  $\tau_c$  should be chosen realistically, to capture and remove as much as possible the real noise in the process. Our observation or update equation is again

$$\underline{\ell} = \underline{s} + \underline{c} + \underline{m}.$$

The earlier described technique (of extracting a rapidly varying signal from a background of slowly varying bias) was used [Tapley and Schutz \[1975\]](#) already in 1975 for extracting data on underground mass concentrations (mascons) on the Moon from Lunar Orbiter tracking data. It is called “Dynamic Model Compensation”.

<sup>2</sup>Voimme myös valita aivan erityyppistä mallia jos tiedämme, että Gauss-Markov ei sovi prosessin  $\underline{s}$  kuvaamiseksi.

### 4.3 GPS-havainnot ja -tuntemattomat

GPS-havainnot kuvataan *pseudoetäisyyksiksi* seuraavalla kaavalla

$$p = \rho + c(\Delta t - \Delta T) + d_{\text{ion}} + d_{\text{trop}}, \quad (4.4)$$

jossa

$\rho = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$  on avaruusetäisyys satelliitin  $[x \ y \ z]^T$  ja maaseaman  $[X \ Y \ Z]^T$  välillä,

$\Delta t$  on satelliitin kellovirhe,

$\Delta T$  on vastaanottimen kellovirhe, ja

$d_{\text{ion}}, d_{\text{trop}}$  ovat ionosfääriset ja troposfääriset efektit.

This equation can be written in different ways, depending on what we consider to be the unknowns to be estimated by the Kalman filter. Available unknowns that can be included in the Kalman filter are

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T,$$

$$\mathbf{X} = [X \ Y \ Z]^T,$$

$\Delta t, \Delta T$ .

#### Satelliittiradan määrittäminen

Voimme ehdottaa seuraavaa *havaintoyhtälöä* ( $\underline{m}_p$  edustaa havaintoepävarmuutta):

$$\underline{p} = \sqrt{(\underline{x} - X)^2 + (\underline{y} - Y)^2 + (\underline{z} - Z)^2} + c(\underline{\Delta t} - \Delta T) + \underline{d}_{\text{ion}} + \underline{d}_{\text{trop}} + \underline{m}_p.$$

This is the observation equation for *orbit determination*. In it, the ground station (tracking station) position is given and treated as non-stochastic:  $[X \ Y \ Z]^T$ . The satellite position is stochastic and to be estimated by the filter. The same applies for the clocks: the tracking station clock is assumed known relative to *UTC*, the deviation being  $\Delta T$ . The satellite clock, however, is being estimated.

Tähän tilanteeseen identifioimme *tilavektoriksi*

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\mathbf{v}} \\ \underline{\Delta t} \\ \underline{d}_{\text{ion}} \\ \underline{d}_{\text{trop}} \end{bmatrix}.$$

As before, we introduced the velocity vector  $\mathbf{v}$ , so we can write the Kalman dynamical equations as a first-order differential equation.

Next, we have to decide how to model the time behaviour of these various state vector elements. For the location  $\mathbf{x}$  this is simple: we have

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{v},$$

exactly. For the velocity, we use the formula for a central force field, and we *linearize*. As approximate values we can use available orbital predictions, e.g., broadcast or precise ephemeris: call these  $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \Delta t_0$  (these always also contain satellite clock corrections!). Then we may define linearized (differential) state vector elements

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \\ \Delta\mathbf{v} &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \\ \Delta(\Delta t) &= \Delta t - \Delta t_0.\end{aligned}$$

Now, the linearized equations for  $\mathbf{x}, \mathbf{v}$  ovat

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\Delta\mathbf{x}} \\ \underline{\Delta\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta\mathbf{x}} \\ \underline{\Delta\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ n_a \end{bmatrix},$$

where  $M$  is the earlier derived (for a central force field, Eq. (3.5)) *gravity gradient tensor*,  $I$  is the  $3 \times 3$  unit matrix, and  $n_a$  is here introduced as the *dynamic noise* of satellite motion.

How do we model the behaviour of the satellite clock  $\underline{\Delta t}$ ? Typically this is done as a *random walk* process. As follows:

$$\frac{d}{dt}\underline{\Delta t} = n_t. \quad (4.5)$$

Modelling the tropo- and ionosphere is trickier. Note that we are here talking about the *slant delay* due to these atmospheric components *along the satellite-receiver path*, and most of the change in this delay will be due *not* to physical atmospheric changes, but rather, satellite motion causing the path to move to a different place in the atmosphere.

First order Gauß-Markov modelling is often used in this case, with a pragmatic choice of the time parameter  $\tau$ . This could be a few hours, i.e., a fraction of the time during which the GPS satellite is above the horizon. A significant improvement is obtained by using *residual* ionosphere or troposphere corrections, i.e., differences relative to some suitable *a priori* model. The notation becomes then  $\underline{\Delta d}_{\text{ion}}, \underline{\Delta d}_{\text{trop}}$ . For the ionosphere, this could be the model included with the satellite broadcast ephemeris (not very good), or the published IONEX models (not available in real time). For the troposphere, the standard Hopfield or Saastamoinen models may be considered.

*Yhteenvetona:*

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\Delta\mathbf{x}} \\ \underline{\Delta\mathbf{v}} \\ \underline{\Delta(\Delta t)} \\ \underline{\Delta d}_{\text{ion}} \\ \underline{\Delta d}_{\text{trop}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I & & & \\ M & & & & \\ & 0 & & & \\ & & -\frac{1}{\tau_{\text{ion}}} & & \\ & & & -\frac{1}{\tau_{\text{trop}}} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta\mathbf{x}} \\ \underline{\Delta\mathbf{v}} \\ \underline{\Delta(\Delta t)} \\ \underline{\Delta d}_{\text{ion}} \\ \underline{\Delta d}_{\text{trop}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ n_a \\ n_t \\ n_{\text{ion}} \\ n_{\text{trop}} \end{bmatrix}.$$

## Maa-aseman paikan määrittäminen

Lähtien tästä samasta yhtälöstä (4.4) muodostetaan eri havaintoyhtälö, seuraavalla tavalla:

$$\underline{p} = \sqrt{(x - \underline{X})^2 + (y - \underline{Y})^2 + (z - \underline{Z})^2} + c(\Delta t - \underline{\Delta T}) + d_{ion} + d_{trop} + m_p.$$

This is the observation equation for *geodetic positioning*. Here, the satellite orbital elements and clock are assumed known, i.e.,  $[x \ y \ z]^T$  and  $\Delta t$  are known or precisely computable from available ephemeris. Now the *state vector* is

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} \\ \underline{\mathbf{V}} \\ \underline{\Delta T} \\ d_{ion} \\ d_{trop} \end{bmatrix},$$

jossa  $\underline{\mathbf{V}} = \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{X}}$ . Here, the new problem is to model the behaviour of the  $\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{V}}$  of the ground station.

In case the ground station is fixed, we may choose as the model

$$\underline{\mathbf{V}} = 0,$$

siis yksinkertaisesti

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{X}} = 0.$$

In case we know that the stations are moving, but slowly and with constant velocity (e.g., plate tectonics, postglacial rebound), we may write

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} \\ \underline{\mathbf{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} \\ \underline{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

The Kalman filter will gradually improve the estimates  $\hat{\underline{\mathbf{X}}}, \hat{\underline{\mathbf{V}}}$  over time as more observations  $\underline{p}$  are being processed. Some existing GPS processing software (GYPSY/OASIS) uses Kalman filter in this way.

For *moving vehicles* (aircraft, e.g.) it gets more complicated. One could use the knowledge that the *acceleration* of the vehicle is bounded, and model it as a coloured noise (Gauß-Markov) process. According to Eq. (4.3), the variance of such a process is  $Q/2k$ , when the process equation is

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = -k\mathbf{A} + \mathbf{n}_A.$$

Olkoon  $\tau_A = 1/k$  be the time constant of the motion (typically something like a second, the time in which the vehicle can manoeuvre), and  $\alpha$  the typical scale of the accelerations occurring. By putting

$$\frac{Q}{2k} = \frac{1}{2}Q\tau_A = \alpha$$



we obtain for the variance of the driving noise  $\mathbf{n}_A$ :

$$Q = \frac{2\alpha}{\tau_A}.$$

Näin saadaan täydelliseksi dynaamiseksi yhtälöksi:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\alpha}{\tau_A} \mathbf{n}_1 \end{bmatrix},$$

where  $\mathbf{n}_1$  stands for “unit variance white noise”, 3-vectorial in this case.

Both  $\alpha$  and  $\tau_A$  will depend on the kind of vehicle we are considering. Large  $\alpha$  and short  $\tau_A$  is often referred to as a “high dynamic” environment, which is challenging for designing GPS receivers.

## Kellon mallinnuksesta

Kellot tyypillisesti mallinnetaan random walk -prosesseina, ks. kaava (4.5):

$$\frac{d}{dt} \underline{c} = \underline{n}_c,$$

where now  $\underline{c}$  is the time error, i.e., the difference between clock reading and “true” time. (We changed the notation in this section in order to prevent later mix-ups.)

From Eq. (2.5) we know that the autocovariance of random walk is

$$A_c(t_1, t_2) = Q(t_1 - t_0),$$

with  $Q$  the variance of the white noise process  $\underline{n}_c$ , and  $t_0$  some starting time at which we have an exact value for  $\Delta t$ . We see that the variance grows linearly with time.

Let us compute the *difference* between two values  $\underline{\delta c} \equiv \underline{c}(t_2) - \underline{c}(t_1)$ . The *variance* of this difference is

$$\begin{aligned} \text{Var}(\delta c) &= \text{Var}\{c(t_2)\} + \text{Var}\{c(t_1)\} - 2\text{Cov}\{c(t_1), c(t_2)\} = \\ &= Q(t_2 - t_0) + Q(t_1 - t_0) - 2Q(t_1 - t_0) = \\ &= Q(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

as was to be expected<sup>3</sup>. Obviously also, the *expected value* of  $\underline{\delta c}$  vanishes:

$$E\{\underline{\delta c}\} = 0.$$

Nyt oletetaan, että on aikasarja joka koostuu arvoista

$$c(t_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

jossa vakio

$$\delta t = t_{i+1} - t_i.$$

---

<sup>3</sup>Why?

Silloin voidaan näyttää, että ilmaisulla

$$AV_{\delta t}(\underline{c}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} [\underline{c}(t_{i+1}) - \underline{c}(t_i)]^2 \quad (4.6)$$

on odotusarvo, ja ilmaisu *siis estimoi harhattomasti*,  $Q\delta t$ . Tämä empiirisesti lasketavissa oleva suure on nimeltään Allan-varianssi, David W. ALLANIN mukaan (<http://www.allanstime.com/AllanVariance/>)<sup>4</sup>. For true random walk behaviour,  $Q\delta t$ , and thus  $AV_{\delta t}(\underline{c})$ , should be strictly proportional to  $\delta t$ , and  $Q$  follows as the proportionality constant.

## Kokonaislukutuntemattomien ratkaisemisesta

Voimme kirjoittaa kantoaaltovaiheen havaintoyhtälö seuraavasti (metriset yksiköt):

$$P = \rho + c(\Delta t - \Delta T) + D_{\text{ion}} + D_{\text{trop}} + \lambda N. \quad (4.7)$$

Here,  $N$  identifies the *ambiguity*, an integer value identifying the number of whole wavelengths that cannot be determined from carrier phase measurements alone.

The way to handle the ambiguity in a Kalman filter may be to introduce an ambiguity unknown  $\underline{N}$  to the state vector, but make it a real-valued state initially. As the filter progresses in time, the state variance attached to  $\underline{N}$  will become smaller and smaller, until it become possible to identify the real-valued ambiguity with confidence with a single integer value.

*Note*, however, that in a practical situation you will not have just one equation (4.7), but as many as there are useable GPS satellites in the sky, i.e., 4-12. This means that we will have not one, but several  $\underline{N}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , with  $n$  the number of satellites. This set of ambiguities will have a *variance-covariance matrix* of size  $n \times n$ . Now one should analyse if the whole *set* of  $\underline{N}_i$  lies close enough to a set of integer values, which forms a grid of points in the abstract vector space  $\mathbb{R}^n$ . “Close enough” should be understood in terms of this variance-covariance matrix. Generally, this resolution of all ambiguities together will succeed well before any single one will be resolved successfully. Sophisticated algorithms have been developed for this – e.g., the LAMBDA technique (<http://www.lr.tudelft.nl/live/pagina.jsp?id=acd3da86-7b14-44e7-9de2-0d04c7c1a316&lang=en>).

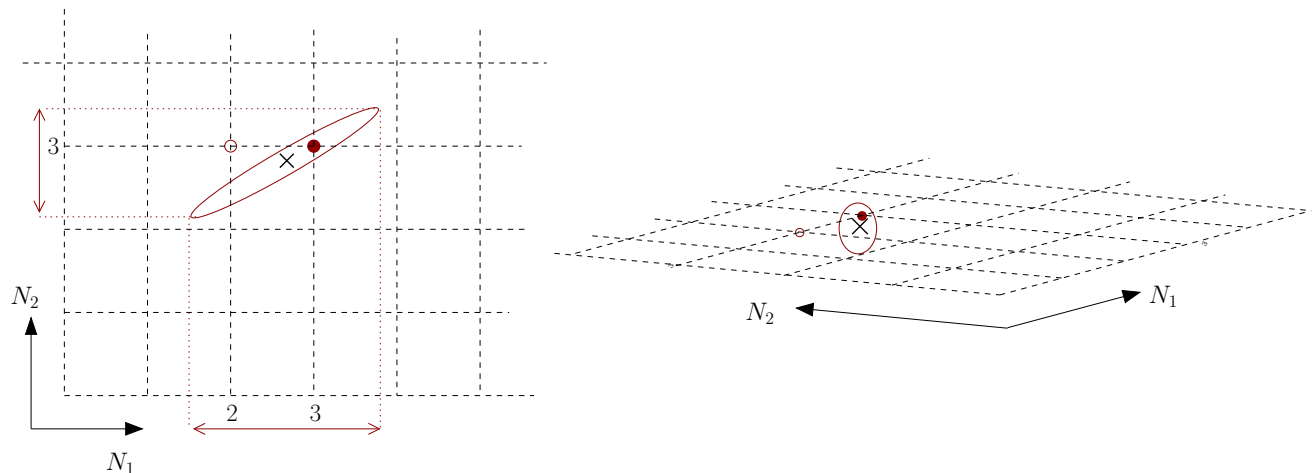
## 4.4 Esimerkkejä

### Kalman-suodatin (2)

**Kysymys:**

Teollisuuskoneessa pyörii pyörä, jonka säde on  $r$ . Se pyörii kulmanopeudella  $\omega(t)$ , missä  $t$  on aika. Hetkellinen kulmanopeus vaihtelee satunnaisesti: kulmakiiktyvyydellä on ”valkoisen kohinan” ominaisuudet.

<sup>4</sup>Undoubtedly students of spatial information analysis will recognise this as very similar to the *semi-variogram* used in connection with the Kriging technique.



(Left) Monen kokonaistuntemattoman ratkaiseminen yhdessä toimii paremmin kuin tehdä se yksitellen. Yksitellen-menetelmä ei osaa ratkaistaa  $N_1$  arvoksi 3, kun taas yhdessä-menetelmä ratkaistaa  $(N_1, N_2)$  arvopariksi  $(3, 3)$ .

(Right) multiple  $N_i$  variance ellipsoids are often very elongated “cigars” as depicted. In the LAMDA method, the ambiguities are transformed to integer linear combinations that change the error ellipse to (almost) a circle. In this picture, the correct solution is easily seen to be the one nearest to the point  $(N_1, N_2)$ .

1. Kirjoita tämän järjestelmän *tilavektori*. Montako alkiota tarvitaan?
2. Kirjoita järjestelmän *dynaaminen malli*.
3. Pyörän reunaan on kiinnitetty heijastusprisma mittauksia varten. Pyörähdysliikettä seurataan laseretäisyysmittauksen avulla. Mittauslaite on kaukana koneesta pyörän tasossa.  
Kirjoita *havaintomalli*.
4. Linearisoi havaintomalli.

**Vastaus:**

1. Tämän järjestelmän tilavektori sisältää paikkakulman  $\alpha(t)$ . Kuitenkin on annettuna, että *kulmakiikhtyvyys*  $\frac{d}{dt}\omega(t)$  on luonteeltaan valkoinen kohina. Kysymyksessä 2 tullaan näkemään, että siksi on hyvä idea sisällyttää myös kulmanopeus tilavektoriin.

Näin saadaan tilavektoriksi:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}.$$

2. Kalman-suodattimessa, *dynaaminen malli* on yhtälöryhmä joka on muotoa

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = F(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{n},$$

jossa  $\underline{x}$  is the system's state vector and  $\underline{n}$  is the dynamical noise vector. Meidän tapauksessamme meillä on yllä annettu tilavektori. Kirjoitetaan

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_\omega \end{bmatrix},$$

jossa ensimmäinen kaava  $\frac{d}{dt}\underline{\alpha} = \underline{\omega}$  ilmaisee kulmanopeuden  $\omega$  määritelmää, ja toinen yhtälö  $\frac{d}{dt}\underline{\omega} = \underline{n}_\omega$  ilmaisee sitä, että kulmakiiktyvyydellä on valkoisen kohinan ominaisuudet.

Havaitsemme, että löytynyt dynaaminen malli on *lineaarinen*.

3. Jos havaitaan kaukaiselta etäisyyttä pyörän reunaan kiinnitettyyn prismaan, voimme kirjoittaa havaintoyhtälöä:

$$\underline{\ell} = d + r \cos \underline{\alpha} + \underline{m}$$

(jos lasketaan  $\alpha$  prisman asemasta, joka on kauimmas havaintolaitteesta). Tässä  $d$  on etäisyys laitteen ja pyörän keskipisteen välillä (Voimme yksinkertaisuuden vuoksi olettaa, että se tunnetaan. Ellei, tulee  $\underline{d}$ :stä tilavektorin alkio dynaamisella yhtälöllä  $\frac{d}{dt}\underline{d} = 0$  – sivuhuomautus.)

4. Tämä malli on epälineaarinen, koska havaintosuureen riippuvuus tilavektorista on kosini.

Linearisoidaan seuraavalla tavalla: määritä keskenään yhteensopivia likiarvoja joilla

$$\ell_0 = d + r \cos \alpha_0$$

ja vähentää tämä yllä olevasta, mikä antaa (Taylor-kehitemä ensimmäiselle, lineaariselle termille suureessa  $\Delta\alpha$ ):

$$\underline{\Delta\ell} = r \left. \frac{\partial}{\partial\alpha} \cos \alpha \right|_{\alpha=\alpha_0} \cdot \underline{\Delta\alpha} + \underline{m},$$

jossa on käytetty loogiset määritelmät  $\Delta\ell = \underline{\ell} - \ell_0$  ja  $\Delta\alpha = \underline{\alpha} - \alpha_0$ .

Osittaisderivoinnin suorittaminen antaa

$$\underline{\Delta\ell} = -r \sin \alpha_0 \underline{\Delta\alpha} + \underline{m},$$

mikä on lineaarinen standardi Kalman havaintoyhtälö tyyppi

$$\underline{\ell} = H\underline{x} + \underline{m},$$

jos kirjoitetaan muodollisesti

$$\begin{aligned} \underline{\ell} &= [\underline{\Delta\ell}], \\ H &= \begin{bmatrix} -r \sin \alpha_0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \underline{x} &= \begin{bmatrix} \underline{\Delta\alpha} \\ \underline{\Delta\omega} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## Kalman-suodatin (3)

Kysymys:

1. Kirjoita laskuvarjohyppäjän dynaamiset yhtälöt yhdessä ulottuvuudessa (vain korkeuskoordinaatti  $z$ ). Painovoimakiihtyvyys  $g$  on vakio, kitkan aiheuttama jarrutuskihtyvyys on verrannollinen putoamisnopeuteen ja ilmatiheyteen, jonka kaavaksi voi kirjoittaa

$$\rho = \rho_0 e^{-z/\sigma}$$

(vakio  $\sigma$  on ilmakehän skaalakorkeus,  $\rho_0$  merenpinnan ilmatiheys).

2. Hyppääjään kiinnitetään heijastintarra mittauksia varten. Maassa oleva takymetri mittaa etäisyyttä tähän heijastimeen. Vaakaetäisyys takymetrin ja laskeutumipaikan välillä on annettu. Hyppääjä tulee suoraan alas, tuulta ei ole. Kirjoita *havaintomalli*.

Vastaus:

1. Dynaaminen malli on ( $k$  vakio<sup>5</sup>):

$$\frac{d^2}{dt^2} z = -g + k \dot{z} \rho + \underline{n} = -g + k \dot{z} \rho_0 e^{-z/\sigma} + \underline{n}.$$

Määritetään tilavektoriksi  $\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}^T$  ja saadaan dynaamiseksi malliksi (ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ -g + k \dot{z} \rho_0 e^{-z/\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}.$$

Tämä on epälineaarinen; jos kirjoitetaan

$$\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\Delta z} \\ \underline{\Delta \dot{z}} \end{bmatrix},$$

jossa (täysin laskettavissa jos alkuehdot annettuna)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_0 \\ -g + k \rho_0 \dot{z}_0 e^{-z_0/\sigma} \end{bmatrix},$$

saadaan (muista, että (linearisointi)  $\Delta(\dot{z} e^{-z/\sigma}) \approx -\frac{\dot{z}}{\sigma} e^{-z/\sigma} \Delta z + e^{-z/\sigma} \Delta \dot{z}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\Delta z} \\ \underline{\Delta \dot{z}} \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} \underline{\Delta \dot{z}} \\ -\frac{k \rho_0}{\sigma} \dot{z}_0 e^{-z_0/\sigma} \underline{\Delta z} + k \rho_0 e^{-z_0/\sigma} \underline{\Delta \dot{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k \rho_0}{\sigma} \dot{z}_0 e^{-z_0/\sigma} & k \rho_0 e^{-z_0/\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta z} \\ \underline{\Delta \dot{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dynaamisen mallin linearisoitu versio.

<sup>5</sup>Negatiivinen vakio, koska  $\dot{z}$  on myös negatiivinen jos  $z$  kasvaa ylöspäin

2. Olkoon vaaka-etäisyys laskuhyppääjän laskeutumispaikan ja takymetrin välillä  $\ell$ . Silloin mitattu etäisyys on

$$s = \sqrt{\ell^2 + z^2}$$

ja havaintoyhtälö

$$\underline{s} = \sqrt{\ell^2 + \underline{z}^2} + \underline{m}.$$

Linearisointi ( $s = s_0 + \Delta s$  jossa  $s_0 = \sqrt{\ell^2 + z_0^2}$ ) antaa

$$\underline{\Delta s} = \frac{z_0}{s_0} \underline{\Delta z} + \underline{m} = \begin{bmatrix} \frac{z_0}{s_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta z} \\ \underline{\Delta \dot{z}} \end{bmatrix} + \underline{m}.$$

## 5.1 Periaate

Inertianavigaatioissa mitataan jatkuvasti seuraavat suuret:

1. Kappaleen (kulkuneuvon) kolmiulotteinen *kiikhtyvyys*:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}'(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 x'(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 y'(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 z'(t)}{dt^2} \end{bmatrix};$$

tässä  $\mathbf{x}' \equiv [x'(t) \ y'(t) \ z'(t)]^T$  on kappaleen kolmiulotteiset koordinaatit *kappalekohtaisessa* koordinaatistossa.

2. *Kulkuneuvon asento*:

$$R = R_3(\alpha_3) R_2(\alpha_2) R_1(\alpha_1) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix},$$

eli globaalisten ja kappalekohtaisten koordinaattien välinen muunnosmatriisi:

$$\mathbf{x}'(t_0) = R(t_0) \mathbf{x}(t_0),$$

matkan alkuhetkellä  $t_0$ , missä  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{x}'$  ovat globaaliset (usein inertiaaliset) ja kappalekohtaiset koordinaatit. Asentoa kuvaa *kolme tuntematonta*,  $\alpha_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , jotka ovat ajan funktioina ja muuttuvat kulkuneuvon liikkeiden mukana.

Ennen matkan alkamista matriisi  $R(t_0)$ , eli vastaavasti asentokulmat  $\alpha_i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , on saatava määritetyksi riittävällä tarkkuudella. Matkan aikana asennon muutokset  $\frac{d\alpha_i}{dt}$  mitataan kolmen *gyroskoopin* avulla, ks. myöhemmin, ja integroidaan hetkellisen asennon  $\alpha(t)$ , ja näin ollen  $R(t)$ , saamiseksi.

Yhteensä mitataan jatkuvasti *kuusi* parametriä, kolme lineaarikiiktyvyyttä ja kolme kulmanopeutta.

Inertialaitteen tietojenkäsittely-yksikkö *integroi* nyt kiihtyvyydet  $\mathbf{a} = \left[ \frac{d^2x}{dt^2} \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{d^2z}{dt^2} \right]^T$  muunnoksen

$$\mathbf{a} = R^{-1}\mathbf{a}'$$

jälkeen kolmessa ulottuvuudessa, *kaksi kertaa*. Ensimmäinen integraatio tuottaa kappaleen (kulkuneuvon) *nopeusvektorin*, toinen kappaleen *paikan*.

Seuraavasti:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{\theta} \mathbf{a}(\tau) d\tau \right] d\theta, \quad (5.1)$$

missä  $\mathbf{x}(t_0)$  ja  $\mathbf{v}(t_0)$  ovat *integroitivakioita*.

Kuten kaavasta (5.1) näkyy, huononee paikan  $\mathbf{x}(t)$  tarkkuus aikaa myöten, koska kiihtyvyyssmittaukset  $\mathbf{a}(\tau)$  ovat epätarkkoja ja niiden sisältämä virhe kasautuu integroinnin kautta. Kasautuminen tapahtuu peräti kaksi kertaa päällekkäin, koska on kaksi sisäkkäistä integraalia.

Suosittu temppu inertianavigoinnin tarkkuuden säilyttämiseksi on säännöllisesti *pysähtyä* (“zero velocity update”). Silloin saadaan  $\mathbf{v}(t_1) = 0$ ,  $t_1 > t_0$  ja sisäinen (nopeus-) integraali alkaa uudelleen tunnetusta lähtöarvosta.

## 5.2 Inertialaitteen osat

Inertialaite sisältää seuraavia mittaavia osia:

1. Gyroskoopit (en. *gyroscopes*)
2. Kiihtyvyyssmittarit (*accelerometers*)

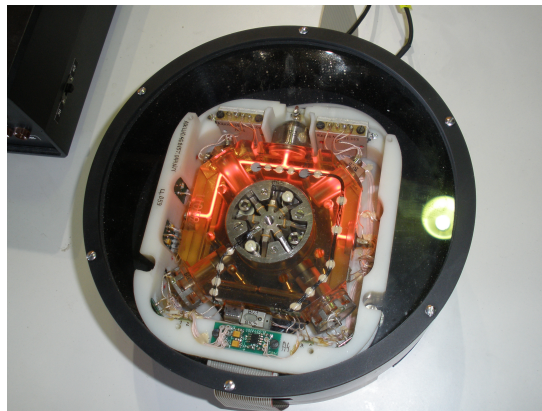
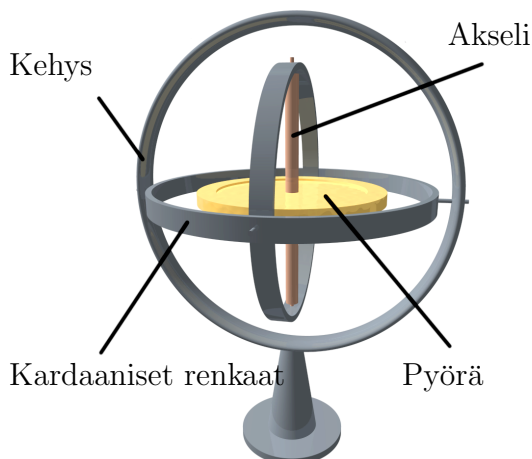
### Gyroskooppi

Gyroskooppi on nopeasti pyörivä hitauspyörä, joka yrittää olla muuttumatta pyörähdysakselinsa. Voimme kirjoittaa Eulerin kaavan seuraavasti:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (5.2)$$

missä





**Kuva 5.1:** Gyroskooppi. Oikealla rengaslaser-gyroskooppi ilmailua varten. Wikipedia

$\mathbf{N}$  vääntömomentti (en. *torque*)

$\mathbf{L}$  pyörähdysmomentti (*angular momentum*)

$\vec{\omega}$  pyörähdysnopeus (*angular velocity*)

$$J \quad \text{Inertiatensori: } J \equiv \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

( $3 \times 3$  -kokoinen matriisi! Tämä matriisi on symmetrinen ja positiivi definiitti)

Mitä nopeammin gyroskooppi pyörii, sitä enemmän vääntömomenttiä tarvitaan sen pyörähdysakselin kääntämiseksi.

Hyvän gyroskoopin rakentaminen on vaikea insinööritaide. Gyroskooppi koostuu pyörästä ja akselista, joka on laakeroitu molemmissa päissä pyörää ympäröivässä kehikössä eli *pöydässä*.

Ylläoleva kaava (5.2) voidaan muistaa analogian avulla Newtonin Toisen Liikelain kanssa:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

jossa  $\mathbf{F}$  on (lineaarinen) voima ja  $\mathbf{v}$  is the (linear) velocityon (lineaarinen) nopeus.  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  on *impulssi* eli liikemäärä.  $m$ , massa, vastaa inertiatensoriin  $J$  yllä, mutta on tässä tapauksessa skalaari. Koko aikaa oletetaan, että  $J$  (ja  $m$ ) on vakio. Oletus on luonnollinen hitauspyörän tapauksessa, muttei esim. koko maapallon tapauksessa, jonka muoto voi muuttua.

Kappaleen hitaustensoria  $J$  voidaan laskea:

$$J_{xx} = \iiint \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$J_{yy} = \iiint \rho(x, y, z) (x^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$J_{zz} = \iiint \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

$$J_{xy} = - \iiint \rho(x, y, z) xy dx dy dz,$$

$$J_{xz} = - \iiint \rho(x, y, z) xz dx dy dz,$$

$$J_{yz} = - \iiint \rho(x, y, z) yz dx dy dz.$$

Ilmeisesti tulos riippuu koordinaattijärjestelmän  $(x, y, z)$  valinnasta. *Origo* vaikuttaa suuresti: valitsemalla origo kaukana kappaleen ulkopuolella voidaan kasvattaa  $J$ :n elementit mielivaltaisen suuriksi! Siksi, kun puhutaan hitaustensorista kappaleen ominaisuutena, valitaan aina origo kappaleen massakeskipisteessä:

$$\mathbf{x}_{\text{com}} = \iiint \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV,$$

eli

$$x_{\text{com}} = \iiint \rho(x, y, z) x dx dy dz,$$

$$y_{\text{com}} = \iiint \rho(x, y, z) y dx dy dz,$$

$$z_{\text{com}} = \iiint \rho(x, y, z) z dx dy dz,$$

jonka jälkeen käytetään laskennoissa

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{com}}.$$

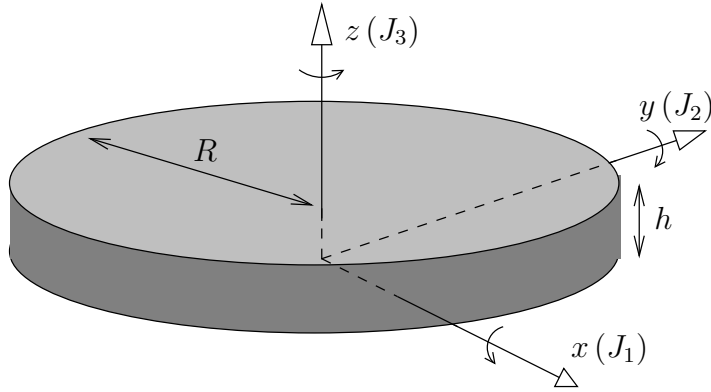
Akseleiden *orientaatiosta* puheenollen, symmetristä matriisia voidaan aina muuntaa koordinaatiston rotaation kautta *pääakseleihin*. Silloin inertiatensori muuttuu diagonaaliseksi

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}.$$

Alkiot  $J_i$  kutsutaan *hitausmomenteiksi*.

Sylinterille, jonka säde on  $R$ , on hitausmomentti sylinterin akselin ympäri

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^h \iint_{\text{ympyrä}} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= 2\pi h \rho \cdot \iint_{\text{ympyrä}} r^2 r dr = \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho h R^4 = \frac{1}{2} M R^2, \end{aligned} \tag{5.3}$$



Kuva 5.2: Gyroskoopipyörä ja sen hitausmomentit

jossa  $M = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h$  on kokonaismassa. Litteälle sylinterille ( $h$ , ja siis  $z$ , on pieni) voimme myös laskea

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \rho (y^2 + z^2) dy dx dz \approx \\
 &\approx \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \rho y^2 dy dx dz = \\
 &= \frac{h\rho}{3} \int_{-R}^{+R} \left[ (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx = \\
 &= \frac{2h\rho}{3} \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \\
 &= \frac{2h\rho}{3} \left[ x (5R^2 - 2x^2) \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{3}{8} R^4 \arctan \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right]_{-R}^{+R} = \\
 &= \frac{1}{4} h\rho \cdot R^4 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{4} (\pi\rho h R^2) R^2 = \frac{1}{4} M R^2. \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Samoin tietenkin  $J_2 = J_1 = \frac{1}{4} M R^2 = \frac{1}{2} J_3$ .

## Kiihtyvyyssmittari

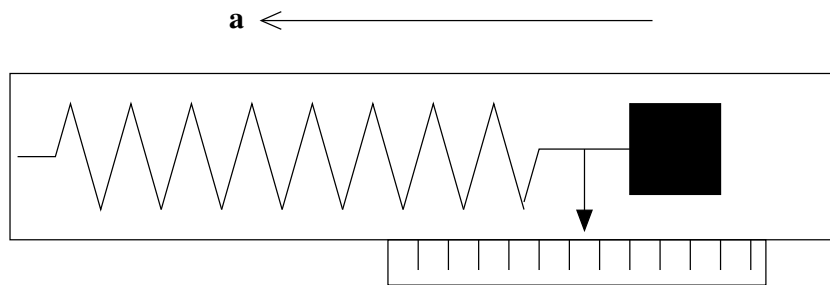
Alkeellinen kiihtyvyyssmittari voidaan helposti rakentaa yhdistämällä jousi, skaala ja koemassa. Jousen venytys on verrannollinen koemassaan sekä kiihtyvyyteen ja voidaan lukea skaalasta.

Automaattinen lukeminen on mahdollista esim. kapasitiivisesti taipiezo-anturin avulla<sup>1</sup>.

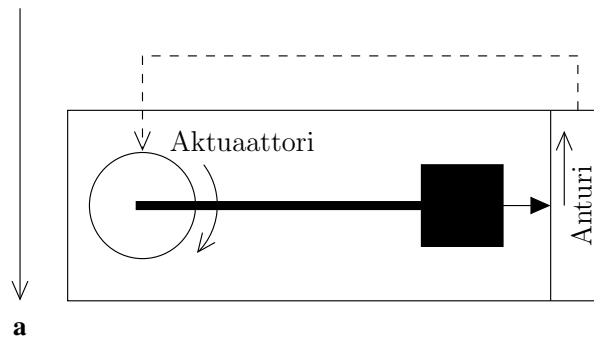
Kiihtyvyyssmittarit kiinnitetään samaan kehikköön mihin myös gyroskoopit on ripustettu. Mittausakselit tehdään mahdollisimman samansuuntaisiksi.

Modernit kiihtyvyyssmittarit ovat hyvin herkkiä, esim. 10 ppm. Jos ne perustuvat aineen elastisuuteen, ne vaativat huolellista kalibrointia aika ajoin. *Ne vanhenevat* (ns. *käynti*).

<sup>1</sup>Itse asiassa mikromekaaniset kiihtyvyyssantorit (MEMS) toimivat juuri tällä tavoin.



**Kuva 5.3:** Kiihtyvyyssmittarin periaate



**Kuva 5.4:** Heilurikihtyvyyssmittari

Halutut ominaisuudet ovat herkkyyden lisäksi *linearisuus* ja hyvä käyttäytyminen *kiihtyvyyden suuren vaihtelun* tai *vibraation* olosuhteissa (ohjuksen laukaisu!)

Vaihtoehtoinen kiihtyvyyssmittarityyppi on *heilurikihtyvyyssmittari*. Se koostuu massasta joka on epäkeskisesti kiinnitetty puomiin. Puomin poikkeama mitataan anturin avulla ja *nollataan* aktuaattorin avulla. Nollaus takaa lineaarista käyttäytymistä. Heilurikihtyvyyssmittareita käytetään korkeimman tarkkuuden laitteissa. Niillä ei ole käyntiä.

Inertianavigoinnin strategisen tärkeyden takia (ohjukset) hyvät kiihtyvyyssmittarit, kuten hyvät gyroskoopit, olivat kauan vaikeasti saatavilla ja kalliita. Nykyisin tilanne on parempi.

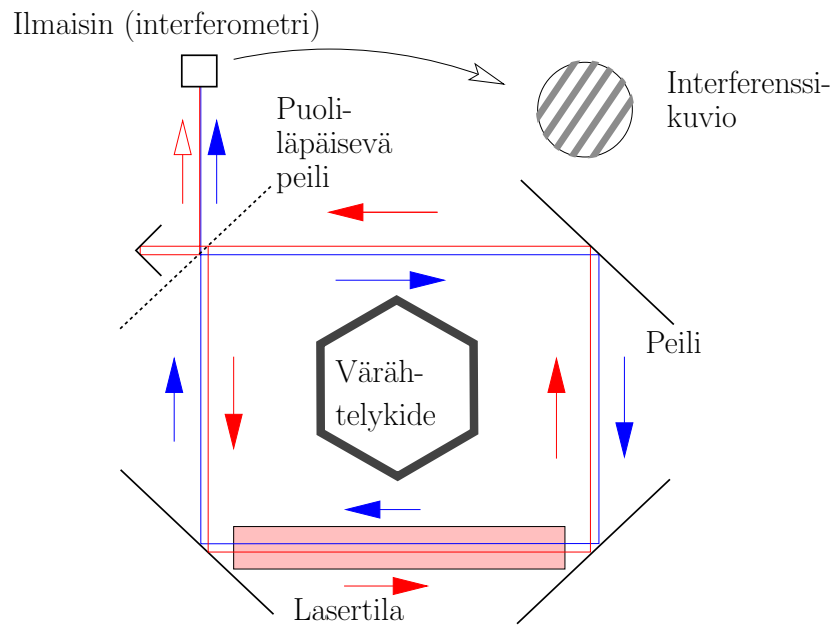
### 5.3 Toteutus

On olemassa kaksi hyvin erilaista lähestymistapaa, kun toteutetaan inertiamittausyksikkö:

1. Strapdown -ratkaisu
2. Stabilized platform -ratkaisu

#### Strapdown-ratkaisu

Strapdown-ratkaisussa gyroskooppialusta on kiinteästi kytkettynä kulkoneuvon runkoon. Kun kulkoneuvo kääntyy, gyroskoopin akselin päät painavat kehikkönsä vastaan voimalla,



**Kuva 5.5:** SAGNAC-interferometri

joka mitataan tarkasti voima-anturin avulla. Voimasta  $\mathbf{F}$  saadaan *vääntömomentti*  $\mathbf{N}$  seuraavan kaavan mukaan:

$$\mathbf{N} = \mathbf{F} \wedge \vec{\ell},$$

missä  $\vec{\ell}$  on gyroskoopin akselin pituus vektorina: “vääntö on voima kertaa varsi”. Symboli  $\wedge$  on ulkoinen vektoritulo.

Vaihtoehtoinen ratkaisu käyttää ns. *rengaslaser-gyroskooppia*, joka perustuu valon interferenssiin (SAGNAC-ilmiö, 1913). Laitteessa monokromaattinen laservalo kulkee renkaassa kahteen vastakkaiseen suuntaan. Ilman pyörehdysliike valo muodostaa “seisova aalto” missä noodit eivät liiku. Kuitenkin pienikin pyörehdysliike aiheuttaa noodien kulkeminen vastakkaiseen suuntaan renkaan nähden. Yksinkertainen tapa rakentaa rengaslaser käyttää kiinteitä peilejä; nykyisin käytetään usein pitkä valokuitu jota keritään tuhansia kertoja renkaan ympäri. Näin efekti monituhatkertaistuu ja herkkyys kasvaa. Nykyisin saavutettava herkkyys on luokkaa 0.00001 astetta tunnissa. (<http://www.mathpages.com/rr/s2-07/2-07.htm>).

## Stabilized platform -ratkaisu

Tässä ratkaisussa koko gyroskooppijärjestelmä on ripustettu kolmiakselisen, vapaasti kääntyvän kardanisen rengasjärjestelmän sisällä. Tämän ansiosta, vaikka kulkuneuvon asento vaihtelisi, kuitenkin gyroskooppinen kehikkö (gyroskooppipöytä) säilyttää asentoaan (inertiaalisessa) avaruudessa.

*Käytännössä käytetään usein inertiaalisen vertausjärjestelmän sijasta paikallista, kiinteään maahan kytkettyä vertausjärjestelmää. Gyroskooppien kolme akselit yritetään pitää samansuuntaisiksi toposentrisen akselikolmikon kanssa:*

1. Pohjoissuunta  $x$

2. Itäsuunta  $y$
3. Ylös-suunta  $z$

Päämäärän aikaansaamiseksi laitetaan sopivia vääntöjä gyroskooppien kehykseen vääntöaktuaattoreiden (*torquers*) avulla. Tarvittavat väännöt voidaan laskea analogisesti tai digitaalisesti laitteen paikan ratkaisemisen yhteydessä.

## 5.4 Inertianavigaatio kiinteän Maan järjestelmässä

Ks. Cooper [1987] s. 104-107 (hieman eri käsittelytapa)

### Maan pyörähdys

Voimme kirjoittaa inertiaalista paikkavektoria kiinteän maapallon mukana pyörivän järjestelmän paikkavektorin funktiona seuraavasti:

$$\mathbf{x}_i = R(\theta) \mathbf{x},$$

jossa  $\theta$  on tähtiaika. Sen aikaderivaatta  $\omega = \dot{\theta}$  on maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus. Matriisi

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Differentioimalla saa nopeudelle:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= R(\theta) \mathbf{v} + \dot{R}(\theta) \mathbf{x} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ &= R(\theta) \mathbf{v} + R(\theta) \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle, \end{aligned}$$

mikäli määritetään<sup>2</sup>

$$\vec{\omega} \equiv \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jos nyt valitaan sopivasti  $t = \theta = 0$ , saadaan

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \vec{\omega} \wedge \mathbf{x}.$$

<sup>2</sup>... koska mielivaltaiselle  $\mathbf{x}$ -vektorille

$$\dot{R}(\theta) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} -x \sin \theta - y \cos \theta \\ x \cos \theta - y \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Toistetaan differentioiminen saadaksemme kiihtyvyydet:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_i &= R(\theta) \mathbf{a} + \dot{R}(\theta) \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \{R(\theta) \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle\} = \\ &= R(\theta) \mathbf{a} + R(\theta) \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} \rangle + \left( R(\theta) \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} \rangle + \dot{R}(\theta) \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle \right) = \\ &= R(\theta) \{ \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} \rangle + \langle \vec{\omega} \wedge \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle \}.\end{aligned}$$

Laittamalla taas  $\theta = 0$  antaa

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} \rangle + \langle \vec{\omega} \wedge \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle \rangle.$$

## Kiihtyvyys

Ongelmana on, että pyörivällä Maapallolla yllämainittu kolmiulotteinen koordinaattijärjestelmä  $(x, y, z)$  ei ole inertiaalinen. Voimme kirjoittaa:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} \rangle + \langle \vec{\omega} \wedge \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle \rangle,$$

missä

- $\mathbf{a}_i$  kiihtyvyys inertiaalisessa järjestelmässä
- $\mathbf{a}$  kiihtyvyys Maan pintaan nähden, "mukana pyörivässä" eli kiinteän Maan järjestelmässä
- $\vec{\omega}$  Maan pyörähdysvektori (*vakio*)
- $\mathbf{v}$  nopeus kiinteän Maan järjestelmässä
- $\mathbf{x}$  kulkuneuvon geosentrinen paikka

Ylläolevassa kaavassa oikean puolen toinen termi on ns. *Coriolis-voima* ja kolmas termi on *keskipakoisvoima*.

ja myös

$$\begin{aligned}R(\theta) \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \omega \begin{bmatrix} -x \sin \theta - y \cos \theta \\ x \cos \theta - y \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

eli sama tulos. Näin voimme tehdä *johtopäätös*:

Rotaatioliikkeen vaikutus vektorin aikaderivaattaan voidaan esittää rotaatiovektorin  $\vec{\omega}$  ristitulona sen vektorin kanssa.

## Inertianavigaation perusyhtälö

Lineaariset kiihtyvyydsmittarit mittaavat käytännössä kulkuneuvon kiihtyvyyden ja paikallisen painovoiman *yhteisvaikutus*. Toisin sanoen, mitattu kiihtyvyys on

$$\mathbf{t} = \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} \rangle + \langle \vec{\omega} \wedge \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle \rangle - \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \quad (5.5)$$

missä

$\mathbf{t}$  mitattu kiihtyvyydsvektori (kolme komponenttia)

$\mathbf{g}_i$  gravitaation (vetovoiman) kiihtyvyyden paikan  $\mathbf{x}$  funktiona.

Usein oletetaan että  $\mathbf{g}$  voidaan laskea suoraan Newtonin gravitaatiokaavasta:

$$\mathbf{g}_i \approx -GM \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3},$$

mutta myös monimutkaisemmat mallit on käytetty, mm. pyörähdysellipsoidinen normaali-kenttä (missä Maapallon litistyneisyyden ja pyörähdysliikkeen vaikutus on mukana) ja jopa hyvin yksityiskohtaiset Maan painovoimakentän mallit, kuten EGM96 (Earth Gravity Model 1996).

Usein kirjoitetaan vielä

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}_i - \langle \vec{\omega} \wedge \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle \rangle,$$

jossa  $\mathbf{g}$  on *painovoimavektori*, gravitaation ja keskipakoisvoiman yhteisvaikutus. Silloin

$$\mathbf{t} = \mathbf{a} + 2 \langle \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} \rangle - \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (5.6)$$

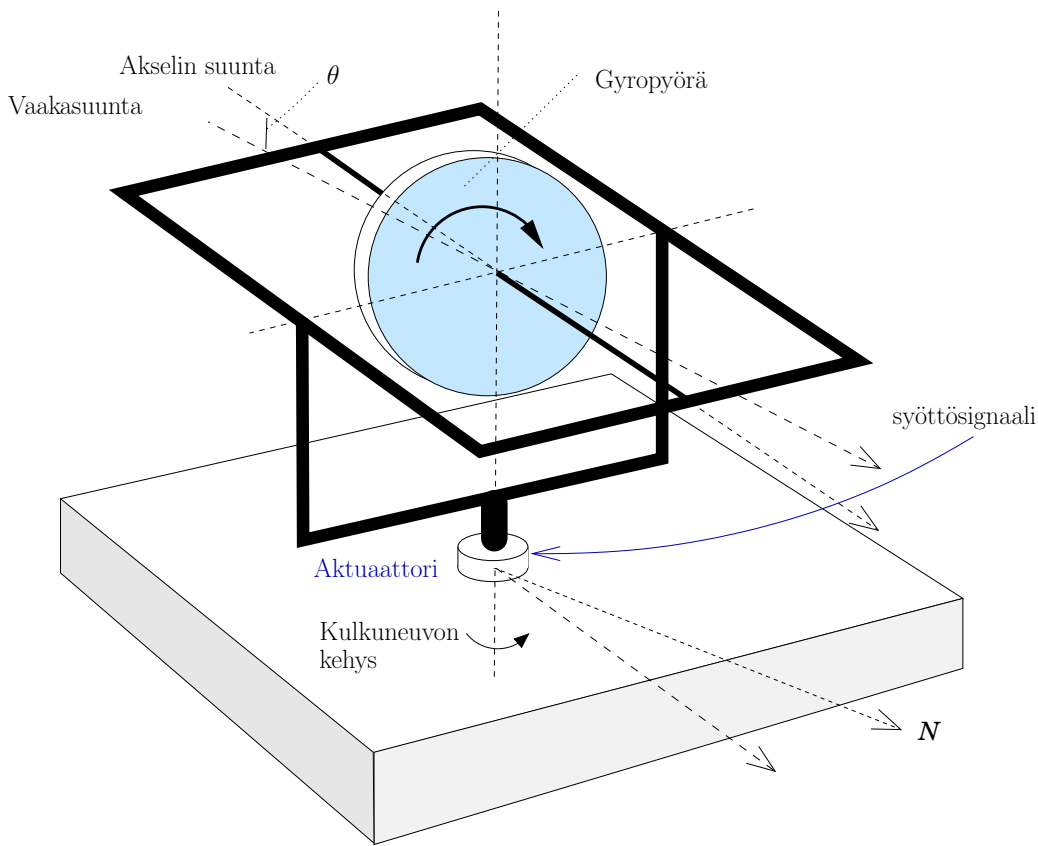
Kaavan (5.6) avulla voidaan kiihtyvyydsmittauksista  $\mathbf{t}$  ja paikasta  $\mathbf{x}$  sekä nopeudesta  $\mathbf{v}$  laskea (dynaamisesti, siis “on the fly”) kiihtyvyys  $\mathbf{a}$  kiinteän Maan järjestelmässä, ja sen jälkeen integroimalla ensin  $\mathbf{v}$ , ja sitten  $\mathbf{x}$ , molemmat myös kiinteän Maan järjestelmässä. Kaavat (5.5, 5.6) kutsutaan *inertianavigoinnin perusyhtälöksi*.

Huomaa, että kiinteän Maan järjestelmässä Maan pyörähdysliike aiheuttaa kiihtyvyydsmittareiden tuntaman painovoimavektorin hidasta kääntymistä itä-länsisuunnassa gyroskooppien määrämien inertiaalisuuntien suhteen, vaikka kulkuneuvo seisoo maassa. Tätä ilmiötä käytetään hyväksi gyroskooppikehikön orientoimiseksi oikein paikalliseen pohjoisuuntaan nähden (eli vastaavasti, paikallisen pohjoisuunnan ratkaisemiseksi gyroskooppien kehikköjärjestelmässä!) ennen esim. lentokoneen lennon alkua tai raketin laukaisua. Kiihtyvyydsmittarit toisaalta antavat heti paikallisen painovoiman eli vertikaalin suunnan. Yhdessä kaksi suuntaa riittää koko kehikön orientoimiseksi – paitsi pohjois- tai etelänavalla.

## 5.5 Yhden akselin vakaa pöytä

Tarkastetaan ensin *vakaa pöytä*, ts. gyroskooppi joka on kiinnitetty kehykseen, jota pidetään paikallisen horisontin mukaisesti orientoituna. Vakaan pöydän ratkaisussa käytetään *palautesilmukka* gyroskoopin akselin suunnan ohjaamiseksi siten, että sen, ja sen





**Kuva 5.6:** Vakaa pöydän periaate. Syöttösignaali aiheuttaa prekessioliikkeen, joka pitää gyron akseli samansuuntaisena vaakatasossa

sisältävän sisäisen renkaan, suunta seuraa vaakatasoa. Tämä tapahtuu sillä tavalla, että pöydän pyörittäminen vaakatasossa (pysty akselin ympäri) aiheuttaa gyroskoopin *prekessio-ilmion*. Gyroskoopin pyöri akseli kääntyy alas- tai ylöspäin. Vakaa pöytä edellyttää sopivan sensorin olemassaoloa, joka huomaa, että gyron akseli poikkeaa vaakatasosta (kulma  $\theta$ ), ja lähettää signaali palautesilmukan kautta pysty akselin moottorille eli *aktuaattorille* (ks. kuva 5.6). Lisää tästä myöhemmin.

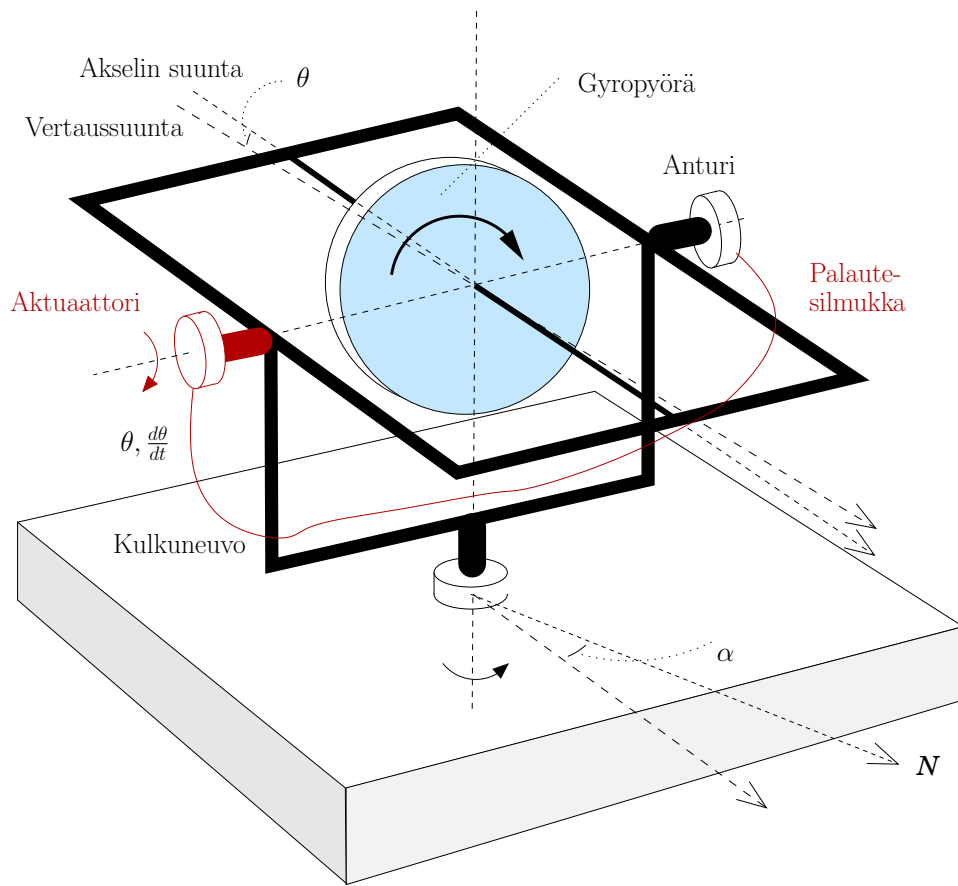
Kirjoitetaan kaavana, että vääntö pysty akselin ympäri tehdään verrannolliseksi gyroskoopin havaittuun *akselin poikkeamaan*  $\theta$  vaakatasosta. Silloin tämän poikkeaman  $\theta$  muutos ajassa on

$$\frac{d\theta}{dt} = -k_1\theta$$

eli

$$\theta(t) = \theta(t_0) e^{-k_1(t-t_0)},$$

eli poikkeama menee eksponentiaalisesti nolleen. Virittämällä palautesilmukan vakio (eli vastaavasti, kaavan vakio  $k_1$ ) saadaan tämä tapahtumaan sopivan nopeasti.



**Kuva 5.7:** Gyrokompassin periaate. Palautesilmukka tuottaa prekessioliike, joka saa gyron akseli kääntymään pohjoiseen

## 5.6 Gyrokompassi

Gyrokompassin kuvassa näkyvä palautesilmukka taas käyttää hyväksi *maan pyörimisliike*. Koska maa pyörii akselinsa ympäri, kallistuu horisonttitaso koko ajan. Itäinen horisontti vajoaa, läntinen horisontti nousee. Vapaasti ripustettu, pyörivä gyroskooppi, joka olisi alunperin vaakatasossa, ei olisi enää jonkun ajan jälkeen.

Jos maan rotaationopeus on  $\omega$ , on kulman  $\theta$  aikaderivaatta tämän ilmiön johdosta

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \cos \varphi \sin \alpha,$$

jossa  $\varphi$  on leveysaste ja  $\alpha$  gyroskoopin akselin atsimuti.

Palautesilmukka ottaa nyt sensorista kulman  $\theta$  aikaderivaatta ja syöttää se sopivasti vahvistettuna aktuaattoriin. Koska tämä yrittää kääntää gyroskoopin akseli pystysuuntaan, on lopputulos prekessio pystyakselin ympäri:  $\alpha$  muuttuu. Kirjoitetaan kaava

$$\frac{d\alpha}{dt} = -k_2 \frac{d\theta}{dt} = -k_2 \omega \cos \varphi \sin \alpha.$$

Jos  $\alpha$  on riittävän pieni, on  $\sin \alpha \approx \alpha$  ja ratkaisu on

$$\alpha(t) \approx \alpha(t_0) e^{-k_2 \omega \cos \varphi (t-t_0)}.$$

Eli  $\alpha$  menee eksponentiaalisesti noltaan ja *gyroskoopin akseli pohjoiseen*. Näin olemme keksineet *gyrokompassin*. Tämä tietysti edellyttää, että pöytä pysyy vaakatasossa, ja että koko laite pysyy samassa paikassa (tai käytännössä liikkuu hitaasti, esim. laiva.)

Toinen tapa rakentaa toimiva gyrokompassi käyttää itse  $\theta$  eikä sen aikaderivaatta; jos kirjoitetaan

$$\frac{d\alpha}{dt} = -k_3\theta,$$

saadaan differentioimalla

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k_3\frac{d\theta}{dt} = -k_3\omega \cos\varphi \sin\alpha \approx -k_3\omega \cos\varphi \cdot \alpha.$$

Tämä on *harmonisen värähtelijän* kaava, jonka eräät ratkaisut ovat

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \cos\left(t\sqrt{k_3\omega \cos\varphi}\right), \\ \alpha(t) &= \sin\left(t\sqrt{k_3\omega \cos\varphi}\right).\end{aligned}$$

Valitettavasti nämä ratkaisut ovat periodisia eivätkä konvergoi pohjoisuuntaan ( $\alpha = 0$ ). Paras ratkaisu saadaan yhdistämällä  $\theta$  ja  $\frac{d\theta}{dt}$  seuraavalla tavalla:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k_2\omega \cos\varphi \frac{d\alpha}{dt} - k_3\omega \cos\varphi \cdot \alpha,$$

jolloin differentiaaliyhtälö on

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega \cos\varphi \left[ k_2 \frac{d\alpha}{dt} + k_3\alpha \right] = 0.$$

Tämä on yleinen toisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö. Riippuen kertoimista  $k_2$  ja  $k_3$  sillä on periodisia, eksponentiaalisesti (yli-)vaimennettuja ja *kriittisesti vaimennettuja* ratkaisuja<sup>3</sup>. Viimemainittu on paras kompassin toimivuuden kannalta.

Jos kirjoitetaan *värähtelyajan käänneisluvuksi*  $\tau = \sqrt{k_3\omega \cos\varphi}$ , ja

$$k_2 = \frac{2\tau}{\omega \cos\varphi},$$

saadaan

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\tau \frac{d\alpha}{dt} + \tau^2 = 0$$

ja tässä tapauksessa yleinen ratkaisu on

$$\alpha(t) = (a + bt)e^{-\tau t},$$

jossa  $a$  ja  $b$  ovat mielivaltaisia (alkuehtojen antamia) vakioita.

Usein  $k_3$  (harmoninen palautuskerroin) toteutetaan kytkemällä jäykästi gyroskoopin sisäiseen renkaaseen puolirengas, joka ulottuu alaspäin ja johon on kiinnitetty paino. Se yrittää siis vetää gyroskoopin pyörähdysakseli vaakatasoon.  $k_2$  (vaimennuskerroin) puolestaan toteutetaan perinteisesti käyttämällä tahmea neste sisäisen renkaan laakereissa.

<sup>3</sup>Ks. <https://en.wikipedia.org/wiki/Damping>.

## 5.7 Schulerin heiluri

### Periaate

*Schuler*<sup>4</sup>*in heiluri* on heiluri, jonka pituus on sama kuin Maan säde eli  $R = 6378$  km. Jos sellainen heiluri olisi fyysikaalisesti mahdollista, esim. massana pitkän sauvan päässä, sen periodi olisi (yhden  $g$ :n kentässä!)

$$T_S = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

missä  $g$  on painovoima Maan pinnalla.

“Sattumalta” tämä periodi,  $T_S = 84.4$  min, on sama kuin Maan pinnan tuntumalla Maata kiertävän satelliitin rataperiodi.

Vaikka näin pitkää heiluria ei voida rakentaa, on kuitenkin hyvinkin mahdollista rakentaa heiluri jonka periodi on  $T_S$ . Esimerkiksi laaja kappale jonka ripustuspiste on hyvin lähellä sen massakeskipistettä.

Olkoon yksinkertaisen heilurin (eli koemassa massattoman tangon päässä) pituus  $\ell$ . Jos se heiluu pois vertikaalista kulman  $\theta$  verran, on takaisin vetävä voima

$$F = -mg \sin \theta,$$

ja kun sen massa on  $m$ , seuraa, että kiihtyvyys on

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mg \sin \theta}{m} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{\ell}\theta,$$

värähtely-yhtälö jonka eräs ratkaisu on

$$\theta(t) = \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right),$$

josta seuraa periodiksi

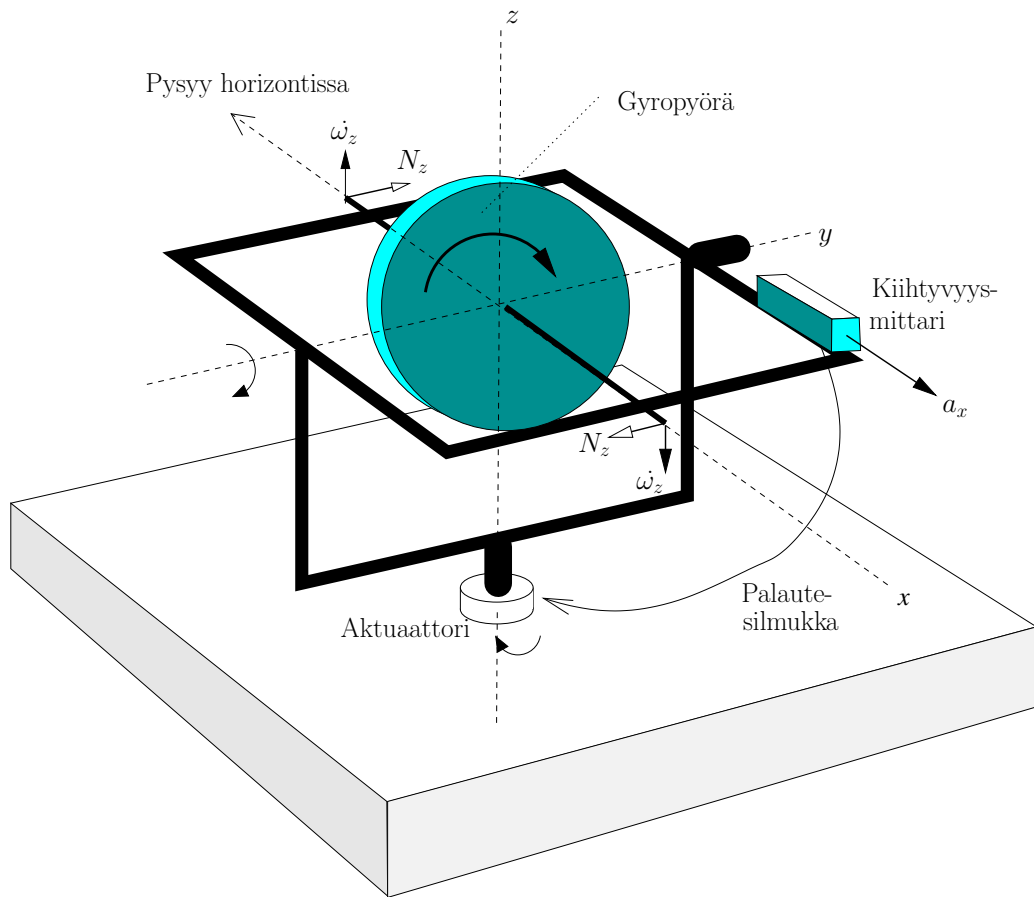
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

### Heiluri vaunussa

Jos tätä heiluria laitetaan vaunuun joka kiihtyy lineaarisesti vaakasuuntaan, kiihtyvyydellä  $a$ , kokee koemassa vaunun järjestelmässä samansuuruisen mutta vastakkaisen kiihtyvyyden  $-a$ . Koska heilurin pituus on  $\ell$ , seuraa, että kulmakiihtyvyyden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a}{\ell},$$

<sup>4</sup>Max Schuler (1882–1972), saksalainen insinööri, [https://en.wikipedia.org/wiki/Max\\_Schuler](https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Schuler)



Kuva 5.8: Schuler-palautesilmukka

ja tietyn ajan  $\Delta t$  jälkeen saavutettu kulmapoikkeama on

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{a}{\ell} \Delta t^2. \quad (5.7)$$

Vaunun kulkema matka saman ajan jälkeen on

$$s = \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

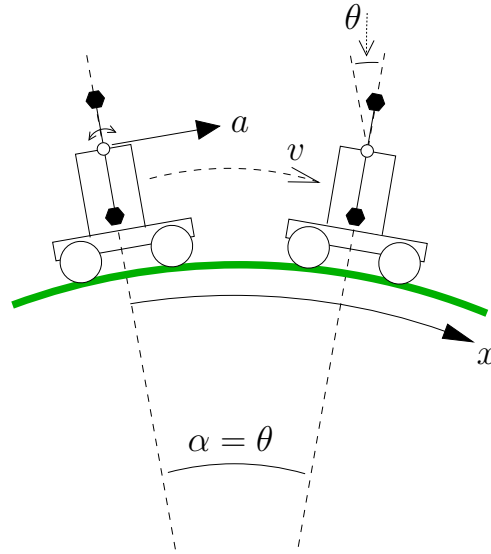
ja tämä matka ilmaistuna kulmaksi maan keskipisteestä katsottuna on

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{a}{R} \Delta t^2. \quad (5.8)$$

Vertailemalla kaavoja (5.7) ja (5.8) nähdään, että jos  $\ell = R$ , silloin  $\alpha = \theta$ . Eli,

**Vaikka vaunu liikkuu vaakasuuntaan, heiluri osoittaa koko ajan maan keskipisteeseen.**

Tämä on ns. SCHULERIN *heilurin* olennainen ominaisuus.



**Kuva 5.9:** Yksiulotteinen vaunu Schuler-heilureineen kaarevan Maan pinnalla

## Toteutus inertialaitteessa

Stabilized platform -inertialaitteessa on toteutettu palautesilmukat (*Schuler-silmukka*) jotka saavat koko gyroskooppikehikkö käyttäytymään Schuler-heilurin tavoin. Aina kun kehikkö kääntyy pois vaakatasosta, vaakasuuntien  $(x, y)$  kiihtyvyyssmittarit mittaavat painovoimana  $\mathbf{g}$  :n projektio kallistuvaan tasoon ja lähettävät korjausimpulssit vastaaviin gyroskooppikehikön aktuaattoreihin. Näin kehikkö seuraa aina paikallista vaakatasoa.

Heilurikaavan mukaan on

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = \frac{a}{\ell}, \quad (5.9)$$

missä  $a$  on kiihtyvyyssmittarin  $x$ -suuntaanmittaama kiihtyvyys..

Voimme kirjoittaa geometrisesti poikkeamalle vaakatasosta  $\theta$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_z}{\tilde{\omega}} \right) = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{d}{dt} \omega_z.$$

Kulmakiihtyvyys on nyt

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \omega_z, \quad (5.10)$$

*gyroskoopin*<sup>5</sup> pyörähdysnopeusvektorin  $\tilde{\omega}$  kääntymisen kiihtyvyys  $z$ -suuntaan.

Nyt kaavan (5.9) sijoittaminen kaavaan (5.10) ja integrointi antaa

$$\frac{d}{dt} \omega_z = \frac{\tilde{\omega}}{\ell} \int a dt.$$

<sup>5</sup>Tässä puhutaan nyt gyroskoopin eikä koko maapallon pyörimisestä!

## Eulerin kaavan käyttö

Eulerin kaavan (5.2) mukaan

$$\mathbf{N} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

jossa  $J$  on inertia tensori; gyropyörän symmetrian perusteella se on (standardi-orientaatiossa) diagonaalinen matriisi:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix},$$

jossa  $J_{yy} = J_{zz} \approx \frac{1}{2}J_{xx}$  litteälle ympyrän muotoiselle pyörälle (ks. kaavat 5.3, 5.4). Silloin Euler-kaavan kolmas yhtälö on

$$N_z = J_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} = J_{zz} \frac{\tilde{\omega}}{\ell} \int a dt,$$

missä  $J_{zz}$  on gyropyörän hitausmomentti  $z$ -akselinsaympäri, ja  $N_z$  tarvittava vääntö  $z$ -akselin ympäri (ks. kuva 5.8). Nyt

$$N_z = J_{zz} \tilde{\omega} \int \frac{a}{\ell} dt \approx \frac{\tilde{L}}{R} \int a dt, \quad (5.11)$$

missä  $R$  on Maan säde, n. 6378 km, ja  $\tilde{L} = J_{zz} \tilde{\omega}$  on suure jonka dimensio on pyörähdysmomentti, kaava (5.2).

Kaavan (5.11) mukaisesti Schuler-silmukka implementoidaan joko hardware-tasolla (vanhemmat laitteet; kerroin  $\frac{\tilde{L}}{R}$  on laitevakio ja käytetään hardware-integraattori), tai inertialaitteen softassa. Aina on *kaksi Schuler-silmukkaa*, yksi  $x$ -suuntaa varten ja yksi  $y$ -suuntaa varten.

## 5.8 Mekanisaatio

Ks. esim. [http://www.frc.ri.cmu.edu/~alonzo/pubs/reports/kalman\\_V2.pdf](http://www.frc.ri.cmu.edu/~alonzo/pubs/reports/kalman_V2.pdf), <http://www.frc.ri.cmu.edu/~alonzo/pubs/reports/nav.pdf>.

Koska tosielämän inertialaite on aika lailla monimutkaisempi kuin yksinkertaiset periaatteet, on laitteiston kaikkien osien käyttäytymiset mallinnettava huolellisesti. Tätä mallia kutsutaan inertialaitteen *mekanisaatioksi*.

Yksinkertaisena mekanisaation esimerkkinä käsitellään yksiulotteinen gyrostabilisoitu vaunu pallon muotoisen Maan pinnalla. Ks. kuva 5.9.

Ensin voidaan huomauttaa, että määritelmän mukaisesti nopeus on

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Kiihtyvyyttä *mitataan* jatkuvasti kiihtyvyyssanturilla; mittaussarvo on  $a(t)$ . Kuitenkin tämä mittaussuure (ajan funktio) koostuu kahdesta osasta,

1. itse geometrinen kiihtyvyys,  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ , ja
2. painovoiman komponentti kiihtyvyyssmittarin akseliin projisoituna,  $\theta g$ , missä  $\theta(t)$  on vaunun kallistuskulma paikallisesta vertikaalista.

Lopputulos on

$$\frac{dv}{dt} = a - \theta g,$$

eli (muista, että differentiaaliyhtälö on lausunto *funktioiden* ominaisuuksista):

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t) - \theta(t)g,$$

missä suure  $a(t)$  on jatkuvan mittausprosessin tuloksena.

Viimeiseksi käsitellään Schuler-silmukka. Kallistuskulma  $\theta$  käyttäytyy Schuler-heilurin tavoin ja yrittää palautua nollaan seuraavan kaavan mukaisesti:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{R}\theta. \quad (5.12)$$

Määritellään *likiarvot* (ajan funktiot)  $x_0(t)$ ,  $v_0(t)$ ,  $\theta_0(t) \equiv 0$ , ja  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta v = v - v_0$  (*linearisointi*). Silloin

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= v_0 \\ \frac{dv_0}{dt} &= a \end{aligned}$$

(jatkuvasti mitattuna!) ja

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \Delta v \\ \frac{d\Delta v}{dt} &= -\theta g. \end{aligned}$$

Nyt kaavaan (5.12) voidaan sijoittaa

$$g\theta = -\frac{d\Delta v}{dt},$$

tuloksena

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{d\Delta v}{dt}.$$

Integroimalla (jättämällä pois yksi  $\frac{d}{dt}$  molemmalta puolelta) saadaan

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\Delta v,$$

ja kokonaisena Kalman-kaavana saadaan:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta v \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -g \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta v \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ n_a \\ n_g \end{bmatrix},$$



mihin on lisätty mahdolliset kiihtyvyyssanturin ja gyrostabiloittimekanismin kohinatermit. Ratkaisu toimii sillä tavalla, että lasketaan jatkuvasti integroimalla tosiajassa likiarvot  $x_0(t)$  ja  $v_0(t)$ , ja Kalman-suotimen avulla  $\Delta x$ ,  $\Delta v$  ja  $\theta$ .

Tämä on helposti yleistettävissä kahteen ulottuvuuteen. Näin voidaan rakentaa “navigaattori” maan pinnalla. Huomaa, että ratkaisussa sekä vaunun kallistuskulma että nopeushäiriö  $\Delta v$  (ja paikkahäiriökin  $\Delta x$ ) “värähtelevät” harmonisesti Schuler-heilurin tavoin<sup>6</sup>, periodina  $T_S = 84.4$  min. Korkeus on saatava muulla tavoin, esim. lentokoneessa ilmanpaineanturin avulla.

## 5.9 Inertialaitteen initialisointi

Koko edessä esitetty teoria olettaa, että maapallo on pallo eikä pyöri. Fysikaalisesti realistisempi teoria on hyvin monimutkainen.

Mielenkiintoista on myös, miten inertialaite *tasataan* ja *orientoidaan* ennen matkaa. Liikkumattomuustilassa inertialaite käyttäytyy joten kuten kuin yllä kuvattu *vakaa pöytä*. Tässä tapauksessa kiihtyvyyssmittarit toimivat *kaltevuusmittareina* ja palautesilmukkojen avulla saadaan gyroskoopin akselit kääntymään vaakatasoon.

Orientaatio pohjoiseen saavutetaan käyttämällä laite gyrokompassin tavoin, eli havaitsemalla miten paikallisen painovoiman suunta hitaasti kääntyy etelä-pohjoisakselin ympäri.

Lentokentillä usein näkyy lähtöportin ulkopuolella taulu, jolla on kirjoitettu sen tarkka ( $\pm 0'.1$ ) maantieteellinen paikka. Itse asiassa näiden arvojen avulla initialisoidaan koordinaatit inertialaitteessa, jota nykymatkustajakoneet käyttävät. Myös taseus ja orientointi tapahtuu koneen seisomisen aikana.

---

<sup>6</sup>Jos kulman  $\theta$  amplitudi on vaikkapa  $A_\theta = 1'' = 4.8 \cdot 10^{-6}$  rad, seuraa kaavasta

$$\frac{d\Delta v}{dt} = -g\theta,$$

että

▷  $\Delta v$ :n amplitudi on  $A_{\Delta v} = -g\sqrt{\frac{R}{g}}A_\theta = 4 \text{ cm s}^{-1}$ , ja

▷  $\Delta x$ :n amplitudi on  $A_{\Delta x} = \sqrt{\frac{R}{g}}A_{\Delta v} = 3 \text{ km}$ .



## Navigaatio ja satelliittiradat

Tämän luvun aiheen laajemmat esitykset löytyvät kirjoista [Poutanen \[1998\]](#), luku 3, ja [Hofmann-Wellenhof et al. \[1997\]](#), luku 4. Satelliittiradan ominaisuuksien ja sen geometrian hyvä ymmärrys on tarpeen, jos käytetään Kalman-suodin satelliittiradan parantamiseksi tosiajassa tehtyjen havaintojen avulla.

Myös maanpäällisen GPS-navigoinnin yhteydessä tämä auttaa ymmärtämään, miten saadaan lasketuksi rata-alkioista käytettyjen GPS-satelliittien paikat, ensin avaruudessa ja sitten havaitsijan taivaalla.

### 6.1 Kepler-rata

Jos oletetaan, että satelliitti liikkuu keskeisessä voimakentässä (eli pistemäisen tai pallomaisen Maan gravitaatiokentässä), seuraa, että satelliitin rata on *Kepler-rata*. Johannes KEPLER (1571-1630) keksi se Tycho BRAHEN (1546-1601) Mars-radan havaintomateriaalin perusteella (<http://www.cvc.org/science/kepler.htm>; <http://www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/Class/circles/u6l4a.html>).

Kuten olemme nähneet, voidaan satelliitin liike kuvata suorakulmaisissa koordinaateissa näin:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x} &= \mathbf{v}; \\ \frac{d}{dt}\mathbf{v} &= -\frac{GM}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Tässä  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{v}$  ovat paikka- ja nopeusvektorit kolmiulotteisessa avaruudessa. Yhdistetty vektori  $\underline{\mathbf{x}} \equiv [\mathbf{x} \ \mathbf{v}]^T = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$  on systeemin *tilavektori*.

Kepler-rata-alkiot ovat vain vaihtoehtoinen kirjoitustapa tilavektorille. Ks. [http://www.orbitessa.com/html/body\\_orbital\\_description.html](http://www.orbitessa.com/html/body_orbital_description.html), jossa on *kaikkien* Kepler-alkioiden hyvä kuvaus, sekä hyödylliset linkit.

$\Omega$  Nousevan solmun *rektaskensio* eli tähtitieteellinen pituus. Tämän pituuden nollapiste on se paikka tähtitaivaalla missä eläinratataso ja ekvaattoritaso kohtaavat, eli “kevättasauspiste”: Auringon paikka kevään alkaessa.

$i$	Inkлинаatio eli ratatason kaltevuus ekvaattoriin nähden. GPS-satelliitteilla ratatason kaltevuus on $55^\circ$ .
$\omega$	Perigeikulma eli perigeumin argumentti. Kulmaetäisyys nousevan solmun ja satelliittiradan perigeumin välillä.
$a$	Satelliittiradan pitempi akselipuolikas.
$e$	Satelliittiradan eksentrisyys. $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ , missä $b$ on lyhyempi akselipuolikas.
$\nu, E, M$	Satelliitin paikka radassaan ajan funktiona:
$\nu(t)$	luonnollinen anomalia
$E(t)$	eksentrisen anomalia
$M(t)$	keskianomalia

Niiden väliset yhteydet:

$$E(t) = M(t) + e \sin E(t) \quad (6.1)$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}\nu(t)}{\tan \frac{1}{2}E(t)} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

Ks. kuva 6.1. Keskianomalia  $M$  on pelkkä lineaarinen ajankulun mitta, skaalattuna satelliitin kiertoaikaan  $P$  ja referoituna sen *perigeumin läpikulkuhetkeen*  $\tau$ :

$$M(t) \equiv 2\pi \frac{t - \tau}{P}.$$

$E$  ja  $\nu$  taas ovat puhtaasti geometrisia suureita.

Kuvassa kulma  $\theta$  on *Greenwichin tähtiaika*, joka kuvaa maapallon asennon tähtitaivaan nähden. Greenwichin tähtiaika koostuu vuotuisesta ja vuorokautisesta komponentista<sup>1</sup>, jotka johtuvat maan pyörähdys- ja rataliikkeistä.

<sup>1</sup>Greenwichin tähtiaika lasketaan seuraavasti:

- Ota kuukausiarvo seuraavasta taulukosta:

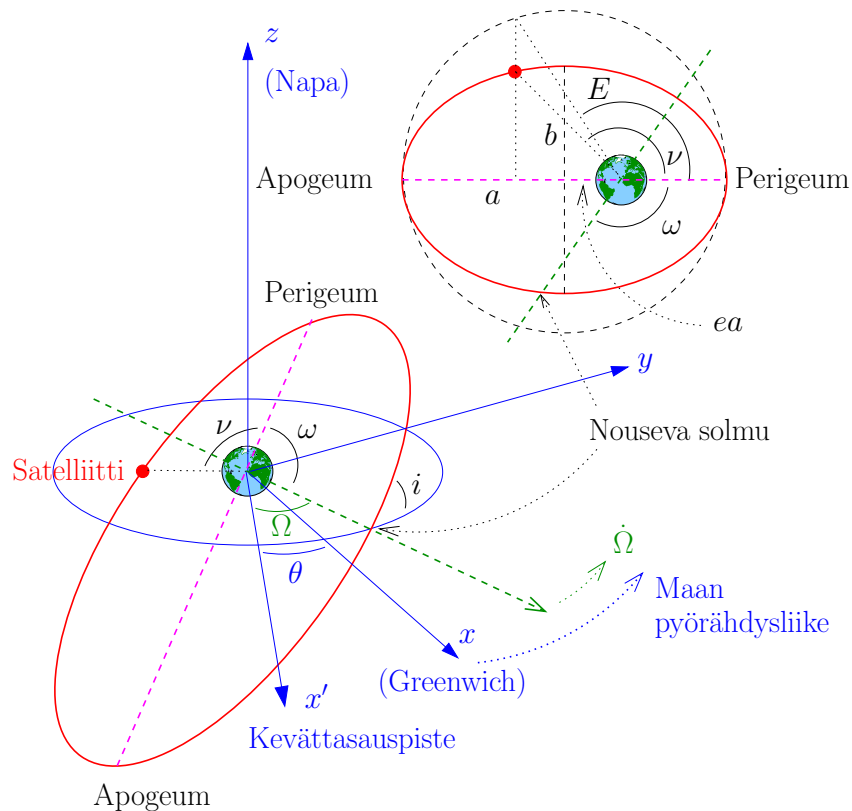
Tam	Hel	Maa	Huh	Tou	Kes	Hei	Elo	Syy	Lok	Mar	Jou
6 37	8 40	10 30	12 32	14 31	16 33	18 31	20 33	22 36	0 34	2 36	4 34

- Lisää tähän 4 (neljä) minuuttia jokaista kuukauden päivää kohti;

- Lisää tähän kelloaika (UTC eli Greenwichin aika);

Mikäli haluat laskea paikallinen tähtiaika, lisää tähän paikallinen itä-pituusaste konvertoituna aikayksiköihin:  $15^\circ = 1^h$ ,  $1^\circ = 4^m$ ,  $15' = 1^m$ .

Tuloksen tarkkuus on  $\pm 4^m$ , koska yo. taulukko ei ole tarkasti ottaen vakio: Se vaihtelee karkausvuosisyklin mukaan.



Kuva 6.1: Keplerin rata-elementit

Näin on saatu vaihtoehtoinen esitystapa tilavektorille:

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a \\ e \\ M \\ i \\ \omega \\ \Omega \end{bmatrix}$$

Keskeisessä voimakentässä tämän tilavektorin alkioit ovat *vakioita* paitsi  $M(t)$ , ks. yllä. Mikäli voimakenttä ei ole keskeinen, voivat muutkin rata-alkiot muuttua hitaasti ajassa. Esim. maapallon litistyneisyys aiheuttaa nousevan solmun  $\Omega$  hidasta kääntymistä. Sellaiset ajasta riippuvaiset Kepler-alkiot (kuten esim.  $\Omega(t)$ ) kutsutaan *oskuloiviksi alkioiksi*.

## 6.2 Suorakulmaisten koordinaattien laskeminen rata-alkioista

Voimme laskea satelliitin hetkellinen säde

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu},$$

jossa  $E$  voidaan laskea  $M$ :ltä iteroimalla kaava 6.1.

$r$ :n aikaderivaatta on

$$\frac{dr}{dt} = ae \sin E \frac{dE}{dt};$$

kaavasta (6.1) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dM}{dt} + e \cos E \frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{P} + e \cos E \frac{dE}{dt} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dE}{dt} &= \frac{2\pi}{P(1 - e \cos E)}, \end{aligned}$$

eli

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2\pi ae \sin E}{P(1 - e \cos E)} = \frac{2\pi a^2 e \sin E}{Pr}.$$

Sen jälkeen ratatasossa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen voidaan muuntaa tämä kaksiulotteinen vektori kolmiulotteiseksi avaruusvektoriksi käyttämällä kiertokulmat  $\omega, i, \Omega$ . Jos kirjoitetaan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix},$$

saadaan

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R\mathbf{x},$$

missä

$$R = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega & -\cos \Omega \sin \omega & \sin \Omega \sin i \\ -\sin \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \cos \omega \cos i & \\ \sin \Omega \cos \omega & -\sin \Omega \sin \omega & -\cos \Omega \sin i \\ +\cos \Omega \sin \omega \cos i & +\cos \Omega \cos \omega \cos i & \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix}.$$

Näin saadut geosentriset koordinaatit ovat inertiaalisessa (siis, tähtitieteellisessä) järjestelmässä. Pituuksien origo on kevättasauspiste. Mikäli halutaan satelliitin koordinaatit Maapallon kanssa pyörivässä järjestelmässä (pituuksien origo Greenwich) lasketaan

$$\ell = \Omega - \theta_0,$$

missä  $\theta_0$  on Greenwichin tähtiaika, ja laitetaan ylläolevaan matriisikaavan  $\ell$   $\Omega$ :n sijasta.

Nopeusvektori saadaan differentioimalla ajan suhteen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} -r \sin \nu \\ r \cos \nu \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d\nu}{dM} \frac{dM}{dt} + \frac{dr}{dt} \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2\pi}{P} \begin{bmatrix} -r \sin \nu \\ r \cos \nu \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d\nu}{dM} + \frac{2\pi a e \sin E}{P(1-e \cos E)} \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

derivaatan  $\frac{d\nu}{dM}$  johtaminen jätetään (vaikeaksi) harjoitukseksi, ja huomaa, että ympyräradan tapauksessa  $M = \nu$  eli,  $\frac{d\nu}{dM} = 1$ .

## 6.3 Harjoitukset

### Kepler-rata

1. Kepler-tilavektorin dynaaminen malli. Olettaen, että voimakenttä on keskinen, kirjoita auki seuraava dynaaminen mallikaava:

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{a}} = F \cdot \underline{\mathbf{a}},$$

jossa  $\underline{\mathbf{a}} = [a \ e \ M \ i \ \omega \ \Omega]^T$ .

2. Maapallon litistyneisyyden vuoksi nousevan solmun rektaskensio  $\Omega$  muuttuu hitaasti seuraavan kaavan mukaan (ympyrän muotoinen rata oletettu,  $e \approx 0$ ):

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 J_2 \cos i.$$

$a_e$  on Maapallon ekvatoriaalisäde,  $J_2$  ns. dynaaminen litistyneisyys (dimensioton luku).

Miten tämä vaikuttaa yllä olevaan matriisiin  $F$ ?

3. [Monimutkainen.] Miten muunnetaan suorakulmainen tilavektori  $\underline{\mathbf{x}}$  Kepler-vektoriin  $\underline{\mathbf{a}}$  ja taaksepäin? Eli, halutaan seuraavassa yhtälössä

$$\underline{\mathbf{x}} = A \underline{\mathbf{a}}$$

matriisi  $A$  kirjoitetuksi auki. (Linearisointi!). Yksinkertaisuuden vuoksi saat olettaa, että  $e$  on pieni.

*Vihje:* kirjoita ensin  $\underline{\mathbf{x}}$   $\underline{\mathbf{a}}$ :n funktiona ja laske osittaisderivaatat.

4. Keskisessä voimakentässä, jos kirjoitetaan

$$\underline{\mathbf{x}}(t_1) = \Phi_0^1 \underline{\mathbf{x}}(t_0),$$

löydä matriisi  $\Phi_0^1$  likimäärin (sarjakehitelmänä), jos  $\Delta t = t_1 - t_0$  on pieni. (Tutki kirjallisuutta.)

5. *Havaintoasema. Miten kuvataan havaintoaseman kolmiulotteinen rata*

$$\begin{bmatrix} X(t) & Y(t) & Z(t) \end{bmatrix}^T$$

avaruudessa Maapallon pyörähdysliikkeen johdosta? Jos oletetaan, että Maapallon pyörähdysliike on säännöllinen ja aseman paikka vakio, kirjoita havaintoaseman koordinaattien dynaaminen malli.

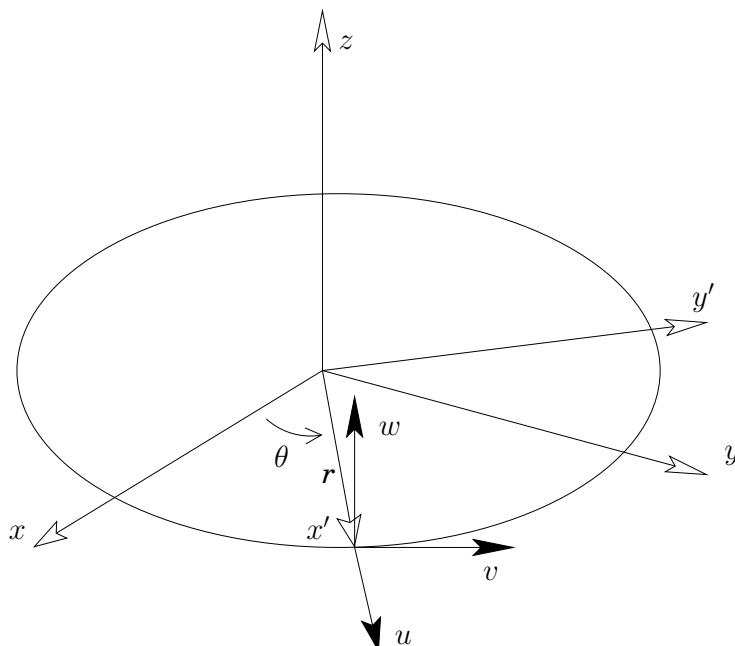
6. Kirjoita *havaintoyhtälöt* tapauksessa, että mitataan maa-asemalta käsin *etäisyys* satelliittiin lasertutkan avulla. Eli kirjoita havaintosuure tilavektorin  $\underline{x}$  alkioiden funktiona, ja linearisoi.
7. Kirjoita havaintoyhtälöt GPS:n tapauksessa, missä havaintosuure on *pseudoetäisyys* (pseudosatunnaiskoodimittaus) satelliitille. Mikä uusi ongelma esiintyy?
8. Mikä uusi ongelma esiintyy tapauksessa, että mittaussuure on *kantoaaltovaihe*?



## Hill-koordinaattijärjestelmän käyttö

The Hill co-ordinate frame was invented by George W. HILL (1838-1914) in connection with the study of the motion of the Moon. The idea is to describe the motion, instead of in an inertial co-ordinate system  $(x, y, z)$  centred on the centre of motion (i.e., the Sun), in a co-rotating, non-inertial frame  $(u, v, w)$ , the origin of which is centred on the Earth and which rotates at the same mean rate as the Earth, i.e., one rotation per year. As the distance of the Moon from the Earth is only 0.3% of that between Earth and Sun, the mathematics can be effectively linearized.

Menetelmän eräs variantti mallintaa Maan satelliitin liike mielikuvituksellisen pisteen suhteen, joka kiertää Maata ympyrän muotoisessa radassa jonka periodi on sama kuin satelliitin. Tämä lähestymistapa on ollut hyödyllinen tutkiessa ratahäiriöitä ja rendez-vous -ongelmaa.



Kuva 7.1: Hill co-ordinate frame

Kirjoita

$$\mathbf{u} = R\mathbf{x} - \mathbf{u}_0$$

jossa  $\mathbf{u} = [u \ v \ w]^T$ ,  $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$ ,  $\mathbf{u}_0 = [r_0 \ 0 \ 0]^T$  ja rotaatiomatriisi

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{x}$  on inertiaalinen systeemi,  $\mathbf{u}$  on systeemi joka pyörii satelliitin mukaan;  $u$ -akseli osoittaa ulospäin (“ylös”),  $v$ -akseli eteenpäin lentosuunnassa, ja  $w$ -akseli (eli  $z$ -akseli) kohtisuoraan ulos ratatasosta “paapuuriin”.

Satelliitti liikkuu vakionopeudella ympyräradassa: kulmanopeus on Keplerin kolmannen lain mukaan

$$n = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}.$$

$r_0$  on radan säde ja samalla  $(u, v, w)$  systeemin origon etäisyys  $(x, y, z)$  systeemin origosta.

Yllä olevaa kaavaa voidaan myös kirjoittaa

$$\mathbf{x} = R^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) = R^T(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0),$$

koska ortogonaaliselle matriisille  $RR^T = I \Leftrightarrow R^{-1} = R^T$ .

## 7.1 Muunnos inertiaalisen ja Hill-systeemin välillä

*Johda kaavat vektorin  $\mathbf{x}$  ja matriisin  $R$  ensimmäiselle ja toiselle derivaatalle ja sijoita. Sen jälkeen kerro yhtälön molemmat puolet vasemmalta matriisilla  $R$ .*

Differentioimalla saadaan:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{R}^T(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) + R^T\dot{\mathbf{u}}, \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{R}^T(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) + 2\dot{R}^T\dot{\mathbf{u}} + R^T\ddot{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Tässä matriisin  $R$  derivaatat ovat:

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n$$

ja

$$\ddot{R} = \frac{d^2R}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n^2.$$

Sijoitus antaa:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n^2 \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} + \\
&+ 2 \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Kertomalla vasemmalta  $R$ -matriisilla saadaan:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n^2 \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} + \\
&+ 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}. \quad (7.1)
\end{aligned}$$

Joskus käytetään muotoa

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Tämä on koordinaatisto, jolla on sama origo kuin  $(x, y, z)$ , mutta jonka  $(\alpha, \beta)$  -akselit pyörivät satelliitin mukaan ja pysyvät samansuuntaisina kuin akselit  $(u, v)$ .

## 7.2 Keskeisen voimakentän sarjakehitelmä

Keskeisen voimakentän kaava  $(x, y, z)$  -systeemissä on

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{GM}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x},$$

eli

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= -\frac{GM}{\|\mathbf{x}\|^3} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\
&= -\frac{GM}{\|\mathbf{x}\|^3} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

jossa

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(u + r_0)^2 + v^2 + w^2}.$$

Taylor-kehitemä  $(u, v, w)$ -systeemin origon ympäri antaa nyt

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{GM}{r_0^3} \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + M \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

jossa *painovoimagradienttimatriisi*  $M$  koostuu osittaisderivaatoista:

$$\begin{aligned} M &= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \end{array} \right] \left[ -\frac{GM}{\|\mathbf{x}\|^3} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} \right] \Big|_{u,v,w=0} = \\ &= -\frac{GM}{r_0^3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ks. kaava (3.5) sovellettuna tilanteeseen  $x = r_0, y = 0, z = 0$ ), ja

$$\frac{GM}{r_0^3} = n^2$$

Keplerin mukaan.

Yhdistämällä saadaan

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -n^2 \left\{ \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right\}. \quad (7.2)$$

### 7.3 Liiketytöt Hill-systeemissä

Yhdistämällä yhtälöt (7.1) ja (7.2) saadaan tulos (ulkopuolisten voimien puuttuessa)

$$\begin{aligned} 0 &= n^2 \left\{ \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right\} + \\ &+ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n^2 \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} + \\ &+ 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Yksinkertaistamalla

$$0 = n^2 \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \\ + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}.$$

Lopputuloksena, nostamalla erikseen yhtälöt  $u$ ,  $v$  ja  $w$  -komponenteille:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= 2n\dot{v} + 3n^2u \\ \ddot{v} &= -2n\dot{u} \\ \ddot{w} &= -n^2w \end{aligned}$$

joissa viimeinen on klassinen harmoninen värähtelijä.

## 7.4 Hill-yhtälöiden ratkaiseminen

Tämä osuus voi ensi lukemalla hypätä yli. Monimutkaiset johtamiset

### $w$ -yhtälö

Ensin kokeilemme ratkaista helpointa eli kolmatta yhtälöä:

$$\ddot{w} = -n^2w.$$

Kokeillaan yleinen periodinen ratkaisu,

$$w(t) = A \sin(Bt + C).$$

Sijoitus yhtälöön antaa

$$A \cdot B^2 \cdot -\sin(Bt + C) = -n^2 \cdot A \sin(Bt + C),$$

josta päättelemme, että

$$B = \pm n.$$

Siis ratkaisu:

$$w(t) = A \sin(\pm nt + C),$$

$A, C$  mielivaltaisia vakioita. Kirjoitetaan vielä

$$\sin(\pm nt + C) = \sin(\pm nt) \cos C + \cos(\pm nt) \sin C$$

ja saadaan (näytä)

$$w(t) = A_1 \sin nt + A_2 \cos nt,$$

jossa  $A_1 = \pm A \cos C$  ja  $A_2 = A \sin C$ , taas mielivaltaisia vakioita.

**$u, v$ -yhtälöt**

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= 2n\dot{v} + 3n^2u \\ \ddot{v} &= -2n\dot{u}\end{aligned}$$

Ne on ratkaistava yht'aikaa.

Kokeilkaamme taas periodinen ratkaisu:

$$\begin{aligned}u(t) &= A \sin nt + B \cos nt, \\ v(t) &= C \sin nt + D \cos nt.\end{aligned}$$

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned}-n^2(A \sin nt + B \cos nt) &= 2n^2(C \cos nt - D \sin nt) + 3n^2(A \sin nt + B \cos nt) \\ -n^2(C \sin nt + D \cos nt) &= -2n \cdot n(A \cos nt - B \sin nt)\end{aligned}$$

Tarkastele nyt erikseen sinus- ja kosinustermit ja ilmaista  $C$  ja  $D$   $A$ :han ja  $B$ :hin.  $C, D$   $A, B$ .

Löytynyt yleinen ratkaisu

$$\begin{aligned}u(t) &= A \sin nt + B \cos nt, \\ v(t) &= -2B \sin nt + 2A \cos nt.\end{aligned}$$

Matrisin muotoon:

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -2B & 2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin nt \\ \cos nt \end{bmatrix}.$$

Tätä ratkaisua kutsutaan *libraatioliikkeeksi*, periodinen liike, jonka keskipiste on origo  $u = v = 0$ . Itse asiassa satelliitti on Kepler-radassa joka on elliptinen, vaikka periodi on sama kuin Hill-systeemin periodi  $2\pi/n$ .

**7.5 Toinen ratkaisu**

Tämä ei kuitenkaan ole tarinan loppu. Kokeillaan vaihteeksi *lineaarinen*, ei periodinen ratkaisu:

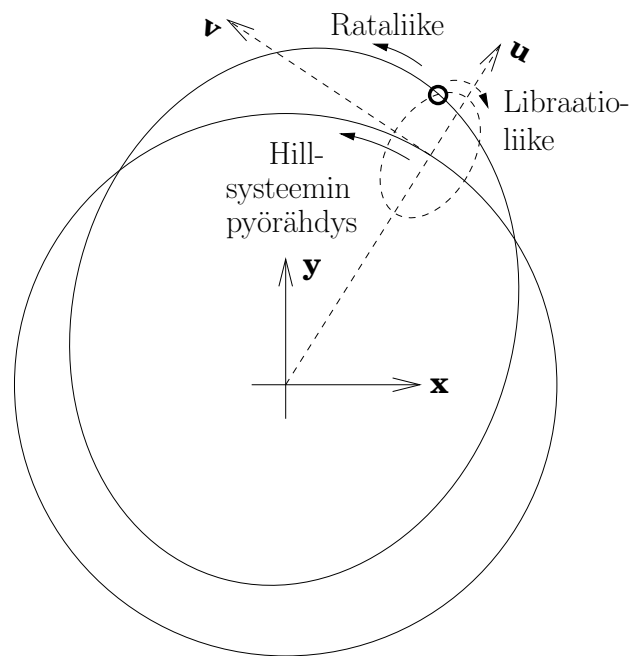
$$\begin{aligned}u(t) &= Et + F, \\ v(t) &= Gt + H.\end{aligned}$$

Sijoita tämä alkuperäisiin differentiaaliyhtälöihin ja laske  $E$  ja  $G$   $F$ :n ja  $H$ :n funktiona.

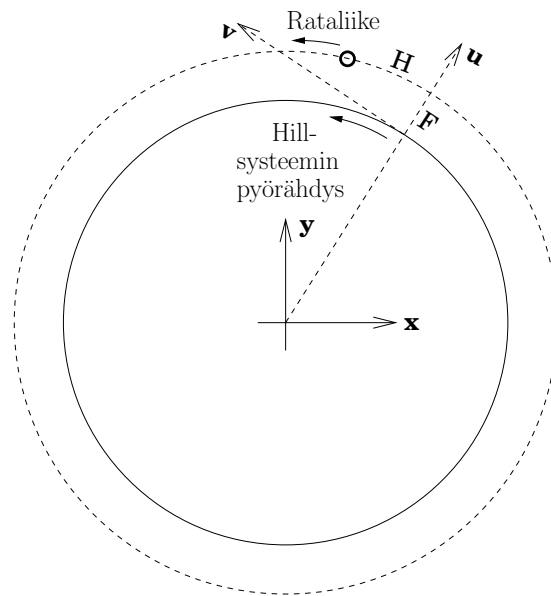
Ratkaisuna saadaan

$$\begin{aligned}u(t) &= F, \\ v(t) &= -\frac{3}{2}Fnt + H,\end{aligned}$$

$F$  ja  $H$  mielivaltaiset vakiot. Tämä edustaa *rataliike*, jolla on toinen periodi kuin  $\frac{2\pi}{n}$ . Radan säde on  $r_0 + F$ , radan kulmanopeus  $n - \frac{3}{2}Fn$  (Kepler III!) ja satelliitti on hetkellä  $t = 0$  radassaan  $u, v, w$  systeemin origon edessä  $H$ -etäisyyden verran.



Kuva 7.2: Libraatioliike



Kuva 7.3: Lineaarinen liike

## 7.6 Ratkaisujen yhdistäminen

Yhtälöryhmän lineaarisuuden perusteella saamme vapaasti yhdistellä löytyneet ratkaisut.

## 7.7 Tilansiirtomatriisi

### Yleinen tapaus

Katsotaan vain  $(u, v)$  -tasoa. Silloin yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} u(t) &= A \sin nt + B \cos nt + F, \\ v(t) &= -2B \sin nt + 2A \cos nt - \frac{3}{2}Fnt + H. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Differentioimalla saadaan myös nopeuskomponentit:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= nA \cos nt - nB \sin nt, \\ \dot{v}(t) &= -2nA \sin nt - 2nB \cos nt - \frac{3}{2}Fn. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Kirjoitamme alkuepookille  $t_0$ :

$$\begin{aligned} u(t_0) &= A \sin nt_0 + B \cos nt_0 + F, \\ v(t_0) &= -2B \sin nt_0 + 2A \cos nt_0 - \frac{3}{2}Fnt_0 + H, \\ \dot{u}(t_0) &= nA \cos nt_0 - nB \sin nt_0, \\ \dot{v}(t_0) &= -2nA \sin nt_0 - 2nB \cos nt_0 - \frac{3}{2}Fn. \end{aligned}$$

Kirjoitamme epookille  $t_1$ , käyttämällä sinuksen ja kosinuksen summakaavat:

$$\begin{aligned} u(t_1) &= u(t_0 + \Delta t) = \\ &= A \sin n(t_0 + \Delta t) + B \cos n(t_0 + \Delta t) + F = \\ &= A \sin nt_0 \cos n\Delta t + A \cos nt_0 \sin n\Delta t + B \cos nt_0 \cos n\Delta t - B \sin nt_0 \sin n\Delta t + F = \\ &= \cos n\Delta t \cdot (A \sin nt_0 + B \cos nt_0) + F + \sin n\Delta t \cdot (A \cos nt_0 - B \sin nt_0) = \\ &= u(t_0) + (\cos n\Delta t - 1)(A \sin nt_0 + B \cos nt_0) + \sin n\Delta t \cdot (A \cos nt_0 - B \sin nt_0) = \\ &= u(t_0) + (\cos n\Delta t - 1)(A \sin nt_0 + B \cos nt_0) + \sin n\Delta t \cdot \frac{1}{n} \dot{u}(t_0). \end{aligned}$$



Samalla tavalla

$$\begin{aligned}
 v(t_1) &= 2A \cos n(t_0 + \Delta t) - 2B \sin n(t_0 + \Delta t) - \frac{3}{2}Fnt_1 + H = \\
 &= 2A \cos nt_0 \cos n\Delta t - 2A \sin nt_0 \sin n\Delta t - 2B \sin nt_0 \cos n\Delta t - 2B \cos nt_0 \sin n\Delta t - \\
 &\quad - \frac{3}{2}Fnt_1 + H = \\
 &= \cos n\Delta t \cdot (2A \cos nt_0 - 2B \sin nt_0) - \sin n\Delta t \cdot (2A \sin nt_0 + 2B \cos nt_0) - \frac{3}{2}Fnt_1 + H = \\
 &= v(t_0) + (\cos n\Delta t - 1)(2A \cos nt_0 - 2B \sin nt_0) - \sin n\Delta t \cdot (2A \sin nt_0 + 2B \cos nt_0) - \\
 &\quad - \frac{3}{2}Fn\Delta t = \\
 &= v(t_0) + (\cos n\Delta t - 1) \frac{2}{n} \dot{u}(t_0) - \sin n\Delta t \cdot (2A \sin nt_0 + 2B \cos nt_0) - \frac{3}{2}Fn\Delta t.
 \end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän  $u(t)$ -kaavasta

$$F = u(t_0) - A \sin nt_0 - B \cos nt_0$$

saadaan

$$\begin{aligned}
 v(t_1) &= v(t_0) + (\cos n\Delta t - 1) \frac{2}{n} \dot{u}(t_0) - \sin n\Delta t \cdot (2A \sin nt_0 + 2B \cos nt_0) - \frac{3}{2}u(t_0) n\Delta t \\
 &\quad + \frac{3}{2}n\Delta t \cdot (A \sin nt_0 + B \cos nt_0) = \\
 &= v(t_0) + (\cos n\Delta t - 1) \frac{2}{n} \dot{u}(t_0) + \left( \frac{3}{2}n\Delta t - 2 \sin n\Delta t \right) (A \sin nt_0 + B \cos nt_0) - \\
 &\quad - \frac{3}{2}u(t_0) n\Delta t.
 \end{aligned}$$

Seuraavaksi:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}(t_1) &= nA (\cos nt_0 \cos n\Delta t - \sin nt_0 \sin n\Delta t) - nB (\sin nt_0 \cos n\Delta t + \cos nt_0 \sin n\Delta t) = \\
 &= \cos n\Delta t \cdot (nA \cos nt_0 - nB \sin nt_0) - \sin n\Delta t \cdot (nA \sin nt_0 + nB \cos nt_0) = \\
 &= \cos n\Delta t \cdot \dot{u}(t_0) - \sin n\Delta t \cdot (nA \sin nt_0 + nB \cos nt_0)
 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
 \dot{v}(t_1) &= -2nA \cdot (\sin nt_0 \cos n\Delta t + \cos nt_0 \sin n\Delta t) - 2nB \cdot (\cos nt_0 \cos n\Delta t - \sin nt_0 \sin n\Delta t) - \\
 &\quad - \frac{3}{2}Fn = \\
 &= \cos n\Delta t \cdot (-2nA \sin nt_0 - 2nB \cos nt_0) + \sin n\Delta t \cdot (-2nA \cos nt_0 + 2nB \sin nt_0) - \\
 &\quad - \frac{3}{2}Fn = \\
 &= \dot{v}(t_0) - (\cos n\Delta t - 1)(2nA \sin nt_0 + 2nB \cos nt_0) - 2 \sin n\Delta t \cdot \dot{u}(t_0).
 \end{aligned}$$

Laske nyt yhdistämällä  $u(t_0)$ - ja  $\dot{v}(t_0)$ - kaavat:

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2}nu(t_0) + \dot{v}(t_0) &= -\frac{1}{2}n(A \sin nt_0 + B \cos nt_0) \Rightarrow \\
 \Rightarrow A \sin nt_0 + B \cos nt_0 &= -\left( 3u(t_0) + \frac{2}{n}\dot{v}(t_0) \right).
 \end{aligned}$$

Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} u(t_1) &= u(t_0) - (\cos n\Delta t - 1) \left( 3u(t_0) + \frac{2}{n}\dot{v}(t_0) \right) + \sin n\Delta t \cdot \frac{1}{n}\dot{u}(t_0), \\ v(t_1) &= v(t_0) - (\cos n\Delta t - 1) \left( \frac{2}{n}\dot{u}(t_0) \right) - \left( \frac{3}{2}n\Delta t - 2\sin n\Delta t \right) \cdot \left( 3u(t_0) + \frac{2}{n}\dot{v}(t_0) \right) - \\ &\quad - \frac{3}{2}u(t_0)n\Delta t, \\ \dot{u}(t_1) &= \cos n\Delta t \cdot \dot{u}(t_0) + \sin n\Delta t \cdot (3nu(t_0) + 2\dot{v}(t_0)), \\ \dot{v}(t_1) &= \dot{v}(t_0) + (\cos n\Delta t - 1) (6n\dot{u}(t_0) + 4\dot{v}(t_0)) - 2\sin n\Delta t \cdot \dot{u}(t_0). \end{aligned}$$

Matriisikaavana:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} (t_1) = \begin{bmatrix} 4 - 3\cos n\Delta t & 0 & \frac{\sin n\Delta t}{n} & (\cos n\Delta t - 1)\frac{2}{n} \\ 6\sin n\Delta t - 6n\Delta t & 1 & -(\cos n\Delta t - 1)\frac{2}{n} & (4\sin n\Delta t - 3n\Delta t)\frac{1}{n} \\ 3n\sin n\Delta t & 0 & \cos n\Delta t & 2\sin n\Delta t \\ 0 & 0 & 6(\cos n\Delta t - 1) - 2\sin n\Delta t & 4\cos n\Delta t - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} (t_0)$$

## Tapaus pieni $\Delta t$

Kirjoitetaan differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= 2n\dot{v} + 3n^2u \\ \ddot{v} &= -2n\dot{u} \end{aligned}$$

seuraavaksi:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}$$

siis pienelle aikaerolle  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} (t_1) &= \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} (t_0) + \Delta t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} (t_0) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 3n^2\Delta t & 0 & 1 & 2n\Delta t \\ 0 & 0 & -2n\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} (t_0). \end{aligned}$$

Voit verifioida, elementti elementiltä, että tämä on sama tulos kuin yllä, limitissä  $\Delta t \rightarrow 0$ .

## Ilmagravimetria ja -gradiometria

Sanonta on kuuluisa:

“toisen kohina on toisen signaali”.

Inertianavigaatio perustuu siihen, että oletetaan Maan painovoimakenttä tunnetuksi. Silloin voidaan alkusijainnista  $\mathbf{x}(t_0)$  ja alkunopeudesta  $\mathbf{v}(t_0)$  laskea eteenpäin saadakseen hetkellinen sijainti ja nopeus  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$ . Kuitenkin, jos on olemassa *riippumaton tietolähde* joka antaa nyky paikka ja -nopeus riittävän tarkasti – kuten GPS – voidaan inertia-tekniologia valjastaa maan painovoimakentän kartoittamiseksi.

Hyvin toimivan GPS-paikannusjärjestelmän avulla on nykyisin mahdollista suorittaa gravimetrisia mittauksia ilmasta käsin. Myös satelliittien avulla tapahtuva painovoimakentän tutkimus perustuu GPS-järjestelmän käyttöön satelliitin tarkan kolmiulotteisen paikan jatkuvaan seurantaan.

Olkoon lentokoneen tai satelliitin paikka ajan funktiona  $\mathbf{x}(t)$ , ja sen diskreetti mittaussäikasarja  $\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}(t_i)$ . Silloin geometrista kiihtyvyyttä voidaan arvioida likimäärin seuraavasti:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} \right|_{t_i} \approx \frac{\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_{i-1} - 2\mathbf{x}_i}{\Delta t^2},$$

missä  $\Delta t$  on peräkkäisten epookkien väli  $t_{i+1} - t_i$ .

Oletetaan, että samalla mitataan lentokoneen *tuntema* kiihtyvyys (“painovoima”)  $\mathbf{a}$ , esim. kiihtyvyyssantureiden avulla. Tässä vaiheessa, yksinkertaisuuden vuoksi, oletamme vielä, että  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{a}$  ovat annettuina samassa koordinaatistossa, siis kiihtyvyyden mittaussakselien suunnat ovat samansuuntaisia paikkakoordinaattiakselien kanssa.

Silloin pätee inertiaalisessa vertausjärjestelmässä:

$$\mathbf{g} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad (8.1)$$

eli:

*gravitaatio  $\mathbf{g}$  on geometrisen kiihtyvyyden ja kulkuneuvon sisällä tunnutun “painovoiman”  $\mathbf{a}$  summa.*

## 8.1 Vektori-ilmagravimetria

Jos lentokoneessa on sekä inertialaite että GPS-vastaanotin, saadaan mitatuksi sekä  $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}\Big|_{t_i}$  että  $\mathbf{a}(t_i)$ , ja voidaan laskea  $\mathbf{g}(t_i)$ . Tämä on menetelmä painovoimakentän kartoittamiseksi ilmasta käsin. Käytännössä sekä GPS-laitteen että inertialaitteen generoima datavirta syötetään Kalman-suodattimeen, joka tulostaa koneen tarkka reitti ja sen painovoimaprofiili. Painovoima tulee kolmiulotteisena vektorina; datatahti on tyypillisesti korkea, useita eepokkia sekunnissa. Lentokoneen liikehdinnän seurauksena ajalliset vaihtelut sekä  $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}$ :ssa että  $\mathbf{a}$ :ssa ovat suuria (tuhansia milligalleja), mutta  $\mathbf{g}$ :n lopullinen määrittystarkkuus voi olla jopa vain muutama mGal.

Kuitenkin on sanottavaa, että tämä tekniikka, vektori-ilmagravimetria, ei ole tarkkuudeltaan yhtä hyvä kuin seuraavasti esitettävä tekniikka, skalaari-ilmagravimetria. Syy on, että inertialaitteen sisältämät kiihtyvyydsmittarit, tarkkojakin kuin ovat, kärsivät enemmän systemaattisista ongelmista, kuten *käynnistä*, kuin parhaat gravimetrit.

## 8.2 Skalaari-ilmagravimetria

Tässä tekniikassa käytetään perinteinen *gravimetri* (painovoiman mittauslaite) joka on kuitenkin modifioitu tavalla, joka mahdollistaa mittausten tekeminen vahvasti vaihtelevan painovoimakiihtyvyyden ympäristöissä. Modifikaatio, vaimennus, on samanlainen kuin se, joka tehdään merimittausten mahdollistamiseksi. Gravimetri kiinnitetään *stabiloidun pöydän* päälle; stabilointi tapahtuu gyroskooppien avulla.

Gravimetri mittaa kulkuneuvon sisällä ”tuntuva” painovoimakiihtyvyys, mutta vain paikallisen luotiviivan suuntaan. Jos paikallisen luotiviivan suunta on  $\mathbf{n}$  (*alaspäin*), on mitattu suure  $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \rangle$ .

Voidaan kirjoittaa

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \rangle = \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{g}\| \equiv g, \quad (8.2)$$

koska luotiviiva on painovoiman suuntainen.

Käytännössä yhtälö (8.2) kirjoitetaan kiinteän Maan mukana pyörivässä systeemissä, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} g &= \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \rangle + \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \rangle + \left( \frac{v_e}{R_e + h} + 2\omega \cos \varphi \right) v_e + \frac{v_n^2}{R_n + h} = \\ &= a_d - \frac{d}{dt} v_u + \left( \frac{v_e}{R_e + h} + 2\omega \cos \varphi \right) v_e + \frac{v_n^2}{R_n + h}, \end{aligned}$$

missä  $v_u, v_e, v_n$  ovat nopeuden ”up”, ”east”, ”north”-komponentit,  $a_d$  on kulkuneuvon sisällä *mitattu* kiihtyvyys ”down”-suunnassa,  $\omega$  on Maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus, ja  $R_n$  ja  $R_e$  ovat Maan kaarevuussäteet meridiaanis suunnassa ja itä-länsisuunnassa.  $h$  ja  $\varphi$  ovat korkeus ja latitudi. Yo. kaavan kaksi viimeiset termit kutsutaan EÖTVÖS-korjaukseksi. Ks. [Wei and Schwarz \[1997\]](#).

## 8.3 Painovoimakentän tutkimus avaruudesta

Kaavassa (8.1) suure  $\mathbf{a}$  on noin Maan pinnan painovoiman kokoinen (n.  $10 \text{ m s}^{-2}$ ), kun geometrinen kiihtyvyys  $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}$  on huomattavasti pienempää. Ihanteellisesti tämä kiihtyvyys olisi nolla, mitä vastaa mittaukseen kiinteän Maan pinnalla. Sekä laiva- että ilmagravimetriassa geometrinen kiihtyvyys eroaa nolasta ja tekee painovoiman tarkka mittaaminen hankalaksi. Kulkuneuvon liikkeet ovat mittauksen kannalta häiriötekijöitä.

Avaruudessa tapahtuvassa painovoimakentän mittauksessa tilanne on juuri päinvastoin. Satelliitissa toimiva paikallinen painovoima  $\mathbf{a}$  on nolla (*painottomuustila*) tai hyvin lähellä nolla. Geometrinen kiihtyvyys  $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}$  on melkein Maan pinnan painovoiman kokoinen, koska satelliitti “putoaa” vapaasti koko aikaa radassa lentäessä. Geometrinen kiihtyvyyttä mitataan jatkuvasti GPS-järjestelmän avulla – ns. “high-low satellite-to-satellite tracking” – ja myös satelliitin oma, ei-inertiaalinen liike  $\mathbf{a}$  mitataan kiihtyvyyksmittareiden avulla. Sen suurin aiheuttaja on ilmakehän kitka, koska painovoimakenttää tutkivan satelliitin rataa valitaan mahdollisimman alhaiseksi, radan korkeus on tyypillisesti 250-400 km.

Tällä hetkellä on kolme eri painovoimamissiota lennossa tai jo lentäneenä: CHAMP, GRACE ja GOCE.

CHAMP ([http://op.gfz-potsdam.de/champ/index\\_CHAMP.html](http://op.gfz-potsdam.de/champ/index_CHAMP.html)), pieni saksalainen satelliitti, lensi 2000-2010 ja tuotti suuren määrän dataa.

GRACE (<http://www.csr.utexas.edu/grace/>), pieni amerikkalais-saksalainen satelliittipari, mittaa erikoislaitteensa avulla tarkan peräkanavaa lentävän satelliittiparin (“Tom” ja “Jerry”) välisen etäisyyden, Maan painovoimakentän ajallisten muutosten määrittämiseksi. Se on ollut jo suuri menestys. Animaatio sen tuloksista löytyy tästä: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Global\\_Gravity\\_Anomaly\\_Animation\\_over\\_LAND.gif](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Global_Gravity_Anomaly_Animation_over_LAND.gif).

GOCE (Gravity Field and Ocean Circulation Explorer) kartoitti Maan painovoimakenttää v. 2009-2013 hyvin yksityiskohtaisesti ns. *painovoimagradiometrin* avulla, ks. <http://www.esa.int/esaLP/LPgoce.html>. GOCE-satelliitissa oli ns. *ionimoottori* ilmakehän vastuksen kompensoimiseksi ja mahdollisimman matalan radan mahdollistamiseksi. Painovoimagradientin erottaminen ilmakehän ja Maata kiertävän satelliitin oman rotaation vaikutuksista oli suuri haaste.

Kaikissa satelliiteissa on GPS-paikannuslaite ja kiihtyvyyksmittareita mukana, GOCESSa jopa kokonainen ns. gradiometria, jossa kuusi äärimmäisen herkkiä kiihtyvyyksmittaria.

## 8.4 Kalman-suodattimen käyttö ilmagravimetriassa

Lähdetään kaavasta (8.1). Voidaan kirjoittaa ( “dynaamisen kohinan”  $\mathbf{n}$ :n kerä):

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{g} + \mathbf{n},$$

eli

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tässä  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$  on *mitattu suure*, mutta  $\mathbf{g}$  ei ole.

Kirjoita

$$\mathbf{g} = \vec{\gamma} + \delta\mathbf{g},$$

missä  $\vec{\gamma}$  on sopiva vertausarvo (esim. *normaalipainovoima*) ja  $\delta\mathbf{g}$  painovoimahäiriö. Mallinnetaan  $\delta\mathbf{g}$  empiirisesti Gauß-Markov-prosessina (kaava (4.1)), eli kirjoitetaan

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{g} = -\frac{\delta\mathbf{g}}{\tau} + \mathbf{n}_g,$$

missä  $\tau$  on sopiva empiirinen aikavakio, jonka valinta riippuu paikallisen painovoimakentän käyttäytymisestä (korrelaatiopituus) sekä lentonopeudesta ja -korkeudesta. Nyt Kalman-suodattimen dynaamiset yhtälöt ovat:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \vec{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_a \\ 0 \\ \mathbf{n}_g \end{bmatrix}.$$

Tilavektorin pituus on näin ollen 9. Matriisi koostuu  $3 \times 3$  kappaleesta  $3 \times 3$ -kokoisista alimatriiseista, eli kokonaiskoko on  $9 \times 9$ .

Hienompi käsittelytapa ottaa huomioon, että painovoima  $\mathbf{g}$  on itse asiassa tuntemattoman paikan  $\mathbf{x}$  funktio:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \vec{\gamma}(\mathbf{x}_0) + M\Delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{g}$$

eli

$$\vec{\gamma}(\mathbf{x}) = \vec{\gamma}(\mathbf{x}_0) + M\Delta\mathbf{x},$$

jossa  $\mathbf{x}_0$  on paikan *likiarvo*, jota tunnetaan linearisoinnin ansiosta, ks. alla. Tässä ilmaantuu *gradienttimatriisi*  $M$ , kaava 3.5. Silloin on myös  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{v}$  linearisoitavia, ja käytettävä linearisoidut tila-alkiot  $\Delta\mathbf{x} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ,  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  tilavektorissa, ja yhtälöt ovat

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}(t) - \vec{\gamma}(\mathbf{x}_0) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

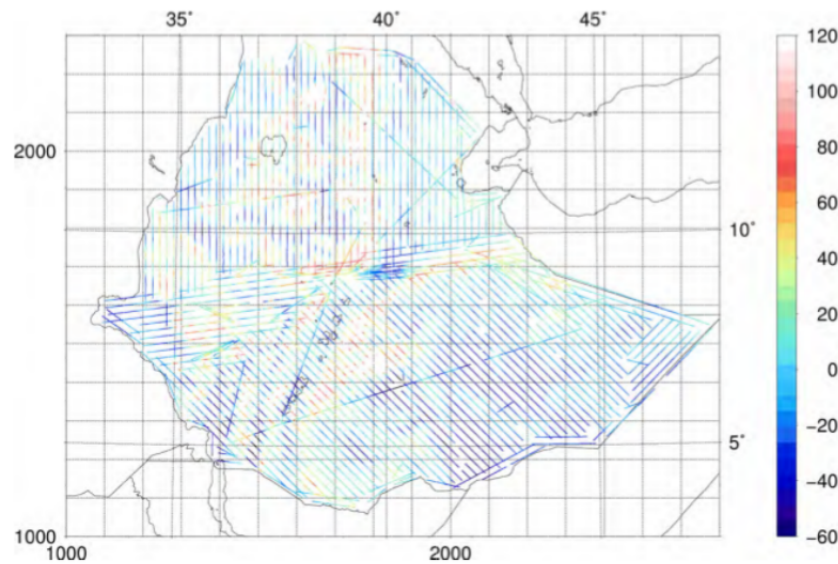
Lopputulos:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \Delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -M & -I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \Delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_a \\ 0 \\ \mathbf{n}_g \end{bmatrix}.$$

Havainto- eli *päivitysyhtälöt* ovat taas

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix}_i = \mathbf{x}(t_i) + \mathbf{m},$$

missä “kohinavektori”  $\mathbf{m}$  kuvaa GPS-paikannuksen tilastollista epävarmuutta. Sekä  $\mathbf{n}_a$ :lle että  $\mathbf{m}$ :lle on löydettävä sopivat tilastolliset mallit (varianssimatriisit  $Q$  ja  $R$ ) mittauslaitteiden ominaisuuksien perusteella.



**Kuva 8.1:** Ethiopian airborne gravity survey; measurement points. Values in mGal

## 8.5 Ilmagravimetrian nykytila

Ensimmäisiä menestyksekkäitä ilmagravimetriaprojekteja oli Brozena [1991], Grönlannin painovoimakartoitus.

Moni myöhempi mittaus, usein arktisilla tai antarktisilla alueilla, voidaan mainita [Forsberg et al., 1996, 2011].

Ilmagravimetria on sopiva tekniikka, jos kartoittava alue on laaja ja ei ole olemassa ennestään maan pinnalla tehty painovoimakartoitus. Ilma- ja avaruusgravimetrian etuihin kuuluu sen *homogeenisuus*: mittauksen laatu on sama suurten alueiden yli ja pitkien etäisyyksien yli ulottuvat systemaattiset virheet pieniä. Tämä on tärkeä etenkin, jos painovoima-aineisto on tarkoitettu geoidimäärittelykselle.

Viime aikana suoritettavat ilmagravimetriamittaukset ovat mm. Etiopia (Bedada 2010), Mongolia (Munkhtsetseg 2009), Indonesia (2010), ja monet muut.





## GPS-navigaatio ja tukiasemat

Aiheesta *GPS ja Navigaatio*, ks. mm. [Strang and Borre \[1997\]](#) ss. 495-514.

### 9.1 Differentiaalipaikannus

Differentiaalinen GPS käytetään laajasti myös perinteisessä geodeettisessa GPS-käsittelyssä. Aina kun käytetään ohjelmisto jossa rakennetaan ns. *double-difference* havaintosuureita, käytetään differentiaalimenetelmä. Kaksoiserotuksethan lasketaan vähentämällä toisistaan ei vain kahden satelliitin, vaan myös kahden maa-aseman, havainnot. Näin poistetaan asemien välisestä vektoriratkaisusta monet virhelähteet, jotka ovat periaatteessa huomattavia, mutta vaihtelevat hitaasti paikan mukaan, kuten:

- ▷ Ratavirheet, satelliittikellot
- ▷ Ilmakehä- (ionosfääri-, troposfääri-) virheet
- ▷ Antennin vaiheviivekuvion aiheuttamat, suunnasta (atsimuti, korkeuskulma) ja sen kautta paikallisen luotiviivan suunnasta riippuvat virheet.

Tosiaikaisissa differentiaalimenetelmissä käytetään *radiolinkki* alkuperäisten havaintojen tai “korjausten” siirtämiseksi toisesta maa-asemasta (jonka sijainti katsotaan tunnetuksi) toiseen (tuntemattomaan, usein liikkuvaan) maa-asemaan. Eri menetelmät

- ▷ käyttävät joko kantoaallon vaihe tai kantoaallon päälle moduloidun PRN-koodin viive, ja
- ▷ voivat käyttää yksi vertausasema kokonaisen alueen referenssiksi, tai useita asemia interpoloinnin mahdollistamiseksi; ja ne
- ▷ voivat interpoloida valmiiksi käyttäjälle (tunnetulla paikalla; 1-to-1 menetelmä) tai antaa käyttäjät itse interpoloida (1-to-many menetelmä).
- ▷ Peittävyys voi olla alueellinen (*Fokus* Suomessa) tai globaalinen (IDGS, Jet Propulsion Lab).
- ▷ Linkkinä voi toimia ULA-radio, radiopuhelin tai GSM-puhelin.

## 9.2 RTCM-standardi

Radio Technical Commission for Maritime Services (RTCM, <http://www.rtcn.org/>) SC-104 on määrittänyt GPS-differentiaalikorjausten standardiryhmän. Viestityyppejä on luetteloitu alla.

Message Type	Message Title
1	DGPS corrections
2	Delta DGPS corrections
3	Reference station parameters
4	Carrier surveying information
5	Constellation health
6	Null frame
7	Marine radiobeacon almanacs
8	Pseudolite almanacs
9	High rate DGPS corrections
10	P code DGPS corrections
11	C/A code L1/L2 delta corrections
12	Pseudolite station parameters
13	Ground transmitter parameters
14	Surveying auxiliary message
15	Ionospheric/tropospheric message
16	Special message
17	Ephemeris almanac
18	Uncorrected carrier phase measurements
19	Uncorrected pseudorange measurements
20	RTK Carrier phase corrections
21	RTK pseudorange corrections
22-59	Undefined
60-63	Differential Loran C messages

Markkinoilla on monet laitteistot, jotka lähettävät ja osaavat käyttää yllä olevat viestityypit differentiaalipaikannuksessa, joko käyttäen GPS-signaalin kantoaaltovaiheet (RTK-tekniikka) tai kantoaalloille moduloidut pseudosatunnaiskoodit (DGPS-tekniikka). Molemmissa tapauksessa paikannus on *reaaliaikainen*, saadun paikkaratkaisun “ikä” jää aina annetun raja-arvon alapuolelle.

## 9.3 Vaihetuettu koodimittaus

Tässä menetelmässä otetaan absoluuttinen pseudoetäisyys koodimittauksesta, mutta sen aallonpituuden murto-osa vaihemittauksesta.

Eryisesti kinemaattisissa GPS-sovelluksissa tämä on suositeltava toimenpide: koodimittaukset eivät sisällä ambiguuteetteja, mutta taas kantoaaltovaihemittaukset ovat paljon kohinattomampia.

Oletetaan, että meillä on havaintoina koodihavainnot  $p_1$  ja  $p_2$  (metrisia yksiköitä) ja kantoaallon vaiheet  $\phi_1$  and  $\phi_2$  (kulmayksiköitä, siis radiaaneja), aikana  $t$ .

Ensin konstruoidaan *ennustusyhtälö* tämän hetken (*a priori*) pseudoetäisyydelle käyttämällä edellistä, eli

$$p^-(t_i) = p(t_{i-1}) + \frac{\lambda}{2\pi} (\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})). \quad (9.1)$$

Tämä yhtälö pätee molemmille taaajuudelle 1 and 2, sekä myöskin “widelane” havaintosuureisiin, joita määritetään seuraavasti:

$$p_{WL} = \frac{f_1 p_1 - f_2 p_2}{f_1 - f_2}, \quad \phi_{WL} = \phi_1 - \phi_2.$$

Huomaa, että yhtälöä (9.1) voidaan tulkita Kalman-suotimen *dynaamiseksi yhtälöksi*: tila on  $p(t)$  ja tilan varianssimatriisia voidaan kutsua  $P^-(t)$ . Vaihekorjaustermi  $\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})$  voidaan katsoa *tunnetuksi* koska se on koodihavaintojen verrattuna tarkka.

Seuraavaksi lisätään tähän Kalman-suotimeen *havaintoyhtälö*: yksinkertaisesti tämän hetken  $p(t_i)$  havainto, jonka tarkuus voidaan kirjoittaa  $R_i$ . Nyt *korjausyhtälö* on

$$p^+(t_i) = p^-(t_i) + KH (p^-(t_i) - p(t_i)),$$

jossa  $H = [1]$ ,  $K = -P^- H^T (HP^- H^T + R)^{-1} = -P^- / (P^- + R)$ , ja siis

$$p^+(t_i) = \frac{R_i}{P^-(t_i) + R_i} p^-(t_i) + \frac{P^-(t_i)}{P^-(t_i) + R_i} p(t_i).$$

Siis: *a posteriori* pseudoetäisyys on painotettu lineaariyhdistelmä toisaalta ennustetun ja “carrier-smoothed”, toisaalta suoraan havaitun pseudoetäisyyden välillä.

Varianssien kasautumiseksi löydetään

$$P^+(t_i) = (I + KH) P^-(t_i) = \frac{R_i}{P^-(t_i) + R_i} P(t_i).$$

(Dynaamisen mallin varianssin kasautuminen on yksinkertaisesti:  $P(t_i) = P(t_{i-1})$ .)

On mahdollista *testata cycle slipejä* tässä menetelmässä: testattava suure on erotus

$$(p^-(t_i) - p(t_i)),$$

jonka keskivirhe on tiedossa:

$$\sigma = \sqrt{HP^- H^T + R} = \sqrt{P^- + R}.$$

Tämä tulee toimimaan parhaiten wide lane -lineaariyhdistelmää käyttäessä, sen suuren tehollisen aallonpituuden vuoksi, 86 cm.

Tämä Kalman-suodin voi pyöriä jatkuvana prosessina vastaanottimen sisällä (tai jälkikäsittelyohjelmiston sisällä, mutta ilman tosiaikaisuutta). Tulos  $p^+(t)$  on huomattavasti sileämpää kuin alkuperäinen  $p(t)$ .

## 9.4 Tukiasema ja korjaukset

RTCM-viestit lähettää *tukiasema*, jonka paikka on tarkasti mitattu staattista geodeettista paikannusta käyttäen. Koska paikka on tiedossa, voidaan laskea satelliittiratojen avulla, paljonko pseudoetäisyydet jokaiseen satelliitiin tulisi olla. Vähentämällä tätä mitatuista arvoista saadaan *korjaus*, joka koodataan viestiin (viestityypit 1, 2, 20 ja 21).<sup>1</sup> Lähetetyt korjaukset ovat voimassa tukiaseman kohdalla ja pienellä alueella sen ympäri. Alueen koko riippuu halutusta tarkkuudesta. Metritarkkuus saadaan jopa satojen kilometrien päässä tukiasemalta, mutta cm-tarkkuus (vain RTK-menetelmä) onnistuu vain n. parinkymmeneen kilometriin saakka.

Korjausviestien lähettämiseksi tarjoutuu monet tekniikat: radio, matkapuhelin, Internet, . . . . Tarvittava datansiirtokapasiteetti on tyypillisesti luokkaa 9600 bps (bits per second). Datavirran komprimointi on tavallista. Maksullisen Fokus-palvelun (Digita Oy, Indagon Oy) datavirta on myös salattu ja avattavissa vain asiakkaan vuokraaman “mustan laatikon” avulla. Vuoden 2012 alussa palvelua korvataan @Focus-palvelulla joka perustuu NTRIP-Internetprotokollaan.

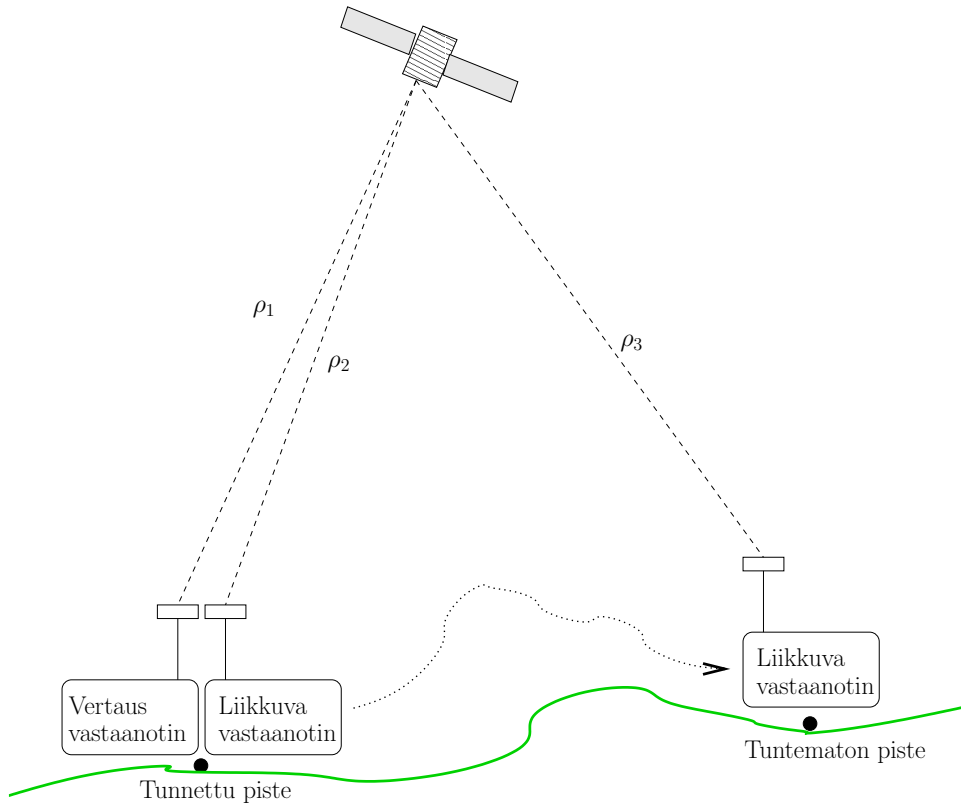
## 9.5 RTK-mittaukset

RTK = Real Time Kinematic.

Kinemaattinen mittausmenetelmä keksi amerikkalainen Benjamin REMONDI. Se perustuu siihen, että vastaanotin “lukitaan” GPS-kantoaallon vaiheeseen, ja niin kauan kuin lukitus jää voimaan (ei tapahdu “cycle slip”), kantaaltovaiheen kokonaisarvo on tiedossa. Ks. kuva.

---

<sup>1</sup>RTK:n tapauksessa usein lähetetään mieluummin alkuperäiset vaihevaihinnot, tyypit 18 ja 19, mutta käsitteellisesti asia on sama.



Mitataan kanta-aaltovaihe ensin *kun molemmat vastaanottimet ovat tunnetulla pisteellä*:

$$\begin{aligned}\varphi_{R_1}^S &= -f \frac{\rho_1}{c} - f \Delta \delta_1 + N_1, \\ \varphi_{R_2}^S &= -f \frac{\rho_2}{c} - f \Delta \delta_2 + N_2,\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}\Delta \delta_1 &= \delta_{R_1} - \delta^{S(1)}, \\ \Delta \delta_2 &= \delta_{R_2} - \delta^{S(1)}\end{aligned}$$

ovat vastaanottimen ( $R_1$  vertausvastaanotin,  $R_2$  liikkuva vastaanotin) kellon poikkeaman ja saman hetken satelliitin kellon poikkeaman  $\delta^{S(1)}$  välinen erotus. Indeksä (1) viittaa alkutilanteeseen jossa molemmat vastaanottimet ovat tunnetulla pisteellä.

Suure  $N_i$  on tuntematon kokonaisluku, *ambiguiteetti*, valittu niin, että  $\varphi$ -arvot ovat aina välillä  $[0, 1)$ .

Sen jälkeen siirretään liikkuva vastaanotin tuntemattomalle pisteelle  $R_3$  ja saadaan

$$\varphi_{R_3}^S = -f \frac{\rho_3}{c} - f \Delta \delta_3 + N_3,$$

jossa (nyt (2) viittaa uuteen tilanteeseen tuntemattomalla pisteellä):

$$\Delta \delta_3 = \delta_{R_2} - \delta^{S(2)}.$$

Seuraavat oletukset:

1. Ei ole tapahtunut "cycle slip", eli  $N_3 = N_2$ .
2. Kulunut aika on niin lyhyt, että sekä  $\delta^{S(1)} = \delta^{S(2)}$  että  $\delta_{R_2} = \delta_{R_1} + \Delta\delta_{12}$ , missä  $\Delta\delta_{12}$  on *vakioero* (kahden vastaanottimen kellojen välinen kellovirhe-ero);  
eli  $\Delta\delta_2 = \Delta\delta_1 + \Delta\delta_{12}$  ja  $\Delta\delta_3 = \Delta\delta_2 = \Delta\delta_1 + \Delta\delta_{12}$ ;
3. Tunnetulla pisteellä vertaus- ja liikkuva vastaanotin ovat samassa paikassa<sup>2</sup> eli  $\rho_1 = \rho_2$ .

Silloin

$$\Delta\varphi_{R_1R_2}^S \equiv \varphi_{R_2}^S - \varphi_{R_1}^S = (N_2 - N_1) + f\Delta\delta_{12} \quad (9.2)$$

ja

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{R_1R_3}^S &\equiv \varphi_{R_3}^S - \varphi_{R_1}^S = \\ &= -f\frac{(\rho_3 - \rho_1)}{c} + (N_2 - N_1) + f\Delta\delta_{12}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Kaavassa (9.2) vasen puoli on *mitattu*. Saadaan suoraan  $(N_2 - N_1) + f\Delta\delta_{12}$  sijoitettavaksi kaavaan (9.3), ja havaintoyhtälöksi saadaan:

$$\Delta\varphi_{R_1R_3}^S - (N_2 - N_1) - f\Delta\delta_{12} = -f\frac{\rho_3 - \rho_1}{c},$$

missä vasen puoli on "havaittu" suure, ja oikealla puolella  $\rho_3$  on tuntemattoman pisteen koordinaattien (eli tasoitusongelman tuntemattomien) funktio. Linearisointi tuottaa havaintoyhtälö sijoitettavaksi joko pienimmän neliösumman tasoitusrutiiniin tai Kalman-suodattimeen.

*Huomaa, että suure  $N_2 - N_1 + f\Delta\delta_{12}$  on reaaliluku, mutta  $N_2 - N_1$  on kokonaisluku. Jos on käytettävissä yht'aikaa ei vain yksi satelliitti vaan useita, satelliiti  $S_k$ , saadaan tunnetulla pisteellä lasketuksi useita suureita,*

$$\nu^{S_k} \equiv N_2^{S_k} - N_1^{S_k} + f\Delta\delta_{12} \quad (9.4)$$

missä kuitenkin on yksi ja sama  $\Delta\delta_{12}$ . *Valitaan kokonaisluku  $N_2^{S_1} - N_1^{S_1}$  niin, että  $f\Delta\delta_{12}$  minimalisoituu (esimerkiksi!). Sen jälkeen voidaan laskea*

$$N_2^{S_k} - N_1^{S_k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

ja niiden pitää olla myös kokonaislukuja. Ellei, meillä on *tasoituksen ehto* jonka avulla voimme hieman parantaa arvo  $\Delta\delta_{12}$ , esim. voidaan minimoida  $(N_2^k - N_1^k)$ :n neliöllisten poikkeamien summa ( $k = 1, 2, \dots$ ) lähimmistä kokonaisluvuista. Tämän jälkeen voidaan pyöristää arvot  $N_2^k - N_1^k$  lähimpään kokonaislukuun.

Koko tämän operaation lopputuloksena saadaan hieman tarkemmat havaintosuureet, siis myös tarkemmat tuntemattomien estimaattorit. Mutta valitettavasti se toimii vain, jos matka on suhteellisen lyhyt, korkeintaan 10-20 km. Muuten ilmakehän ja satelliittiratojen epävarmuuden vaikutuksesta arvot  $N_2^k - N_1^k$  eivät tule olemaan riittävän lähellä kokonaislukuja.

<sup>2</sup>... yleisemmin, niiden välinen paikkaero on tarkasti tiedossa

## Muut virhelähteet

Yleisemmässä tapauksessa suureisiin  $\nu^k$  sisältyy kellovirheiden lisäksi myös ionosfäärin ja neutraalin ilmakehän (“troposfäärin”) aiheuttamat viiveet. Siinä tapauksessa voidaan kirjoittaa

$$\nu^{S_k} = N_2^k - N_1^k + f(\delta_{R_2} - \delta_{R_1}) + \frac{d_{12}^{\text{ion}}}{\lambda} + \frac{d_{12}^{\text{trop}}}{\lambda}.$$

*Tosiaikaisissa* sovelluksissa mallinnetaan usein sekä vastaanottimen kellovirhe  $\delta_{R_i}$  että ionosfäärin ja troposfäärin viiveet Gauß-Markov tai random walk-prosesseina sopivilla parametreilla. Silloin kaikki parametrit, myös liikkuvan vastaanottimen koordinaatit, estimoidaan tosiajassa Kalman-suodattimen avulla ja ne ovat heti käytettävissä.

## Kaksoiserotusten käyttö

Yllä olevassa geometriassa on houkuttelevaa käyttää *kaksoiserotuksia*, ts. havaintosuureita joita saadaan ottamalla *erotus* kahden satelliitin välillä. Silloin saadaan tukiasemalla

$$\begin{aligned} \nabla \Delta \varphi_{R_1 R_2}^{S_1 S_2} &\equiv (\varphi_{R_2}^{S_2} - \varphi_{R_1}^{S_2}) - (\varphi_{R_2}^{S_1} - \varphi_{R_1}^{S_1}) = \\ &= (N_2^2 - N_1^2) - (N_2^1 - N_1^1) + f \Delta \delta^{12}, \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} \Delta \delta^{12} &= \Delta \delta_{12}^2 - \Delta \delta_{12}^1 = \\ &= \{(\delta_{R_2} - \delta^{S_2}) - (\delta_{R_1} - \delta^{S_2})\} - \\ &\quad - \{(\delta_{R_2} - \delta^{S_1}) - (\delta_{R_1} - \delta^{S_1})\} = \\ &= 0, \end{aligned}$$

ja samalla tavalla

$$\begin{aligned} \nabla \Delta \varphi_{R_1 R_3}^{S_1 S_2} &\equiv (\varphi_{R_3}^{S_2} - \varphi_{R_1}^{S_2}) - (\varphi_{R_3}^{S_1} - \varphi_{R_1}^{S_1}) = \\ &= -f \frac{(\rho_3^2 - \rho_1^2) - (\rho_3^1 - \rho_1^1)}{c} + \\ &\quad + (N_2^2 - N_1^2) - (N_2^1 - N_1^1) + f \Delta \delta^{12}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

missä taas  $\Delta \delta^{12} = 0$ .

Tässä tapauksessa “ $\nu$ -suure”, joka ratkaistaan laittamalla vertausvastaanotin ja liikkuva vastaanotin vierekkäin:

$$\nu^{S_1 S_2} = (N_2^2 - N_1^2) - (N_2^1 - N_1^1)$$

kahdelle satelliitille  $S_1$  ja  $S_2$ . *Tämä on kokonaisluku.* Havaitaan suure  $\nabla \Delta \varphi_{R_1 R_2}^{S_k S_m}$  kaikille satelliittipareille ( $k = 1, \dots, n$ ,  $m = k + 1, \dots, n$ ), missä  $n$  on satelliittien määrä, ja pyöristetään lähempään kokonaislukuarvoon. Sen jälkeen löytyneet arvot voidaan käyttää suureiden  $(\rho_3^{S_k} - \rho_1^{S_k}) - (\rho_3^{S_m} - \rho_1^{S_m})$  laskemiseksi havainnoista  $\nabla \Delta \varphi_{R_1 R_3}^{S_k S_m}$ .

## Nopea ambiguiteettiratkaisu

Edellä kuvattu mittausmenetelmä edellyttää, että ennen kenttämittausta (eli liikkuvan vastannottimen liikkuminen kentällä ja sen käyminen mitattavilla pisteillä) ja tarkistuksen vuoksi myös sen jälkeen, liikkuva vastaanotin käy vertausvastaanottimen viereen (ns. *kolokaatio*).

Usein tämä on jokseenkin hankala; vertausvastaanotin voi olla varsinaisen mittausalueen ulkopuolella ja “palveluntarjoajan” pyörittämä. Tätä varten on keksitty *nopea ambiguiteettiratkaisu*. Se toimii parhaiten, jos liikkuvan ja vertausvastaanottimen välinen etäisyys on niin pieni, että niiden väliset differentiaaliset ilmakehä- ja ratavirheet voidaan jättää huomioimatta. Tässä tapauksessa kaava (9.5) on

$$\begin{aligned}\nabla\Delta\varphi_{R_1R_3}^{k_1k_2} &\equiv (\varphi_{R_3}^{k_2} - \varphi_{R_1}^{k_2}) - (\varphi_{R_3}^{k_1} - \varphi_{R_1}^{k_1}) = \\ &= -f \frac{(\rho_3^{k_2} - \rho_1^{k_2}) - (\rho_3^{k_1} - \rho_1^{k_1})}{c} + (N_2^{k_2} - N_1^{k_2}) - (N_2^{k_1} - N_1^{k_1}).\end{aligned}$$

Tässä suuret

$$\nabla\Delta\rho_{R_1R_3}^{k_1k_3} \equiv (\rho_3^{k_2} - \rho_1^{k_2}) - (\rho_3^{k_1} - \rho_1^{k_1})$$

ovat puhtaasti geometrisia. Jos kirjoitetaan

$$\rho_3^{k_i} = \sqrt{(X^{k_i} - X_{R_3})^2 + (Y^{k_i} - Y_{R_3})^2 + (Z^{k_i} - Z_{R_3})^2}, \quad i = 1, 2,$$

näky, että ainoat tuntemattomat tässä ovat liikkuvan vastaanottimen paikka

$$\begin{bmatrix} X_{R_3} & Y_{R_3} & Z_{R_3} \end{bmatrix}^T.$$

Liikkuvan vastaanottimen paikkaa tunnetaan kuitenkin aina muutaman metrin tarkkuudella *GPS-koodimittauksen* avulla, jolla ei ole tämä ambiguiteettiongelma. Siksi rittää, jos etsitään mahdollisten vastaanottimen paikkojen joukosta (etsintäavaruus, joka kuuluu joukkoon  $\mathbb{R}^3$ ) vain ne paikat joille *kaikki* arvot

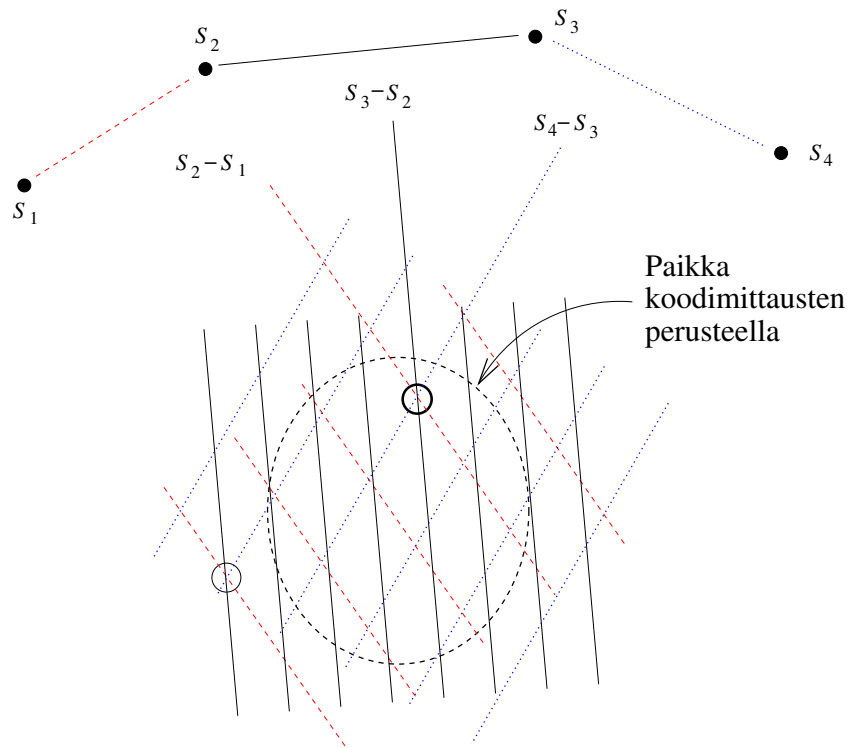
$$\nabla\Delta N_{12}^{k_1k_2} \equiv (N_2^{k_2} - N_1^{k_2}) - (N_2^{k_1} - N_1^{k_1})$$

ovat kokonaislukuja.

Ks. kuva 9.1. Kääntäen, jos on  $n$  satelliittia, on  $n - 1$  eri ambiguiteettiarvoa  $\nabla\Delta N$ . Ambiguiteettiyhdistelmät ovat siis  $n - 1$ -ulotteisen avaruuden alkioita. Mikäli jokaisella ambiguiteetilla on, sanotaan, 10 eri mahdollista arvoa jotka ovat yhteensopivia koodimittauksesta saadun likisijainnin kanssa, antaa tämä jo  $10^{n-1}$  eri ambiguiteettiyhdistelmää. Jos on 8 satelliittia, on tämä luku 10 miljoona. Liian monta vaihtoehtoa tutkittavaksi tosiajassa laitteessa, jolla on rajallinen laskentakapasiteetti.

Kuitenkin voidaan huomauttaa, että niistä ambiguiteettivaihtoehdoista vain hyvin pieni murto-osa on *konsistentti* liikkuvan vastaanottimen tietyn sijainnin kanssa: konsistentit ambiguiteettiyhdistelmät kuuluvat ambiguiteettiavaruuden *kolmiulotteiseen aliavaruuteen*, jonka eräs parametrusointi on koordinaatit  $\begin{bmatrix} X_{R_3} & Y_{R_3} & Z_{R_3} \end{bmatrix}^T$ , kuten yllä jo huomautettiin.





**Kuva 9.1:** Ambiguiteettiratkaisu

Viime vuosina on kehitetty ovelia ja tehokkaita menetelmiä ambiguiteettien ratkaisemiseksi tässä konsistentissa aliavaruudessa, kuten LAMBDA-menetelmä (LAMBDA = Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment, [Teunissen et al. \[1997\]](#)).

Kuvatunlainen ambiguiteettiratkaisumenetelmä onnistuu ilmeisesti vain, jos vertaus- ja liikkuvan vastaanottimen välinen matka on riittävän lyhyt, käytännössä alle 10-20 km. Siinä tapauksessa voidaan myös käyttää hyväksi se seikka, että GPS-satelliitit lähettävät signaaliaan *kahdella eri taajuudella*,  $L_1$  (1575.42 MHz) ja  $L_2$  (1227.60 MHz). Ambiguiteettiratkaisua saadaan joko heti, tai muutaman epochin jälkeen.

Ambiguiteettiratkaisu on myös mahdollinen pitemmille vektoreille, mutta on paljon hankalampi, työläämpi ja aikavievämpi, koska ilmakehän aiheuttamat virheet jne. on otettava huomioon.

## 9.6 Verkko-RTK

Kokeilu on käynnissä, ja jo tehty, verkkomaisen RTK-ratkaisun toteuttamiseksi: tässä käytetään useita tukiasemia, ja jollain tavalla korjaukset *interpoloidaan* käyttäjän paikalle.

Kaksi perusmenetelmää:

1. *Broadcast*-menetelmä: korjaukset lähetetään monelle käyttäjälle yht'aikaa. Voi käyttää esim. radiolähetyksen ULA-sivukaista (RDS, Radio Data System).

2. *One-to-one* (“singlecast”) -menetelmä: korjaukset lasketaan yhtä käyttäjää varten, ja lähetetään hänelle esim. matkapuhelimitse tai Internetin välityksellä. Jokaisen käyttäjän korjausviestin sisältö voi olla erilainen.

Eräs one-to-one menetelmän variantti on *virtuaalitukiasema*-menetelmä, missä lasketaan interpoloimalla tukiasemien korjaukset “virtuaalitukiaseman” korjauksiksi havaitsijan lähellä.

Erilaiset interpolointitekniikat:

1. Raaka voima; tässä oletetaan, että korjaus on jatkuva paikan funktio maan pinnalla. Jos oletetaan tätä funktiota lineaariseksi, riittää kolme tukiasemaa mittausalueen ympäri
2. ilmakehän jne. mallinnus. Periaatteessa voisi parantaa interpolointituloksia, jos malli on hyvä.

Monessa paikassa, mm. Saksassa, on käytössä Spectra Precision Terrasat *GPS-Network* softa (<http://www.terrasat.de/applications/refvirtual.htm>), joka perustuu virtuaalitukiasema-konseptiin. Myös Suomessa tämä järjestelmä toimii Geotrimin GNSSnet-verkossa.

## 9.7 Globaalinen DGPS

Tämä on Jet Propulsion Laboratoryn keksimä ja toteuttama järjestelmä. Internetin välityksellä lähetetyt korjaukset ovat globaalisti valideja.

IGDG, Internet-based Global Differential GPS. <http://gipsy.jpl.nasa.gov/igdg/>.

Systeemi toimii seuraavasti:

Jokainen sekunti lähetetään 560-bittinen viesti käyttäjälle, joka sisältää kolmiulotteiset satelliittipaikkakorjaukset ( $XYZ$ ) sekä metritason satelliittikellokorjaukset neljälle (4) satelliitille, ja cm-tason jäännöskorjaukset 32 satelliitille.

Tämän ansiosta on mahdollista korkeintaan 8 sekunnin jälkeen rekonstruoida kaikki rata- ja kellokorjausten lähtöarvot 32 satelliitille. Sen jälkeen ne pidetään ajan tasalla.

Kellokorjausten resoluutio on 1.5625 cm, ratakorjausten resoluutio 6.25 cm.

Korjaukset lähetetään Internetin kautta käyttäjälle TCP-protokollaa käyttäen.

## 9.8 RTCM Internetin yli (NTRIP -protokolla)

“Networked Transport of RTCM via Internet Protocol”.

Ks. <http://igs.bkg.bund.de/pdf/NtripPaper.pdf>. Tämä on lupaava menetelmä joka on myös Suomessa jo kokeiltu. Vuodesta 2012 lähtien Suomessa tarjotaan @Focus-palvelu (Indagon Oy) joka käyttää NTRIP-protokollaa.

## Tosiaikaiset järjestelmät ja verkot

Teknologinen navigointi on usein riippuvainen ulkoisen datan saannista tosiajassa tietoliikenneverkosta, ja lisäksi sisäänrakennetusta laskentakapasiteetista ja ohjelmistosta joka riittää tosiaikaiskäyttöön. Näitä vaatimuksia käsitellään seuraavasti.

### 10.1 Tietoliikenneverkot

#### Lähetysverkot

.Lähetysverkot eli yksi-moni -tyyppiset viestintäverkot, ovat lähes yhtä vanhoja kuin radioaaltojen keksiminen. Radioaallot (kantoaallot) voidaan käyttää digitaalistenkin signaalien välittämiseksi, esim. käyttämällä Morse-koodia (radiosähkötys), tai analogiset signaalit, mm. ääni (radiopuhelinviestintä), kuvat (televisio), tai analogiset tai digitaaliset mittaustiedot (telemetry).

Informaatio kuljetetaan radioaaltojen avulla *moduloimalla* ne. Modullatiotekniikat ovat mm. amplituudimodulaatio, taajuusmodulaatio ja vaihemodulaatio.

#### Esimerkki: amplitudimodulaatio

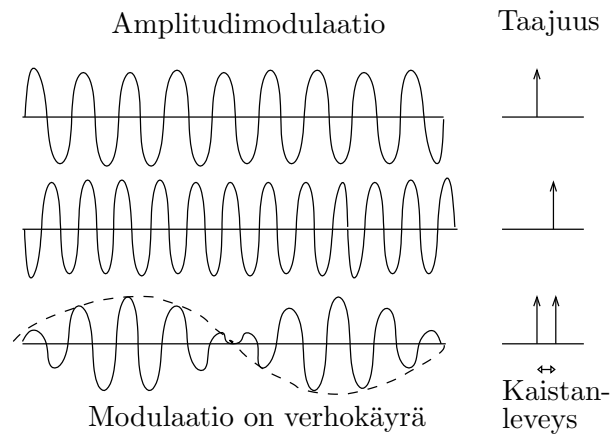
Kuvassa 10.1 we see how amplitude modulation places a signal (the dashed curve, e.g., a sound wave) on top of the carrier wave. To the right we see what the spectrum of the modulated wave looks like.

Jos kutsutaan kantoaallon taajuus  $F$ :ksi ja moduloivan signaalin (äänen) taajuus  $f$ :ksi, voidaan kirjoittaa moduloitua signaalia tähän muotoon:

$$\begin{aligned} A(t) &= \cos(2\pi F) \cdot \cos(2\pi f) = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(2\pi [F + f]) + \cos(2\pi [F - f])], \end{aligned}$$

josta näkyy, että uutta aaltoa voidaan esittää kahden taajuuden,  $F + f$  ja  $F - f$ , summana.

Now, if the modulating wave contains a large number of different frequencies,  $0 < f < f_{max}$ , the resulting spectrum will contain signal in the full range  $(F - f_{max}, F + f_{max})$ . We say that the *band width consumption* is  $2f_{max}$ .



**Kuva 10.1:** Amplitude modulation and bandwidth.

For broadcasting networks, bandwidth is a scarce and valuable resource, to be carefully allocated.

### Nyqvistin lause

One can show that in order to represent a function of time by sample points, the distance  $\Delta t$  between the sample points should never be more than *one-half the shortest period* present in the function. This is called the Nyquist Theorem. For a function satisfying Nyquist's condition, it is possible to transform it back and forth from the time domain  $A(t)$  representation to the frequency domain  $\tilde{A}(f)$  representation using the discrete Fourier transform. Numerically, typically the Fast Fourier Transform (FFT) is used.

Now, if we have a modulating function  $a(t)$ , that has as its highest contained frequency  $f_{max}$ , then its shortest contained period is  $1/f_{max}$ . The number of samples transmitted using amplitude modulation will then be  $\max 2f_{max}$ , i.e., precisely the effective bandwidth occupied by the modulated signal.

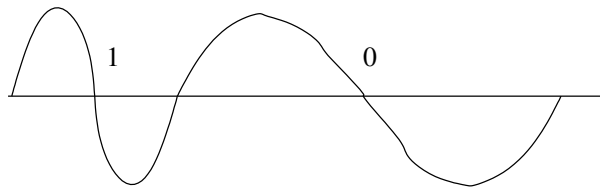
## Switched connection networks

### Historia

The first, still existing and wildly successful switched, or many-to-many, connection network is the telephone network.

The invention of the telephone is usually credited to Alexander Graham Bell. In reality, like with the steam engine, the telescope and many other inventions, the time was ripe for it and many people, like Elisha Gray (who filed his patent a mere two hours after Bell!), Antonio Meucci and Thomas Edison, contributed valuable ideas before a working implementation became the basis of the first telephone network.

For many years, American Telephone and Telegraph held a monopoly on telephone technology. Off and on, there were anti-trust proceedings against the company, which is also credited with laying the first trans-atlantic phone cable, launching the first communications satellite (Telstar), and inventing Unix...



**Kuva 10.2:** FSK-modulation.

Telephone is based on transmitting sound in electric form over a copper cable. This is still the way it happens for the few metres nearest to the consumer, although all in-between equipment is nowadays fully digital. Making a connections between two telephone customers was originally done by hand; already before 1900, the first, mechanical automatic switches were built. A number was dialled using a round disc, sending as many pulses as the number being encoded. This is called “pulse dialling”. Today, faster tone dialling has completely replaced it.

The number system for telephones is a three-layer, hierarchical system that is not controlled from a single point: a remarkable invention. It has aged well in spite of being extraordinarily user-hostile: Looking up telephone numbers is done manually using thick paper books. The world is divided into national domains having country codes. The United States has code 1, most larger countries have two-digit codes (e.g., Germany 49), while smaller, poorer countries like Finland have settled for three-digit codes (358). Under the national domains are trunk codes, typically (but not necessarily) for cities, within which individual subscribers have their numbers.

Attempts to make phone numbers “mnemonic”, so they can be easier remembered, have pretty much failed; new telephone concepts such as Internet telephony, may soon change this.

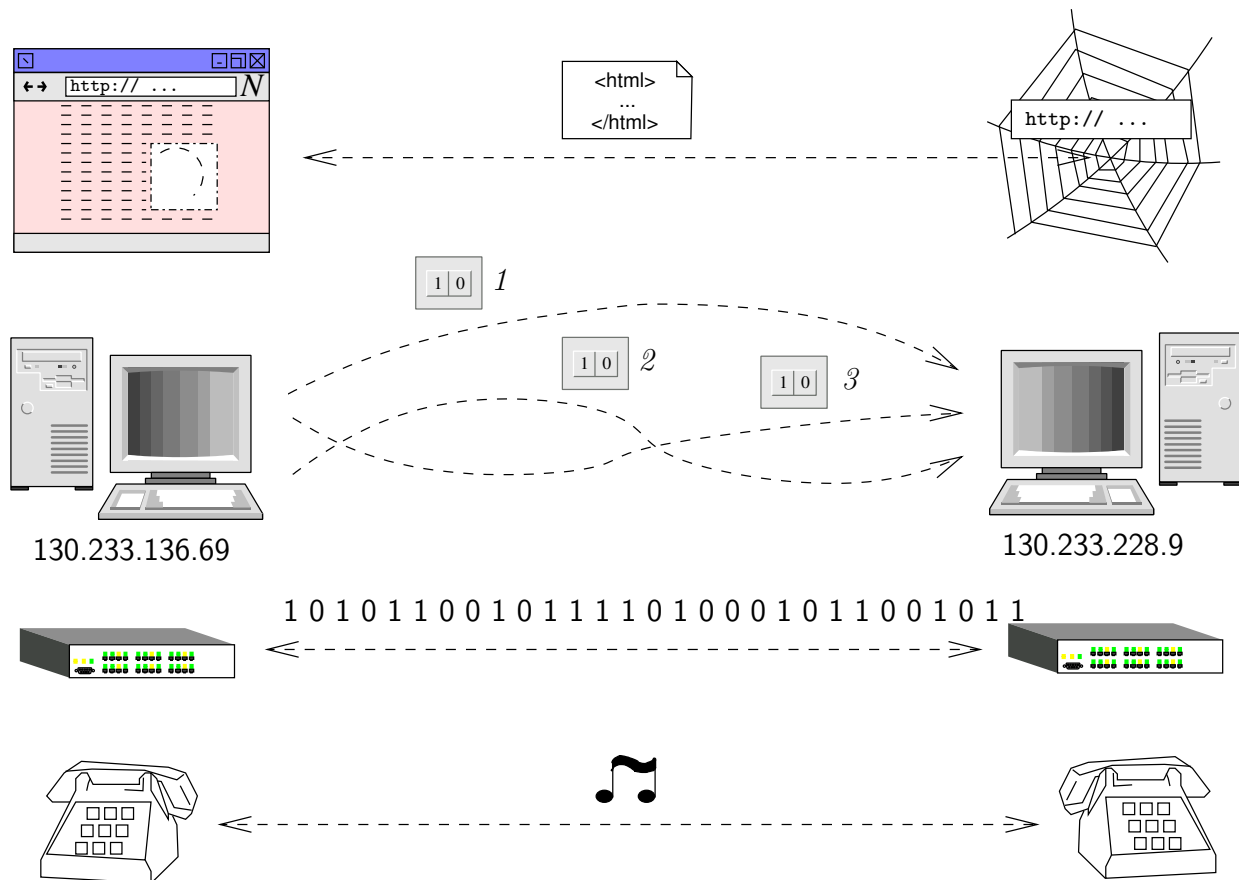
The digitization of the telephone network has also made possible to offer customers “always-on” data connections, even over last-few-metres copper, which use frequencies above those used for audible sound. Using a low-pass filter in-between, it is even possible to use voice and data on the same line (Digital Subscriber Line, DSL).

## Modems

Given that the phone network is designed for the transport of sound, it is necessary, in order to transport data on it, to convert this to and from the form of (analogue) sound waves. This is done with a device called a *modem* (modulator-demodulator).

The picture 10.2 shows one technique (Frequency Shift Keying) often used for modulation: a logical 1 is encoded as a short (high frequency) wave, a logical 0 as a long (low frequency) wave. This is a simple, somewhat wasteful, but effective and robust modulation technique. Additionally, checksums are transmitted as well, in order to verify that the data received equals the data sent (Parity check, Cyclic Redundancy Check) even over noisy lines. Compression is used if possible and speeds up especially the transfer of textual material.

There are a number of standards for modems, mostly created by the International Telecommunications Union. Over a good quality analogue line, 56k bits/second is the best achievable.



Kuva 10.3: Protokollapinin esimerkki

Using a modem to transfer data over a network designed for sound only is an example of a *protocol stack*: the lowest layer is sound transfer, upon which digital data transfer, in the form of a bit stream, is layered. Other layers can still be placed on top of this: the Internet Protocol and TCP to be discussed later, advanced protocols such as the Web service HTTP, and so on. Establishing such a connection requires bringing up every layer of the stack in succession, from the ground up.

In a protocol stack, typically the higher layers are implemented in software, whereas the lowest layers are hardwired. E.g., telephone sound is transmitted traditionally as voltage fluctuations in a copper wire. As digital technology develops, however, the software comes down in the stack: for all but the last few metres, nowadays telephone sound moves as digital bit patterns, often in optic fibre cables.

This creeping down of software is leading to devices that previously were very different, to become almost the same on the hardware level. E.g., a telephone and a television set are becoming mostly just general purpose computers, differently programmed. This phenomenon is known as *convergence*.

### Mobile phones

Mobile phones based on GSM (Global System for Mobile Communications) can also be used for data transfer; data rates achievable are 9600-14400 bits/second. As GSM is a

natively digital telephony system, it wouldn't be correct to talk about "GSM modems", as is often done.

However, there is a development towards more advanced protocols such as GPRS (General Packet Radio Services) which allow an always-on digital connection with much higher data rates. This brings us to the following subject: packet switching networks.

## Packet forwarding networks

With this we mean the Internet. Also this is a many-to-many communication network; but there the similarity with the telephone network ends. The internet is based on the transfer of *packets* made up of data bytes and accompanying information. There is no way of telling how a particular packet will reach its destination (or, indeed, whether it will at all, and, if so, how quickly).

The functioning of the Internet, IP addresses, and domain name services is explained in many places (e.g., [http://www.cisco.com/univercd/cc/td/doc/cisintwk/ito\\_doc/ip.htm](http://www.cisco.com/univercd/cc/td/doc/cisintwk/ito_doc/ip.htm)) and we will not repeat it here. There are a number of protocols built upon the Internet Protocol, the most important of which are

- ▷ ICMP (Internet Control Message Protocol), e.g., the well-known "ping" command for checking network connectivity.
- ▷ UDP (User Datagram Protocol) is a connectionless protocol. Essentially, a transmitter sends out packets, and a receiver receives them – most of the time. There is no check on successful reception, and not even if packets purported to come from the same source actually do. But UDP's overhead is low, which is why it is sometimes used. E.g., the Network Time Protocol uses UDP. A time server just sprays packets around for clients to pick up and synchronize their clocks to.
- ▷ TCP (Transmission Control Protocol) is a *connection based* protocol. It establishes a connection between two hosts on the Internet, and then exchanges packets in both directions, until the connection is closed. It is thus a *bidirectional* protocol, but is always *initiated* from one side, typically the client side.

The packets may travel from one host to the other over many different paths; the receiver places them in the proper order based on a *sequence number* contained in every packet. If a packet is missing and has timed out, a request to re-send is issued. Thus, TCP is *reliable*.

The security of the connection is safeguarded by each host randomly choosing the starting value of its packet counter for this connection. Such a connection could be hijacked in principle – a so-called "man-in-the-middle attack" – but it is not easy.

Every packet contains two data fields called *source port* and *destination port*. These are numbers between 1 and 65535 which are used to distinguish various service types from each other. E.g., HTTP uses port 80 – usually<sup>1</sup>. It is important to understand that these ports are purely software things; it is the networking software layer in the operating system

---

<sup>1</sup>There is a list of all services in the file `/etc/services`.

that distinguishes these port numbers from each other and directs packets to appropriate server/client processes. Nothing like a (hardware) serial or parallel or USB port!

Note that one thing that *none* of these Internet protocols is, is *real time*. They are sometimes used in a real time fashion, assuming that the latency on a transmission will never become very large, but that is a *gamble*; a fairly harmless one, e.g., for music streaming. But already modest congestion – locally or upstream – will make transmission times totally unpredictable.

## 10.2 Real time systems

### Hardware

In real time systems used for navigation, digital hardware included will typically have a rather low processing capacity. Think, e.g., of mobile phones: the dictate of low power consumption and small form factor limits what kinds of circuitry one can use, and how much of it.

Another limitation may be, that no full-blown keyboard may be used, and instead of a mouse, a stylus and touch screen – of limited size – is indicated. Also ruggedness may be required depending on the navigation environment.

### Operating systems

The hardware limitations mentioned obviously also limit what operating system software can be used. Typically found are “embedded” operating systems, like in mobile phones Symbian, in PDAs (Personal Digital Assistants) PalmOS, and more and more Windows CE, e.g., in the iPaq and friends, which however consume significantly more power.

In high-reliability operations, e.g., on spacecraft, also systems like the QNX and Wind River Systems<sup>2</sup> real time embedded operating systems are being used. In “hard” real time applications, the operating system should preferably not crash<sup>3</sup>.

Linux/Unix variants are also being used and have become recently quite popular, e.g., Android and the iPhone’s OS X.

It will be clear that, for interfacing with various devices such as GPS and other sensors, the availability – or easy development – of device drivers is critical.

As hardware capability grows while size and power consumption drops, more and more “general” consumer grade operating systems, slightly adapted, are finding their way also into these constrained mobile platforms.

### Interrupts, masking, latency

A typical operating system functions in the following way: upon start-up, after operating system, file system and device driver functions have been enabled, the initial process goes

---

<sup>2</sup>The Mars rovers Spirit and Opportunity use the Wind River Systems software.

<sup>3</sup>... which however the Spirit’s system did, due to running out of *file handles*. But it came beautifully back up again.



into multi-user mode and spawns all the background service processes (daemons) that are supposed to run on this system. Then it loads a login process, presenting it to the user on one or more consoles connected to the system. When a user logs in, he is presented with a *shell* or command interpreter, allowing him to start his own user processes.

On consumer grade OSes, a windowing GUI or Graphical User Interface is started up as well at this stage, making possible operation by lightly trained personnel. This is however quite demanding in resources. Also from the GUI, user processes can be started in addition to the system processes underlying OS and GUI operation.

The defining property of an operating system is, that it manages the system's various resources in a way that is transparent to the user. Device drivers are one example of this. And, e.g., CPU resources are managed through the *scheduler*.

If we look at a single process<sup>4</sup>, we can say that the path of execution is *linear*. This means that execution either proceeds to the next statement, or to a statement pointed to by a branching (`if`, `switch`, ...) statement. This makes it easy to keep track of the current *state* of the process: it can only be changed by statements that we have executed.

Looking at a procedure or subroutine or method, it is only executed because *another* procedure, and ultimately the main program, called it in the course of *its* linear execution. The way a procedure is executed is as follows: when it is called, it places a *return address* – the current Program Counter in the calling procedure – on the *stack*. Next, any locally defined variables are also located on the top of the stack, which thus grows. When the flow of control meets the end of the procedure, first the local variables are deallocated, and then the top of the stack is moved back into the Program Counter of the CPU again, and we have returned to the calling procedure.

*Interrupts* change this whole picture. Computer hardware provides for a number of different interrupts, and they can happen at any time. When they happen, it is their responsibility not to change anything that could interfere with the processes that are currently executing. Interrupts are used, e.g., to service input/output devices that cannot wait. Every interrupt is connected to an interrupt service routine, which is executed when it is triggered.

Take the clock interrupt routine, for example. It is triggered 50 times a second, and its main function is to increment the software time register kept by the operating system software. But it is typically also responsible for *task switching*, allowing the running of multiple tasks apparently simultaneously. At every task switch, the *context* of the currently running process – the set of data, including CPU registers, that it will need to continue running – is saved, and another process, with its context data, is allowed to run during the next “time slice” of 0.02 s.

The decision which process to schedule next, is a subject on which thick books have been written. It should be a process that is “runnable” – and not, e.g., waiting for user input –, and should have a high *priority*.

Every process – but especially kernel or system level processes – have pieces in their code where it would be wrong or disastrous to be interrupted. We humans know this all too well: there are certain tasks that we simply cannot do if we are not left in peace to do

---

<sup>4</sup>... and ignoring threading!

them, and if we are interrupted, we may just have to start from the beginning again, if not worse. Computers are no different. This is why it is possible for interrupts to be *masked*. Critical kernel routines will mask the clock interrupt, and unmask it again when finished.

Now, the requirements for real time use are:

1. We should know in advance which processes will be running on our system. An environment like a multi-user server into which people can log in and start user processes at will, is not acceptable
2. We should know in advance what are the *longest* pieces of code, execution time wise, that the various runnable processes contain *during which they can not be interrupted*. These durations should *all* be acceptably short
3. The real-time critical processes should receive the highest priority, all others a lower priority
4. The time interval for task switching should be suitably short; 0.02 s may be too long
5. The total processing capacity of the system should be sufficient
  - a) on average for all processes, and
  - b) at *every point in time* for *all* the real-time processes taken together.

## Navigointi ja paikkatietojärjestelmät

Nykyisin jo laajasti käytetty datankeruumenetelmä kartoitustyötä ja paikkatietojärjestelmiä varten on RTK-paikannus. Jos tarkkuusvaatimukset ovat 1 – 2 m:n tasolla, kelpaa jopa koodipohjainen DGPS, etenkin nyt kun GPS-järjestelmän salausta on kytketty pois päältä.

Näin “navigointiratkaisua” voidaan käyttää kartoitustarkoituksessa. Tarkkuus ei ole samalla tasolla kuin staattisissa mittauksessa, mutta usein tämä on täysin hyväksyttävissä. Etuna on, että jälkityötä (toimistotyötä) ei synny, eli se on työekstensiivinen. Kerätty data – joka voi olla volyymiltään varsin laaja, miljoonia pisteitä – menee suoraan paikkatietojärjestelmään minimaalisen käsityömäärän (mm. tyyppikoodauksen) jälkeen.

### 11.1 Geosentriset koordinaattijärjestelmät

Tarkassa paikanmäärittämisessä on oltava tarkka koordinaattijärjestelmän (datumin) kanssa. Sellaisenaan GPS antaa koordinaatit WGS84-järjestelmässä, joka on GPS-järjestelmän itse käyttämä järjestelmä. Tarkemmat *geosentriset* järjestelmät ovat IERS:n (International Earth Rotation Service) laatimat ITRF-xx ja ETRF-xx -järjestelmät (ITRF = International Terrestrial Reference Frame; ETRF = European Terrestrial Reference Frame). Nykyisin noin desimetrin tarkkuudella nämä järjestelmät yhtyvät WGS84:ään.

ETRF-järjestelmillä on käytännön hyödyllisenä ominaisuutena, että Euraasian mannerlaatalla koordinaatit eivät muutu, eli järjestelmä *liikkuu laatan mukana*. Monessa Euroopan maissa, ja tieteellisissä piireissä, on käytössä ETRF-89, myös kutsuttu EUREF-89. Sen määrittäyshetki (*epookki*) on vuoden 1989 alku.

*Geosentrisen* järjestelmä on järjestelmä, jonka:

- ▷ origo on Maan massakeskipisteessä (tai hyvin lähellä sitä);
- ▷  $z$ -akseli osoittaa Maan pyörähdysakselin suuntaan;
- ▷  $x$ -akseli osoittaa joko kevät-pisteeseen taivaalla (tähtitieteellinen koordinaattijärjestelmä, *inertiaalinen*) tai on Greenwichin meridiaanin tason sisällä (terrestrinen koordinaattijärjestelmä, kiinnitetty kiinteään maahan ja “mukana pyörivä”)

## 11.2 Ei-geosentriset järjestelmät

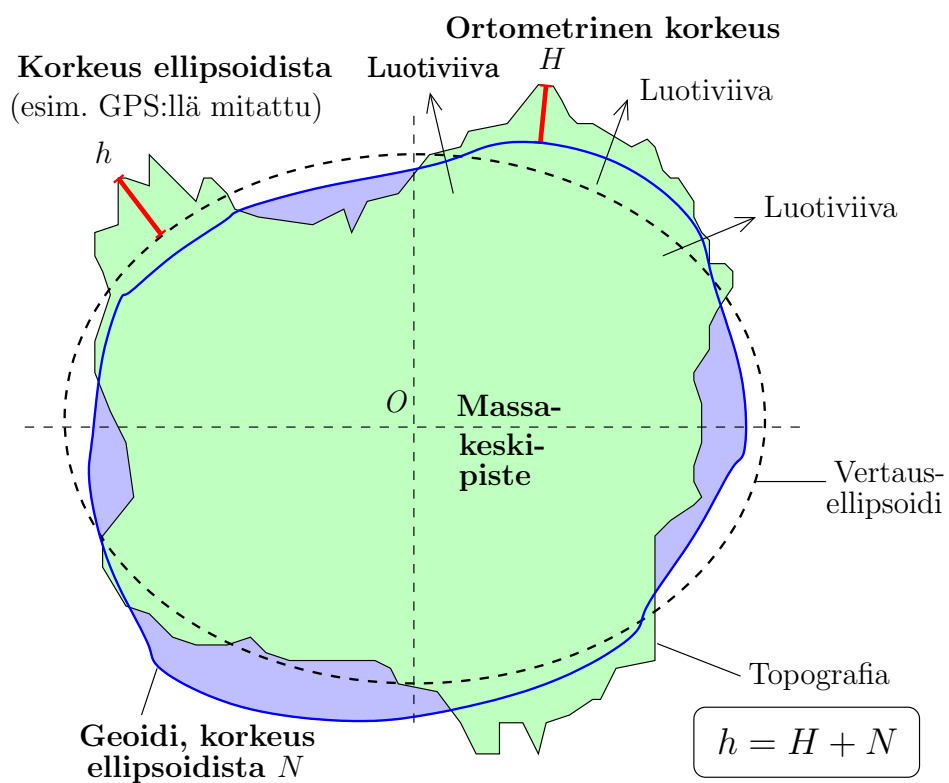
Kun halutaan operoida paikallisessa tai valtakunnallisessa, ei-geosentrisessä järjestelmässä, kuten *kkj* (Kartastokoordinaattijärjestelmä) asiat mutkistuvat aika lailla, jos halutaan säilyttää GPS-mittausten tarjoamaa tarkkuutta. Jotkut RTK-GPS-laitteistot mahdollistavat seuraava mittaustapa:

- ▷ Mitataan muutama *kkj*:ssä tunnettu piste mittausalueen reunalla, ja syötetään niiden *kkj*-koordinaatit;
- ▷ Mitataan mitattavat pisteet alueella;
- ▷ Palataan tunnettuun pisteeseen tarkastaakseen, onko mittauksen aikana tapahtunut kantoaaltovaiheen kokonaislukuhyppäys (“*cycle slip*”).
- ▷ Laite laskee itse muunnoskaava (HELMERT-muunnos avaruudessa) tunnettujen pisteiden avulla, ja muuntaa kaikki tavalliset mittauspisteet *kkj*.hin sen avulla.

Menetelmän *haittapuolena* on, että mittausaineiston alkuperäinen tarkkuus putoaa peruuttamattomasti *kkj*:n melkein aina heikompaan paikalliseen tarkkuuteen. Jos tämä on hyväksyttävissä, on se hyvä käytännöllinen ratkaisu paikallisessa kartoitustyössä.

## 11.3 Korkeusjärjestelmät

Kun käytetään GPS – tai mitään muu järjestelmä joka ei suoraan riipu Maan painovoimakentästä, kuten myös inertianavigointi (INS) tai GPS-INS integrointi – korkeudenmäärittämisessä, tulee vastaan se ongelma, että korkeudetkin ovat *geosentrisia*, ts. ne ovat korkeuksia geosentrisen, matemaattisesti määritetyn *vertausellipsoidin* yläpuolella. Perinteiset korkeudet sen sijaan ovat “keskimerenpinnan”, tarkemmin, *geoidin* yläpuolella. Ks. kuva 11.1.



Kuva 11.1: Korkeusjärjestelmät



- Tullu Besha Bedada. *Absolute geopotential height system for Ethiopia*. PhD thesis, University of Edinburgh, 2010. URL: <http://www.era.lib.ed.ac.uk/handle/1842/4726>.
- J.M. Brozena. The Greenland Aerogeophysics Project: Airborne gravity, topographic and magnetic mapping of an entire continent. In *From Mars to Greenland: Charting Gravity With Space and Airborne Instruments*, volume 110 of *International Association of Geodesy Symposia*, pages 203–214. IAG, Springer Verlag, 1991.
- M. A. R. Cooper. *Control surveys in civil engineering*. Collins, Department of Civil Engineering, The City University, London, 1987.
- Jared Diamond. *Guns, Germs, and Steel: The Fates of Human Societies*. Norton, 1999.
- Carsten Egevang, Iain J. Stenhouse, Richard A. Phillips, Aevan Petersen, James W. Fox, and Janet R. D. Silk. Tracking of arctic terns *Sterna paradisaea* reveals longest animal migration. *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, 2010. DOI: 10.1073/pnas.0909493107.
- R. Forsberg, K. Hehl, U. Meyer, A. Gidskehaug, and L. Bastos. Development of an airborne geoid mapping system for coastal oceanography (AGMASCO). In *Proceedings International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy (GraGeoMar96)*, volume 117 of *International Association of Geodesy Symposia*, pages 163–170, Tokyo, 1996. IAG, Springer Verlag.
- Rene Forsberg, Arne V Olesen, Hasan Yildiz, and CC Tscherning. Polar gravity fields from goce and airborne gravity. In *4th International GOCE User Workshop*, TU Munich, Germany, 2011. URL: [https://earth.esa.int/download/goce/4th\\_Int\\_GOCE\\_User\\_Wkshp\\_2011/Polar\\_Gravity\\_Fields\\_GOCE\\_Airborne%20Gravity\\_R.Forsberg.pdf](https://earth.esa.int/download/goce/4th_Int_GOCE_User_Wkshp_2011/Polar_Gravity_Fields_GOCE_Airborne%20Gravity_R.Forsberg.pdf).
- B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and J. Collins. *GPS Theory and Practice*. Springer-Verlag, fourth, revised edition, 1997. ISBN 3-211-82839-7.
- Christopher Jekeli. *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*. Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2001.

- R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME, J. Basic Eng., Series 82D*, pages 35–45, 1960.
- R.E. Kalman and R.S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME, J. Basic Eng., Series 83D*, pages 95–108, 1961.
- D. Munkhtsetseg. Geodetic network and geoid model of mongolia. In *Proceedings, GSEM (Geospatial Solutions for Emergency Management) 2009*, Beijing, China, 2009. ISPRM. URL: [http://www.isprs.org/proceedings/XXXVIII/7-C4/121\\_GSEM2009.pdf](http://www.isprs.org/proceedings/XXXVIII/7-C4/121_GSEM2009.pdf).
- Markku Poutanen. *GPS-paikanmäärittäminen*. Ursan julkaisu 64. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, 1998. ISBN 951-9269-89-4.
- Dava Sobel. *Longitude. The true story of a lone genius who solved the greatest scientific problem of his time*. Penguin Books, New York, 1995.
- Gilbert Strang and Kai Borre. *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley - Cambridge Press, 1997.
- B. D. Tapley and B. E. Schutz. Estimation of unmodeled forces on a lunar satellite. *Celestial Mechanics*, 12:409–424, December 1975.
- P. J. G. Teunissen, P. J. de Jonge, and C. C. J. M. Tiberius. Performance of the LAMBDA method for Fast GPS Ambiguity Resolution. *Navigation*, 44(3):373–383, 1997.
- M. Wei and K.P. Schwarz. Comparison of different approaches to airborne gravimetry by strapdown ins/gps. In J. Segawa, H. Fujimoto, and S. Okubo, editors, *Gravity, Geoid and Marine Geodesy*, volume 117 of *International Association of Geodesy Symposia*, pages 155–162, Tokyo, Japan, 1997. International Association of Geodesy, Springer.



## A

akselipuolikas

lyhyempi, 68

pitempi, 68

alkiot

oskuloivat, 69

Anomalia

eksentrinen, 68

luonnollinen, 68

asento

kulkuneuvon, 47

atsimuti, 89

autokovarianssi, 13, 21

autokovarianssifunktio, 33

## B

Bell curve, 8

Bucy, Richard, 19

## C

CHAMP, 85

Coriolis-voima, 55

cycle slip, 108

## D

dead reckoning, 2

DECCA, 4

delta-funktio, 14

Dirac, Paul, 14

double-difference, 89

## E

EGM96, 56

eksentrisyys, satelliittiradan, 68

eläinrata, 67

epookki, 28, 107

ergodisuus, 8

estimaatio

lineaarinen, 6

estimaattori

harhaton, 26

parannettu, 27

tilavektorin, 26

ETRF, 107

ETRF-89, 107

EUREF-89, 107

## F

funktioavaruus, 7

## G

gain matrix, Kalmanin, 27

Gaussin käyrä, 8

geodesia, 1

geoidi, 108

GLONASS, 4

GOCE, 85

GPS, 1

differentiaalinen, 89

GPS-järjestelmä, 85

GPS-paikannuslaite, 85

GRACE, 85

gravimetri, 84

gravitaatio, 83

Greenwich, 70

GSM-puhelin, 89

gyroskooppi, 48  
 gyroskooppialusta, 4  
 gyroskooppipöytä, 53

## H

havaintomalli, 6, 26  
 havaintoyhtälöt, 72  
 heiluri, 60  
 hyperboli, 4  
 hyperbolimenetelmä, 4

## I

IGDG, 98  
 ilmagradiometria, 83  
 ilmagravimetria, 83  
 ilmakehävirheet, 89  
 inertialaite, 84  
 inertianavigaatio, 1, 4, 6  
 inertianavigoinnin perusyhtälö, 56  
 inertianavigointi, 47  
 inkliinaatio, 68  
 interpolointi, 89  
 ionosfääri, 95  
 ionosfäärivirheet, 89  
 IRTF, 107

## J

Jet Propulsion Laboratory, 98

## K

Kaisaniemi, 8  
 Kalman, Rudolf, 19  
 Kalman-suodatin, 19, 84  
 Kalman-suodatus, 6  
 kantoaaltovaihe, 72  
 kardaaninen rengasjärjestelmä, 53  
 kartoitus, 2  
 käynti, 51, 84  
 Kepler-rata, 67  
 kerroinmatriisi, 21  
 Keskianomalia, 68  
 keskimerenpinta, 108  
 keskipakoisvoima, 55  
 kevättasauspiste, 67, 70  
 kiihtyvyys  
   geometrinen, 83  
   kulkuneuvon, 47  
 kiihtyvyyssmittari, 51, 84, 85

kiinteän Maan järjestelmä, 56

kitka

  ilmakehän, 85

kkj, 108

kohina, 13

  valkoinen, 13

  värillinen, 33, 34

kohinavektori, 86

kompassi, 3

koordinaattijärjestelmä

  inertiaalinen, 70

  tähtitieteellinen, 70

korkeuskulma, 89

korrelaatio, 11

korrelaatiopituus, 86

kovarianssi, 11

kronometri, 4

kulmakiikhtyvyys, 60

kulmapoikkeama, 61

## L

liikeyhtälöt, 21

lineaariyhdistelmä, 29

linearisointi, 64

linearisuus, 52

litistyneisyys, Maapallon, 69, 71

luotiviiva, 89

## M

maamerkit, 1

malli

  dynaaminen, 6, 19, 20, 72

  tilastollinen, 6

mekanisaatio, 6, 63

merenkulku, 1

merkintälasku, 2

milligal, 84

muunnosmatriisi, 47

## N

Navigaatio, 1

nopeusvektori, 70

normaalipainovoimakenttä, 56

## O

odotusarvo, 9

ohjaus, 4

optimaalisuus, 10, 27

**P**

paikanmäärittäminen  
geodeettinen, 1  
painottomuustila, 85  
painovoima, 83  
painovoimagradiometri, 85  
päivitys, 27  
päivityskaavat, Kalman-suodattimen, 28  
päivitysyhtälö, 86  
palautesilmukka, 56  
perigeikulma, 68  
periodi  
heilurin, 60  
piezo-anturi, 51  
Pohjantähti, 3  
prekessio, 57  
PRN-koodi, 89  
prosessi  
Gauß-Markov, 33, 34, 86  
stationaarinen, 13  
stokastinen, 7  
pseudoetäisyys, 72

**R**

radiolinkki, 89  
radiopuhelin, 89  
random walk, 15, 35  
rata-alkiot  
Keplerin, 67  
rataperiodi  
satelliitin, 60  
ratavirheet, 89  
regressio, 13  
rektaskensio, 67  
rengaslaser-gyroskooppi, 53  
Risteilyohjukset, 2  
ristikovarianssi, 13  
RTCM, 90  
RTK, 92

**S**

säätiede, 19  
Sagnac-ilmiö, 53  
satelliittikellot, 89  
satelliittirata, 6  
satellite-to-satellite tracking  
high-low, 85

Schulerin heiluri, 61  
Schuler-silmukka, 62, 64  
seisova aalto, 53  
sijainti, 1  
skalaari-ilmagravimetria, 84  
solmu  
nouseva, 67  
stabilized platform -ratkaisu, 53  
state vector, 19  
stokastiset prosessit, 6  
strapdown-ratkaisu, 52  
stabiiloitu pöytä, 84  
suodatin  
sekventiaallinen, 28

**T**

tähtiaika  
Greenwichin, 68, 70  
taloustiede, 19  
tasoituslasku, 28  
tilansiirtomatriisi, 23  
tilapropagaatio, 23  
tilavektori, 19, 20, 69  
torquer, 54  
Tosiaikaisuus, 6  
troposfääri, 95  
troposfäärivirheet, 89

**U**

ULA, 89

**V**

V2, 4  
vääntöaktuaattori, 54  
vaihe, kantoaallon, 89  
vaiheviivekuvio  
GPS-antennin, 89  
vaimennus  
gravimetrin, 84  
valokuitu, 53  
värähtely-yhtälö, 60  
varianssi  
kohinan, 26  
varianssi-ellipsi, 29  
varianssimatriisi, 86  
sulkuvirheen, 28  
vektori-ilmagravimetria, 84

vertausellipsoidi, [108](#)

vibraatio, [52](#)

virhe-ellipsi, [11](#)

## **W**

WGS84, [107](#)

## **Z**

zero velocity update, [48](#)