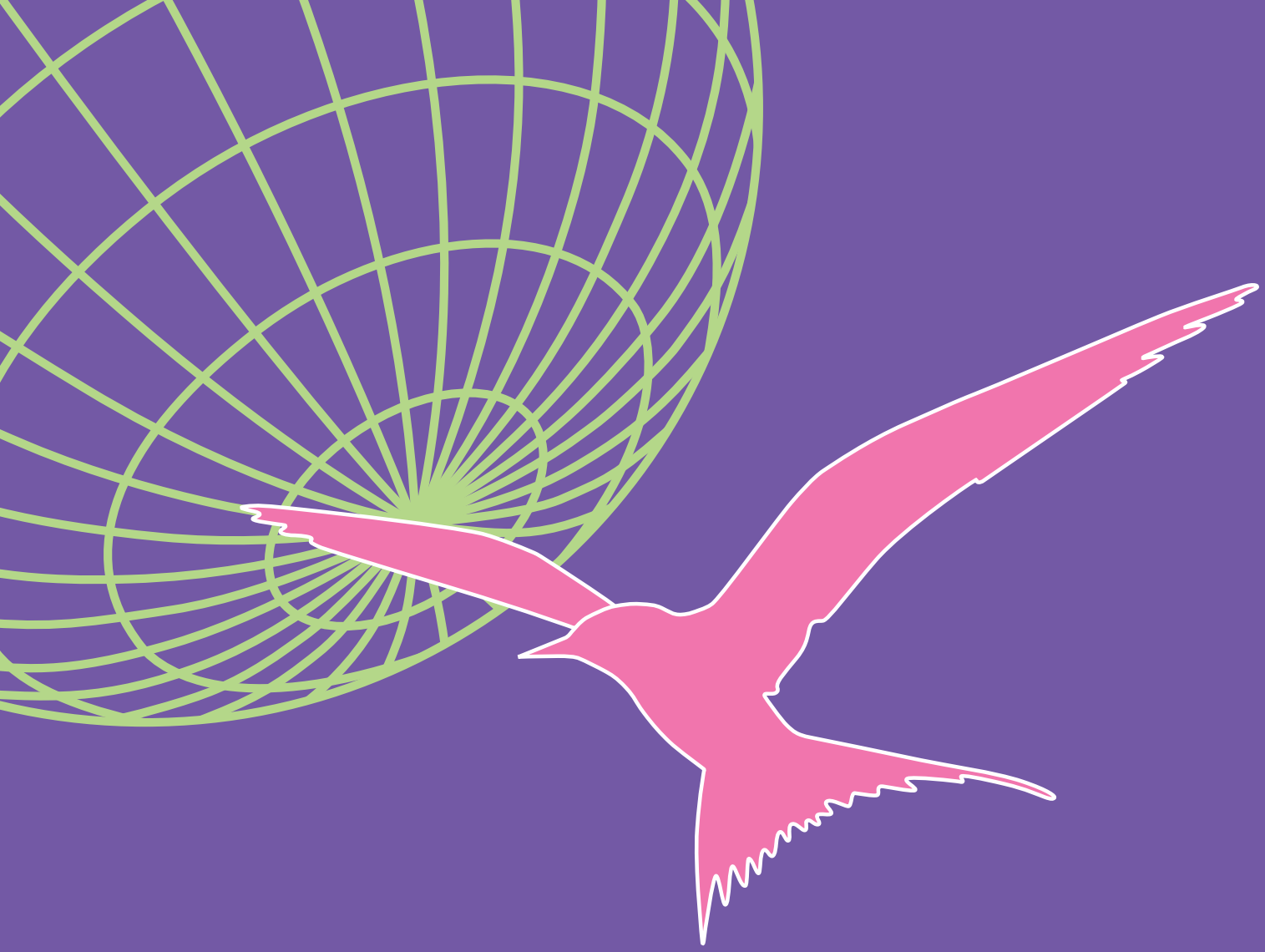


NAVIGOINNIN MENETELMÄT

Johdatus teknologiseen navigointiin

Martin Vermeer

Aalto University

Aalto-yliopiston julkaisusarja
TIEDE + **TEKNOLOGIA** 6/2020

Navigoinnin menetelmät

Johdatus teknologiseen navigointiin

Martin Vermeer

Aalto-yliopisto
Insinööritieteiden korkeakoulu
Rakennetun ympäristön laitos

Aalto-yliopiston julkaisusarja
TIEDE + **TEKNOLOGIA** 6/2020

© 2020 Martin Vermeer

ISBN 978-952-64-0207-9 (pdf)
ISSN 1799-4888 (pdf)
http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-64-0207-9

Helsinki 2020

Tekijä
Martin Vermeer

Julkaisun nimi
Navigoinnin menetelmät – Johdatus teknologiseen navigointiin

Julkaisija Insinööritieteiden korkeakoulu

Yksikkö Rakennetun ympäristön laitos

Sarja Aalto University publication series TIEDE + TEKNOLOGIA 6/2020

Tutkimusala Maanmittausoppi

Kieli suomi

Tiivistelmä

Ihminen on historian aikana aina navigoinut. Teknologinen navigointi syntyi merenkulussa, koska avomerellä tarvittiin mittauksia oman sijainnin määrittämiseksi.

Lentokoneet, ohjukset ja avaruusalukset sekä kuivalla maalla liikkuvat kulkuneuvot ja jopa jalankulkijat kaikki ”navigoivat” nykyteknologioiden avulla. Kehitys on pääosin kahden teknologian ansiota: satelliittipaikannuksen, kuten GPS:n (Global Positioning System), ja inertianavigoinnin. Myös tieto- ja viestintätekniikka on kehittynyt, erityisesti rekursiivinen lineaarinen suodatus eli Kalmanin suodin. Lisäksi pienet ja hinnaltaan huokeat digitaaliset anturit ovat mullistamassa jokapäiväisen navigoinnin.

Tässä kirjassa käsiteltäviä aiheita ovat navigoinnin perusteet, stokastiset prosessit, Kalmanin suodin, inertianavigoinnin teknologiat ja menetelmät, GNSS-signaalienrakenne, kantoaallon vaihemittaukset ja kokonaistuntemattomat, tosiaikainen GNSS-paikannus ja navigointi, differentiaalikorjausten viestintäratkaisut ja standardit, GNSS-tukiasemat ja -verkot, satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät, ilmagravimetria sekä anturifuusio ja sattuman anturit.

Avainsanat navigointi, teknologinen navigointi, merenkulku, ilmailu, raketit, ohjukset, lentokoneet, avaruusalukset, satelliittipaikannus, inertianavigointi, stokastiset prosessit, Kalmanin suodin, globaaliset navigointisatelliittijärjestelmät, kantoaallon vaihe, kokonaistuntemattomat, näennäissatunnaiskoodit, tosiaikainen kinemaattinen GNSS-paikannus, differentiaali GNSS-paikannus, satelliitipohjaiset parannusjärjestelmät, ilmagravimetria, anturifuusio, sattuman anturit.

ISBN (pdf) 978-952-64-0207-9

ISSN (PDF) 1799-4888

Julkaisupaikka Helsinki **Painopaikka** Helsinki **Vuosi** 2020

Sivumäärä 368 **urn** http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-64-0207-9

Esipuhe

Kansikuva: Navigointi ei ole ihmisen keksintö. Lapintiira (*Sterna paradisaea*) lentää joka vuosi arktiselta alueelta Eteläiselle jäämerelle ja takaisin.

Egevang ym. (2010)

Olen opettanut tätä kurssia vuosina 2001–2010 Teknillisessä korkeakoulussa ja 2010–2015 Aalto-yliopistossa. Kurssi oli osa paikannuksen ja navigoinnin, geomatiikan sekä geoinformatiikan koulutusohjelmia. Kurssin ajatuksena oli antaa geospatiaalisten tieteiden opiskelijoille perustiedot tosiaikaisen paikannuksen taustalla olevista teknologioista ja menetelmistä sekä niiden käytöstä navigoinnissa maalla ja merellä, ilmassa ja avaruudessa.

Kurssin pääaiheita ovat navigoinnin perusteet, stokastiset prosessit, Kalmanin suodin, inertianavigoinnin teknologiat ja menetelmät, GNSS-signaalien rakenne, kantoaallon vaihemittaukset ja kokonaislukutuntemattomat, tosiaikainen GNSS-paikannus ja navigointi, differentiaalikorjausten viestintäratkaisut ja standardit, GNSS-tukiasemat ja -verkot, satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät, ilmagravimetria sekä anturifuusio ja sattuman anturit.

Helsingissä 4. joulukuuta 2020

Martin Vermeer

Kiitokset

Susanna Nordsten laati vuonna 2002 käsikirjoituksen varhaisen englanninnoksen käyttäen LyXin ”branches”-ominaisuuden prototyyppiä, joka on kuvattu täällä: multilingual.pdf. Jukka Varonen ja Kimmo Penttilä auttoivat ilmailutermien kanssa. Keijo Inkilä toi esiin Woodburyn yhtälön.

Kielentarkistuksesta vastasi pätevästi Sanna Karppinen, Skarppi Kirjoituspalvelut. Liisa Vermeer antoi myös arvokkaita kielihuomautuksia. Kannen suunnitteli Hanna Sario Unigrafia Creative:stä. Laura Mure ja Henri Linnanketo auttoivat julkaisemistyössä.

Addis Ababan yliopiston opiskelijat Megersa Mekonen ja Gedamu Amare antoivat hyödyllisiä huomautuksia, jotka käytettiin hyväksi parantamaan esitystä.

Muutama karttakuva piirrettiin Generic Mapping Toolsin avulla (Wessel ym., 2013).

Tämä sisältö lisensoidaan lisenssillä *Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen* (CC BY 4.0), lukuunottamatta tekstissä mainittuja tai muuten ilmeisiä poikkeuksia.

Sisältö

Luvut

1. Navigoinnin perusteet 1
2. Stokastiset prosessit 15
3. Kalmanin suodin 51
4. Kalmanin suotimen esimerkkejä ja sovelluksia 75
5. Inertianavigointi 99
6. Navigointi ja rataliike 135
7. Satelliittinavigoinnin teknologiat 161
8. Tosiaikaiset GNSS-havainnot 193
9. RTK-navigointi 217
10. Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät 237
11. Satelliittinavigoinnin uusi aikakausi 255
12. Painovoiman mittaus lennossa 267
13. Anturifuusio ja sattuman anturit 277

A. Tehon spektraalitiheys on ei-negatiivinen 297
B. M-jonot ja Goldin koodit 299
C. Woodburyn matriisiyhtälö 305
D. Tosiaikaiset järjestelmät ja verkot 307

Esipuhe **i**

Taulukot **viii**

Kuvat **ix**

Lyhenteet **xiii**

1. Navigoinnin perusteet **1**
1.1 Johdanto . . . 1
1.2 Historia . . . 2
1.3 Kulkuneuvon liikkeet ja koordinaatistot . . . 6
1.4 Geosentriset vertauskehykset . . . 9
1.5 Ei-geosentriset vertauskehykset . . . 10
1.6 Korkeuden vertaustaso . . . 11
1.7 Peruskäsitteet ja teknologiat . . . 12
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . 14

2. Stokastiset prosessit **15**
2.1 Stokastiset muuttujat ja prosessit . . . 15
2.2 Otoskeskiarvo . . . 18
2.3 Kovarianssi ja korrelaatio . . . 22
2.4 Aikasarjojen lineaarinen regressio . . . 27
2.5 Stokastisen prosessin auto- ja ristikovarianssi . . . 33
2.6 Valkoinen kohina ja satunnaiskulku . . . 36
2.7 Värillinen kohina . . . 39
2.8 Tehon spektraalitiheys (PSD) . . . 43
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . 48
Harjoitus 2–1: Normaalijakauman normalisointi . . . 49
Harjoitus 2–2: Tehollinen otoskoko . . . 49

3. Kalmanin suodin **51**
3.1 Tilavektori . . . 53
3.2 Dynaaminen malli . . . 55
3.3 Esimerkki: satelliitin rataliike . . . 58
3.4 Diskreetti dynaaminen malli . . . 61
3.5 Tilan varianssin differentiaaliyhtälö . . . 64
3.6 Havaintomalli . . . 68
3.7 Päivitys . . . 69
3.8 Päivityksen optimaalisuus . . . 71
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . 73
Harjoitus 3–1: Yksinkertainen kaksiulotteinen dynaaminen malli . . . 73
Harjoitus 3–2: Dynaamisen kohinan varianssin transitiivinen ominaisuus . . . 74

4. Kalmanin suotimen esimerkkejä ja sovelluksia **75**
4.1 Esimerkki 1: yksiulotteinen liike 75
4.2 Esimerkki 2: pyörivä pyörä 79
4.3 Esimerkki 3: laskuvarjohyppääjä 82
4.4 Realistisen tilastollisen käyttäytymisen mallintaminen 84
4.5 Kalmanin suodin perättäisenä tasoituksena 85
4.6 Kalmanin suotimen käyttö ”kahdesta päästä” 87
Olenko ymmärtänyt tämän? 95
Harjoitus 4–1: Yksinkertainen Kalmanin suotimen esimerkki 95
Harjoitus 4–2: Hieman monimutkaisempi Kalmanin suotimen esimerkki 96
Harjoitus 4–3: Laskuvarjohyppääjä uudelleen 97

5. Inertianavigointi **99**
5.1 Periaate 99
5.2 Inertialaitteen osat 101
5.3 Toteutus 111
5.4 Inertianavigointi kiinteän Maan järjestelmässä 115
5.5 Vakautettu alusta 119
5.6 Hyrräkompassi 120
5.7 Schulerin heiluri 123
5.8 Mekanisointi 127
5.9 Maan pinnalla kahdessa ulottuvuudessa 129
5.10 Inertialaitteen alustus 132
Olenko ymmärtänyt tämän? 133
Harjoitus 5–1: Tennismailalause 134
Harjoitus 5–2: Hyrräkompassin yhtälö 134
Harjoitus 5–3: Schulerin jakso 134

6. Navigointi ja rataliike **135**
6.1 Keplerin rata 135
6.2 Hillin koordinaattien käyttö 144
6.3 Muunnos inertiaalisen ja Hillin koordinaatiston välillä 147
6.4 Keskeisvoimakentän sarjakehitelmä 148
6.5 Liikeyhtälöt Hillin koordinaatistossa 149
6.6 Hillin yhtälöiden ratkaiseminen 150
6.7 Toinen ratkaisu 152
6.8 Clohessyn ja Wiltshiren malli 152

Olenko ymmärtänyt tämän? 156
Harjoitus 6–1: Keplerin rata 157
Harjoitus 6–2: *Rendezvous* 158

7. Satelliittinavigoinnin teknologiat **161**
7.1 GPS-paikannusjärjestelmä 161
7.2 GPS-satelliitit ja signaalin rakenne 162
7.3 Kantoaallon korkkiruuvi 169
7.4 GPS:n lukuteoria 173
7.5 GPS-signaalin tehospektri 177
7.6 BOC, binaarinen offset kantoaaltomodulaatio 180
7.7 Koodin ja kantoaallon vaiheen mittaus 183
7.8 Kellon mallinnus 187
7.9 Vaihetuettu koodimittaus 189
Olenko ymmärtänyt tämän? 191
Harjoitus 7–1: Bitin esitys kolmella blokilla 192

8. Tosiaikaiset GNSS-havainnot **193**
8.1 GNSS:n havaintoyhtälöt 193
8.2 Havaintoyhtälöiden linearisointi 195
8.3 Ilmakehän mallinnus 199
8.4 Eri estimointitehtävien dynaamiset mallit 203
8.5 Differentiaalipaikannus 208
8.6 Tosiaikainen kinemaattinen paikannus 209
8.7 Tietoyhteys 211
8.8 RTCM-standardi 212
8.9 NTRIP-protokolla 214
Olenko ymmärtänyt tämän? 214
Harjoitus 8–1: Dynaamisen mallin 8.17 linearisointi 215

9. RTK-navigointi **217**
9.1 RTK ja kokonaislukutuntemattomat 217
9.2 Nopea kokonaislukutuntemattomien ratkaisu 220
9.3 RTK-mittauksen geometrinen analyysi 225
9.4 Tukiasemaverkot 231
9.5 Ilmakehän mallinnus 233
Olenko ymmärtänyt tämän? 234
Harjoitus 9–1: Zeniitin etenemisviiveiden eron varianssifunktio 235

10. Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät 237
10.1 Vastaanottimen itsenäinen eheyden seuranta 237
10.2 SBAS-teknologian kuvaus 240
10.3 Eheys ja *safety of life* 243
10.4 WAAS 244
10.5 EGNOS 247
10.6 Japanin SBAS-järjestelmät 247
10.7 Intian GAGAN-järjestelmä 251
10.8 Maapohjaiset parannusjärjestelmät 252
10.9 Internetpohjaiset parannusjärjestelmät 253
Olenko ymmärtänyt tämän? 254

11. Satelliittinavigoinnin uusi aikakausi 255
11.1 GPS-järjestelmän modernisointi 255
11.2 Venäläinen GLONASS-järjestelmä 258
11.3 Eurooppalainen Galileo-järjestelmä 261
11.4 Kiinalainen BeiDou-järjestelmä 264
Olenko ymmärtänyt tämän? 266

12. Painovoiman mittaus lennossa 267
12.1 Vektori-ilmagravimetria 268
12.2 Skalaari-ilmagravimetria 268
12.3 Kalmanin suotimen käyttö ilmagravimetriassa 270
12.4 Antureiden välinen kalibrointi 272
12.5 Ilmagravimetrian nykytila 272
12.6 Maan painovoimakentän tutkimus avaruudesta 274
Olenko ymmärtänyt tämän? 275

13. Anturifuusio ja sattuman anturit 277
13.1 Case: Sky Map 278
13.2 Nollanopeuspäivitys 285
13.3 GNSS:n ja IMU:n integrointi 288
13.4 Asennonmittaus GNSS:llä 289
13.5 Moderni radionavigointi 291
13.6 Mikroelektroniset liikeanturit (MEMS) 292
13.7 Jalankulkijanavigointi 294
13.8 Sisätilanavigointi 295
Olenko ymmärtänyt tämän? 296

A. Tehon spektraalitiheys on ei-negatiivinen **297**

B. M-jonot ja Goldin koodit **299**

C. Woodburyn matriisiyhtälö **305**

D. Tosiaikaiset järjestelmät ja verkot **307**
D.1 Tietoliikenneverkot 307
D.2 Tosiaikaiset järjestelmät 315

Kirjallisuutta **321**

Hakemisto **337**

Taulukot

2.1 Todennäköisyydet ja sigmarajat yhden, kahden ja kolmen ulottuvuuden tapauksessa 23
2.2 Eri stokastisten prosessien ominaisuuksien yhteenveto . . 43

5.1 Mekanisoinnin simulointi yhdessä ulottuvuudessa, `octave`-koodi 130

6.1 Keplerin rata-alkiot 137

7.1 GPS-signaalin kantoaallot 164
7.2 GPS-signaalin näennäissatunnaiskoodit 166
7.3 Kuvan 7.9 rekisterin arvojen jono 175
7.4 Rekisteriarvojen jonot vaihtoehtoisen rekisterin geometrian tapauksessa 177
7.5 GPS-signaalin tehospektri: laskennan koodi 180

8.1 RTCM SC-104 -formaatin viestityypit 213

10.1 χ^2-testirajat arvolle $\alpha = 1 - 1/15\,000$ eri vapausasteiden määrille 240
10.2 Eri lähestymiskategoriat ICAO:n mukaan 243
10.3 WAAS-transponderit 244
10.4 EGNOS-transponderit 245
10.5 MSAS-transponderit 249

10.6 GAGAN-satelliitit 252

11.1 Uusia globaaleja navigointisatelliittijärjestelmiä 256
11.2 GLONASSin näennäissatunnaiskoodit 261
11.3 BeiDou-3-järjestelmän näennäissatunnaiskoodit 265

13.1 Sky Mapin koodi matkapuhelimen asennon määrittämiseksi 281

Kuvat

1.1 Elämä on navigointia 2
1.2 Polynesian muuttoreitit 3
1.3 Valkoposkihanhet syysmuuttomatkalla 4
1.4 John Harrisonin rakentama kronometri H5 4
1.5 Saksalainen ohjusase V-2 7
1.6 Eri koordinaatistot navigoinnissa 8
1.7 Kulkuneuvon asentokulmat 9
1.8 Korkeusjärjestelmät ja vertauspinnat 12

2.1 Gaussin kellokäyrä eli normaalijakauma 17
2.2 Virhe-ellipsi 23
2.3 Diracin deltafunktio blokkifunktioiden limiittinä 37
2.4 Gaussin ja Markovin prosessin autokovarianssifunktio . . 42
2.5 Gaussin ja Markovin prosessin tehon spektraalitiheys . . 46

3.1 *Rendezvous* Kuun kiertoradalla 52
3.2 Kalmanin suodin: yhteenveto 54
3.3 Tilavektorin ja tilavarianssin eteneminen kohinan läsnä ollessa 65
3.4 Optimaalisuus ja virhe-ellipsit 72

4.1 Kalmanin suodin käytettynä ajassa eteen- ja taaksepäin . 90
4.2 Satunnaiskulku: ratkaisu kahteen suuntaan 93

5.1 Gyroskooppi ja rengaslaser 102
5.2 Kuinka vääntö aiheuttaa pyörimisakselin prekessiota . . 107
5.3 Gyroskoopin roottori ja sen hitausmomentit 108
5.4 Jousikiihtyvyysmittarin periaate 109
5.5 Heilurikiihtyvyysmittari 110
5.6 Gyroskooppipohjainen heilurikiihtyvyysmittari 110

5.7 Sagnacin interferometri . . . 112
5.8 Inertialaite ST-124 . . . 113
5.9 Vakautetun alustan periaate . . . 120
5.10 Hyrräkompassin periaate . . . 121
5.11 Yksiulotteinen navigointivaunu . . . 124
5.12 Schulerin palautesilmukka . . . 125
5.13 Virheiden kasautuminen yksiulotteisen mekanisoinnin mukaan . . . 128
5.14 Mekanisointiyhtälö, inertianavigointi Maan pinnalla. . . . 132

6.1 Keplerin rata-alkiot avaruudessa . . . 136
6.2 Keplerin rata-alkiot tasossa . . . 138
6.3 Eksentrinen rata . . . 139
6.4 R-matriisin johtaminen . . . 143
6.5 Hillin koordinaatisto . . . 145
6.6 Libraatioliike . . . 152
6.7 Lineaarinen ajelehtiminen . . . 153
6.8 *Rendezvous* ja Hohmannin siirtorata . . . 159

7.1 GPS-konstellaatio . . . 162
7.2 Vaihemodulaation periaate . . . 165
7.3 GPS-koodien tehospektrit . . . 167
7.4 Ympyräpolarisoidut radioaallot kulkevat lähettimeltä vastaanottimelle . . . 167
7.5 Ympyräpolarisoidun säteilyn vastaanotto . . . 170
7.6 Vaihekelaus . . . 171
7.7 Vaihekelauksen vaikutus kaksoiserotushavainnoille . . . 172
7.8 Vaihekelaus ja palloylijäämä . . . 173
7.9 Lineaarisen palautteen siirtorekisteri . . . 174
7.10 Kommutoiva kaavio koodibiteistä ja signaaliarvoista . . . 176
7.11 GPS-modulaation autokovarianssifunktio . . . 179
7.12 Alkuperäisen GPS-signaalin tehospektri . . . 180
7.13 BOC, binaarinen offset kantoaaltomodulaatio . . . 182
7.14 Esimerkki siitä, miten BOC siirtää tehoa sivukaistoihin . 183
7.15 GNSS-koodiseuranta . . . 184
7.16 Costasin diskriminaattorin suorittama kantoaallon vaiheen seuranta . . . 185

8.1 Differentiaalipaikannus . . . 208

8.2 Differentiaalipaikannuksen tarkkuuden arvioimisen geometria . . . 209
8.3 Tosiaikaisen kinemaattisen GNSS-paikannuksen idea . . 211

9.1 Kokonaislukutuntemattomien ratkaisu . . . 222
9.2 Kokonaislukutuntemattomien fiksu ratkaiseminen . . . 224
9.3 Satelliitin näkölinjaan sidottu kanta . . . 226
9.4 Barysentriset koordinaatit . . . 229
9.5 Differentiaali-GNSS:n geometria . . . 231

10.1 SBAS-transpondereiden geometria . . . 241
10.2 WAASin maalohko . . . 246
10.3 EGNOSin maalohko . . . 248
10.4 MSASin ja QZSSin maalohko . . . 250
10.5 QZSS-radan toimintaidea . . . 251
10.6 GAGANin maalohko . . . 253

11.1 L2C ja aikajakomultipleksointi . . . 258
11.2 Galileon signaalirakenne . . . 263

12.1 Lockheed Hercules nousee NorthGRIP-jääkairausasemalta . . . 273
12.2 Afganistanin ilmagravimetriakartoitus . . . 274
12.3 GRACE-mission tulokset . . . 276

13.1 Matkapuhelimen suuntaus kiihtyvyysmittarin ja magnetometrin avulla . . . 280
13.2 Yksinkertainen Kalmanin suodin ilman nollanopeuspäivityksiä ja niiden kanssa . . . 287
13.3 Asennonmittaus GNSS:llä . . . 289
13.4 MEMS-pyörähdysanturin periaate . . . 294

B.1 C/A-koodin muodostaminen . . . 303

D.1 Amplitudimodulaatio ja kaistanleveys . . . 308
D.2 Binaarinen taajuusavainnusmodulaatio . . . 311
D.3 Protokollapinon esimerkki . . . 312
D.4 Proseduurikutsu ja pinon käyttö . . . 318

Lyhenteet

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXZ

A

AFSCN Air Force Satellite Control Network (GPS) 162

A-GNSS avustettu GNSS 292

APPS Automatic Precise Positioning Service 254

AR(1) ensimmäisen kertaluvun autoregressiivinen prosessi 41

ARAIM edistynyt RAIM, käyttää vähintään kahta GNSS-järjestelmää taajuuksilla L1 ja L5 jopa paremman eheyden takaamiseksi 240, 263

B

BDSBAS BeiDou Satellite-Based Augmentation System, Kiinan kehitteillä oleva SBAS-järjestelmä 237

BeiDou ”BeiDou Navigation Satellite System” (BDS), kiinalainen globaali navigointisatelliittijärjestelmä 14, 166, 256, 261, 264–266

BFSK binary frequency-shift keying, binaarinen taajuusavainnus 311

BKG *Bundesamt für Kartographie und Geodäsie*, Federal Agency for Cartography and Geodesy, Saksan liittovaltion kartografian ja geodesian laitos 212, 214

BOC binary offset carrier, binaarinen offset kantoaalto 166, 180–183, 192, 257, 261, 263, 265

BPSK binary phase-shift keying, binaarinen vaiheavainnus 165, 166, 180, 181, 257, 261, 263, 265

C

CDMA code-division multiple access, koodijakokanavointi 165, 183, 251, 256, 260, 261, 266

CHAMP Challenging Minisatellite Payload 275

CRC cyclic redundancy check, syklinen redundanssitarkistus 311

CSM Command and Service Module (Apollo) 52

D

Decca hyperbelinen merinavigointijärjestelmä (vanhentunut) 5, 291

DGPS differentiaalinen GPS 213

DLL delay-locked loop, viivelukittu silmukka 184, 185

DNS Domain Name System, Internetin nimipalvelujärjestelmä 313

DOP dilution of precision, tarkkuuden laimennus (GNSS) 197, 239

DSL digital subscriber line, digitaalinen tilaajayhteys 311

E

ECEF Earth centred, Earth fixed, kiinteän Maan mukana pyörivä geosentrinen koordinaatisto 10

EDAS EGNOS Data Access Service 254

EDGE Enhanced Data Rates for GSM Evolution 313

EGM2008 Earth Gravity Model 2008 118

EGNOS European Geostationary Navigation Overlay Service, satelliittipohjainen parannusjärjestelmä Euroopan alueelle xiv, xvi, xvii, 237, 245, 247, 248, 254, 262, 263, 266

EOP Earth orientation parameters, Maan suuntausparametrit 204

ESA European Space Agency, Euroopan avaruusjärjestö 247, 251, 261

ETRF European Terrestrial Reference Frame, tavallisesti vuosiluvun kera. ETRS:n realisaatio 10

ETRS European Terrestrial Reference System, määritelty liikkuvaksi Euraasian tektonisen laatan mukana xiv, 10

EUREF IAG Regional Reference Frame Sub-Commission for Europe 9, 10

F

FDMA frequency-division multiple access, taajuusjakokanavointi 258, 266

FFT fast Fourier transform, nopea Fourier'n muunnos 36, 309

FKP *Flächenkorrekturparameter*, aluekorjausparametrit, verkko-RTK-tekniikka 232

FRS Fellow of the Royal Society (of London) 37, 101

G

GAGAN GPS-Aided Geo Augmented Navigation, satelliittipohjainen parannusjärjestelmä Intian alueelle xv, 237, 252, 266

Galileo eurooppalainen globaali navigointisatelliittijärjestelmä xv, xvii, 14, 166, 180–182, 240, 256–258, 261–263, 265, 266

GBAS ground-based augmentation system, maanpäällinen parannusjärjestelmä 14, 252–254

GDGPS Global Differential GPS 212, 253, 254

GIA glacial isostatic adjustment, jääkauden jälkeinen isostaattinen sopeutuminen 204

GJU Galileo Joint Undertaking 261
GLONASS venäläinen maailmanlaajuisesti toimiva navigointisatelliittijärjestelmä xvii, 14, 166, 175, 213, 256–261, 266
GMS Ground Monitor Station (MSAS) 250
GNSS global navigation satellite systems, yleisnimitys xiii–xv, xvii, 6, 11–13, 16, 135, 187, 193, 197, 200, 201, 203–215, 221, 225, 231, 233–235, 239, 240, 242, 251, 255, 257, 260, 261, 267, 268, 272, 275, 278, 280, 288, 289, 292, 294–296, 312
GOCE Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer 275, 276
GPRS General Packet Radio Services 313
GPS Global Positioning System xiii, xvi, 1, 5, 9, 10, 13, 14, 137, 161–169, 171, 173, 175, 177–181, 183, 184, 187, 189, 191, 192, 198, 199, 212, 213, 234, 237, 240–245, 249, 252, 254–263, 265, 266, 292, 315
GRACE Gravity Recovery and Climate Experiment 275, 276
GRS80 Geodetic Reference System 1980 284
GSA European GNSS Agency, aiemmin European GNSS Supervisory Authority 261
GSM Global System for Mobile Communications xiv, 313
GUI graphical user interface, graafinen käyttöliittymä 316
GUS Ground Uplink Station (WAAS) 245, 246

H

HAS high-accuracy service, tarkkuuspalvelu (Galileo) 263
HTTP Hypertext Transfer Protocol 214, 312, 314

I

IAG International Association of Geodesy, Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio xiv, 9
ICAO International Civil Aviation Organization, Kansainvälinen siviili-ilmailujärjestö 243, 244, 252
ICD Interface Control Document 258, 260, 264
ICMP Internet Control Message Protocol 313
IERS International Earth Rotation and Reference Systems Service 9
IGS International GNSS Service 208
IGSO inclined geostationary orbit 256, 265
i.i.d. independent and identically distributed, riippumaton ja identtisesti jakautunut 28, 49, 197, 239
IMU inertial measurement unit, inertiamittausyksikkö 101, 187, 287, 288, 294
INLUS Indian Navigation Link Upload Station (GAGAN) 252, 253
INMCC Indian Mission Control Centre (GAGAN) 252, 253
INRES Indian Reference Station (GAGAN) 251, 253
IOD issue of data, *broadcast ephemeris* -ratatietojen aikaleima 242

IP Internet Protocol 311, 313
ITRF International Terrestrial Reference Frame, tavallisesti vuosiluvun kera, ITRS:n realisaatio 9, 10, 260
ITRS International Terrestrial Reference System xvi, 10
ITU International Telecommunications Union, Kansainvälinen televiestintäliitto 311

J

J_2 maapallon dynaaminen litistyneisyys (”gravitaatiokentän litistyneisyys”) 157
JATO jet-assisted take-off 273, 276
JAXA Japanese Aerospace Exploration Agency 249
JPL Jet Propulsion Laboratory 253

K

KASS Korea Augmentation Satellite System, kehitteillä 237
KKJ Kartastokoordinaattijärjestelmä (vanhentunut) 11

L

LAAS local-area augmentation system, paikallinen parannusjärjestelmä 252
LAMBDA Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment 222, 224, 225, 235
LFSR linear feedback shift register, lineaarisen palautteen siirtorekisteri 174
LIFO last in, first out data structure, viimeiseksi sisään, ensimmäiseksi ulos -tietorakenne 316, 318
LOR lunar orbit rendezvous, rendezvous Kuun kiertoradalla 51

M

MAC Master-Auxiliary Concept, verkko-RTK-tekniikka 203, 232
MAX Master-Auxiliary Corrections, verkko-RTK-tekniikka 203, 232, 233, 235
MCC Master Control Centre (EGNOS) 247, 248
MCS Master Control Station (GPS, MSAS) 162, 250
MEMS microelectronic motion sensor 109, 110, 292, 294, 296
MSAS Multi-functional Satellite Augmentation System xv, xvi, 237, 247, 249, 250, 266
MSM Multiple Signal Message (RTCM-SC104 v. 3) 212

N

NASA National Aeronautics and Space Administration (Yhdysvallat) 113
NLES Navigation Land Earth Station (EGNOS) 247, 248
NTP Network Time Protocol 314
NTRIP Networked Transport of RTCM via Internet Protocol 214, 215, 254
NWP numerical weather prediction, numeerinen sääennustaminen 235

O

OS open service, avoin palvelu (Galileo) 262, 263

P

PFA probability of false alarm, väärän hälytyksen todennäköisyys (RAIM) 239
PLL phase-locked loop, vaihelukittu silmukka 185
PMD probability of missed detection, huomioimatta jättämisen todenäköisyys (RAIM) 239
PPP precise point positioning, tarkka absoluuttinen paikannus 173
PRN pseudo-random noise, näennäissatunnaiskoodi 166, 211, 241, 244, 245, 247, 249, 251, 295, 303
PRS President of the Royal Society 99
PRS public regulated service, viranomaispalvelu (Galileo) 263
PSD power spectral density, tehon spektraalitiheys 44–47, 180, 183
PZ-90 ”Maan parametrit” 1990, GLONASSin virallinen vertauskehys 259, 260

Q

QZSS Quasi-Zenith Satellite System, japanilainen SBAS 166, 237, 247, 249–251, 254, 266

R

RAIM receiver autonomous integrity monitoring, vastaanottimen itsenäinen eheyden seuranta xiii, xvii, 14, 237–240, 243, 254, 263
RDS Radio Data System 231
RIMS Ranging and Integrity Monitoring Station (EGNOS) 247, 248
RINEX Receiver Independent Exchange Format 254
RTCM RTCM-SC104: Radio Technical Commission for Maritime Services Special Committee 104, differentiaalisen GNSS:n standardien sarja xvi, xvii, 212–215, 232, 233, 254
RTK real-time kinematic positioning, tosiaikainen kinemaattinen paikannus xiv, xvi, xviii, 11, 13, 193, 203, 209, 210, 213, 214, 231, 234, 235

S

SAR search and rescue, etsintä ja pelastus 263
SBAS satellite-based augmentation system, satelliittipohjainen parannusjärjestelmä xiii, xvii, xviii, 13, 203, 212, 237, 240–243, 247, 249, 251–254, 257, 262, 266
SDCM System for Differential Corrections and Monitoring, Venäjän kehitteillä oleva SBAS-järjestelmä 237
SISNeT Signal in Space through the Internet, sovellus, jonka avulla EGNOSin signaali on saatavilla Internetin välityksellä 254
SoL safety of life 243, 257, 263
SSB single sideband modulation, sivunauhamodulaatio 308

T

TCP Transmission Control Protocol 253, 312, 314
TDM time-division multiplexing, aikajakomultipleksointi 261
TDMA time-division multiple access, aikajakokanavointi 292
TDOA time difference of arrival, saapumisaikaeropaikannus 292
TEC total electron content, elektronien kokonaispitoisuus, yksikkö TECU 199, 252
TECU total electron content unit, elektronien kokonaispituuden yksikkö, 10^{16} elektronia neliömetrissä xviii, 199
TOA time of arrival, saapumisaikapaikannus 292, 296

U

UAV unmanned aerial vehicle, miehittämätön ilma-alus eli ”drone” 293, 315
UDP User Datagram Protocol 313, 314
USB Universal Serial Bus 314
UTC Universal Time Co-ordinated 137, 259

VW

V-2 (*Vergeltungswaffe 2*, ”Kostoase 2”). Saksalainen keskipitkän matkan ballistinen ohjus. Myös A4 (”*Aggregat 4*”) 6, 7, 109
WAAS Wide Area Augmentation System, SBAS pohjois-Amerikan alueelle xv, xviii, 237, 240, 244–247, 254, 266
WGS84 World Geodetic System 1984, Yhdysvaltain puolustuslaitoksen luoma ja ylläpitämä globaalien vertauskehysten sarja 9, 10, 259
VHF Very High Frequency, 30 – 300 MHz xviii, 237, 252
WLAN wireless local-area network, langaton lähiverkko 277, 291, 295
WMS Wide Area Master Station (WAAS) 245, 246
VOR VHF Omnidirectional Range, VHF-monisuuntamajakka 237, 252
VRS virtual reference station, verkko-RTK-tekniikka 231, 235
WRS Wide Area Reference Station (WAAS) 245, 246

X

XOR eksklusiivinen ”or”- eli disjunktiotoiminta 163, 166, 174–177, 300, 301

Z

ZTD zenith total delay, kokonaisetenemisviive zeniitissä 233
ZUPT zero-velocity update, nollanopeuspäivitys 285

Navigoinnin perusteet

1

1.1 Johdanto

”Navigointi” tulee latinalaisesta sanasta *navis* eli laiva. Navigointi on siis merenkulkua. Laajemmassa merkityksessä navigoinnilla tarkoitetaan sopivan reitin löytämistä ja sitä pitkin kulkemista, tarvittaessa rekursiivisesti. Tähän sisältyy oman sijainnin määrittäminen matkan aikana. Nykynavigointi, ainakin jokapäiväisen elinpiirimme ulkopuolella, toteutetaan aina teknologisesti.

Navigointi liittyy geodesiaan, koska myös geodesiassa kiinnostuksen kohteena on *sijainti*. Geodesiassa Maan pinnalla olevien kohteiden sijainnit käsitellään kuitenkin yleensä vakioina tai hyvin hitaasti muuttuvina.

Navigoinnin ja perinteisen geodeettisen paikanmäärityksen väliset erot ovat siis seuraavat:

- Navigoinnissa sijaintitiedot tarvitaan *heti* tai korkeintaan tietyn enimmäisviiveen jälkeen. Tätä kutsutaan *tosiaikaisuuden* vaatimukseksi.
- Navigoinnissa sijaintitiedot ovat *muuttuvia* eli ajasta riippuvaisia.

Nykynavigointi ei rajoitu merenkulkuun. Lentokoneet, ohjukset ja avaruusalukset sekä kuivalla maalla liikkuvat kulkuneuvot ja jopa jalankulkijat ”navigoivat” nykyteknologioiden avulla. Kehitys on pääosin kahden teknologian ansiota: satelliittipaikannuksen, kuten GPS (Global Positioning System), ja inertianavigoinnin. Myös tieto- ja viestintätekniikka on kehittynyt: erityisesti rekursiivinen lineaarinen suodatus eli Kalmanin suodin. Lisäksi anturiteknologian tuottamat pienet ja huokeat digitaaliset anturit ovat mullistamassa jokapäiväisen navigoinnin.

KUVA 1.1. Elämä on navigointia. Votiivilaiva Karlskronan amiraliteetinkirkossa. (Wikimedia Commons, Votiivilaiva, rajattu). Malli on korvetista Carlskrona, joka laskettiin vesille 1841. Laiva kaatui ja upposi tuulenpuuskassa Kuuban rannikon edustalla vuonna 1846 vieden mukanaan 114 miehistön 131 jäsenestä.

1.2 Historia

1.2.1 *Vanha historia*

Ihminen on aina tutkinut maailmaa ympärillään ja matkustanut kaukaa ja kauas. Navigointi on ollut välttämättömyys aina[1].

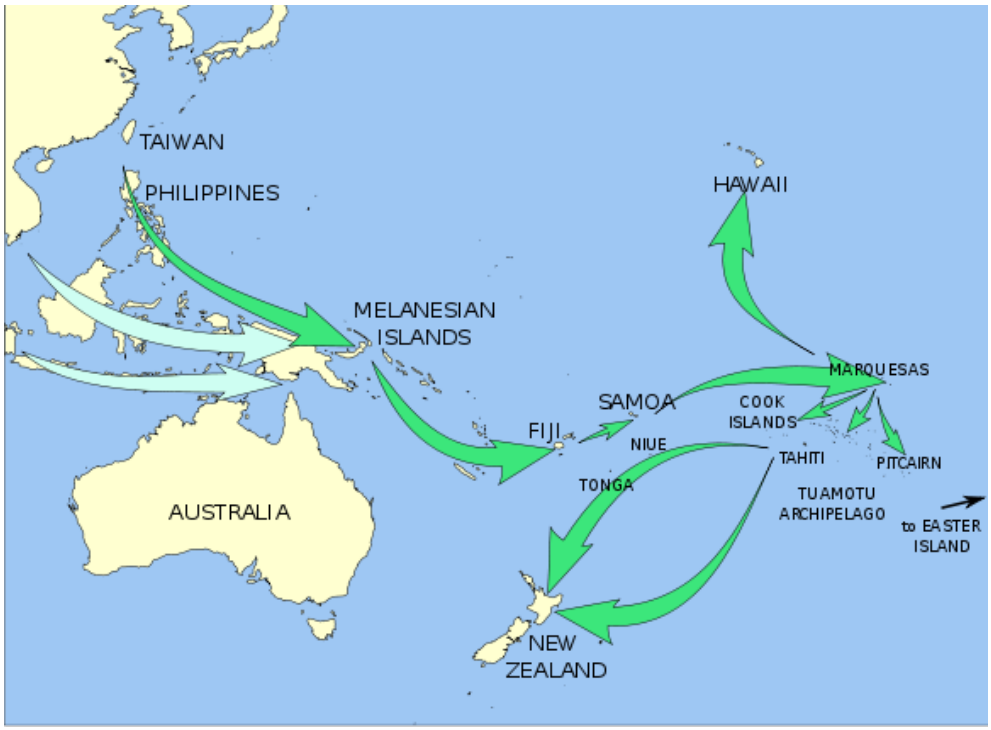
Ennen teknologisten mittaus- ja ohjausmenetelmien keksimistä elettiin maamerkkien ja matka-aikojen perusteella arvioitujen etäisyyksien varassa. Siksi vanhat kartat, jotka piirrettiin matkustajien kertomusten ja muistiinpanojen perusteella, ovat usein omituisella tavalla vääristyneitä.

Maamerkkien käyttö vaatii *kartoitusta* eli maailman kuvausta kartan muodossa. Matka *suunnitellaan* ja toteutetaan vertaamalla todellista paikkaa koko ajan aiottuun määränpäähän matkasuunnitelman mukaan.

Navigointia maamerkkien ja huipputeknologian avulla käyttävät esimerkiksi *risteilyohjukset*: ne lentävät muistissa olevan digitaalisen maastomallin korkeuskäyriä pitkin.

Jos esimerkiksi merenkulussa maamerkit puuttuvat, voidaan käyttää menetelmää nimeltä *merkintälasku* (engl. *"dead reckoning"*), Wikipe-

[1] *"Navigare necesse est"*.



KUVA 1.2. Polynesian muuttoreitit, Wikimedia Commons, Polynesian muuttoreitit.

dia, Dead reckoning. Menetelmässä arvioidaan matkustussuunnan ja -nopeuden perusteella, missä merenkävijän *pitäisi* olla. Virheitä aiheuttavat tässä menetelmässä merivirtaukset — ilmailun tapauksessa tuulet — ja yleisemmin se, että ennuste heikkenee ajan myötä.

Alkeellisilla menetelmillä merenkulku on melko turvallista vain lähellä rannikkoa. Silti foinikialaisten uskotaan matkustaneen näillä keinolla Afrikan mantereen ympäri, Sinjab (2010). Alkeelliset menetelmät riittivät myös siihen, että Tyynenmeren saaristot saivat ihmisasutuksensa. Wikipedia, Polynesian navigation; Kawaharada; Exploratorium, Never Lost.

Katso myös Diamond (1999).

Myös linnut ovat hallinneet navigoinnin aina, Lindsay (2006).

1.2.2 *Merenkulku*

Merenkulku avomerellä edellyttää *mittausta*, koska maamerkkejä ei ole[2]. [2]

[2]Ei ainakaan itsestään selviä maamerkkejä. Jotkut ovat ihmetelleet, miten polynesialaiset merenkulkijat löysivät suhteellisen pikkuruisia saaristoja, kuten Havaiji. Heiltä jäi oivaltamatta, että saarten vaikutus pilviin, merivirtauksiin ja linnustoon ulottuu aika lailla laajemmin kuin merestä törröttävä kiinteistö — jos vain osaa katsella.

KUVA 1.3. Valkoposkihanhet syysmuuttomatkalla, Wikimedia Commons, Valkoposkihanhet.

- Suunta on helpoin. Yöllä Pohjantähti näyttää, missä on pohjoinen. Päivällä voidaan käyttää Aurinkoa, vaikkakin monimutkaisemmalla tavalla. Pilvisellä säällä Auringon paikan löytämisessä voidaan hyödyntää taivaan valon polarisointia.

  Magneettinen kompassi teki pohjoisen löytämisestä helpompaa kaikissa olosuhteissa. Magneettinen pohjoinen ei kuitenkaan ole maantieteellinen pohjoinen. Niiden välinen ero eli *eranto* riippuu

KUVA 1.4. John Harrisonin rakentama kronometri H5. Wikimedia Commons, Harrisonin kronometri H5.

sijainnista ja muuttuu ajassa.

- Leveysaste on helppo saada: sehän on taivaannavan korkeuskulma horisontin yläpuolella. Päivällä voidaan käyttää Aurinkoa: yläkulminaatiossa eli tähtitieteellisellä keskipäivällä voidaan havaita Auringon korkeuskulma η horisontin yläpuolella. Lisäksi tarvitaan Auringon deklinaatio eli taivaallinen leveysaste δ eli Auringon kulmaetäisyys taivaan ekvaattorista. Kulmaetäisyys saadaan tähtitieteellisistä taulukoista. Leveysaste φ lasketaan yhtälöllä

  eeta $\eta\mathrm{H}$

  delta $\delta\Delta$

  fii $\varphi\phi\Phi$

  $$\varphi = \delta \overset{\text{pohjoinen}}{\underset{\text{etelä}}{\pm}} (90^\circ - \eta)\,.$$

  Plussamerkki pätee, kun Auringon korkeuskulma havaitaan eteläisen horisontin yläpuolella, yleensä pohjoisella pallonpuoliskolla. Kun Aurinko näkyy suoraan pohjoisessa, yleensä eteläisellä pallonpuoliskolla, pätee miinusmerkki.

- Pituusaste on ongelmallinen Maan pyörähdysliikkeen takia. Tämä merkitsee, että maapallon asento Aurinkoon ja tähtiin nähden muuttuu nopeasti vuorokauden aikana. Auringon tai tähtien käyttäminen pituusasteen määrityksessä edellyttää tämän asennon tuntemista. Se puolestaan edellyttää absoluuttisen ajan tuntemista tarkan aikastandardin eli *kronometrin* avulla. Katso Sobel (1995). Myös tähtitieteellisiä menetelmiä, kuten Jupiterin kuiden käyttöä ”kellona”, on tutkittu Galileosta lähtien (Koberlein, 2016). Lisäksi 1900-luvulla yleistyi aikamerkkien jakelu radioteitse.

1900-luvulla myös radiotekniset paikannusmenetelmät tulivat kuvioon mukaan. Tunnetuin on varmaan Decca, joka perustuu hyperbeliseen paikannukseen.

Yksi *master*- eli pääasema ja kaksi tai useampi *”slave”*- eli apuasemaa lähettävät radioaallot, joiden vaihekulmat, jotka toimivat aikamerkkeinä, ovat synkronoituja. Laivalla oleva vastaanotin mittaa pää- ja apuasemalta vastaanotettujen aaltojen välisen kulkuaikojen eron. Merikartalle on merkitty värillisenä käyränä, *hyperbelina*, kaikki pisteet, joilla on sama kulkuaikojen ero. Jokainen apuasema muodostaa pääaseman kanssa yhden hyperbelikimpun, jolla on oma väri. Kahden erivärisen hyperbelin leikkauspiste antaa laivan sijainnin. Pääaseman lisäksi tarvitaan siis ainakin kaksi apuasemaa.

Modernit satelliittipaikannusmenetelmät, kuten Transit/NNSS (käytöstä poistettu), GPS ja muut globaalit navigointisatelliittijärjestelmät, perustuvat hyperbelimenetelmän kolmiulotteiseen varianttiin.

1.2.3 *Moderni aikakausi*

Ilmailu ja avaruustutkimus ovat tuoneet mukanaan tarpeen automaattiselle kolmiulotteiselle navigoinnille. Vaikka ensimmäisiä lentokoneita voitiin vielä lentää käsin ilman instrumentteja, ensimmäinen moderni ohjus, saksalainen V-2, sisälsi jo gyroskooppipohjaisen ohjausjärjestelmän. Tässä tapauksessa navigointi on *ohjaus* (engl. *guidance*).

V-2:n ohjausjärjestelmä oli alkeellinen. Ohjus laukaistiin pystysuoraan ilmaan, jossa se kääntyi oikeaan suuntaan gyroskooppialustansa avulla. Ohjus kiihtyi, kunnes se saavutti ennalta määrätyn nopeuden, ja ajoainehanat suljettiin (”*Brennschluss*”). Fyysisesti ohjaus tapahtui pienten ”ilma- ja suihkuperäsimien” (”*Luft- und Strahlruder*”) avulla, jotka olivat kytkettyjä pyrstöön ja jotka muuttivat moottorista tulevien kuumien kaasujen suuntaa[3].

[3]

Nykyään lentokoneissa ja avaruusaluksissa käytetään täydellistä inertianavigointia ja muita tietotekniikkaan perustuvia teknologioita, kuten satelliittipaikannus eli GNSS, *global navigation satellite systems*.

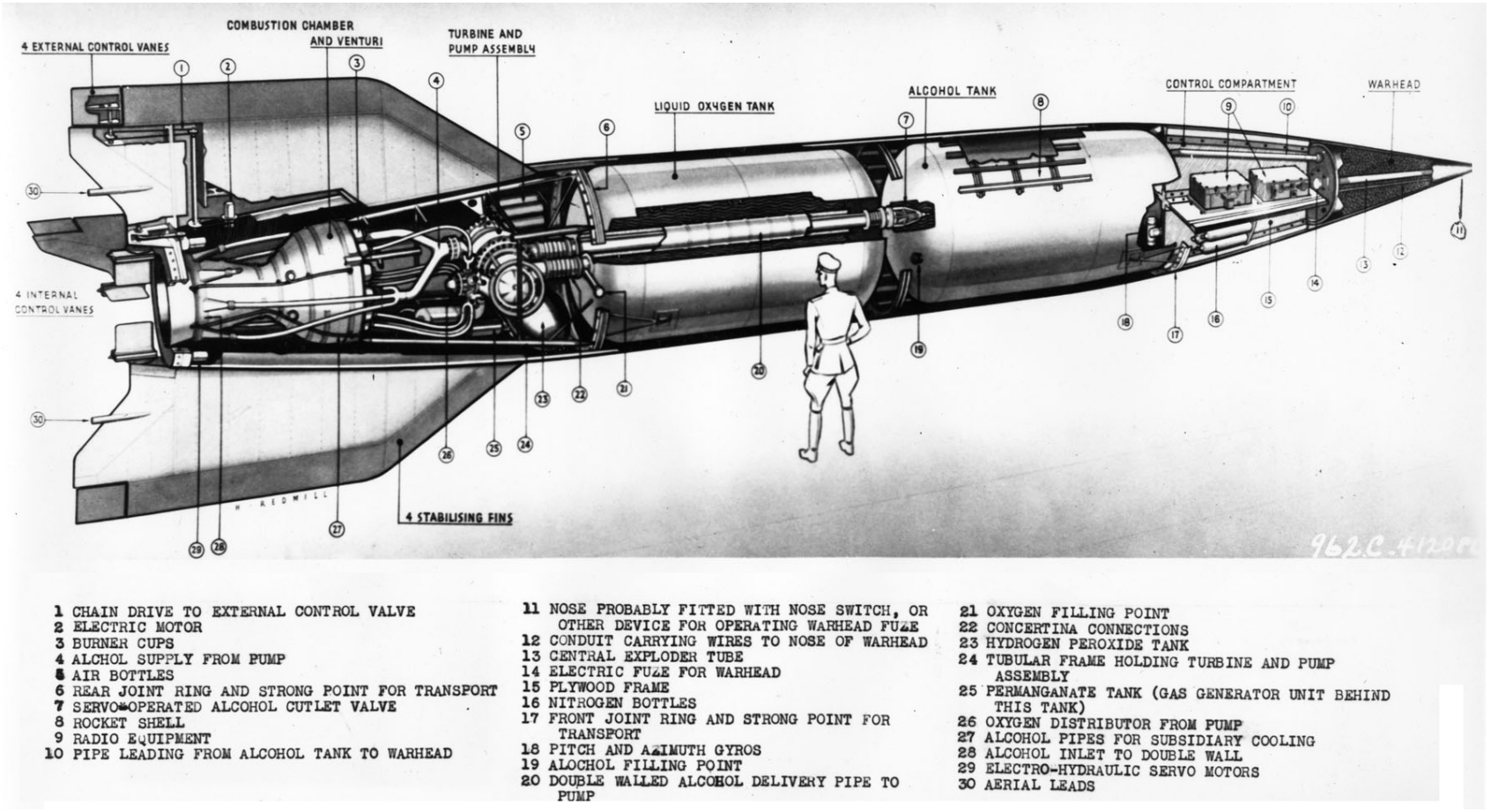
1.3 Kulkuneuvon liikkeet ja koordinaatistot

Liikkuvan kulkuneuvon yhteydessä on olemassa muutama merkityksellinen koordinaatisto eli vertauskehys, katso kuva 1.6:

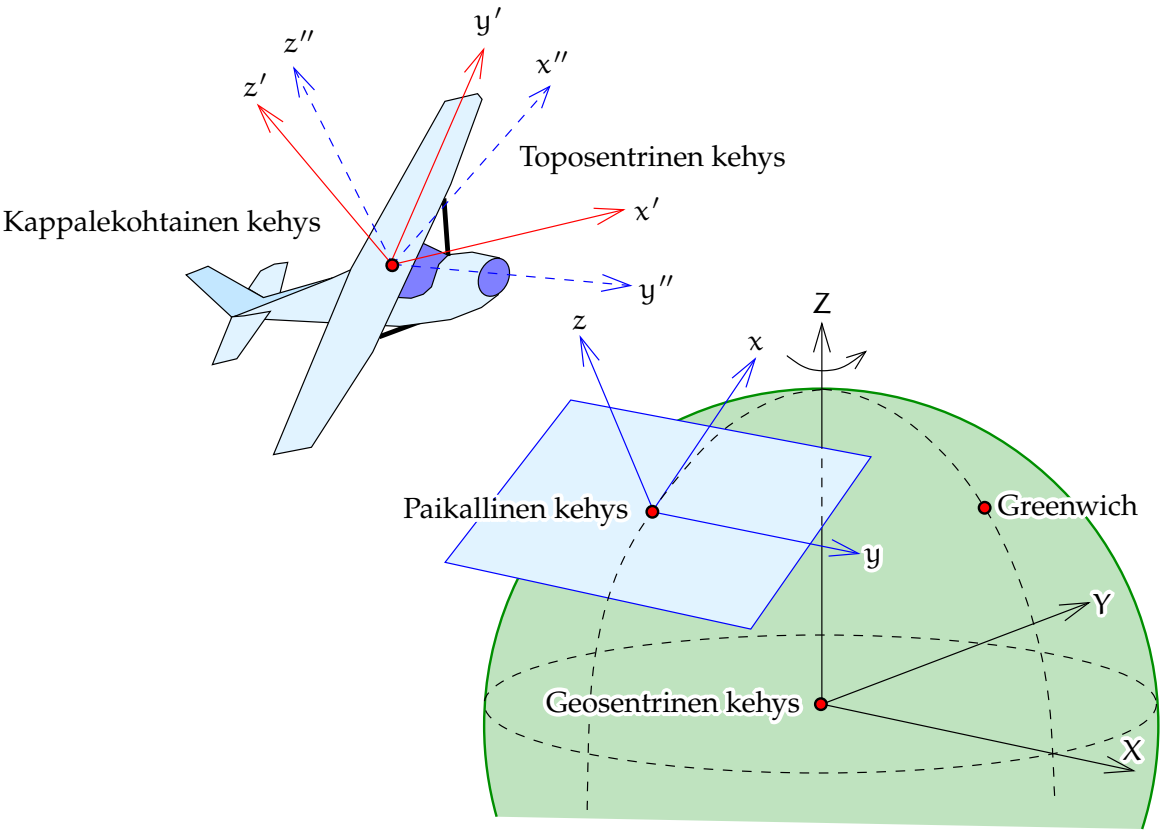
1) kappalekohtainen koordinaatisto: x' osoittaa liikesuuntaan, y' osoittaa sivuun paapuuriin ja z' osoittaa suunnilleen ylöspäin.
2) toposentrinen koordinaatisto, myös pohjoinen-itä-ylös: x''-akseli osoittaa pohjoiseen (geodesiassa) tai itään (fotogrammetriassa), z''-akseli osoittaa ylöspäin paikallista luotiviivaa pitkin ja y'' on kohtisuora molempiin nähden osoittaen joko pohjoiseen tai itään.
3) paikallinen tai alueellinen terrestrinen koordinaatisto, jossa x ja y ovat karttaprojektiokoordinaatit, ja z on paikallisessa korkeusjärjestelmässä määritelty korkeus sovitusta vertauspinnasta paikallista luotiviivaa pitkin.

---

[3] Katso Wikipedia, V-2 rocket. Itse asiassa ilmaruorit olivat kaksinkertaisia: suihkuperäsimet, jotka ulottuivat moottorin kuumaan kaasuvirtaan, oli tehty grafiitista, ja siksi ne paloivat nopeasti loppuun. Siihen mennessä raketilla oli jo niin paljon nopeutta, että ulkopuoliset ilmaperäsimet ottivat raketin haltuunsa.
Nykypäivän raketit suuntaavat moottoriaan hydraulisesti, niin että työntövoimavektori hallitaan tarkasti.



Kuva 1.5. Saksalainen ohjusase V-2. Kuva Yhdysvaltojen ilmavoimat.



KUVA 1.6. Eri koordinaatistot navigoinnissa.

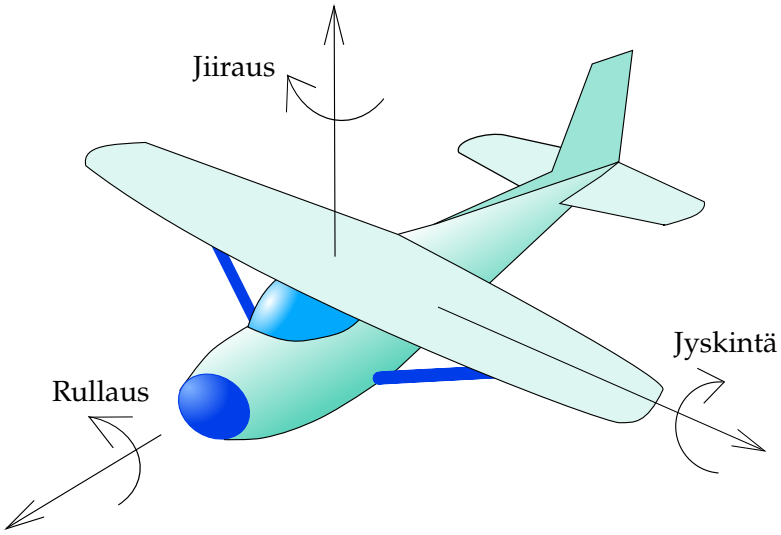
Tämä on kvasi-karteesinen vertauskehys, jota käytetään usein ilmakuvakartoituksessa.

4) geosentrinen koordinaatisto (X, Y, Z), katso osio 1.4.

Kappalekohtaisen ja ulkoisen kehyksen välillä on olemassa muunnos, jota luonnehtii kolme *siirto-* eli *translaatioparametria* ja kolme *kiertokulmaa* eli Eulerin kulmaa. Liikkuvalla kulkuneuvolla kaikki kuusi ovat jatkuvia ajan funktioita, kuten myöskin niiden ensimmäiset aikaderivaatat, jotka tunnetaan *nopeuksina* ja *kiertonopeuksina*.

Kulkuneuvon *asentoa* voidaan kuvata kolmen akselin suhteen. Akselien nimet suomeksi ovat ainakin ilmailussa pysty-, poikki- ja pituusakselit (engl. *yaw, pitch* ja *roll axes*). Pyörähdysliikettä matkasuunnan eli pituusakselin ympäri kutsutaan (etenkin ilmailussa) *kallistumiseksi*, *rullaukseksi* (ruots. *att rulla)* tai *keinumiseksi*, liikettä pystyakselin ympäri *kääntymiseksi* (ilmailu), *jiraukseksi* (ruots. *att gira*) tai *mutkailuksi*, ja liikettä vaaka-akselin (vasen-oikea-akselin) ympäri *nyökkäämiseksi* (ilmailu) tai *jyskinnäksi* (ruots. *att stampa*)[4]. Nämä termit eivät ole suomen kielellä

[4] Kiitos Jukka Varonen ja Kimmo Penttilä!



Kuva 1.7. Kulkuneuvon asentokulmat.

vakiintuneita. Puhutaan myös *Eulerin kulmista*, esimerkiksi fotogrammetriassa $(\omega, \varphi, \kappa)$. Niiden määritelmä on kuitenkin hieman erilainen.

oomega ωΩ
kappa κK

1.4 Geosentriset vertauskehykset

Vertauskehyksen eli koordinaatiston *geosentrisyys* merkitsee, että

- Origo on Maan massakeskipisteessä tai hyvin lähellä sitä.
- Z-akseli osoittaa Maan pyörimisakselin suuntaan.

Tämän lisäksi Maan mukana pyörivälle vertauskehykselle

- X-akseli on Greenwichin meridiaanin tasossa ja osoittaa päiväntasaajan ja Greenwichin meridiaanitason leikkauspisteeseen.
- Y-akseli on kohtisuorassa molempiin muihin nähden.

Sellaisenaan GPS antaa koordinaatit WGS84-vertauskehyksessä, joka on GPS-järjestelmän alusta lähtien käyttämä geosentrinen kehys. Sitä ylläpitää Yhdysvaltain puolustuslaitos, ja siitä on ollut useita versioita.

Kansainvälinen geodeettinen tutkimusyhteisö on IAG:n, Kansainvälisen geodeettisen assosiaation, kautta laatinut omia geosentrisiä kehyksiä. IAG:n palvelun nimi on IERS eli International Earth Rotation and Reference Systems Service. Kehysten nimet ovat ITRFyy: International Terrestrial Reference Frame. yy on julkaisemisen vuosiluku.

Nykyisin nämä kehykset yhtyvät senttimetritasolla WGS84:ään.

Eurooppalaisella alueella IAG:n Euroopan alueellinen vertauskehyksen alakomitea (EUREF) on samalla tavalla toimittanut eurooppalaisia

geosentrisiä vertauskehyksiä nimeltä ETRFyy: European Terrestrial Reference Frame. ETRF-kehykset on suunniteltu näin, että pisteiden koordinaatit eivät muutu Euraasian mannerlaatalla eli kehys *liikkuu laatan mukana*. Kehykset ovat vertausjärjestelmän ETRS-89 realisaatioita.

Monissa Euroopan maissa ja tiedepiireissä on käytössä järjestelmän ETRS-89 realisaatioita, kuten Suomessa EUREF-FIN. ETRS-89:n määrityshetki eli *epookki* on vuoden 1989 alku, jolloin se yhtyi ITRS:n kanssa (International Terrestrial Reference System).

Vertauskehykset WGS84, ITRF ja ETRF ovat kaikki geosentrisiä. Ne ovat myös terrestrisiä eli kiinnitettyjä kiinteään Maahan ja "mukana pyöriviä": ECEF, "*Earth centred, Earth fixed*". Tämän tyyppisiä koordinaatteja saadaan satelliittipaikannuslaitteista.

Mainitut vertauskehykset *eivät* ole *inertiaalisia*: inertialaitteiden käyttö osoittaa heti, että ne kääntyvät maapallon mukaan kerran tähtivuorokaudessa, $23^h56^m4^s$. Tietysti sama näkyy myös, kun katsoo taivasta tähtikirkkaana yönä. . . .

Newtonin liikelait pätevät vain inertiaalisessa koordinaatistossa. Inertialaitteet on viritettävä huolellisesti, jos niitä käytetään Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa, kuten todetaan osiossa 5.9.

Inertiaalinen vertauskehys on sovitusti myös geosentrinen: origo sijaitsee Maan massakeskipisteessä. X-akseli osoittaa Greenwichin meridiaanitason suunnan sijasta kevättasauspisteen suuntaan. Kevättasauspiste on Auringon paikka taivaalla kevään alussa, kun se siirtyy eteläiseltä pohjoiselle pallonpuoliskolle.

Geosentristen vertauskehysten aikaskaala on sidottu keskimerenpinnan geopotentiaaliin. Sillä on merkitystä, jos käyttää tarkkoja atomikelloja sekä maanpinnalla että avaruudessa.

1.5 Ei-geosentriset vertauskehykset

GPS on ollut käytettävissä geosentristen vertauskehysten luomiseen 1990-luvun alusta lähtien. Useimmat maailman kansakunnat ovat kansainvälisen geodeettisen yhteisön tukemana käyttäneet tätä tilaisuutta hyväkseen, ja nykyään ITRS on useimpien virallisten vertauskehysten pohjana.

Tämä ei kuitenkaan merkitse, että vanhoista koordinaatistoista on luovuttu kokonaan. Miljoonat pistekoordinaatit vanhoissa koordinaatistoissa viruvat vanhoissa asiakirjoissa. Tällaisia ovat esimerkiksi tont-

tirajat sekä digitaaliset kaavoitus- ja infrastruktuurikartat. Kunnat ovat panostaneet merkittävästi saadakseen nämä aineistot muunnettua geosentrisiksi. Vanhoja koordinaatteja ei enää suositella käytettäviksi.

Tosiaikainen kinemaattinen (RTK) paikannus, lähinnä navigointimenetelmä, on laajassa käytössä oleva datankeruumenetelmä digitaalisessa kartoitustyössä. Se on myös esimerkki siitä, miten ”navigointiratkaisua” voidaan käyttää kartoitustarkoituksiin. Etuna on, ettei mittauksen jälkeen ole toimistotyötä. Kerätty data — joka voi olla varsin laaja ja jopa miljoonia pisteitä — menee suoraan paikkatietojärjestelmään rajallisen käsityön, esimerkiksi tietyn luettelon mukaisen tyyppikoodauksen, jälkeen.

Jos tarkkuusvaatimus on metrin tasoa, tehtävään kelpaa jopa koodipohjainen differentiaali-GNSS.

Kuitenkin, jos haluaa työskennellä paikallisessa tai valtakunnallisessa ei-geosentrisessä järjestelmässä, kuten KKJ eli Kartastokoordinaattijärjestelmä, ja halutaan samalla säilyttää GNSS-mittauksista saatu ylivoimainen tarkkuus, asiat mutkistuvat.

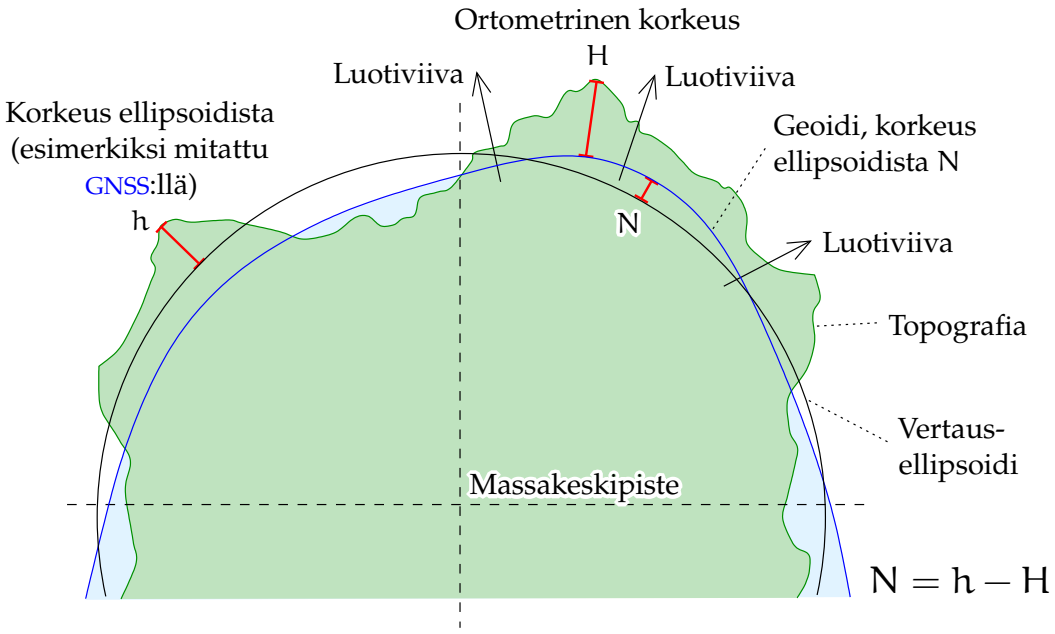
Jotkut RTK-GNSS-laitteistot mahdollistavat seuraavan mittaustavan:

- Mitataan muutama KKJ:ssä tunnettu piste mittausalueen reunoilla ja syötetään niiden KKJ-koordinaatit.
- Mitataan alueen uudet mitattavat pisteet.
- Palataan tunnetulle pisteelle ja tarkistetaan, onko mittauksen aikana tapahtunut havaintosuureen eli kantoaallon vaiheen kokonaislukutuntemattoman muutos (vaihekatko eli *”cycle slip”*).
- Laite laskee itse muunnoskaavan parametrit tunnettujen pisteiden avulla ja muuntaa lennossa kaikki uudet mittauspisteet KKJ:hin. Käytetty muunnos on tavallisesti Helmertin muunnos avaruudessa.

Menetelmän haittapuoli on, että mittausaineiston alkuperäinen tarkkuus putoaa peruuttamattomasti KKJ:n aina heikompaan paikalliseen tarkkuuteen. Siksi menetelmä on käytännössä vanhentunut, eikä sitä käytetä enää: RTK-mittauksissa käytettyjen tunnettujen pisteiden koordinaattien on oltava geosentrisiä.

1.6 Korkeuden vertaustaso

GNSS-paikanmääritystä käytetään usein korkeuden määrittämiseen. Silloin tulee vastaan ongelma, että korkeudetkin ovat geosentrisiä, toisin



KUVA 1.8. Korkeusjärjestelmät ja vertauspinnat.

sanoen ne ovat korkeuksia geosentrisen, matemaattisesti määritellyn *vertausellipsoidin* yläpuolella. Sen sijaan perinteiset korkeudet geodesiasta ovat ”keskimerenpinnan” eli tarkemmin *geoidin* yläpuolella. Geoidi eli Maan matemaattinen muoto on Maan painovoimakentän tasapotentiaalipinta.

Kuva 1.8 selostaa korkeuden eri vertauspinnat ja niiden väliset yhteydet.

1.7 Peruskäsitteet ja teknologiat

Seuraavissa luvuissa käsitellään peruskäsitteet ja teknologiat systemaattisesti. Tulemme näkemään, että olemassa on monia teknologioita ja menetelmiä, jotka soveltuvat sekä navigointiin että geodeettiseen paikanmääritykseen.

Käsiteltäviä ideoita, käsitteitä ja teknologioita:

- Stokastiset prosessit ja niiden ominaisuudet alkaen stokastisten muuttujien perusteista, estimoinnista ja keskiarvostamisesta, kovarianssista ja korrelaatiosta. Sen jälkeen kuvataan aikasarjat ja lineaarinen regressio, mukaan lukien ajallinen korrelaatio. Auto- ja ristikovarianssi esitetään samoin kuin tunnetut stokastiset prosessit: valkoinen kohina, satunnaiskulku sekä Gaussin ja Markovin prosessi. Lopuksi käsitellään tehon spektraalitiheyttä ja sen yhteyttä autokovarianssifunktioon.

- Kalmanin suodin esitetään lineaarisen estimoinnin ja pienimmän neliösumman menetelmän esimerkkinä. Läpi käydään tilavektori, dynaaminen malli ja havaintomalli sekä niihin liittyvät tilastolliset mallit. Lisäksi näytetään, kuinka dynaaminen malli voidaan esittää joko diskreetissä tai jatkuvassa muodossa ja kuinka tilaestimaattori ja tilavarianssi etenevät ajassa. Sen jälkeen näytetään, kuinka havaintoja käytetään tilan päivittämiseen optimaalisesti Kalmanin päivitysyhtälön avulla. Lopuksi seuraa muutama laskennan ja sovelluksen esimerkki.
- Inertianavigointi esitetään alkaen fysikaalisista periaatteista, käytetyistä laitteistokomponenteista ja teknisistä ratkaisuista. Seuraavaksi kehitetään navigoinnin matematiikka kiinteän Maan järjestelmässä ja selitetään vakautettu alusta, hyrräkompassi ja Schulerin heiluri, jota käytetään navigointiin yhdessä ulottuvuudessa pallomaisen Maan pinnalla. Lopuksi käsitellään mekanisointia ja esitetään esimerkkinä yksinkertaistettu kaksiulotteisen navigoinnin ratkaisu pyörivän Maan kaarevalla pinnalla.
- Satelliittiradat esitetään ensin Keplerin ratamekaniikan ja sen jälkeen pyörivän Hillin koordinaatiston kannalta. Tarkoituksena on kahden kiertävän kappaleen suhteellisten liikkeiden kuvaaminen. Clohessyn ja Wiltshiren formalismia kehitetään. Sovelluksina esitetään navigointia kiertoradalla ja *rendezvous*-ongelmaa.
- GPS, *Global Positioning System*, yleisemmin GNSS, *global navigation satellite systems*. Taustalla olevat teknologiat esitetään keskittyen sähkömagneettisten aaltojen etenemisen, polarisaation ja modulaation fysiikkaan sekä näennäissatunnaiskoodien matematiikkaan. Navigointisatelliittien signaalien tehon spektraalitiheydet johdetaan. Kuvataan pseudoetäisyyksien mittaustekniikat, jotka käyttävät joko kantoaallon vaihekulmia tai kantoaaltoon moduloituja koodeja. Lopuksi esitetään atomikellojen käyttäytyminen ja vaihetuettu koodimittaus.
- GNSS:n käyttö navigoinnissa. Tosiaikainen kinemaattinen (RTK) mittaustekniikka esitetään laajasti. Muodostetaan havaintoyhtälöt ja tutkitaan mittausgeometriaa, kokonaislukutuntemattomien ratkaisemista, ilmakehän etenemisviiveiden mallintamista, tukiasemien verkkojen käyttöä ja tietostandardeja differentiaalikorjausten levittämiseksi.
- *Satellite-based augmentation systems* (SBAS) eli satelliittipohjaiset pa-

rannusjärjestelmät. Käydään läpi, miten ne toimivat, miksi ne ovat arvokkaita, miten ne standardisoidaan ja mitkä maat ovat rakentaneet tämän tyyppisiä järjestelmiä omille ilmatiloilleen. Esitetään myös asiaan liittyviä tai täydentäviä menetelmiä, kuten RAIM, vastaanottimen itsenäinen eheyden seuranta ja GBAS, maapohjaiset parannusjärjestelmät.

- Uudet GPS:n jälkeiset satelliittinavigointijärjestelmät GLONASS (Venäjä), Compass/BeiDou (Kiina) ja Galileo (Eurooppa). Kuvataan yksityiskohtaisesti nämä järjestelmät, niiden satelliittikonstellaatiot ja kiertoradat, käytetyt taajuudet ja modulaatiotekniikat.
- Lyhyt intermezzo aiheesta painovoiman kartoitus ilmasta tai avaruudesta. Tekniikoilla on paljon yhteistä Maan painovoimakentässä navigoinnin kanssa.
- Selitetään anturifuusio ja sattuman anturit maustettuna muutamalla mielenkiintoisella esimerkillä aktiiviselta tutkimuskentältä.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mitä ”tosiajassa” tarkoittaa?
2) Mikä on merkintälasku?
3) Mitkä ovat maamerkkinavigoinnin rajoitukset?
4) Miten löydät leveysasteesi päiväsaikaan? Entä yöllä?
5) Miksi pituusasteen määrittäminen vaatii tarkan kronometrin?
6) Mitkä nimet on annettu niille kolmelle akselille, joiden ympäri kulkuneuvo voi kääntyä?
7) Miten hyperbelinen paikannusjärjestelmä toimii?
8) Mikä on geosentrinen vertauskehys eli koordinaatisto?
9) Mikä on ero inertiaalisen ja Maan mukana pyörivän vertauskehyksen eli koordinaatiston välillä?
10) Mitä erityyppisiä korkeuksia on olemassa? Mikä on geoidin rooli?

Stokastiset prosessit

2

2.1 Stokastiset muuttujat ja prosessit

Epävarman, ajassa satunnaisesti muuttuvan suureen yleinen kuvaustapa on *stokastinen prosessi*. Stokastinen prosessi on stokastisen muuttujan käsitteen yleistys funktioihin.

Aiheen taustalukemista tarjoaa Strang ja Borre (1997), sivut 515–541.

2.1.1 *Stokastiset muuttujat*

Määritellään *stokastinen muuttuja* seuraavasti:

> Stokastinen muuttuja $\underline{x}$ *on jono suureen* x *realisaatioita* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *eli* x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$. *Jokaisella realisaatioarvolla on tietty* todennäköisyys $p(x)$ *toteutua. Kun realisaatioita eli "heittoja" toistetaan uudestaan ja uudestaan, arvon toteutumisprosentti taipuu kohti tätä todennäköisyyttä.*

Stokastisuuden perinteinen merkintätapa on alleviivaus.

Stokastisen muuttujan arvojoukko voi olla *diskreetti* tai *jatkuva*. Yllä oleva määritelmä kuvaa diskreettejä stokastisia muuttujia.

Diskreetin stokastisen muuttujan esimerkkejä ovat

- Nopanheitto. Jokainen heitto on yksi realisaatio. Tässä tapauksessa $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, diskreetti arvojoukko. Rehelliselle nopalle $p(k) = \frac{1}{6}$, $k = 1, \ldots, 6$. Kuten sana "rehellinen" antaa uskoa, noppaa voidaan käyttää puolueettomana ratkaisuvälineenä esimerkiksi lautapelissä.
- Kolikonheitto. $x_i \in \{0, 1\}$, $0 =$ kruuna, $1 =$ klaava. Myös kolikoita käytetään puolueettomaan päätöksentekoon, esimerkiksi jalkapallopelin alussa.

- Tuotteen laatukoe: hyväksytään tai hylätään, $x_i \in \{0,1\}$. Ero kolikonheittoon on, että rehelliselle kolikolle $p(0) = p(1) = 0{,}5$. Laatukokeen tapauksessa ei ole vastaavaa ehtoa. Valmistaja haluaa vain, että $p(1)$, hylkäyksen todennäköisyys, on pieni.
- Pankin lähettämät tunnusluvut, kun asioi käyttäen tunnuslukulaitetta. $x_i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Erikoista tässä tapauksessa on, että arvojoukko on diskreetti, mutta sen koko N on suuri. Satunnaisuuden tarkoituksena on estää onnekasta arvailua.

Mittaus on yleensä reaaliarvoinen eli jatkuva stokastinen muuttuja.

Mittauksen esimerkkejä:

- *Mitattu etäisyys* on reaaliarvoinen eli jatkuva stokastinen muuttuja $\underline{s}$. Realisaatiot eli mittausarvot s_i, $i = 1, 2, \ldots$ ovat arvojoukossa $\{ s \in \mathbb{R} \mid s > 0 \}$, positiiviset reaaliluvut[1].
- GNSS:n tuottama vektorimittaus pisteestä A pisteeseen B on *stokastinen vektorimuuttuja* $\underline{\mathbf{x}}$. Jokainen realisaatio, joka koostuu kolmesta komponentista, kuuluu kolmiulotteiseen vektoriavaruuteen: $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \ldots$.
- alfa αA Mitattu vaakakulma $\underline{\alpha}$, realisaatiot $\alpha_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2, \ldots$. Esimerkkinä kulmamittaus teodoliitilla, jolloin arvojoukko on $\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \alpha < 2\pi \}$, reaalilukujen osajoukko[2].

Jatkuvien stokastisten muuttujien tapauksessa puhutaan todennäköisyys*tiheydestä* eikä tietyn toteutumisarvon x todennäköisyydestä, koska sen tarkan toteutumisen todennäköisyys on nolla. Todennäköisyys, että realisaatio on tietyn välin $I = (x_1, x_2)$ sisällä, lasketaan integraalina

$$p(I) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx.$$

Usein kohdataan *kumulatiivinen* todennäköisyystiheysjakauma, integraali

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{x} p(x')\, dx'. \tag{2.1}$$

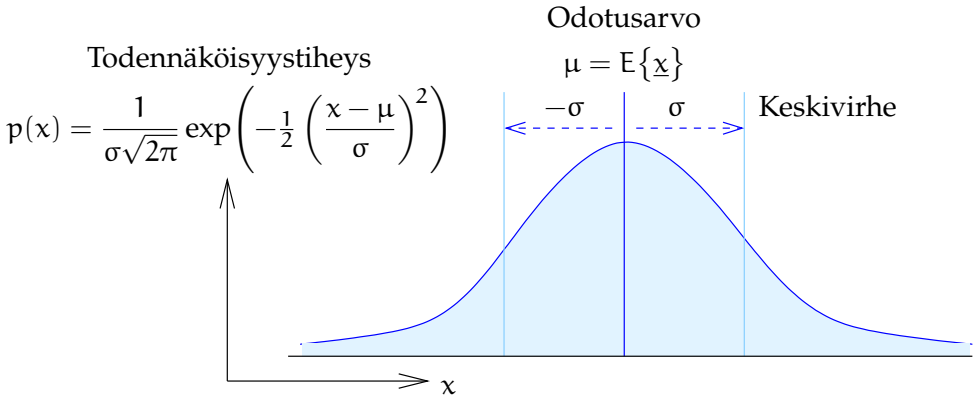
Tällä määritelmällä

$$p(I) = P(x_2) - P(x_1).$$

Jos oletetaan, että todennäköisyysjakauma on *normaali* eli Gaussin[3]

[1] Tarkemmin: positiiviset *rationaaliluvut*, $\{ s \in \mathbb{Q} \mid s > 0 \}$. Ei ole mahdollista mitata reaaliarvoja ja äärellisellä desimaalien lukumäärällä kirjoittaa niitä ylös.

[2] Tarkemmin: rationaalilukujen osajoukko, $\{ \alpha \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant \alpha < 2\pi \}$.



KUVA 2.1. Gaussin kellokäyrä eli normaalijakauma.

kellokäyrän mukainen, kuva 2.1, on sen yhtälö

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \tag{2.2}$$

jossa σ on jakauman keskivirhe eli keskihajonta ja μ sen odotusarvo. Molemmat suureet määritellään myöhemmin.

sigma σΣ
myy μM

2.1.2 *Stokastiset prosessit ja aikasarjat*

Stokastinen *prosessi* on stokastinen muuttuja, jonka arvojoukko on *funktioavaruus*: stokastisen muuttujan jokainen realisaatio (”nopanheitto”) on kokonainen funktio.

Funktion argumentti on tavallisesti aika t, mutta mahdollisesti myös paikka eli leveys- ja pituusaste (φ, λ) Maan pinnalla.

fii φϕΦ
lambda λΛ

Aikasarja on stokastisesta prosessista saatu diskreetti arvojen sarja. Sarja saadaan otannan avulla erikoistamalla argumentti t tiettyihin enemmän tai vähemmän säännöllisin välein valittuihin arvoihin $t_j, j = 1, 2, \ldots$. Toisin sanoen aikasarja on stokastinen prosessi säännöllisesti mitattuna.

Stokastista prosessia — tai aikasarjaa — kutsutaan *stationaariseksi*, jos sen tilastolliset ominaisuudet eivät muutu, vaikka argumentti t korvattaisiin argumentilla $t + \Delta t$.

Stokastisten prosessien esimerkkejä:

- Koelaitteen lämpötila $\underline{T}(t)$ ajan t funktiona. Eri realisaatiot $T_i(t)$ saadaan toistamalla koetta: $i = 1, 2, \ldots$.

[3] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) oli saksalainen matemaatikko ja yleisnero. ”*Princeps mathematicorum*”.

- Helsingin Kaisaniemen sääaseman lämpötila $\underline{T}^{\text{Kais}}(t)$. Historiaa ei voida toistaa tarkasti: tästä stokastisesta prosessista on olemassa vain yksi realisaatio $T_1^{\text{Kais}}(t)$, Kaisaniemen historiallinen aikasarja. Muut realisaatiot $T_i^{\text{Kais}}(t)$, $i = 2, 3, \ldots$ ovat olemassa vain teoreettisina konstruktioina.

Historia ei toistu, mutta *ergodisille* prosesseille se riimii. Usein oletetaan, että tilastollisten ominaisuuksien tutkimisen tulos on sama, jos käytetään eri realisaatioina *samaa prosessia siirrettynä ajassa*. Esimerkiksi

$$T_{i+1}(t) = T_i(t + \Delta t),$$

jossa Δt on aikasiirtymä, jonka valinta riippuu tutkimuksen kohteesta. Esimerkkinä toimii hyvin Kaisaniemen aikasarjat eri vuosina. Tätä oletusta kutsutaan *ergodisuushypoteesiksi*.

2.2 Otoskeskiarvo

2.2.1 *Yleistä*

Usein kohdataan tilanne, jossa jokin suure x on mitattu useita kertoja, ja siksi käytettävissä on tietyn stokastisen mittasuureen $\underline{x}$ useita realisaatioita.

Toki kaikki realisaatiot poikkeavat eri tavalla ”oikeasta” arvosta x, *jota emme tunne*. Jos tuntisimme, ei mittauksia tarvittaisi! Suureen käytettävissä olevien realisaatioiden eli mittausarvojen perusteella voidaan kuitenkin laskea suureen x ”mahdollisimman hyvä” arvio. Näitä laskentamenetelmiä kutsutaan *estimointimenetelmiksi*.

Estimaatti on itse *estimaattorin realisaatio*: estimaattori on itse stokastinen suure, jonka realisaatiot ovat estimaatteja.

Stokastisen suureen arvojoukolla, kaikkien mahdollisten arvojen x joukolla, on määritelty *todennäköisyystiheysfunktio* $p(x)$. Tämä funktio edustaa todennäköisyyttä, että erään realisaation arvo sattuisi olemaan kapean välin sisällä x:n ympäri jaettuna välin leveydellä. Se on myös yhtälön 2.1 kumulatiivisen todennäköisyystiheysfunktion $P(x)$ derivaatta.

Usein oletetaan, että $p(x)$ on niin sanotun Gaussin käyrän eli *normaalijakauman* eli ”kellokäyrän” muotoinen, yhtälö 2.2 ja kuva 2.1. Alla esitetyt tulokset eivät riipu normaalijakauman oletuksesta ellei toisin ole mainittu.

Koska muuttujalla x on oltava *jokin* arvo, seuraa, että kokonaistodennäköisyys on 1 eli prosenteissa 100 %:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1.$$

Odotusarvon E määritelmä on

$$E\{\underline{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx.$$

Odotusarvo ei ole sama kuin keskiarvo: odotusarvo on teoreettinen käsite, kun puolestaan keskiarvo lasketaan mittauksista. Niiden välillä on kuitenkin olemassa tärkeä yhteys: muuttujan $\underline{x}$ ensimmäisen n realisaation keskiarvo,

$$\overline{x}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.3}$$

on todennäköisesti sitä lähempänä odotusarvoa $E\{\underline{x}\}$, mitä suurempi n on. Tätä kokemusperäistä lakia kutsutaan *suurten lukujen* empiiriseksi *laiksi.*

Yhtälön 2.3 ensimmäisen n realisaation joukkoa kutsutaan *otokseksi* ja $\overline{x}^{(n)}$ otoskeskiarvoksi.

Nyt kun odotusarvo on määritelty, määritellään seuraavaksi *varianssi*:

$$\mathrm{Var}\{\underline{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} E\left\{\left(\underline{x} - E\{\underline{x}\}\right)^2\right\}.$$

Varianssin neliöjuuri on keskihajonta eli keskivirhe σ, katso kuva 2.1:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\{\underline{x}\}.$$

Varianssi on odotusarvon tapaan teoreettinen suure, jota ei voida täsmällisesti tuntea. Se voidaan kuitenkin *estimoida* otoksesta x_i, $i = 1, \ldots, n$. Jos otoskeskiarvo $\overline{x}^{(n)}$ on jo laskettu, on varianssin σ^2 estimaattori

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}^{(n)}\right)^2.$$

Koska otanta voidaan mielivaltaisesti toistaa, on otoskeskiarvo $\overline{x}^{(n)}$ myös itse stokastinen suure,

$$\overline{\underline{x}}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{x}_i,$$

jossa $\underline{x}_i$ on stokastinen suure, jonka peräkkäiset realisaatiot ovat yksinkertaisesti $(x_i)_j$, $j = 1, 2, \ldots$, jossa j on uusi realisaatiolaskuri.

Jos annettuna on x_i, voidaan esimerkiksi muodostaa

$$\overline{x}_j^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)_j\,, \qquad (x_i)_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{i+n(j-1)},$$

("kampasuure"). Asian selkeyttämiseksi oleta, että otoksen koko on $n = 10$. Silloin otoskeskiarvo stokastisena suureena on $\overline{\underline{x}}^{(10)}$ ja sen peräkkäiset realisaatiot ovat

$$\overline{x}_1^{(10)} = \tfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i, \quad \overline{x}_2^{(10)} = \tfrac{1}{10}\sum_{i=11}^{20} x_i, \quad \overline{x}_3^{(10)} = \tfrac{1}{10}\sum_{i=21}^{30} x_i, \quad \ldots.$$

On intuitiivisesti selvää, että

$$\mathrm{E}\{\underline{x}_i\} = \mathrm{E}\{\underline{x}\}, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Suureen $\overline{\underline{x}}^{(n)}$ odotusarvo on

$$\mathrm{E}\{\overline{\underline{x}}^{(n)}\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\{\underline{x}_i\} = \mathrm{E}\{\underline{x}\},$$

suureen $\underline{x}$ odotusarvo. Tämän tyypistä estimaattoria kutsutaan *harhattomaksi*.

Sen varianssi estimoidaan yhtälöllä

$$\widehat{\mathrm{Var}}\{\overline{\underline{x}}^{(n)}\} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_i - \overline{\underline{x}}^{(n)}\right)^2 = \frac{1}{n}\widehat{\sigma^2}.$$

Toisin sanoen otoskeskiarvon keskivirhe pienenee suhteessa $1/\sqrt{n}$, kun otoksen koko n kasvaa.

2.2.2 *Keskiarvon optimaalisuus*

Kaikista harhattomista suureen x estimaattoreista, jotka perustuvat otokseen $\underline{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\widehat{x} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i\,\underline{x}_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\},$$

keskiarvo

$$\widehat{x} = \overline{\underline{x}}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{x}_i \tag{2.4}$$

minimoi sen varianssin. Kasautumislain mukaan varianssi on

$$\operatorname{Var}\{\underline{\bar{x}}^{(n)}\} = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \operatorname{Var}\{\underline{x}_i\} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2,$$

jossa oletettiin, että $\underline{x}_i$ eivät korreloi keskenään ja että $\operatorname{Var}\{\underline{x}_i\} = \sigma^2$.

Nyt lausekkeen

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}$$

rajoitettu minimointi antaa

$$w_i = \frac{1}{n},$$

josta väite seuraa. Kertoimia w_i kutsutaan *painoiksi*, ja tilannetta, jossa ne ovat kaikki yhtä suuria, kutsutaan painottamattomaksi keskiarvotukseksi.

2.2.3 Otoskeskiarvon laskeminen askel kerrallaan

Otoskeskiarvo (2.4) on mahdollista laskea myös *askel kerrallaan* seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{x}}^{(n+1)} &= \frac{n}{n+1}\,\underline{\bar{x}}^{(n)} + \frac{1}{n+1}\,\underline{x}_{n+1}, \\ \operatorname{Var}\{\underline{\bar{x}}^{(n+1)}\} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \operatorname{Var}\{\underline{\bar{x}}^{(n)}\} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sigma^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tämä on yksinkertainen perättäisen lineaarisen suotimen eli *Kalmanin suotimen* (luku 3) esimerkki. Tällä menetelmällä voidaan laskea suureen $\underline{\bar{x}}^{(n)}$ arvo ”lennossa”, kun havaintoja on vielä tulossa. Jokaisen uuden havainnon jälkeen ei siis jouduta enää käsittelemään havaintojen koko joukkoa uudelleen. Tämä on Kalmanin suotimen käytön etu.

Yhtälöt 2.5 voidaan ymmärtää myös painotettuna keskiarvona tähän asti tehtyjen havaintojen ja uuden havainnon välillä:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{x}}^{(n+1)} &= W\,\underline{\bar{x}}^{(n)} + w\,\underline{x}_{n+1}, \\ \operatorname{Var}\{\underline{\bar{x}}^{(n+1)}\} &= W^2 \operatorname{Var}\{\underline{\bar{x}}^{(n)}\} + w^2\sigma^2, \end{aligned}$$

jossa

$$w = \frac{1}{n+1}, \qquad W = \sum_{i=1}^{n} w = nw = \frac{n}{n+1}, \qquad W + w = 1.$$

2.3 Kovarianssi ja korrelaatio

2.3.1 *Määritelmät ja ominaisuudet*

Kun annettuna on kaksi stokastista suuretta $\underline{x}$ ja $\underline{y}$, on niiden välinen *kovarianssi*

$$\mathrm{Cov}\{\underline{x},\underline{y}\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\Big\{\big(\underline{x}-\mathrm{E}\{\underline{x}\}\big)\big(\underline{y}-\mathrm{E}\{\underline{y}\}\big)\Big\}.$$

Kovarianssi kuvaa, kuinka vahvoja suureiden $\underline{x}$ ja $\underline{y}$ yhteiset satunnaiset vaihtelut ovat.

Kovarianssin lisäksi määritellään *korrelaatio*:

$$\mathrm{Corr}\{\underline{x},\underline{y}\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{Cov}\{\underline{x},\underline{y}\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\underline{x}\}\,\mathrm{Var}\{\underline{y}\}}}. \tag{2.6}$$

Korrelaatio ei voi koskaan olla suurempi kuin 1,0 tai pienempi kuin −1,0. Eric Weisstein antaa seuraavan todistuksen (Wolfram MathWorld, Statistical Correlation). Määrittele normalisoidut suureet $\underline{\xi}$ ja $\underline{\eta}$:

ksii ξΞ
eeta ηH

$$\underline{\xi} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\underline{x}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\underline{x}\}}}, \qquad \underline{\eta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\underline{y}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\underline{y}\}}}.$$

Varianssien kasautumislain mukaan

$$\mathrm{Cov}\{\underline{\xi},\underline{\eta}\} = \frac{\mathrm{Cov}\{\underline{x},\underline{y}\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\underline{x}\}\,\mathrm{Var}\{\underline{y}\}}} = \mathrm{Corr}\{\underline{x},\underline{y}\}.$$

Seuraavat varianssit ovat ei-negatiivisia:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mathrm{Var}\{\underline{\xi}+\underline{\eta}\} = \mathrm{Var}\{\underline{\xi}\} + \mathrm{Var}\{\underline{\eta}\} + 2\,\mathrm{Cov}\{\underline{\xi},\underline{\eta}\},\\ 0 &\leqslant \mathrm{Var}\{\underline{\xi}-\underline{\eta}\} = \mathrm{Var}\{\underline{\xi}\} + \mathrm{Var}\{\underline{\eta}\} - 2\,\mathrm{Cov}\{\underline{\xi},\underline{\eta}\}. \end{aligned}$$

Kun lisäksi

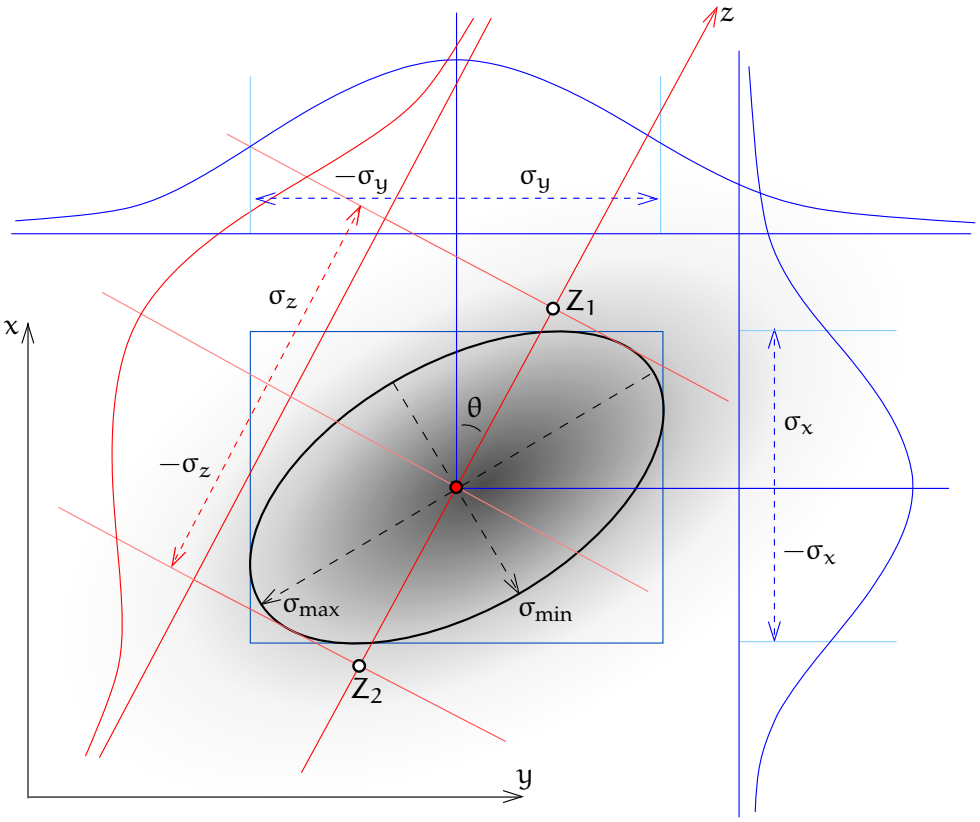
$$\mathrm{Var}\{\underline{\xi}\} = \frac{\mathrm{Var}\{\underline{x}\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\underline{x}\}\,\mathrm{Var}\{\underline{x}\}}} = 1$$

ja samoin $\mathrm{Var}\{\underline{\eta}\} = 1$, seuraa, että

$$-1 \leqslant \mathrm{Cov}\{\underline{\xi},\underline{\eta}\} = \mathrm{Corr}\{\underline{x},\underline{y}\} \leqslant 1.$$

Usein ilmaistaan korrelaatio prosentteina: 100 % on sama kuin arvo 1,0.

Kahden stokastisen suureen tapauksessa voidaan piirtää *virhe-ellipsi*, kuva 2.2. Vertaa tätä kuvaa aikaisempaan kellokäyrän kuvaan 2.1.



KUVA 2.2. Virhe-ellipsi ja todennäköisyystiheysjakaumia. Varjostus kuvailee todennäköisyystiheyttä.

Siihen on merkitty odotusarvo $\mu = E\{\underline{x}\}$ (keskellä) ja keskivirhe $\pm\sigma$. Virhe-ellipsikuvassa 2.2 ellipsin keskipiste edustaa suureiden $\underline{x}$ ja $\underline{y}$ odotusarvoja. Ellipsi itse on kuvan 2.1 keskivirheen $\pm\sigma$ kaksiulotteinen vastine.

Mittausarvot sijoittuvat tietyillä todennäköisyyksillä ellipsin sisälle tai ulkopuolelle: tästä virhe-ellipsi saa nimensä. Nämä todennäköisyydet eivät kuitenkaan ole samoja yksiulotteisella välillä $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, kaksiulotteisella ellipsillä tai kolmiulotteisella virhe-ellipsoidilla. Katso

TAULUKKO 2.1. Todennäköisyydet (%) olla yhden, kahden ja kolmen sigman rajojen ulkopuolella yhden, kahden ja kolmen ulottuvuuden tapauksessa.

	σ	2σ	3σ
Yksi ulottuvuus (väli)	31,7	4,6	0,3
Kaksi ulottuvuutta (ellipsi)	60,6	13,5	1,1
Kolme ulottuvuutta (ellipsoidi)	80,1	26,1	2,9

taulukko 2.1.

2.3.2 *Korrelaatio, virhe-ellipsi ja regressio*

Jos suora z leikkaa ellipsin, saadaan suureiden $\underline{x}$ ja $\underline{y}$ lineaariyhdistelmä, theeta $\vartheta\theta\Theta$ jossa θ on suoran suuntakulma:

$$\underline{z} = \underline{x}\cos\theta + \underline{y}\sin\theta.$$

Pisteet Z_1 ja Z_2, joissa suora leikkaa ellipsin projisoivat tangentit, edus- 4 tavat suureen $\underline{z}$ keskivirhettä[4]:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{\underline{z}\} &= \mathrm{E}\left\{\left(\underline{z} - \mathrm{E}\{\underline{z}\}\right)^2\right\} = \\ &= \mathrm{E}\left\{\left(\cos\theta\left(\underline{x} - \mathrm{E}\{\underline{x}\}\right) + \sin\theta\left(\underline{y} - \mathrm{E}\{\underline{y}\}\right)\right)^2\right\} = \\ &= \cos^2\theta\,\mathrm{Var}\{\underline{x}\} + 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{Cov}\{\underline{x},\underline{y}\} + \sin^2\theta\,\mathrm{Var}\{\underline{y}\},\end{aligned}$$

ja tästä $\sigma_z = \sqrt{\mathrm{Var}\{\underline{z}\}}$. Suuntakulman θ funktiona keskivirheellä $\sigma_z(\theta)$ on kaksi ääriarvoa: $\sigma_{\min}$ ja $\sigma_{\max}$, kuva 2.2.

Jos $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$, tai jos koordinaatiston akselit osoittavat ääriarvojen $\sigma_{\min}$ ja $\sigma_{\max}$ suuntiin, korrelaatio suureiden $\underline{x}$ ja $\underline{y}$ välillä häviää. Siinä tapauksessa ne ovat toisistaan riippumattomia ja toisen todellisen arvon tunteminen ei auta toisen estimoinnissa.

Jos korrelaatio ei häviä, suureen $\underline{x}$ todellisen arvon — tai sen hyvän estimaatin — tunteminen auttaa estimoimaan suurta $\underline{y}$ paremmin. Menetelmää kutsutaan *regressioksi*.

---

[4] Matriisikirjoitustavalla

$$\underline{z} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{bmatrix}$$

ja

$$\mathrm{Var}\left\{\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}\mathrm{Var}\{\underline{x}\} & \mathrm{Cov}\{\underline{x},\underline{y}\}\\ \mathrm{Cov}\{\underline{x},\underline{y}\} & \mathrm{Var}\{\underline{y}\}\end{bmatrix}.$$

Tästä seuraa

$$\mathrm{Var}\{\underline{z}\} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Var}\{\underline{x}\} & \mathrm{Cov}\{\underline{x},\underline{y}\}\\ \mathrm{Cov}\{\underline{x},\underline{y}\} & \mathrm{Var}\{\underline{y}\}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix},$$

sama tulos. Tämä on *varianssien kasautumislain* esimerkki.

2.3.3 *Korrelaation huomiotta jättämisen vaikutus*

Jos on annettuna kaksi stokastista suuretta $\underline{x}_1$ ja $\underline{x}_2$, voidaan laskea painotettu keskiarvo:

$$\overline{\underline{x}} = w_1 \underline{x}_1 + w_2 \underline{x}_2,$$

jossa w_1 ja w_2 ovat painot ja $w_1 + w_2 = 1$. Tämän lineaariyhdistelmän varianssi on

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\{\overline{\underline{x}}\} &= w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2 = \\ &= w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1(1-w_1)\sigma_{12} + (1-w_1)^2\sigma_2^2, \quad (2.7)\end{aligned}$$

jossa $\sigma_1^2 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Var}\{\underline{x}_1\}$, $\sigma_2^2 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Var}\{\underline{x}_2\}$ ja $\sigma_{12} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Cov}\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}$.

Optimaalinen on piste, jossa w_1:n derivaatta häviää:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w_1}\operatorname{Var}\{\overline{\underline{x}}\} &= 2w_1\sigma_1^2 + 2(1-2w_1)\sigma_{12} - 2(1-w_1)\sigma_2^2 = 0 \\ &\Longrightarrow\ w_1(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) - w_2(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) = 0.\end{aligned}$$

Optimaaliset painot ovat nyt

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}, \qquad w_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}.$$

Erikoistapauksessa[5], jossa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \overset{\text{def}}{=} \sigma^2$, optimaaliset painot ovat $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$.

Jättämällä keskinäinen tilastollinen riippuvuus σ_{12} huomioimatta saadaan optimaalisiksi painoiksi

$$w_1' = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \qquad w_2' = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Myös tässä tapauksessa, jos $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, seuraa $w_1' = w_2' = \frac{1}{2}$.

Jos jätetään σ_{12} huomioimatta, saadaan keskiarvon varianssiksi

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}'\{\overline{\underline{x}}\} &= (w_1')^2\sigma_1^2 + (w_2')^2\sigma_2^2 = \\ &= w_1'\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sigma_1^2 + w_2'\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sigma_2^2 = (w_1'+w_2')\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.\end{aligned}$$

Tapauksessa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ tämä antaa

$$\operatorname{Var}'\{\overline{\underline{x}}\} = \tfrac{1}{2}\sigma^2.$$

Tosiasiallinen varianssi on kuitenkin, yhtälö 2.7:

$$\operatorname{Var}\{\overline{\underline{x}}\} = \left((w_1')^2\sigma_1^2 + (w_2')^2\sigma_2^2\right) + 2w_1'w_2'\sigma_{12} =$$

[5] Tämä erikoistapaus saadaan normalisoimalla $\underline{\xi}_1 \overset{\text{def}}{=} \underline{x}_1/\sigma_1$, $\underline{\xi}_2 \overset{\text{def}}{=} \underline{x}_2/\sigma_2$. Huomaa, että silloin $\operatorname{Cov}\{\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2\} = \operatorname{Corr}\{\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2\} = \operatorname{Corr}\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}$.

$$= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} + 2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sigma_{12} =$$
$$= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\left(1+2\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) =$$
$$= \mathrm{Var}'\{\bar{x}\}\left(1+2\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}\right) =$$
$$= \mathrm{Var}'\{\bar{x}\}\left(1+2\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,\mathrm{Corr}\{x_1,x_2\}\right).$$

Tapauksessa $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ tämä antaa

$$\mathrm{Var}\{\bar{x}\} = \mathrm{Var}'\{\bar{x}\}\left(1+\mathrm{Corr}\{x_1,x_2\}\right).$$

nyy νN Tekijä $\nu \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1+\mathrm{Corr}\{x_1,x_2\}$ ilmaistaan usein ”tehollisena otoskokona” muodossa

$$n_{\mathrm{teh}} = \frac{n}{\nu},$$

jossa n on otoksen tosiasiallinen koko, tässä tapauksessa $n = 2$.

Jos korrelaatio on $\mathrm{Corr}\{x_1,x_2\} = 0{,}8$, saadaan $\nu = 1{,}8$, $\mathrm{Var}\{\bar{x}\} = 1{,}8\cdot\mathrm{Var}'\{\bar{x}\}$ ja $n_{\mathrm{teh}} = {}^{2}/_{1{,}8} = 1{,}111\ldots$.

Tämä voidaan helposti laajentaa n arvon x_i, $i = 1,\ldots,n$ tapaukseen, jossa varianssit ovat identtisesti σ^2. Keskiarvo on ($w_i = {}^{1}/_{n}$, $i = 1,\ldots,n$):

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

ja keskiarvon varianssi on

$$\mathrm{Var}\{\bar{x}\} = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma^2 + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} w_j w_k \sigma_{jk} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\sigma^2\frac{\sigma_{jk}}{\sigma^2} =$$
$$= \frac{\sigma^2}{n}\left(1+\frac{1}{n}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\mathrm{Corr}\{x_j,x_k\}\right) =$$
$$= \mathrm{Var}'\{\bar{x}\}\left(1+\frac{1}{n}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\mathrm{Corr}\{x_j,x_k\}\right).$$

rho ρR Mielenkiintoisessa erikoistapauksessa korrelaatiot ovat vakion $\rho \in (0,1)$ indeksietäisyyden mukaan alenevat potenssit:

$$\mathrm{Corr}\{x_j,x_k\} = \rho^{|j-k|}.$$

6 Määritelmällä[6] $m \stackrel{\mathrm{def}}{=} |j-k|$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{\bar{x}\} &= \mathrm{Var}'\{\bar{x}\}\left(1+\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-m}\rho^m\right) = \\ &= \mathrm{Var}'\{\bar{x}\}\left(1+2\sum_{m=1}^{n-1}\frac{n-m}{n}\rho^m\right) = \\ &= \mathrm{Var}'\{\bar{x}\}\left(1+2\sum_{m=1}^{n-1}\rho^m-\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{n-1}m\rho^m\right).\end{aligned}$$

Silloin limiitissä $n \to \infty$:

$$\mathrm{Var}\{\bar{x}\} \approx \mathrm{Var}'\{\bar{x}\}\left(1+2\frac{\rho}{1-\rho}\right) = \mathrm{Var}'\{\bar{x}\}\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Tästä opittu läksy on, että korrelaation läsnä ollessa stokastiset suureet sisältävät vähemmän *riippumatonta* tietoa kuin miltä näyttää. Korrelaation sivuuttaminen aiheuttaa, että uskomme tietävämme enemmän kuin tosiasiallisesti tiedämme. Lienee selvää, miksi tämä on vaarallista.

Esitetty analyysi voidaan yleistää moniin muihin estimaattoreihin keskiarvon lisäksi. Lisää tehollisesta otoskoosta sovellettuna ajassa korreloiviin aikasarjoihin kerrotaan alaosiossa 2.4.2.

2.4 Aikasarjojen lineaarinen regressio

Tosielämässä, kuten mainittiin jo alaosiossa 2.1.2, stokastiset prosessit ovat aina *aikasarjoja*, joissa on annettu vain diskreettien ajanhetkien eli epookkien arvoja. Usein sellaiset prosessit käyttäytyvät melko lineaarisesti ajassa, ja tätä lineaarista käytöstä kannattaa tutkia regression avulla. Samalla on muistettava joitakin varoituksia.

2.4.1 *Pienimmän neliösumman regressio ilman autokorrelaatiota*

Lineaarisen regression lähtökohta on tunnettu yhtälö

$$y = a + bx,$$

ja on annettu joukko pisteparia (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Halutaan määrittää vakiotermin a ja kulmakertoimen eli trendin b. Tämä on itse asiassa *havaintoyhtälö*

$$\underline{y}_i = a + bx_i + \underline{n}_i,$$

[6] Varianssimatriisilla on kummallakin puolella $n-1$ sivulävistäjää, joiden pituudet ovat $n-m$.

jossa stokastinen prosessi $\underline{n}_i$ kuvaa mittausprosessin kohinaa eli satunnaista virhettä.

Toinen tapa kirjoittaa havaintoyhtälö on

$$\underline{y}_i + \underline{v}_i = \widehat{a} + \widehat{b}x_i,$$

jossa $\underline{v}_i$ on havainnon $\underline{y}_i$ residuaali eli *jäännösvirhe* ja $\widehat{a}$ ja $\widehat{b}$ ovat tuntemattomien a ja b estimaattorit.

Oletetaan, että havaintojen kohinan varianssi on vakio, eli se ei riipu
7 arvosta i ("homoskedastisuus"), ja että kovarianssit häviävät kaikkialla[7] ("valkoinen kohina"):

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\{\underline{n}_i\} &= \sigma^2, \\ \mathrm{Cov}\{\underline{n}_i, \underline{n}_j\} &= 0, \qquad i \neq j. \end{aligned}$$

Tätä kutsutaan *tilastolliseksi malliksi*.

Havaintoyhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{bmatrix},$$

jossa $\underline{\boldsymbol{\ell}} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 & \underline{y}_2 & \cdots & \underline{y}_n \end{bmatrix}^T$ on havaintojen vektori ja $\underline{\mathbf{v}} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix}^T$ jäännösvirheiden vektori n-ulotteisessa abstraktissa vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$. Vektori $\widehat{\mathbf{x}} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \widehat{a} & \widehat{b} \end{bmatrix}^T$ on tuntemattomien (parametrien) vektori. Lopuksi

$$A \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

8 on *rakennematriisi*. Tätä esitystapaa kutsutaan *funktiomalliksi*[8]:

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} + \underline{\mathbf{v}} = A\widehat{\mathbf{x}}.$$

Käyttäen oletettua tilastollista mallia voidaan laskea pienemmän neliö-
9 summan ratkaisu *normaaliyhtälön* avulla[9]:

---

[7] Nämä havaintoja koskevat olettamukset käyvät nimellä *i.i.d.*, *"independent and iden-*

$$(A^T A)\,\hat{\mathbf{x}} = A^T \underline{\ell}.$$

Normaalimatriisi on

$$A^T A = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix},$$

eli Cramerin[10] säännön mukaan

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix}.$$

Tästä seuraa

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{\ell} = (A^T A)^{-1} \begin{bmatrix} \sum \underline{y} \\ \sum x\underline{y} \end{bmatrix}$$

ja

$$\hat{a} = \frac{\sum x^2 \sum \underline{y} - \sum x \sum x\underline{y}}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}, \qquad \hat{b} = \frac{-\sum x \sum \underline{y} + n \sum x\underline{y}}{n\sum x^2 - (\sum x)^2},$$

jotka ovat tuntemattomien pienimmän neliösumman *estimaattorit*. Niiden tarkkuudet — epävarmuudet eli keskivirheet — seuraavat muodollisen virheiden kasautumisen kautta käännetyn normaalimatriisin $(A^T A)^{-1}$ lävistäjäalkioiden neliöjuureista. Neliöjuuret tulee skaalata kertoimella σ, painoyksikön keskivirhe. Tulos on

$$\sigma_a = \sigma\sqrt{\frac{\sum x^2}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}}, \qquad \sigma_b = \sigma\sqrt{\frac{n}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}}. \tag{2.8}$$

Useimmiten olemme kiinnostuneita nimenomaan trendistä b, jolloin tulee verrata saatua arvoa $\hat{b}$ sen omaan keskivirheeseen σ_b. Jos σ ei ole

tically distributed" eli riippumaton ja identtisesti jakautunut. Tämä sisältää lisäoletuksen, että kaikkien havaintojen jakaumat ovat samanmuotoisia.

[8] Vaihtoehtoinen ja suosittu merkintätapa on $\underline{y} = \beta X + \underline{\varepsilon}$, jossa X ovat *selittävät* eli *riippumattomat* muuttujat, $\underline{y}$ *selitettävät* eli *riippuvat* muuttujat eli *vaste-* tai *tulosmuuttujat* ja β *malliparametrit*. Vastaavuus on $\underline{y} \sim \underline{\ell}$, $X \sim A$ ja $\beta \sim \mathbf{x}$, mutta $\underline{\varepsilon} \not\sim -\underline{\mathbf{v}}$. $\underline{\varepsilon} = \underline{\mathbf{n}} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{n}_1 & \underline{n}_2 & \cdots & \underline{n}_n \end{bmatrix}^T$ on *virheiden* vektori, kun $\underline{\mathbf{v}}$ on *jäännösvirheiden* vektori.

[9] Vastaavasti

$$(X^T X)\,\hat{\beta} = X^T \underline{y}.$$

[10] Gabriel Cramer (1704–1752) ole sveitsiläinen matemaatikko.

a priori tiedossa, sen tulee arvioida *jäännösvirheistä*: jäännösvirheiden neliöiden summalla

$$\sum \underline{v}^2 = \sum \left(\widehat{a} + \widehat{b}x - \underline{y} \right)^2$$

on odotusarvo $(n-2)\,\sigma^2$, jossa $n-2$ on *vapausasteiden* määrä eli ylimääritys, kun 2 on estimoitujen tuntemattomien määrä. Siis

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum \underline{v}^2}{n-2}$$

on suureen σ^2 harhaton estimaattori.

2.4.2 Autokorrelaatio ajassa

Yllä tehty olettamus, että havaintovirheet $\underline{n}_i$ eivät korreloi keskenään, on usein *väärä*. Pienimmän neliösumman regressio on kuitenkin niin yksinkertainen menetelmä ja saatavissa esimerkiksi suosituissa taulukkolaskentaohjelmissa ja tieteellisen laskennan ohjelmissa, että sitä käytetään usein silloinkin, kun nollakorrelaatio-olettamus ei pidä paikkaansa.

Jos kohinaprosessin $\underline{w}_i$ autokorrelaatio ei häviä, se voidaan usein mallintaa Gaussin ja Markovin prosessina. Sellaista prosessia kuvataan diskreettina *Markovin ketjuna*:

$$\underline{w}_{i+1} = \rho \underline{w}_i + \underline{n}_i, \tag{2.9}$$

[11] jossa[11] $\rho = \mathrm{Corr}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\}$ on sopiva vaimennusparametri, $0 < \rho < 1$, ja $\underline{n}_i$ on oikeasti ei-korreloiva valkoisen kohinan prosessi:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\{\underline{n}_i\} &= \sigma_n^2, \\ \mathrm{Cov}\{\underline{n}_i, \underline{n}_j\} &= 0, \qquad i \neq j. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Seuraa yhtälöstä 2.9 ja siitä, että $\mathrm{Cov}\{\underline{w}_i, \underline{n}_i\} = 0$, että

$$\sigma_w^2 = \rho^2 \sigma_w^2 + \sigma_n^2 \implies \sigma_w^2 = \frac{\sigma_n^2}{1-\rho^2}. \tag{2.11}$$

---

[11] Koska

$$\mathrm{Cov}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\} = \mathrm{Cov}\{(\rho \underline{w}_i + \underline{n}_i), \underline{w}_i\} = \rho \,\mathrm{Var}\{\underline{w}_i\}$$
$$\implies \rho = \frac{\mathrm{Cov}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\}}{\mathrm{Var}\{\underline{w}_i\}} = \frac{\mathrm{Cov}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\underline{w}_{i+1}\}\,\mathrm{Var}\{\underline{w}_i\}}} = \mathrm{Corr}\{\underline{w}_{i+1}, \underline{w}_i\}$$

stationaarisuuden perusteella: $\mathrm{Var}\{\underline{w}_i\} = \mathrm{Var}\{\underline{w}_{i+1}\} = \sigma_w^2$.

Kirjoita alkuperäinen havaintoyhtälö

$$\underline{y}_i = a + bx_i + \underline{w}_i$$

ylös kaksi kertaa, toisella kerralla kerrottuna tekijällä $-\rho$:

$$\begin{aligned} \underline{y}_{i+1} &= a \quad + bx_{i+1} + \underline{w}_{i+1}, \\ -\rho\underline{y}_i &= -\rho a - \rho b x_i \; - \rho\underline{w}_i, \end{aligned}$$

ja laske yhteen:

$$\underline{y}_{i+1} - \rho\underline{y}_i = a\,(1-\rho) + b\,(x_{i+1} - \rho x_i) + \overbrace{(\underline{w}_{i+1} - \rho\underline{w}_i)}^{\underline{n}_i}.$$

Tämä yhtälö on muotoa

$$\underline{Y}_i = A + bX_i + \underline{n}_i,$$

ei-korreloidun lineaarisen regression yhtälö, jossa $\underline{n}_i = \underline{w}_{i+1} - \rho\underline{w}_i$ on *valkoinen* kohina, yhtälö 2.10, ja

$$A = a\,(1-\rho)\,, \qquad X_i = x_{i+1} - \rho x_i, \qquad \underline{Y}_i = \underline{y}_{i+1} - \rho\underline{y}_i. \tag{2.12}$$

Lähestymistapa tunnetaan Cochranen ja Orcuttin menetelmänä. (Wikipedia, Cochrane-Orcutt estimation). Laskentaohje on nyt:

1) Laske X_i ja $\underline{Y}_i$ yllä olevien yhtälöiden 2.12 mukaan.
2) Ratkaise $\widehat{A}$ ja $\widehat{b}$ ei-korreloidun lineaarisen regressiomenetelmän mukaisesti. Menetelmä kuvattiin alaosiossa 2.4.1.
3) Laske $\widehat{a} = \widehat{A}/(1-\rho)$.
4) Ei-korreloitu lineaarinen regressiomenetelmä antaa keskivirheet estimaattoreille $\widehat{A}$ ja $\widehat{b}$. Laske $\sigma_a = \sigma_A/(1-\rho)$.
5) Keskivirhe σ_b on suurempi kun laskemisessa otetaan huomioon autokorrelaatio, kuin ilman sitä. Samalla pienempi on tietysti myös suhde $\widehat{b}/\sigma_b$, testaussuure, joka kertoo, eroaako trendi b merkitsevästi nollasta.

   Syynä on se, että havainnot *sisältävät vähemmän tietoa* tuntemattomista kuin luulemme. Jokainen aikasarjan uusi tietopiste ei sisälläkään kaikkea sitä tietoa kuin luulemme, koska se tarjoaa osittain samaa tietoa kuin aiemmat pisteet.

Koska aikasarja oletetaan tasaväliseksi, seuraa, koska $\Delta X = X_{i+1} - X_i$ ja $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, että $\Delta X = (1-\rho)\,\Delta x$. Jos sen lisäksi käytämme ”massakeskipistekoordinaatteja” eli

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

seuraa myös, että

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 \approx (1-\rho)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{2.13}$$

Nyt sovelletaan yhtälö 2.8:

$$\mathrm{Var}\{\widehat{b}\} = \sigma_b^2 = \sigma^2 \frac{n}{n\sum x^2 - \cancel{(\sum x)^2}} = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}.$$

Huomaa, että tämä yhtälö pätee ainoastaan *korreloimattomiin* havaintoihin.

1) Tutkitaan Cochranen ja Orcuttin mukaisesti muunnetut havainnot ja tehdään sijoitukset $\sigma \to \sigma_n$, $x \to X$, saaden yhtälön 2.13 avulla

$$\mathrm{Var}\{\widehat{b}\} = \frac{\sigma_n^2}{\sum X^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2}\frac{\sigma_n^2}{\sum x^2}. \tag{2.14}$$

2) Tutkitaan fiktio, että alkuperäiset havainnot eivät korreloidu ja että niiden keskivirhe on σ_w, ja kirjoitetaan sijoituksella $\sigma \to \sigma_w$ ja yhtälöllä 2.11:

$$\mathrm{Var}'\{\widehat{b}\} = \frac{\sigma_w^2}{\sum x^2} = \frac{1}{1-\rho^2}\frac{\sigma_n^2}{\sum x^2}. \tag{2.15}$$

Yhdessä yhtälöt 2.14 ja 2.15 antavat

$$\mathrm{Var}\{\widehat{b}\} = \mathrm{Var}'\{\widehat{b}\}\frac{1-\rho^2}{(1-\rho)^2} = \mathrm{Var}'\{\widehat{b}\}\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

"Tehollinen otoskoko" n_{teh} on pienempi kuin todellinen havaintojen lukumäärä n, kertoimella ν (Lettenmaier, 1976):

$$\nu = \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Esimerkiksi jos $\rho = 0{,}8$, tämä nyrkkisääntö sanoo, että $\nu = 9$! Tilanne on sama kuin, jos meillä olisi vain yhdeksäsosa tietopisteiden oikeasta lukumäärästä.

Tässä tapauksessa kaikki keskivirheet, jotka on laskettu naiivisti käyttämällä tavallista pienimmän neliösumman regressiota ilman autokorrelaatiota, on kerrottava tämän kertoimen ν neliöjuurella: ne kolminkertaistuvat. Tämä pätee erityisesti trendin estimaattorin $\widehat{b}$ keskivirheelle σ_b.

Opittavaa tästä on:

- Jos datassa on autokorrelaatio ajassa, yksinkertainen lineaariregressio antaa *liian optimistisen kuvan* trendiparametrin $\widehat{b}$ keskivirheestä ja siitä, kuinka merkitsevästi se eroaa nollasta. Tässä tapauksessa voidaan käyttää edellä mainittua Cochranen ja Orcuttin menetelmää. Autokorrelaation esiintymisen arviointi voidaan tehdä visuaalisesti tarkastelemalla jäännösvirheitä. Autokorrelaation ρ oikean arvon löytäminen on oma haasteensa.
- Jos data on annettu ajan tasavälisenä aikasarjana, $x_i = x_0 + (i-1)\,\Delta t$, Markovin ketjun parametri ρ liittyy yksinkertaisella tavalla sen *korrelaatiopituuteen*. Yhtälöstä 2.9 seuraa

$$\underline{w}_{i+1} = \rho \underline{w}_i + \underline{n}_i \implies \underline{w}_{i+1} = \underline{w}_i e^{-\Delta t/\tau} + \underline{n}_i,$$

jossa τ on korrelaatiopituus ilmaistuna aikayksiköissä: tau τT

$$\tau = -\Delta t / \ln \rho \,.$$

Ajassa korreloitujen havaintojen yleinen regressio-ongelma on *painotetun* pienemmän neliösumman menetelmän esimerkki.

2.5 Stokastisen prosessin auto- ja ristikovarianssi

2.5.1 *Autokovarianssi*

Annettuna on stokastinen prosessi $\underline{x}(t)$. Johdannaisfunktio nimeltä *autokovarianssi*, jolla on kaksi aika-argumenttia t ja t', voidaan laskea seuraavasti:

$$A_x(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{x}(t')\}.$$

Stationaariset prosessit ovat prosesseja, joiden tilastolliset ominaisuudet eivät muutu ajassa: ominaisuudet eivät riipu absoluuttisesta ajasta, vaan pysyvät samana ajan myötä. Stationaarisille prosesseille pätee, määritelmällä $t' = t + \Delta t$, että

$$A_x(t,t') = A_x(t, t+\Delta t) = \mathrm{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{x}(t+\Delta t)\} \stackrel{\text{def}}{=} A_x(\Delta t), \quad (2.16)$$

riippumatta ajan t arvosta.

Autokovarianssifunktiota $A_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} A_x(t,t)$ kutsutaan yksinkertaisesti prosessin $\underline{x}(t)$ varianssifunktioksi. Stationaarisille prosesseille se on vakio $A_x = A_x(0)$.

Stationaarisen prosessin autokovarianssifunktio on symmetrinen:

$$A_x(\Delta t) = A_x(t,t') = \mathrm{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{x}(t')\} = \mathrm{Cov}\{\underline{x}(t'), \underline{x}(t)\} = \\ = A_x(t',t) = A_x(-\Delta t). \quad (2.17)$$

2.5.2 Ristikovarianssi

Jos on kaksi eri stokastista prosessia $\underline{x}(t)$ ja $\underline{y}(t)$, saadaan johdannaisfunktio nimeltä *ristikovarianssi*:

$$C_{xy}(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{y}(t')\}.$$

Stationaaristen prosessien tapauksessa taas

$$C_{xy}(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{y}(t+\Delta t)\}. \tag{2.18}$$

Huomaa, että $A_x(\Delta t) = A_x(-\Delta t)$, mutta (yleensä) $C_{xy}(\Delta t) = C_{yx}(-\Delta t) \neq C_{xy}(-\Delta t)$! Usein termi ristikovarianssi tarkoittaa yksinkertaisesti

$$C_{xy}(t) \stackrel{\text{def}}{=} C_{xy}(t,t) = \mathrm{Cov}\{\underline{x}(t), \underline{y}(t)\}.$$

Stationaarisille prosesseille tämä on vakio: $C_{xy}(t) = C_{xy}(0) = C_{xy}$.

2.5.3 Auto- ja ristikorrelaatio

Näin määriteltyjen kovarianssien perusteella voidaan tuttuun tapaan määritellä myös auto- ja ristikorrelaatiofunktiot. *Autokorrelaatio* on

$$\mathrm{Corr}_x(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_x(t,t')}{\sqrt{A_x(t,t)\,A_x(t',t')}}, \quad \mathrm{Corr}_x(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_x(\Delta t)}{A_x(0)}, \tag{2.19}$$

ja *ristikorrelaatio*

$$\mathrm{Corr}_{xy}(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C_{xy}(t,t')}{\sqrt{A_x(t,t)\,A_y(t',t')}}, \quad \mathrm{Corr}_{xy}(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C_{xy}(\Delta t)}{\sqrt{A_x(0)\,A_y(0)}},$$

joissa yhtälöt oikealla olettavat stationaarisuutta.

Yhtälöstä 2.19 näkyy, että jos $\Delta t = 0$, autokorrelaatio on 1. Muussa tapauksessa se on aina välillä $[-1,+1]$, kuten todistettiin jo yhtälön 2.6 yhteydessä. Myös ristikorrelaatio on aina välillä $[-1,+1]$, mutta yleensä $\mathrm{Corr}_{xy}(0) \neq 1$!

2.5.4 Nollakeskeiset stationaariset prosessit

Tutkitaan stationaarisia prosesseja, joiden odotusarvo häviää:

$$\mathrm{E}\{\underline{x}(t)\} = \mathrm{E}\{\underline{y}(t)\} = 0.$$

Silloin on olemassa seuraava hyödyllinen integraaliyhtälö ristikovarianssifunkiolle:

$$C_{xy}(\Delta t) = \mathrm{E}\{\underline{x}(t)\,\underline{y}(t+\Delta t)\} = \frac{1}{T}\,\mathrm{E}\left\{\int_0^T \underline{x}(t)\,\underline{y}(t+\Delta t)\,dt\right\}. \tag{2.20}$$

Tämä sanoo, että voidaan laskea integraalilauseke, ajallinen keskiarvo

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,y(t+\Delta t)\,dt$$

prosessien $\underline{x}(t)$ ja $\underline{y}(t)$ havainnoista äärellisellä aikavälillä $[0, T]$, ja käyttää sitä harhattomana funktion $C_{xy}(\Delta t)$ estimaattorina. Käytännössä prosessin otanta tapahtuisi diskreetisti, tuloksena aikasarja.

Tässä pätee suurten lukujen lain erikoistapaus:

$$T \to \infty \implies \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,y(t+\Delta t)\,dt \overset{\text{stok}}{\to} C_{xy}(\Delta t).$$

Huomaa, että tässä laskennassa käytetään vain yhtä prosessien $\underline{x}(t)$ ja $\underline{y}(t)$ realisaatiota eikä realisaatioiden joukkoa. Sitä, että tämä on sallittu, kutsutaan *ergodisuudeksi*.

2.5.5 *Ristikovarianssi ja konvoluutio*

Ympyräkonvoluutiointegraalin määritelmä on

$$x \underset{T}{\otimes} y = \left(x \underset{T}{\otimes} y\right)(t) \overset{\text{def}}{=} \oint_0^T x(t-t')\,y(t')\,dt'. \tag{2.21}$$

Määritelmässä oletetaan, että x ja y ovat jaksollisia jaksolla T. Siksi samanarvoinen määritelmä on

$$x \underset{T}{\otimes} y = \oint_{-T/2}^{T/2} x(t-t')\,y(t')\,dt'.$$

Tämä ympyräkonvoluutio lähestyy tavallista konvoluutiota limiitissä $T \to \infty$:

$$x \otimes y = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')\,y(t')\,dt'.$$

Käytännössä suurilla T:n arvoilla ne voidaan katsoa samanarvoisiksi, ja jaksollisuuden vaatimus väistyy.

Integraali yhtälössä 2.20 on samannäköinen kuin ympyräkonvoluutiointegraali 2.21. Määrittämällä $\tau \overset{\text{def}}{=} t' - t$ saadaan (ympyrä on ympyrä!):

$$\left(x \underset{T}{\otimes} y\right)(t) = \oint_0^T x(-\tau)\,y(t+\tau)\,dt' = \oint_0^T x(-\tau)\,y(t+\tau)\,d\tau.$$

Sijoita $\tau \to t$ ja $t \to \Delta t$:

$$\left(x \underset{T}{\otimes} y\right)(\Delta t) = \int_0^T x(-t)\,y(t+\Delta t)\,dt.$$

Tämä on miinusmerkkiä vaille sama kuin yhtälön 2.20 integraali. Seuraa

$$C_{xy}(\Delta t) = \frac{1}{T}\,E\left\{x(-t) \underset{T}{\otimes} y(t)\right\}.$$

Yleisessä teoriassa, jossa prosessit ovat kompleksiarvoisia, ristikovarianssi, yhtälö 2.18, määritellään seuraavaksi:

$$C_{xy}(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cov}\{\underline{x}^{\dagger}(t), \underline{y}(t+\Delta t)\},$$

jossa symboli † merkitsee kompleksikonjugaattia eli liittolukua. Silloin integraalista 2.20 tulee

$$C_{xy}(\Delta t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{E}\left\{\int_0^T x^{\dagger}(t)\,y(t+\Delta t)\,dt\right\} = \frac{1}{T}\,\mathrm{E}\left\{x^{\dagger}(-t) \underset{T}{\otimes} y(t)\right\}.$$

Tietysti samalla tavalla autokovarianssifunktio on silloin

$$A_x(\Delta t) = \mathrm{Cov}\{\underline{x}^{\dagger}(t), \underline{x}(t+\Delta t)\} = \frac{1}{T}\,\mathrm{E}\left\{x^{\dagger}(-t) \underset{T}{\otimes} x(t)\right\}. \qquad (2.22)$$

Ympyräkonvoluutiolla on se hyödyllinen ominaisuus, että se voidaan laskea tehokkaasti nopean Fourier'n muunnoksen (FFT) avulla.

2.6 Valkoinen kohina ja satunnaiskulku

2.6.1 *Valkoinen kohina*

Kohina voidaan määritellä stokastiseksi prosessiksi, jonka odotusarvo on nolla:

$$\mathrm{E}\{\underline{n}(t)\} = 0.$$

Valkoinen kohina on kohinaa, joka koostuu tasaisesti kaikista mahdollisista taajuuksista[12]. Matemaattinen kuvaustapa on sanoa, että autokovarianssi

$$A_n(\Delta t) = 0, \qquad \Delta t \neq 0.$$

Toisin sanoen prosessin arvojen $\underline{n}(t)$ ja $\underline{n}(t')$ välillä ei ole yhtään korrelaatiota, vaikka $\Delta t = t - t'$ olisi kuinka lähellä nollaa. Kuitenkin

$$A_n(0) = \infty.$$

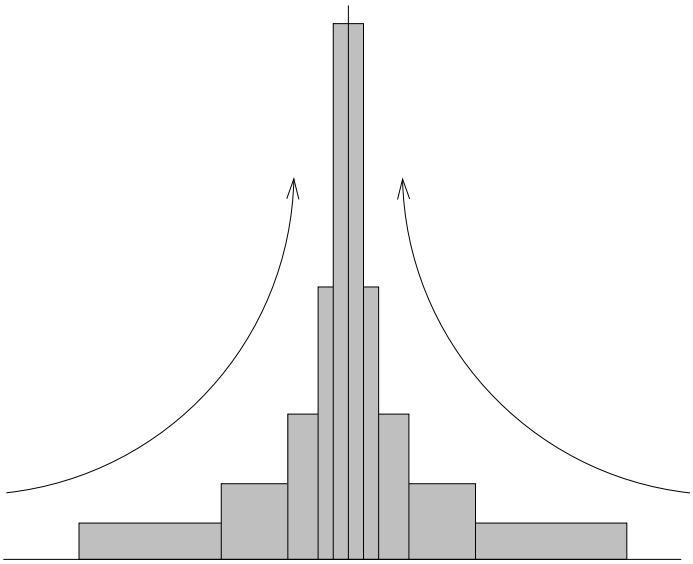
Lisäksi pätee

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_n(\tau)\,d\tau \stackrel{\text{def}}{=} Q_n,$$

jossa Q_n on äärellinen reaaliarvo.

Yllä olevia yhtälöitä kannattaa pohtia jonkin aikaa. Tämä on funktio $A_n(\tau)$, joka on "melkein kaikkialla" nolla. Nimittäin kaikkialla, jossa $\tau \neq 0$, mutta ainoassa pisteessä, jossa se ei ole nolla — piste $\tau = 0$ — se on ääretön! Ja vielä lisäksi funktion *integraali* määrittelyjoukkonsa $\mathbb{R}$ yli tuottaa äärellisen arvon Q_n!

[12] Nimi perustuu analogiaan valkoisen valon kanssa, jonka tiedetään Newtonin ansiosta (Davidson ja Tchourioukanov) koostuvan kaikista näkyvän valon taajuuksista.



Kuva 2.3. Diracin deltafunktio blokkifunktioiden limiittinä.

2.6.2 *Deltafunktio*

Sellaista funktiota ei ole olemassakaan. Sen sijaan on olemassa matemaattinen apuväline, kvanttifyysikko Paul Diracin[13] mukaan nimetty *deltafunktio* eli -distribuutio $\delta(t)$: [13] delta $\delta\Delta$

$$A_n(\Delta t) = Q_n\,\delta(\Delta t). \tag{2.23}$$

Intuitiivisesti voidaan ymmärtää, miten sellainen ”funktio” rakennetaan, kuva 2.3.

Määritellään ensin seuraava blokkifunktio, jonka leveys on ϵ: epsilon $\varepsilon\epsilon$E

$$\delta_\epsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{jos } \tau > \frac{1}{2}\epsilon \text{ tai } \tau < -\frac{1}{2}\epsilon, \\ 1/\epsilon & \text{jos } -\frac{1}{2}\epsilon \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2}\epsilon. \end{cases}$$

Selvästi tämän funktion integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(\tau)\,d\tau = 1$$

ja $\delta_\epsilon(\tau) = 0$ jos $|\tau|$ on riittävän suuri.

Annetaan $\epsilon \to 0$. Tässä limiitissä $\delta_\epsilon(0) \to \infty$, ja mille tahansa arvolle $\tau \neq 0$ löytyy aina raja-arvo ϵ, jolle pätee $|\tau| > \frac{1}{2}\epsilon \implies \delta_\epsilon(\tau) = 0$.

Deltafunktiolla on sellainen tärkeä *toisto-ominaisuus*, että mielivaltaiselle funktiolle f,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t')\,f(t')\,dt' \iff f = \delta \otimes f. \tag{2.24}$$

[13] Paul Adrien Marie Dirac FRS (1902–1984) oli johtava brittiläinen teoreettinen fyysikko ja kvanttifysiikan kehittäjä.

Siis konvoluutio deltafunktion kanssa on funktioavaruuden neutraali operaattori. Hieman samalla tavalla kertominen yksikkömatriisin eli Kroneckerin deltatensorin kanssa — sama symboli! — on vektoriavaruuden neutraali operaattori.

Distribuutioiden käsittelysääntö on yksinkertaisesti, että ensin integroidaan ja vasta sen jälkeen saadulle tulokselle annetaan $\epsilon \to 0$.

2.6.3 Satunnaiskulku

"*Random walk*" eli satunnaiskulku syntyy, kun valkoista kohinaa integroidaan ajassa:

$$\frac{d}{dt}\,\underline{w}(t) = \underline{n}(t), \tag{2.25}$$

jossa $\underline{w}(t)$ on satunnaiskulku ja $\underline{n}(t)$ on valkoista kohinaa.

Olkoon kohinan $\underline{n}$ autokovarianssifunktio

$$A_n(\Delta t) = Q_n\,\delta(\Delta t), \tag{2.23}$$

jossa Q_n on yllä määritelty kohinan $\underline{n}$ varianssi.

Integroidaan tämä funktio, jolloin saadaan *satunnaiskulun* eli Wienerin[14] prosessi[15]:

$$\underline{w}_0(t) = \int_{t_0}^{t} \underline{n}(\tau)\,d\tau.$$

Integroinnin alkuaika t_0 on lisätty alaindeksiksi 0, koska $\underline{w}$ riippuu siitä.

Huomaa, että

$$E\{\underline{w}_0(t)\} = \int_{t_0}^{t} E\{\underline{n}(\tau)\}\,d\tau = 0.$$

Autokovarianssifunktio saadaan seuraavasti:

$$A_{w,0}(t,t') = E\Big\{\big(\underline{w}_0(t) - E\{\underline{w}_0(t)\}\big)\big(\underline{w}_0(t') - E\{\underline{w}_0(t')\}\big)\Big\} =$$
$$= E\{\underline{w}_0(t)\,\underline{w}_0(t')\} =$$
$$= E\Big\{\int_{t_0}^{t} \underline{n}(\tau)\,d\tau \int_{t_0}^{t'} \underline{n}(\tau')\,d\tau'\Big\} = \int_{t_0}^{t} \overbrace{\int_{t_0}^{t'} E\{\underline{n}(\tau')\,\underline{n}(\tau)\}\,d\tau'}^{\mathrm{I}}\,d\tau.$$

Tässä integraali[16]

[14] Norbert Wiener (1894–1964) oli amerikanjuutalainen matemaatikko ja filosofi sekä kybernetiikan perustaja.

[15] Tarkkaan ottaen Wienerin prosessi on erikoistapaus, joka on normaalisti jakautunut ja jossa $Q_n = 1$.

$$I = \int_{t_0}^{t'} E\{\underline{n}(\tau')\,\underline{n}(\tau)\}\,d\tau' = \int_{t_0}^{t'} A_n(\tau-\tau')\,d\tau' =$$

$$= Q_n \int_{t_0}^{t'} \delta(\tau-\tau')\,d\tau' = \begin{cases} Q_n & \text{jos } t' > \tau, \\ \frac{1}{2}Q_n & \text{jos } t' = \tau, \\ 0 & \text{jos } t' < \tau. \end{cases}$$

Seuraa, että

$$A_{w,0}(t,t') = Q_n \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t'} \delta(\tau-\tau')\,d\tau' \right) d\tau =$$

$$= Q_n \cdot (t'-t_0) + 0 \cdot (t-t') = Q_n \cdot (t'-t_0)\,. \quad (2.26)$$

Tässä on oletettu, että kohinafunktion $\underline{n}$ autokovarianssi on *stationaarinen*, toisin sanoen, että Q_n on vakio. Tämä voidaan yleistää tapaukselle, jossa $Q_n(t)$ on ajan funktio:

$$A_{w,0}(t,t') = \int_{t_0}^{t'} Q_n(\tau)\,d\tau. \quad (2.27)$$

Kummassakin yhtälössä, 2.26 ja 2.27, oletetaan $t' \leqslant t$.

On tärkeää huomauttaa, että satunnaiskulkuprosessi on *epästationaarinen*: varianssi

$$\mathrm{Var}\{\underline{w}_0(t)\} = A_{w,0}(t,t) = Q_n \cdot (t-t_0)$$

kasvaa ilman rajaa ajassa t.

2.7 Värillinen kohina

Seuraavaksi tutkitaan yksinkertaista differentiaaliyhtälöä ajassa

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = -k\,\underline{x}(t) + \underline{n}(t), \quad (2.28)$$

jossa $\underline{n}(t)$ on valkoinen kohina, jonka autokovarianssifunktio on $Q_n\,\delta(\Delta t)$. Q_n ja k ovat vakioita.

Näin kuvattua prosessia kutsutaan *stationaariseksi Gaussin ja Markovin*[17] *prosessiksi*. Satunnaiskulun yhtälöön 2.25 verrattuna prosessi [17]

[16] Oletetaan, että deltafunktio on määritelty symmetriseksi, niin että $\int_{-\infty}^{0} \delta(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}$.

[17] Andrei Andrejevitš Markov (1856–1922) oli venäläinen matemaatikko, jonka stokastisia prosesseja koskevat tutkimukset olivat merkittäviä.

sisältää termin $-k\,\underline{x}(t)$, vaikutuksen, joka ajaa prosessin $\underline{x}$ takaisin nollaan vastoin kohinan $\underline{n}$ hajauttavaa vaikutusta.

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$\underline{x}(t) = e^{-kt}\left(\underline{x}(t_0)\,e^{kt_0} + \int_{t_0}^{t} \underline{n}(\tau)\,e^{k\tau}\,d\tau\right) \tag{2.29}$$

kuten voidaan todentaa sijoittamalla: differentioimalla 2.29 ja soveltamalla Leibnizin tulosääntö saadaan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = -k\overbrace{e^{-kt}\left\{\underline{x}(t_0)\,e^{kt_0} + \int_{t_0}^{t} \underline{n}(\tau)\,e^{k\tau}\,d\tau\right\}}^{\underline{x}(t)} + \\ + e^{-kt}\frac{d}{dt}\left\{\int_{t_0}^{t} \underline{n}(\tau)\,e^{k\tau}\,d\tau\right\} = \\ = -k\,\underline{x}(t) + e^{-kt}\,\underline{n}(t)\,e^{kt} = -k\,\underline{x}(t) + \underline{n}(t).\end{aligned}$$

Ratkaisu täyttää myös alkuehdon.

Jos oletetaan, että alkuarvo $\underline{x}(t_0)$ on virheetön ja että kohinan $\underline{n}$ autokovarianssifunktio on

$$A_n(t,t') = Q_n\,\delta(t-t'),$$

saadaan ratkaisusta 2.29 suureen $\underline{x}$ kovarianssifunktio:

$$\begin{aligned}A_x(t,t') = e^{-k(t+t')}\,E\left\{\int_{t_0}^{t'} \underline{n}(\tau')\,e^{k\tau'}\,d\tau' \int_{t_0}^{t} \underline{n}(\tau)\,e^{k\tau}\,d\tau\right\} = \\ = e^{-k(t+t')}\int_{t_0}^{t'} e^{k\tau'}\overbrace{\int_{t_0}^{t} E\{\underline{n}(\tau')\,\underline{n}(\tau)\}\,e^{k\tau}\,d\tau}^{I}\,d\tau'.\end{aligned}$$

Integraali

$$\begin{aligned}I = \int_{t_0}^{t} E\{\underline{n}(\tau')\,\underline{n}(\tau)\}\,e^{k\tau}\,d\tau = \int_{t_0}^{t} A_n(\tau',\tau)\,e^{k\tau}\,d\tau = \\ = Q_n\int_{t_0}^{t}\delta(\tau-\tau')\,e^{k\tau}\,d\tau = \begin{cases} Q_n\,e^{k\tau'} & \text{jos } t > \tau', \\ \frac{1}{2}Q_n\,e^{k\tau'} & \text{jos } t = \tau', \\ 0 & \text{jos } t < \tau'. \end{cases}\end{aligned}$$

Siis tapauksessa $t' > t$:

$$\begin{aligned}A_x(t,t') = Q_n\,e^{-k(t+t')}\left(\int_{t_0}^{t} e^{2k\tau'}\,d\tau' + \int_{t}^{t'} 0\,d\tau'\right) = \\ = \frac{Q_n}{2k}e^{-k(t+t')}\left(e^{2kt} - e^{2kt_0}\right),\end{aligned}$$

ja tapauksessa $t' < t$:

$$A_x(t,t') = Q_n\, e^{-k(t+t')} \int_{t_0}^{t'} e^{2k\tau'}\, d\tau' = \frac{Q_n}{2k} e^{-k(t+t')} \left(e^{2kt'} - e^{2kt_0}\right).$$

Molemmissa tapauksissa saadaan

$$A_x(t,t') = \frac{Q_n}{2k} \left(e^{-k|t-t'|} - e^{-k(t+t'-2t_0)}\right), \tag{2.30}$$

joka pätee myös tapauksessa $t = t'$.

Tapaus, jossa $t, t' \gg t_0$ eli stationaarinen tila, johon järjestelmä asettuu kauan käynnistämisen jälkeen ja jossa alkutila $\underline{x}(t_0)$ on unohtunut, antaa

$$A_x(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} A_x(t-t') \approx \frac{Q_n}{2k} e^{-k|t-t'|} = \frac{Q_n}{2k} e^{-k|\Delta t|} = A_x(0) e^{-k|\Delta t|}. \tag{2.31}$$

Tässä tapauksessa puhutaan *värillisestä kohinasta*[18], ja näin saatua prosessia kutsutaan stationaariseksi Gaussin ja Markovin prosessiksi. [18]

Puhutaan myös ensimmäisen kertaluvun autoregressiivisestä prosessista eli AR(1)-prosessista, vaikka tavallisesti se tarkoittaa diskreettiä jonoa eli aikasarjaa. Olkoon ensimmäisen kertaluvun autoregressiivinen jono $\underline{x}_i$, jossa jokainen jäsen riippuu vain jonon edellisestä jäsenestä:

$$\underline{x}_{i+1} = \rho\, \underline{x}_i + \underline{n}_i, \tag{2.32}$$

jossa $\underline{x}_i \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}(t_i)$ ja $\underline{x}_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}(t_{i+1})$. Jos $\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} t_{i+1} - t_i$ on pieni, vertailu yhtälön 2.28 kanssa antaa $\rho = e^{-k\,\Delta t} \approx 1 - k\,\Delta t$.

Yhtälö 2.32 on *Markovin ketjun* esimerkki, jossa jokainen jonon eli ketjun jäsen $\underline{x}_{i+1}$ voidaan laskea käyttämällä vain edellistä jäsentä $\underline{x}_i$. Samalla jokainen ketjun jäsen voidaan ennustaa optimaalisesti käyttämällä vain edellistä jäsentä. Vanhempia jäseniä $\underline{x}_j$, $j < i$ eivät ole mukana. Markovin ketju on siis *muistiton*. Tätä kutsutaan Markovin ominaisuudeksi.

Määritellään

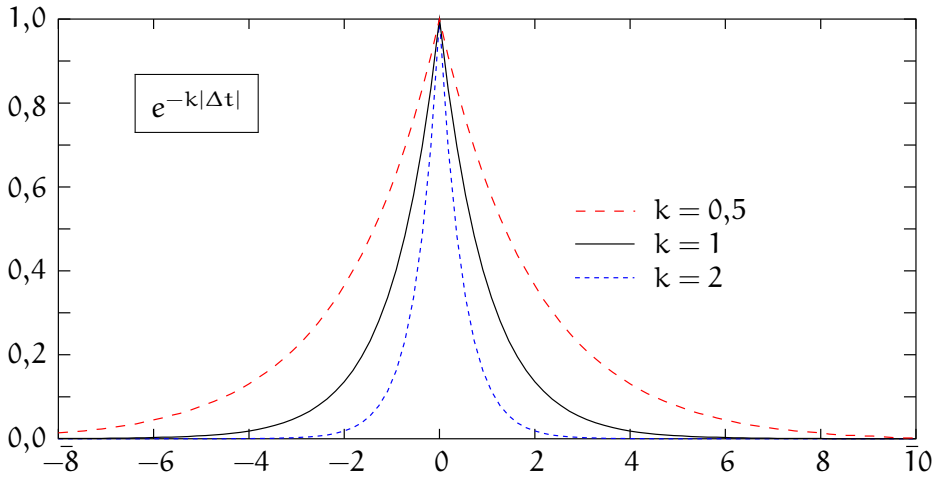
$$\widetilde{Q}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k^2} Q_n.$$

Pinta-ala A_x-käyrän alla on

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_x(\tau)\, d\tau = \frac{\widetilde{Q}_n k^2}{2k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|\tau|}\, d\tau = \frac{\widetilde{Q}_n k}{2} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-k\tau}\, d\tau =$$
$$= -\widetilde{Q}_n \left[e^{-k\tau}\right]_0^{\infty} = \widetilde{Q}_n,$$

josta k on hävinnyt.

[18] Nimi perustuu vertauskuvaan värillisen valon epätasaisesta kirkkausjakaumasta taajuuden mukaan.



KUVA 2.4. Stationaarisen Gaussin ja Markovin prosessin autokovarianssifunktio aikaeron $\Delta t = t - t'$ funktiona. Oletettu on $A_x(0) = Q_n/2k = 1$.

- Rajatapauksessa $k \to \infty$ muutetaan autokovarianssifunktio A_x yhä kapeammaksi, mutta pidetään pinta-ala funktion käyrän alla samana. Silloin

$$\widetilde{A}_x(t - t') \to \widetilde{Q}_n \, \delta(t - t'). \tag{2.33}$$

Yhtälö 2.33 vastaa yhtälön 2.28 degeneraatiota, jossa ei vain $k \to \infty$, vaan myös kohinan varianssi $Q_n \to \infty$. Seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = -k\underline{x}(t) + \overbrace{k\underline{\widetilde{n}}(t)}^{\underline{n}(t)} \implies \underline{x}(t) = \underline{\widetilde{n}}(t) - \frac{1}{k}\frac{d}{dt}\underline{x}(t).$$

Limiitissä $k \to \infty$ tästä tulee

$$\underline{x}(t) = \underline{\widetilde{n}}(t),$$

jossa ”skaalatulla” kohinalla

$$\underline{\widetilde{n}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k}\underline{n}(t)$$

on äärellinen varianssi

$$\widetilde{Q}_n = \frac{1}{k^2}Q_n,$$

mikä on yhteensopiva autokovarianssiyhtälön 2.33 kanssa.

- Toinen rajatapaus, $k \to 0$, on *satunnaiskulku*, joka esitettiin jo alaosiossa 2.6.3. Se on siis Gaussin ja Markovin prosessi, jonka

TAULUKKO 2.2. Eri stokastisten prosessien ominaisuuksien yhteenveto.

Nimi	k	Yhtälö	Autokovarianssi
Satunnaiskulku	0	$\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{n}$	$Q_n \cdot (t - t_0)$
Gaussin ja Markovin prosessi	$\in (0, \infty)$	$\frac{d}{dt}\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{n}$	$\frac{Q_n}{2k} e^{-k\lvert t-t'\rvert}$
Valkoinen kohina	∞	$\underline{x} = \underline{n}$	$Q_n\,\delta(t - t')$

aikavakio on äärettömän pitkä. Siinä tapauksessa on käytettävä koko yhtälöä 2.30:

$$A_{x,0}(t, t') = \frac{Q_n}{2k}\left(e^{-k|t-t'|} - e^{-k(t+t'-2t_0)}\right). \tag{2.30}$$

Tässä tapauksessa, jos $t > t'$, saadaan

$$A_{x,0}(t) = \frac{Q_n}{2k}\left(1 - e^{-2k(t-t_0)}\right) \approx Q_n \cdot (t - t_0),$$

sama tulos kuin saatiin alaosiossa 2.6.3.

Differentiaaliyhtälö saadaan yhtälöstä 2.28 sijoittamalla $k = 0$:

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{n}(t),$$

siis $\underline{x}$ on valkoisen kohinan $\underline{n}$ aikaintegraali, yhtälö 2.25.

Taulukko 2.2 antaa Gaussin ja Markovin prosessin ja sen rajatapausten pääominaisuuksien yhteenvedon.

Usein yhtälön 2.28 mallia käytetään ”värillisen” kohinan tuottamiseksi silloin, kun tiedetään etukäteen, että prosessin ominaisuudet ovat sen tyyppisiä. Tämä onnistuu, kun lisätään yksi tuntematon tuntemattomien vektorille ja yksi yhtälö yhtälöryhmälle. Osiossa 4.4 nähdään, miten se tehdään Kalmanin suotimen yhteydessä.

2.8 Tehon spektraalitiheys (PSD)

2.8.1 Määritelmä

Usein haluamme tutkia stokastisia prosesseja *spektraalisesti* eli mitä eri taajuusosuuksia prosessi sisältää. Tämä voidaan tehdä *Fourier'n*[19] *muunnoksen* avulla.

[19]Joseph Fourier (1768–1830) oli ranskalainen matemaatikko ja fyysikko, joka muistetaan parhaiten Fourier-sarjojen löytämisestä.

Autokovarianssifunktion Fourier'n muunnosta stationaariselle prosessille kutsutaan nimellä tehon spektraalitiheys eli *power spectral density* (PSD). Valitaan $t' = 0$ aika-akselin mielivaltaisen origon kiinnittämiseksi niin, että $\Delta t = t - t' = t$. Saadaan (Wienerin, Khinchinin[20] ja Einsteinin lause):

$$\mathcal{A}_x(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}\{A_x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt, \tag{2.34}$$

jossa $A_x(t) = A_x(\Delta t)$ (yhtälö 2.16) ja olettaen, että integraali on olemassa. Tässä f on *taajuus*, yksikkönä Hz (Heinrich Hertzin[21] mukaan), siis kierroksia tai värähtelyjä tai jaksoja sekunnissa eli s^{-1}.

Analogisesti voidaan määrittää myös kahden funktion risti-PSD:

$$\mathcal{C}_{xy}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}\{C_{xy}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt.$$

Käänteinen operaatio Fourier'n käänteismuunnoksen avulla antaa

$$A_x(\Delta t) = A_x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{A}_x(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_x(f)\, e^{2\pi i f t}\, df.$$

Siksi $t = 0$ antaa

$$A_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_x(f)\, df,$$

siis prosessin $\underline{x}$ varianssi on sama kuin kokonaispinta-ala sen PSD-käyrän alla, siis prosessin kokonaisteho.

Autokovarianssifunktio on symmetrinen, yhtälö 2.17. Seuraa, että PSD, yhtälö 2.34, on *reaaliarvoinen* ja myös symmetrinen:

$$\mathcal{A}_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t)\, \big(\cos(-2\pi f t) + i \sin(-2\pi f t)\big)\, dt = \\ = 2 \int_0^{\infty} A_x(t)\, \cos 2\pi f t\, dt.$$

Tämän lisäksi se on kaikkialla ei-negatiivinen, katso liite A.

Risti-PSD:lle tämä ei päde, koska se ei ole symmetrinen:

$$C_{xy}(t, t') = C_{yx}(t', t) \neq C_{xy}(t', t).$$

---

[20] Aleksandr Yakovlevitš Khinchin (1894–1959) oli neuvostoliittolainen matemaatikko ja todennäköisyysteorian kehittäjä.

[21] Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894) oli saksalaisfyysikko ja ensimmäinen, joka tuotti ja havaitsi radioaaltoja.

2.8.2 *Gaussin ja Markovin prosessi*

Gaussin ja Markovin prosessin autokovarianssifunktio on yhtälön 2.31 antama:

$$A_x(\Delta t) = \frac{Q_n}{2k} e^{-k|\Delta t|}.$$

Tästä saadaan PSD-funktio integroimalla yhtälön 2.34 mukaan, taas valitsemalla $t' = 0$ eli $\Delta t = t$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_x(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt = \frac{Q_n}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k|t|} e^{-2\pi i f t}\, dt = \\
&= \frac{Q_n}{2k} \int_0^{\infty} \left(e^{-kt - 2\pi i f t} + e^{-kt + 2\pi i f t} \right) dt = \\
&= \frac{Q_n}{2k} \left[\frac{1}{-k - 2\pi i f}\, e^{(-k - 2\pi i f)t} + \frac{1}{-k + 2\pi i f}\, e^{(-k + 2\pi i f)t} \right]_0^{\infty} = \\
&= \frac{Q_n}{2k} \frac{1}{k^2 + 4\pi^2 f^2} \begin{bmatrix} -k + 2\pi i f & -k - 2\pi i f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[e^{(-k - 2\pi i f)t} \right]_0^{\infty} \\ \left[e^{(-k + 2\pi i f)t} \right]_0^{\infty} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{Q_n}{2k} \frac{1}{k^2 + 4\pi^2 f^2} \begin{bmatrix} -k & 2\pi i f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[e^{-kt} (2 \cos 2\pi f t) \right]_0^{\infty} \\ \left[e^{-kt} (-2i \sin 2\pi f t) \right]_0^{\infty} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{Q_n}{2k} \frac{1}{k^2 + 4\pi^2 f^2} \begin{bmatrix} -k & 2\pi i f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Q_n}{4\pi^2 f^2 + k^2}.
\end{aligned}$$

Voidaan myös kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_x(f) &= \frac{Q_n}{2k} \int_0^{\infty} e^{-kt} \left(e^{-2\pi i f t} + e^{2\pi f i t} \right) dt = \\
&= \frac{Q_n}{k} \int_0^{\infty} e^{-kt} \cos 2\pi f t\, dt
\end{aligned}$$

ja kokeilla integraalitaulukot (Wolfram Functions, $\int e^{bx} \cos cx\, dx$) tai symbolisen laskennan ohjelmistot, kuten Wolfram Researchin online-integraattori. Tulos on myös[22]

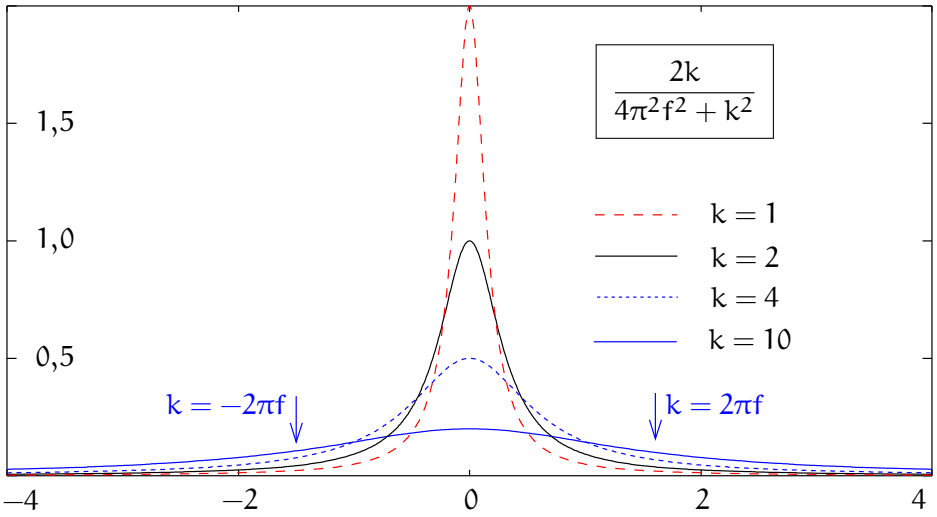
$$\mathcal{A}_x(f) = \frac{Q_n}{4\pi^2 f^2 + k^2} = A_x(0) \frac{2k}{4\pi^2 f^2 + k^2}. \tag{2.35}$$

Katso Jekeli (2001) yhtälö (6.75). Kuvan 2.5 arvot on laskettu olettamalla $Q_n = 2k$, siis pitämällä suureen $\underline{x}$ varianssi, joka on $A_x(0) = Q_n/2k$, arvolla 1 riippumatta k:n arvosta. Näin pinta-ala käyrän alla on vakio.

Tässä on selitettävä, miksi taajuudella f on negatiivisia arvoja. Käytetyssä Fourier'n integraalissa kantafunktiot ovat kompleksisia, tyyppi $e^{2\pi i f t}$. Silti voidaan kirjoittaa

$$e^{2\pi i f t} = \cos 2\pi f t + i \sin 2\pi f t,$$

[22] Tämän muotoista lauseketta kutsutaan joskus Cauchyn ja Lorentzin jakaumaksi.



KUVA 2.5. Gaussin ja Markovin prosessin tehon spektraalitiheys (PSD) taajuuden funktiona. Oletettu on $A_x(0) = 1$.

ja negatiiviselle taajuudelle $-f$:

$$e^{-2\pi i f t} = \cos 2\pi f t - i \sin 2\pi f t.$$

Yhteen- ja vähennyslasku antavat nyt

$$\cos 2\pi f t = \tfrac{1}{2}\left(e^{-2\pi i f t} + e^{2\pi i f t}\right), \quad \sin 2\pi f t = \tfrac{1}{2} i \left(e^{-2\pi i f t} - e^{2\pi i f t}\right).$$

Molemmat ovat reaaliarvoisia.

Nähdään siis, että jokaiselle (positiiviselle) taajuudelle f on olemassa *kaksi riippumatonta Fourier'n kantafunktiota*. Valinta parin $\cos 2\pi f t$ ja $\sin 2\pi f t$ ja parin $e^{2\pi i f t}$ ja $e^{-2\pi i f t}$ välillä on vapaa.

2.8.3 Neliöeksponentiaalinen autokovarianssi

Gaussin ja Markovin prosessin autokovarianssifunktio on yhtälön 2.31 mukaan

$$A_x(\Delta t) = A_x(0) \exp(-k|\Delta t|).$$

Usein vastaan tulee samankaltainen autokovarianssifunktio, joka on muotoa

$$A_x(\Delta t) = A_x(0) \exp\left(-k^2 \Delta t^2\right).$$

Sitä kutsutaan nimellä neliöeksponentiaalinen tai Gaussin autokovarianssifunktio.

Tehon spektraalitiheys on, asettamalla $t' = 0$ ja siten $\Delta t = t$:

$$\mathcal{A}_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t) \exp(-2\pi i f t)\, dt = 2\int_0^{+\infty} A_x(t) \cos 2\pi f t\, dt =$$
$$= 2A_x(0) \int_0^{+\infty} \exp\left(-k^2 t^2\right) \cos 2\pi f t\, dt = A_x(0)\frac{\sqrt{\pi}}{k} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{k^2}\right),$$

(Wolfram Functions, $\int \exp bx^2 \cos cx\, dx$). Nähdään, että tehon spektraalitiheysfunktio on samaa neliöeksponentiaalimuotoa kuin autokovarianssifunktio, mutta funktion argumenttina on taajuus f.

Gaussin autokovarianssifunktioon pohjautuvat prosessit ovat suosittuja koneoppimisen teoriassa. Konepellin alla teoriapohja ei näytä juurikaan eroavan perinteisten menetelmien, kuten pienimmän neliösumman kollokaation (Heiskanen ja Moritz, 1967, luku 7) eli krigingin, teoriapohjasta.

2.8.4 Valkoinen kohina

Valkoisen kohinan PSD voidaan laskea lausekkeella 2.23:

$$A_n(\Delta t) = Q_n\, \delta(\Delta t) = Q_n\, \delta(t - t'),$$

josta valitsemalla $t' = 0$ saadaan

$$\mathcal{A}_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n\, \delta(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt = Q_n e^0 = Q_n,$$

käyttäen deltafunktion toisto-ominaisuutta, yhtälöä 2.24. Tässä nähdään, miksi prosessia, jolla on Diracin deltatyyppinen autokovarianssifunktio, kutsutaan *valkoiseksi* kohinaksi: tehon spektraalitiheys on vakio Q_n koko spektrin läpi ja kaikille taajuuksille f, aivan kuten valkoisen valon tapauksessa — ainakin sähkömagneettisen spektrin optisen ikkunan sisällä.

On kuitenkin ongelma: tällaisen prosessin kokonaisteho koko spektrin yli integroituna on

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_n(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} Q_n\, df = \infty = A_n(0).$$

Tämä ”ultraviolettikatastrofi” osoittaa aidon valkoisen kohinan fysikaalisen mahdottomuuden sekä Diracin deltafunktion epätodellisuuden. Deltafunktiota pitää käyttää vain turvallisesti paketoituna jonkun integraalin sisällä.

On parempi tutkia Gaussin ja Markovin prosessin 2.35 limiittiä, kun $k \to \infty$. Lasketaan sen kokonaisteho:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_x(f)\,df &= 2\int_0^{\infty} \mathcal{A}_x(f)\,df = 2\int_0^{\infty} A_x(0)\frac{2k}{4\pi^2 f^2 + k^2}\,df = \\ &= 2A_x(0)\int_0^{\infty} \frac{2k}{k^2\left(\left(\frac{2\pi f}{k}\right)^2 + 1\right)}\,\frac{k}{2\pi}\,d\left(\frac{2\pi f}{k}\right) = \\ &= 2A_x(0)\,\frac{1}{\pi}\left[\arctan\frac{2\pi f}{k}\right]_0^{\infty} = 2A_x(0)\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = A_x(0).\end{aligned}$$

Nähdään taas, että kokonaisteho on aina yhtä kuin varianssi, eikä teho riipu arvosta k. Yhtälön 2.35 perusteella

$$\mathcal{A}_x(f) = A_x(0)\frac{2k}{4\pi^2 f^2 + k^2},$$

siis jos $|2\pi f| \ll k$:

$$\mathcal{A}_x(f) \approx \frac{2}{k}A_x(0)$$

ja jos $|2\pi f| \gg k$:

$$\mathcal{A}_x(f) \approx A_x(0)\frac{2k}{4\pi^2 f^2} \approx 0.$$

Nähdään, kuten myös tarkastamalla kuva 2.5, että tällä prosessilla on suunnilleen tasainen spektri alueella $|2\pi f| < k$, ja spektri laskee pisteiden $|2\pi f| \approx k$ tienoilla tasaisesti nollaan alueilla $|2\pi f| > k$. Rajapisteet $k = \pm 2\pi f$ on merkitty kuvaan: ne ovat käyrän puolikorkeuden kohdat. Lisäksi alue rajapisteiden välillä sisältää puolet kokonaistehosta:

$$\begin{aligned}\int_{-k/2\pi}^{k/2\pi} \mathcal{A}_x(f)\,df &= 2A_x(0)\frac{1}{\pi}\left[\arctan\frac{2\pi f}{k}\right]_{f=0}^{k/2\pi} = \\ &= A_x(0)\frac{2}{\pi}\arctan 1 = A_x(0)\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}A_x(0).\end{aligned}$$

Mitä suurempi k, sitä matalampi ja leveämpi on spektri, mutta kokonaisteho on aina $A_x(0)$.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä on stokastisen prosessin autokovarianssi?
2) Mikä on kahden stokastisen prosessin ristikovarianssi?
3) Milloin stokastinen prosessi on stationaarinen?
4) Mikä on valkoinen kohina?
5) Mikä on satunnaiskulku?

6) Kuvaile Gaussin ja Markovin prosessi.
7) Näytä, että satunnaiskulku ja valkoinen kohina ovat Gaussin ja Markovin prosessin rajatapauksia.
8) Mikä on Markovin ketju?
9) Mikä on tehon spektraalitiheys ja miten se liittyy autokovarianssifunktioon?
10) Mikä on homoskedastisuus? Mikä on *i.i.d.*?
11) Kuinka ajassa korreloitujen havaintojen lineaarinen regressio eroaa korreloimattomien havaintojen vastaavasta?

Harjoitus 2−1: Normaalijakauman normalisointi

Tarkista, että normaalijakauman, yhtälön 2.2 integraali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx,$$

tuottaa kokonaistodennäköisyyden 100 %.

Vihje Tutki sen tilalla kaksiulotteista stokastista muuttujaa

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix},$$

jolla on yhteinen todennäköisyystiheysjakauma $p(x,y) = p(x)\,p(y)$, ja integroi napakoordinaateissa. Älä unohda napakoordinaattien Jacobin determinanttia. Nyt ymmärrät, mistä tuon yhtälön 2π on peräisin.

Harjoitus 2−2: Tehollinen otoskoko

Näytä, että alaosion 2.4.2 aikasarjalle

$$\mathrm{Var}\{\hat{a}\} = \mathrm{Var}'\{\hat{a}\}\,\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Kalmanin suodin

3

Kalmanin suodin on lineaarinen ja ennustava suodin. Kuten kahvisuodin, joka suodattaa kahvia kahvinporoista, Kalmanin suodin suodattaa signaalia (niin sanottu *state vector*, tilavektori) havainto- ja liikeprosessien kohinasta. Kalmanin suodin on optimaalinen estimaattori pienemmän neliösumman merkityksessä.

Kalmanin suotimen keksijät olivat Rudolf Kalman[1] ja Richard Bucy[2] vuosina 1960–1961 (Kalman, 1960; Kalman ja Bucy, 1961). Keksintöä käytettiin laajasti avaruusohjelmassa ja ohjusten ohjausjärjestelmien yhteydessä.

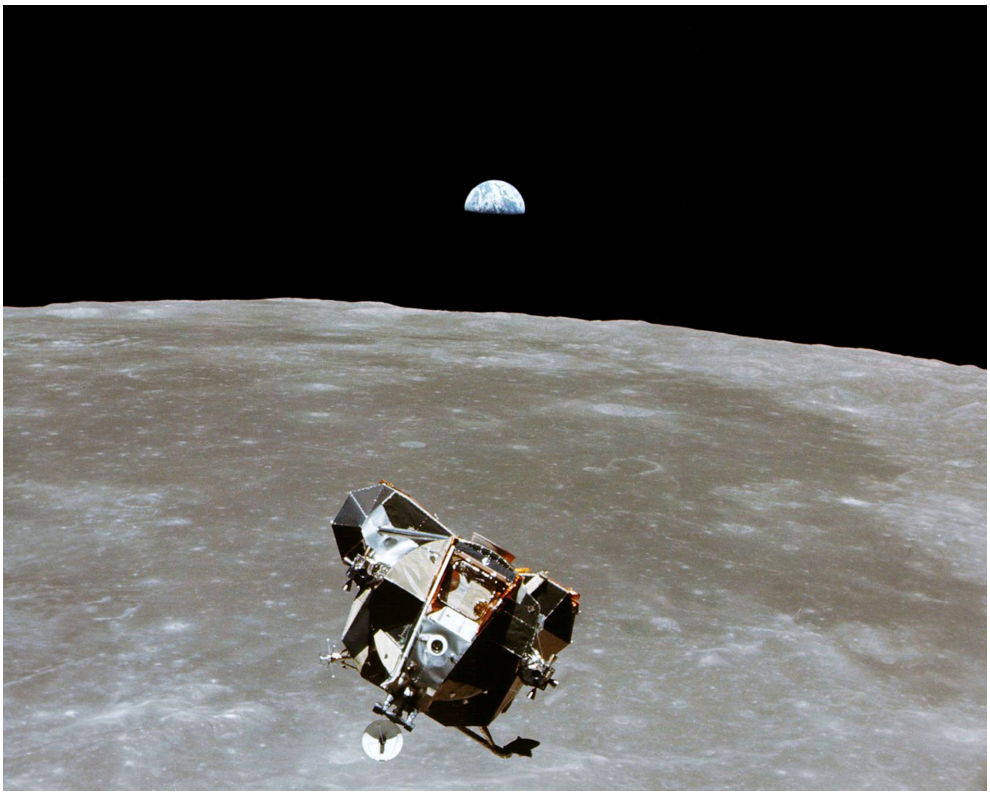
Eräs Kalmanin suotimen tärkeistä sovelluksista oli *rendezvous kiertoradalla*: siinä kaksi avaruusalusta tapaa ja vaihtaa miehistöä tai tavaraa tilanteessa, jossa alukset joko liikkuvat lähellä toisiaan pienellä suhteellisella nopeudella tai ovat jopa telakoituneina toisiinsa. Ongelma, joka on nykyisin käytännön rutiinia Kansainvälisen avaruusaseman huoltolentojen yhteydessä, katsottiin hyvin haastavaksi aikana, jolloin Apollo-kuuohjelmaa vasta ehdotettiin. Tekniikaksi hyväksyttiin *rendezvous* Kuun kiertoradalla (LOR, *lunar orbit rendezvous*), ja se auttoi suuresti pitämään projektin aikataulussa (Dickinson, 2014).

Kalmanin suodin on myös yleispätevä estimaatiomenetelmä, joka on käytetty paitsi navigoinnissa myös muun muassa taloustieteessä ja säätieteessä.

Kalmanin suodin sai alkunsa säätötekniikasta ja signaalinkäsittelystä. Sillä on kuitenkin monenlaisia yhteyksiä geotieteiden pienimmän neliösumman menetelmiin, kuten tasoitukseen, kollokaatioon ja krigingiin.

[1] Rudolf Emil Kálmán (1930–2016) oli unkarilaissyntyinen amerikkalainen sähköinsinööri, matemaatikko ja keksijä.

[2] Richard Snowden Bucy (1935–2019) oli amerikkalainen matemaatikko.



KUVA 3.1. *Rendezvous* Kuun kiertoradalla: kaksi astronauttia matkalla kotiin, kokoelma kiviä ja filmirullia mukanaan. Huomaa, että sekä emoalus — *Command and Service Module*, CSM — että laskeutumisalus, tässä kuvattuna emoaluksesta käsin, oli varustettu inertianavigointijärjestelmällä. Se oli pelastus, kun huoltomoduuli eli *Service Module* meni epäkuntoon räjähdyksen takia Apollo 13 -lennon aikana.
Napsauta ääntämisohjetta varten (e-kirja).

Sanastolliset erot eivät saa hämärtää tätä.

Taustalukemiseksi suositellaan Strang ja Borre (1997), sivut 543–583. Hyvä linkki on Welch ja Bishop ja hyvä diasarja Welch ja Bishop (2001).

Kalmanin suodin koostuu kahdesta osasta:

1) *Dynaaminen malli* kuvaa, miten *tilavektori* kehittyy ajassa.
2) *Havaintomalli* kuvaa, miten tehdään havaintoja, jotka sisältävät tietoja havaintohetken tilavektorista.

Molemmat mallit sisältävät stokastisuutta. Dynaaminen malli kuvaa myös satunnaisia vaikutuksia järjestelmän ajalliseen kehitykseen, esimerkiksi satelliittiradan häiriöitä. Havaintomalli puolestaan kuvaa myös havaintojen epävarmuuden vaikutusta.

Kalmanin suodin on erikoinen siinä mielessä, että tilavektori kulkee

eteenpäin ajassa askel kerrallaan. Havaintoja käytetään tilavektorin estimaatin korjaamiseksi silloin, kun on tehty havaintoja. Tästä syystä Kalmanin suodin ei vaadi suurta laskentatehoa eikä käsittele suuria matriiseja. Se voidaankin toteuttaa kulkuneuvossa tosiajassa.

3.1 Tilavektori

Tilavektori (engl. *state vector*) on muodollinen vektori ja abstraktin vektoriavaruuden alkio, joka kuvaa dynaamisen järjestelmän kokonaista tilaa joko tietyllä ajan hetkellä eli *epookilla* t tai ajan funktiona eli stokastisena prosessina.

Esitetään konkreettinen esimerkki. Vapaasti avaruudessa liikkuvalla hiukkasella on kolme paikkakoordinaattia ja kolme nopeuskomponenttia. Olkoon avaruuden ortonormaali kanta $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Silloin kirjoitetaan hiukkasen paikkavektori $\mathbf{x}$ ja nopeusvektori $\boldsymbol{v}$ seuraavasti:

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad \boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{x}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}.$$

Avaruuden vektori identifioidaan usein sen sovitulla ortonormaalilla kannalla $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ muodostaman kolmen komponentin muodollisen vektorin kanssa: beeta βB

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff \mathbf{x}_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

vaikka $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{x}_\beta$ ovat käsitteellisesti eri asioita. Usein β jätetään puolihuolimattomasti pois, jos merkitys on selvä eli

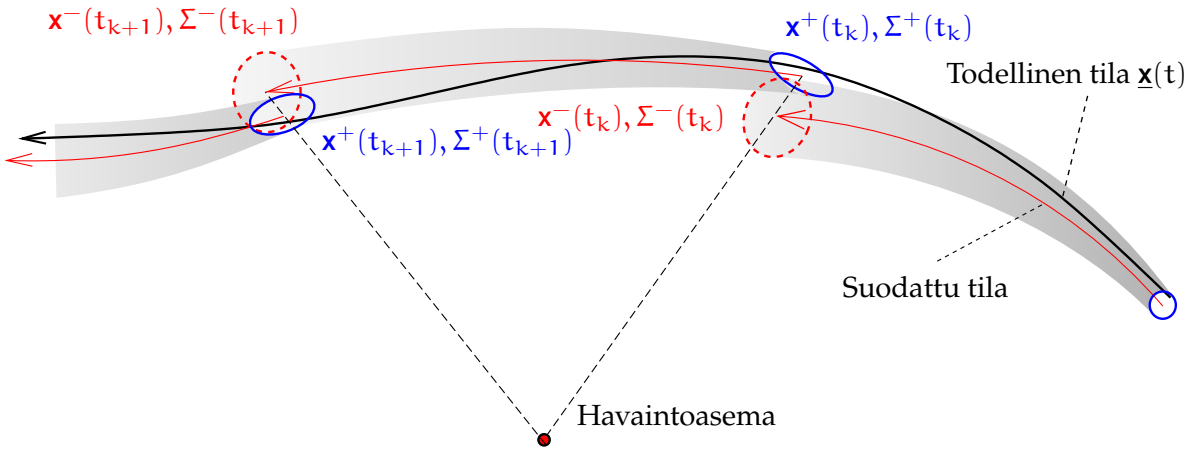
$$\mathbf{x}_\beta \sim \mathbf{x}.$$

Nyt hiukkasen *tilavektoriksi* muodostuu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array}\right], \tag{3.1}$$

jossa paikka- ja nopeusvektorit ovat

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\beta = \dot{\mathbf{x}}_\beta = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}.$$



(a)

Kalmanin suodin

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}}(t) = F(\underline{\mathbf{x}}, t) + \underline{\mathbf{n}}(t) \overset{\text{lin}}{\approx} F(t)\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{n}}(t),$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^-(t) = F(\mathbf{x}^-, t) \overset{\text{lin}}{\approx} F(t)\,\mathbf{x}^-(t),$$
$$\frac{d}{dt}\Sigma^-(t) = F(t)\,\Sigma^-(t) + \Sigma^-(t)\,F^T(t) + Q_n(t).$$
$$\underline{\mathbf{x}}(t_{k+1}) = \Phi_k^{k+1}\underline{\mathbf{x}}(t_k) + \underline{\mathbf{w}}_k^{k+1}, \qquad \underline{\mathbf{w}}_k^{k+1} = \int_k^{k+1} \Phi_t^{k+1}\underline{\mathbf{n}}(t)\,dt,$$
$$\mathbf{x}^-(t_{k+1}) = \Phi_k^{k+1}\,\mathbf{x}^+(t_k), \qquad \frac{d}{dt}\Phi_0^t = F(t)\,\Phi_0^t,$$
$$\Sigma^-(t_{k+1}) = \Phi_k^{k+1}\Sigma^+(t_k)\left(\Phi_k^{k+1}\right)^T + \Theta_k^{k+1}, \qquad \Theta_k^{k+1} = \int_k^{k+1} \Phi_t^{k+1} Q_n(t)\left(\Phi_t^{k+1}\right)^T dt.$$

(b)

Dynaaminen malli

$$\underline{\ell}_k = H\big(\underline{\mathbf{x}}(t_k)\big) + \underline{\mathbf{m}}_k \overset{\text{lin}}{\approx} H_k\,\underline{\mathbf{x}}(t_k) + \underline{\mathbf{m}}_k, \qquad \text{Var}\{\underline{\mathbf{m}}_k\} = R_k,$$
$$\mathbf{x}^+(t_k) = \mathbf{x}^-(t_k) - K_k \cdot \Big(H\big(\mathbf{x}^-(t_k)\big) - \underline{\ell}_k\Big) \overset{\text{lin}}{\approx} \mathbf{x}^-(t_k) - K_k \cdot \big(H_k\,\mathbf{x}^-(t_k) - \underline{\ell}_k\big),$$
$$\Sigma^+(t_k) = (I - K_k H_k)\,\Sigma^-(t_k), \qquad K_k = \Sigma^-(t_k)\,H_k^T \cdot \big(H_k\,\Sigma^-(t_k)\,H_k^T + R_k\big)^{-1}.$$

(c)

Havaintomalli ja päivitysaskel

KUVA 3.2. Kalmanin suodin, yhtälöiden yhteenveto. Huomaa käytetty konventio: integrointirajoissa ja tilansiirroissa lyhennetään t_k indeksiksi k, t_{k+1} indeksiksi $k+1$ ja niin edelleen.

Tässä tapauksessa tilavektori koostuu siis kuudesta alkiosta, eli sillä on kuusi *vapausastetta*.

Koko tilavektori, jokainen tilavektorin alkio ja molemmat osavektorit ovat kaikki ajan funktioita:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t), \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Jos hiukkanen ei ole pistemäinen vaan laajempi kappale, myös sen asentokulmat eli *Eulerin kulmat* sisällytetään tilavektoriin. Silloin alkioita on jo yhdeksän. Usean hiukkasen järjestelmässä jokainen hiukkanen tuo omat alkionsa, kolme paikan ja kolme nopeuden komponenttia, tilavektoriin.

Tilavektori voi sisältää myös alkioita, jotka mallintavat mekaanisen laitteen, kuten inertiamittausyksikön, käyttäytymistä.

3.2 Dynaaminen malli

Dynaaminen malli kuvaa tilavektorin käyttäytymistä ajassa. Tilavektori on edellisen osion määritelmän mukaan vektoriarvoinen stokastinen prosessi eli ajan t funktio.

Tässä esitetty dynaamisen mallin perusmuoto on tilavektorin *tavallinen differentiaaliyhtälö* ajassa. Olemassa on myös vaihtoehtoinen muoto, jossa tilavektorin muutos ajassa kuvataan diskreetillä tavalla siirtona epookista t_k epookkiin t_{k+1}. Tämä diskreetti muoto esitetään osiossa 3.4.

Ensin esitetään lineaarinen tapaus. Sen jälkeen esitetään epälineaarinen tapaus ja suoritetaan linearisointi. Tulos on niin sanottu *laajennettu Kalmanin suodin*.

3.2.1 Lineaarinen tapaus

Lineaarisessa tapauksessa dynaaminen malli on

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}}(t) = F(t)\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{n}}(t), \tag{3.2}$$

jossa $\underline{\mathbf{x}}$ on tilavektori ja $\underline{\mathbf{n}}$ on *dynaaminen kohina*, joka edustaa todellisen liikkeen satunnaista vaihtelevuutta. Alleviivaus merkitsee, että suure on stokastinen. Matriisi F — joka voi olla ajan funktio — on mallin kerroinmatriisi.

Tilavektorilla on niin monta alkiota kuin tarvitaan järjestelmän hetkellisen tilan täydelliseksi kuvaamiseksi. Dynaamisella kohinalla on

saman verran alkioita. Kerroinmatriisi on neliömatriisi, jossa on saman verran sekä rivejä että sarakkeita.

Dynaamiselle kohinalle $\underline{\mathbf{n}}$ on määriteltävä realistiset *tilastolliset ominaisuudet*: usein oletetaan, että se on valkoinen kohina, jonka autokovarianssi on

$$A_n(\Delta t) = Q_n\,\delta(\Delta t). \tag{2.23}$$

Tämä aiheuttaa sen, että tilavektorin $\underline{\mathbf{x}}$ satunnaisuus käyttäytyy tavalla, joka muistuttaa satunnaiskulkua, alaosio 2.6.3. Jos tilavektorilla on enemmän kuin yksi alkio, myös A_n ja Q_n ovat samankokoisia neliömatriiseja.

3.2.2 Linearisointi

Yleisempi ei-lineaarinen tapaus, jota kirjallisuudessa kutsutaan nimellä *laajennettu Kalmanin suodin*, on

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}}(t) = F(\underline{\mathbf{x}}, t) + \underline{\mathbf{n}}(t), \tag{3.3}$$

jossa $F(\underline{\mathbf{x}}, t)$ on vektorifunktio. Lineaarinen tapaus seuraa tästä helposti: valitse tilavektorille *likiarvo* eli *vertausarvo* $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, ajan funktio. Tältä likiarvolta vaaditaan yhteensopivuutta dynaamisen mallin kanssa:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^{(0)}(t) = F\big(\mathbf{x}^{(0)}, t\big). \tag{3.4}$$

Nyt linearisoidaan vähentämällä yhtälö 3.4 yhtälöstä 3.3 ja kehittämällä tulos Taylorin sarjaksi:

$$\frac{d}{dt}\big(\underline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(0)}\big) = F(\underline{\mathbf{x}}, t) + \underline{\mathbf{n}}(t) - F\big(\mathbf{x}^{(0)}, t\big) \approx F(t)\ \big(\underline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(0)}\big) + \underline{\mathbf{n}}(t),$$

mikä määritelmällä $\Delta\underline{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(0)}$ on jo muotoa 3.2:

$$\frac{d}{dt}\Delta\underline{\mathbf{x}}(t) = F(t)\,\Delta\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{n}}(t).$$

Tästä voi pudottaa deltat taas pois, ellei ole väärinkäsityksen vaaraa.

Funktion $F(\cdot)$ yllä käytetyn Jacobin[3] matriisin F alkiot ovat

$$F_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\overbrace{x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n}^{\mathbf{x}}, t)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3.5}$$

[3] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) oli juutalaissaksalainen matemaatikko, joka muistetaan pääasiassa hänen elliptisten funktioiden teoriastaan. Hän menehtyi isorokkoon vain 46-vuotiaana.

jossa x_j ovat vektorin $\mathbf{x}$ komponentit, n kappaletta. Esimerkiksi tilavektorissa 3.1 ne ovat

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}\right]^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{array}\right]^T.$$

Yhtälön 3.5 derivaatat evaluoidaan vektorin

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x^{(0)} & y^{(0)} & z^{(0)} & \dot{x}^{(0)} & \dot{y}^{(0)} & \dot{z}^{(0)} \end{array}\right]^T$$

antaman liki- eli vertausarvojen kohdalla.

Funktio $F(\mathbf{x}, t)$ on *vektori*, jolla on n komponenttia, $F_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, \ldots, n$.

3.2.3 Tilan eteneminen

Tilan eteneminen tapahtuu integroimalla differentiaaliyhtälö, joka on dynaaminen malli. Yleisessä tapauksessa malli on

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}}(t) = F(\underline{\mathbf{x}}, t) + \underline{\mathbf{n}}(t). \tag{3.3}$$

Tilan kehityksen laskennassa ei integroida todellista tilavektoria $\underline{\mathbf{x}}(t)$, koska sitä ei tunneta. Sen sijaan voidaan integroida *tilan estimaattori* $\mathbf{x}^-(t)$. Kohinatermi $\underline{\mathbf{n}}$ jää pois todellisen tiedon puuttuessa: sen paras estimaattori on nolla.

Siis asetetaan sama dynaaminen laki estimaattorille:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^-(t) = F(\mathbf{x}^-, t),$$

ja integrointi lähtee jostakin järkevästä alkutilasta $\mathbf{x}^-(t_0)$. Jos tilan estimaattori on sopivan lähellä likitilaa $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, yhtälö 3.4, voidaan käyttää samaa linearisointia kuin todellisen tilan tapauksessa, ja tuloksena on linearisoitu yhtälö

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^- - \mathbf{x}^{(0)}\right) = F(t)\,\left(\mathbf{x}^- - \mathbf{x}^{(0)}\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x}^-(t) = F(t)\,\Delta\mathbf{x}^-(t).$$

Tästä deltat voidaan taas pudottaa pois:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^-(t) = F(t)\,\mathbf{x}^-(t). \tag{3.6}$$

Lineaarisessa tapauksessa on todellisen tilan yhtälö

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}}(t) = F(t)\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{n}}(t). \tag{3.2}$$

Estimaattorin yhtälö 3.6 on sama yhtälö, mutta ilman kohinaa.

Käytetty merkintätapa on:

$\mathbf{x}^-$ *a priori* tilan estimaattori eli estimaattori ennen (myöhemmin käsiteltävää) päivitysaskelta. Myös yleisen tilan estimaattorin symboli.

$\mathbf{x}^+$ *a posteriori* tilan estimaattori, päivitysaskeleen jälkeen.

Kirjallisuudesta löytyvät myös muut merkintätavat, kuten $\hat{\mathbf{x}}^{k-1}$ ja $\hat{\mathbf{x}}^{k}$, jossa k on päivityksen numero. ”Hattu” on estimaattorin merkki.

3.3 Esimerkki: satelliitin rataliike

Esimerkki on avaruusaluksen liike Maan gravitaatio- eli vetovoimakentässä. Kenttä approksimoidaan pistemassan $GM_\oplus$ kentällä:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\\ \underline{z}\end{bmatrix} = -\frac{GM_\oplus}{\left(\underline{x}^2+\underline{y}^2+\underline{z}^2\right)^{3/2}}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\\ \underline{z}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{n}_x\\ \underline{n}_y\\ \underline{n}_z\end{bmatrix},$$

jossa $\underline{n}_x, \underline{n}_y, \underline{n}_z$ kuvaavat häiriöitä, kuten ilmakehän vastuksen satunnaisesti vaihtelevaa vaikutusta tai Maan vetovoimakentän epäsäännöllisyyksiä, joiden takia aluksen rataliikettä on mahdoton ennustaa tarkasti.

Tämä on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä. Tilavektoria pidennetään lisäämällä siihen *nopeuden komponentit*, jolloin saadaan ensimmäisen kertaluvun yhtälöryhmä:

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\left[\begin{array}{c}\underline{x}\\ \underline{y}\\ \underline{z}\\ \hline \dot{\underline{x}}\\ \dot{\underline{y}}\\ \dot{\underline{z}}\end{array}\right]}^{\underline{\mathbf{x}}(t)} = \overbrace{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}\dot{\underline{x}}\\ \dot{\underline{y}}\\ \dot{\underline{z}}\end{array}\right]\\ \hline -\frac{GM_\oplus}{\left(\underline{x}^2+\underline{y}^2+\underline{z}^2\right)^{3/2}}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\\ \underline{z}\end{bmatrix}\end{array}}^{F(\underline{\mathbf{x}},t)} + \overbrace{\left[\begin{array}{c}0\\0\\0\\ \hline \underline{n}_x\\ \underline{n}_y\\ \underline{n}_z\end{array}\right]}^{\underline{\mathbf{n}}(t)}.$$

Tämä yhtälöryhmä on epälineaarinen. Linearisointi antaa

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\left[\begin{array}{c}\Delta\underline{x}\\ \Delta\underline{y}\\ \Delta\underline{z}\\ \hline \Delta\dot{\underline{x}}\\ \Delta\dot{\underline{y}}\\ \Delta\dot{\underline{z}}\end{array}\right]}^{\Delta\underline{\mathbf{x}}(t)} \approx \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\frac{GM_\oplus}{r^5}\begin{pmatrix}3x^2-r^2 & 3xy & 3xz\\ 3yx & 3y^2-r^2 & 3yz\\ 3zx & 3zy & 3z^2-r^2\end{pmatrix}} & 0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]}^{F(t)}{}^{(0)} \overbrace{\left[\begin{array}{c}\Delta\underline{x}\\ \Delta\underline{y}\\ \Delta\underline{z}\\ \hline \Delta\dot{\underline{x}}\\ \Delta\dot{\underline{y}}\\ \Delta\dot{\underline{z}}\end{array}\right]}^{\Delta\underline{\mathbf{x}}(t)} + \overbrace{\left[\begin{array}{c}0\\0\\0\\ \hline \underline{n}_x\\ \underline{n}_y\\ \underline{n}_z\end{array}\right]}^{\underline{\mathbf{n}}(t)}, \tag{3.7}$$

jossa $r \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ on etäisyys Maan keskipisteestä.

Muut oletukset ovat:

- Olemassa on sopiva *likirata* eli *vertausrata*, toisin sanoen joukko likieli vertausarvoja, jotka muodostavat likimääräisen tilavektorin

$$\mathbf{x}^{(0)}(t) = \left[\, x^{(0)}(t) \;\; y^{(0)}(t) \;\; z^{(0)}(t) \,\middle|\, \dot{x}^{(0)}(t) \;\; \dot{y}^{(0)}(t) \;\; \dot{z}^{(0)}(t) \,\right]^T,$$

  jonka suhteen deltasuureet yhtälössä 3.7 on laskettu:

$$\Delta\underline{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}^{(0)}(t).$$

  Nämä ovat kaikki ajan funktioita.

- Kerroinmatriisin $F(t)$ alkiot lasketaan niillä likiarvoilla, yhtälö 3.5.

Jokainen likimääräisen tilavektorin alkio on ajan funktio, kuten on koko vektori. Vektori on epälineaarisen dynaamisen mallin, yhtälön 3.4, tarkka ratkaisu.

3.3.1 *Gravitaatiogradienttitensori*

Yllä olevan dynaamisen yhtälön 3.7 ositettu versio on

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Delta\underline{\mathbf{x}} \\ \Delta\underline{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathcal{M}^{(0)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\underline{\mathbf{x}} \\ \Delta\underline{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\mathbf{n}} \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

jossa I on 3×3 -kokoinen yksikkömatriisi eli Kroneckerin[4] tensori ja $\mathcal{M}$ on tensori nimeltä gravitaatiogradienttitensori. Tensorin komponenttimatriisi koordinaatiston (x, y, z) kannalla $\beta = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ on

$$\mathcal{M}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}\left(-\frac{GM_\oplus}{r^3}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}\frac{GM_\oplus}{r} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}\frac{GM_\oplus}{r} =$$

[4] Leopold Kronecker (1823–1891) oli saksalainen matemaatikko, joka edisti lukuteoriaa ja algebraa.

$$= \frac{GM_\oplus}{r^5} \begin{bmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3yx & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3zx & 3zy & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Tässä oletetaan keskinen pallosymmetrinen vetovoimakenttä.

Tensorin komponenttimatriisi koostuu gravitaatio- eli vetovoimavektorin komponenttien

$$-\frac{GM_\oplus}{r^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

osittaisderivaatoista paikan suhteen. Muista, että gravitaatiovektori on itsekin *geopotentiaalin gradientti*. Tensori sisältää geopotentiaalin

$$\frac{GM_\oplus}{r}$$

kaikki kaksoisosittaisderivaatat paikan suhteen.

Tensori $\mathcal{M}$ kuvaa, miten pieni satelliitin paikan häiriö $\Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix}^T$ kääntyy kiihtyvyyshäiriöksi $\Delta\mathbf{a}$:

$$\Delta\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \Delta\ddot{x} \\ \Delta\ddot{y} \\ \Delta\ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\Delta\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{z} \end{bmatrix} = \mathcal{M}\,\Delta\mathbf{x} = \mathcal{M}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}.$$

3.3.2 Likiarvojen valinta

Tärkeintä liki- eli vertausarvojen valinnassa — sen lisäksi, että ne ovat sopivan lähellä oikeita arvoja — on, että ne ovat *fysikaalisesti yhteensopivia*. Toisin sanoen ne esittävät aidosti mahdollisen rataliikkeen oletetun vetovoimakentän sisällä. Tästä syystä lienee nimitys *vertausarvot* sopivampi.

Jos gravitaatiokenttä on keskeiskenttä, *Keplerin rataliike* vetovoiman keskuksen $GM_\oplus$ ympäri antaa sopivat likiarvot, katso osio 6.1.

Vieläkin yksinkertaisempi likiarvojen lähde on *tasainen ympyräliike*. Tämä on sopiva valinta, jos radan eksentrisyys on lähellä nollaa.

Jos saatavissa on vetovoimakentän malli, joka on monimutkaisempi kuin keskeiskenttä, likiarvot tulee integroida ajassa tällä tarkemmalla mallilla. Yllä esitetty linearisoitu dynaaminen malli, yhtälö 3.7, kelpaa edelleen erosuureiden $\Delta\mathbf{x}$ ja $\Delta\boldsymbol{v}$ integroimiseksi, jos ne vain pysyvät *numeerisesti pieninä*. Tämä on yksi linearisoinnin eduista.

3.4 Diskreetti dynaaminen malli

Määritelmä:

> Tilavarianssi *on tilavektorin* estimaattorin *odotettu neliöllinen erotus tilavektorin* oikeasta arvosta, *seuraavasti:*

$$\Sigma^-(t) = \mathrm{Var}\{\mathbf{x}^-(t)\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\Big\{\big(\mathbf{x}^-(t) - \underline{\mathbf{x}}(t)\big)\big(\mathbf{x}^-(t) - \underline{\mathbf{x}}(t)\big)^{\mathsf{T}}\Big\}. \tag{3.10}$$

Käytetty symboli on Σ. sigma $\sigma\Sigma$

Tietenkin on huomattava, että tilavektori $\underline{\mathbf{x}}(t)$ on stokastinen prosessi, *johon emme pääse käsiksi.* Voimme vain tuntea sen estimaattorin $\mathbf{x}^-(t)$ arvoja.

3.4.1 Tilansiirtomatriisi

Oletetaan, että matriisi F on vakio. Pienille aika-askelille $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ pätee likimäärin

$$\mathbf{x}^-(t_{i+1}) \approx \mathbf{x}^-(t_i) + F\,\Delta t \cdot \mathbf{x}^-(t_i) = (I + F\,\Delta t)\,\mathbf{x}^-(t_i).$$

Näkyy, että epookin t_{i+1} tilavektorin $\mathbf{x}^-(t_{i+1})$ alkiot ovat edellisen epookin t_i tilavektorin $\mathbf{x}^-(t_i)$ alkioiden lineaariyhdistelmiä. Jos vieläkin pienemmällä aika-askelilla δt pätee $\Delta t = n\,\delta t$, saadaan soveltamalla yllä olevaa yhtälöä toistuvasti:

$$\mathbf{x}^-(t_{i+1}) = (I + F\,\delta t)^n\,\mathbf{x}^-(t_i).$$

Matriisia Φ: fii $\varphi\phi\Phi$

$$\Phi_i^{i+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (I + F\,\delta t)^n$$

kutsutaan *tilansiirtomatriisiksi* epookkien t_i ja t_{i+1} välillä, ja kirjoitetaan

$$\mathbf{x}^-(t_{i+1}) = \Phi_i^{i+1}\mathbf{x}^-(t_i). \tag{3.11}$$

Sijoittamalla $\delta t = {}^{\Delta t}/_{n}$ saadaan

$$\Phi_i^{i+1} = \left(I + \frac{F\,\Delta t}{n}\right)^n.$$

Tavallisille reaaliluvuille on olemassa klassinen yhtälö

$$e^x = \exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \\ = \lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu x} = \lim_{\nu\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right)^x,$$

jossa näkyy luvun e määritelmä:

$$e = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}.$$

Siksi kirjoitetaan yleistämällä funktiot exp ja ln neliön muotoisille matriiseille:

$$\Phi_i^{i+1} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\ln\left(I+\frac{F\Delta t}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\ln\left(I+\frac{F\Delta t}{n}\right)\right) = \\ = \exp\left(n\frac{F\Delta t}{n}\right) = \exp(F\Delta t) = e^{F\Delta t}. \quad (3.12)$$

Tämä tulkitaan Taylorin sarjakehitelmäksi:

$$\Phi_i^{i+1} = e^{F\Delta t} = I + F\Delta t + \frac{1}{2}F^2\Delta t^2 + \frac{1}{6}F^3\Delta t^3 + \cdots$$

Havaitaan, että tilansiirtomatriisille pätee *transitiivinen ominaisuus*:

$$\Phi_i^{i+2} = \Phi_{i+1}^{i+2}\cdot\Phi_i^{i+1},$$

toisin sanoen siirtymiseksi tilasta $\mathbf{x}(t_i)$ tilaan $\mathbf{x}(t_{i+2})$ voidaan siirtyä ensin tilasta t_i tilaan t_{i+1} ja sen jälkeen tilasta t_{i+1} tilaan t_{i+2}.

3.4.2 Esimerkki: satelliitin rataliike

Differentiaaliyhtälöä 3.8 voidaan muuntaa, pienille arvoille Δt, seuraavaan muotoon:

$$\begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}(t_{i+1})\\ \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}}(t_{i+1})\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}(t_i)\\ \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}}(t_i)\end{bmatrix} \approx \Delta t\begin{bmatrix}0 & I\\ \mathcal{M}_i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}(t_i)\\ \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}}(t_i)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \underline{\mathbf{n}}\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}(t_{i+1})\\ \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}}(t_{i+1})\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}I & I\Delta t\\ \mathcal{M}_i\Delta t & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}(t_i)\\ \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}}(t_i)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \underline{\mathbf{n}}\end{bmatrix},$$

määritelmillä $\Delta t \overset{\text{def}}{=} t_{i+1} - t_i$ ja $\mathcal{M}_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}^{(0)}(t_i)$.

Nähdään, että tilansiirtomatriisi on

$$\Phi_i^{i+1} = \begin{bmatrix}I & I\Delta t\\ \mathcal{M}_i\Delta t & I\end{bmatrix}.$$

Samalla tavalla seuraavan tilansiirron matriisi on

$$\Phi_{i+1}^{i+2} = \begin{bmatrix}I & I\Delta t\\ \mathcal{M}_{i+1}\Delta t & I\end{bmatrix}.$$

Niiden ketjuttaminen eli kertominen antaa

$$\Phi_i^{i+2} = \Phi_{i+1}^{i+2} \cdot \Phi_i^{i+1} = \begin{bmatrix} I & I\,\Delta t \\ \mathcal{M}_{i+1}\,\Delta t & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I\,\Delta t \\ \mathcal{M}_i\,\Delta t & I \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} I + \mathcal{O}(\Delta t^2) & (I+I)\,\Delta t \\ (\mathcal{M}_{i+1} + \mathcal{M}_i)\,\Delta t & I + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{bmatrix}.$$

Tämän toistaminen useille pienille aika-askelille Δt antaa uskoa, että seuraava integraaliyhtälö pätee yleisesti:

$$\Phi_0^t = \begin{bmatrix} I & I \cdot (t - t_0) \\ \int_0^t \mathcal{M}(\tau)\,d\tau & I \end{bmatrix}.$$

3.4.3 Tilan ja tilavarianssin eteneminen

Tarkastellaan suureiden $\mathbf{x}^-(t)$ ja $\underline{\mathbf{x}}(t)$ etenemistä ajassa diskreetin mallin mukaan.

Diskreetti ajansiirtoyhtälö tilaestimaattorille on

$$\mathbf{x}^-(t_{i+1}) = \Phi_i^{i+1}\,\mathbf{x}^-(t_i), \tag{3.11}$$

jossa Φ_i^{i+1} on tilansiirtomatriisi. Ilman kohinaa $\underline{\mathbf{n}}(t)$ pätee myös

$$\underline{\mathbf{x}}(t_{i+1}) = \Phi_i^{i+1}\,\underline{\mathbf{x}}(t_i)$$

ja vähennys antaa

$$\left(\mathbf{x}^-(t_{i+1}) - \underline{\mathbf{x}}(t_{i+1})\right) = \Phi_i^{i+1}\left(\mathbf{x}^-(t_i) - \underline{\mathbf{x}}(t_i)\right),$$

jonka jälkeen varianssien kasautumislain soveltaminen antaa (yhtälö 3.10):

$$\Sigma^-(t_{i+1}) = \Phi_i^{i+1}\Sigma^-(t_i)\left(\Phi_i^{i+1}\right)^T.$$

3.4.4 Tilan kehitys kohinan läsnä ollessa

Dynaamisen kohinan läsnä ollessa pätevät seuraavat diskreetit dynaamiset yhtälöt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^-(t_{k+1}) &= \Phi_k^{k+1}\,\mathbf{x}^+(t_k), \\ \underline{\mathbf{x}}(t_{k+1}) &= \Phi_k^{k+1}\,\underline{\mathbf{x}}(t_k) + \underline{\mathbf{w}}_k^{k+1}, \\ \Sigma^-(t_{k+1}) &= \Phi_k^{k+1}\Sigma^+(t_k)\left(\Phi_k^{k+1}\right)^T + \Theta_k^{k+1}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nämä yhtälöt esitettiin jo kuvassa 3.2b. Huomautetaan, että tässä symbolit $\mathbf{x}^+(t_k)$ ja $\Sigma^+(t_k)$ viittaavat tilaan ja tilavarianssin havaintopäivityksen jälkeen (*a posteriori*) aikahetkellä t_k, katso osio 3.7. Sekä t_k että t_{k+1} viittaavat tässä havaintopäivityksiin.

Näytetään alaosioissa 3.5.2 ja 3.5.3 yhtälöiden yhteys jatkuviin vastineisiin eli differentiaaliyhtälöihin, jotka näkyvät myös kuvassa 3.2b.

Yhtälössä 3.13 kuvan 3.2b mukaan:

$$\underline{\mathbf{w}}_k^{k+1} = \underline{\mathbf{w}}_{t_k}^{t_{k+1}} = \int_k^{k+1} \Phi_t^{k+1}\, \underline{\mathbf{n}}(t)\, dt, \tag{3.14}$$

ja funktion $\underline{\mathbf{w}}$ autokovarianssi on

$$\Theta_k^{k+1} = \Theta_{t_k}^{t_{k+1}} = A_{w,k}(t_{k+1}, t_{k+1}) = \int_k^{k+1} \Phi_t^{k+1} Q_n(t) \left(\Phi_t^{k+1}\right)^T dt. \tag{3.15}$$

Yhtälöiden 3.14 ja 3.15 tulkinta on seuraava. Jokainen dynaamisen kohinan alkio $\underline{\mathbf{n}}(t)\, dt$ välissä (t_k, t_{k+1}) ja jokainen alkion varianssimatriisi $Q_n(t)\, dt$ siirretään eteenpäin ajassa hetkestä t hetkeen t_{k+1} kertomalla tilansiirtomatriisilla Φ_t^{k+1}. Varianssimatriisi kerrotaan sekä tilansiirtomatriisin kanssa vasemmalta että sen transpoosin kanssa oikealta, kuten on tapana tehdä varianssien kasautumislain perusteella.

Sen jälkeen suoritetaan integrointi ”eteenpäin siirrettyjen” alkioiden yli.

theeta $\vartheta\theta\Theta$

Matriisi Θ_k^{k+1} näin ollen edustaa dynaamisen kohinan kumuloitua varianssia aikaväliltä (t_k, t_{k+1}). Alkioiden dt varianssiosuuksien yksinkertainen summaus eli integrointi on sallittuna, koska valkoisen kohinan alkiot ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan.

Kehitysprosessin kuvio on kuvassa 3.3.

Jos aikaväli $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ on lyhyt ja Φ-matriisit siis lähellä yksikkömatriisia,

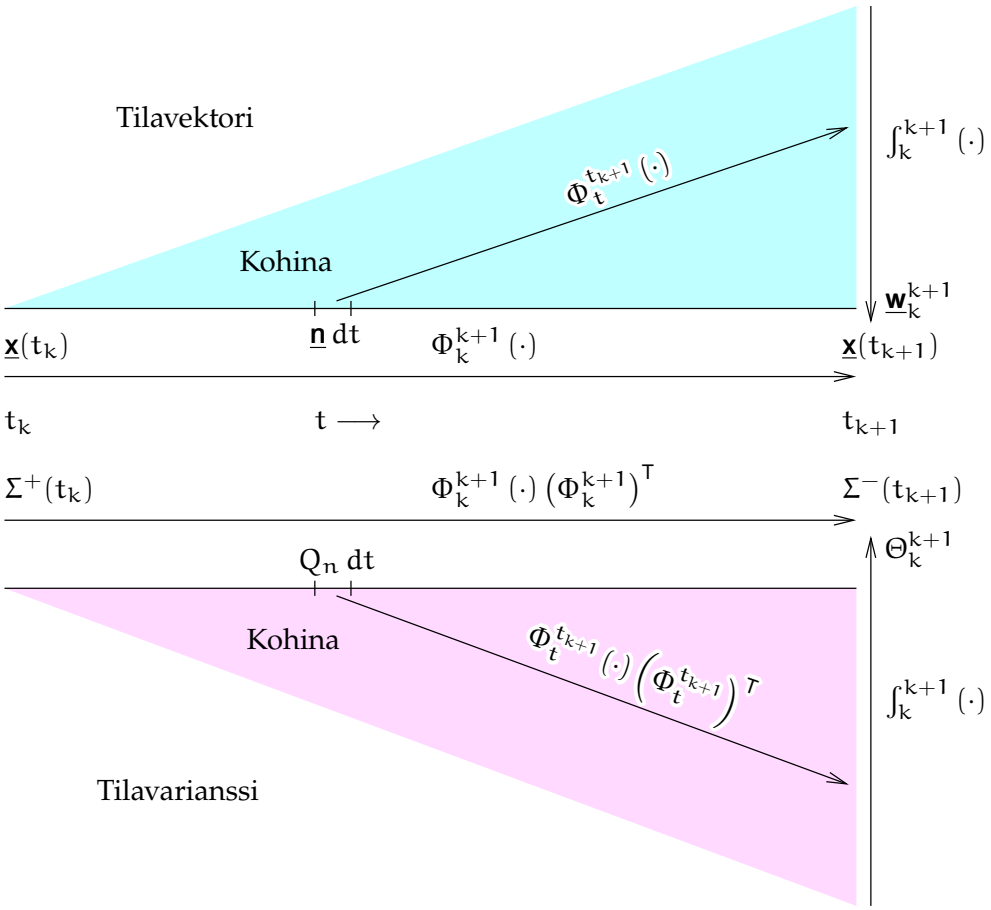
$$\underline{\mathbf{w}}_k^{k+1} \approx \int_k^{k+1} \underline{\mathbf{n}}(t)\, dt, \qquad \Theta_k^{k+1} \approx \int_k^{k+1} Q_n(t)\, dt.$$

Oletus on, että dynaaminen kohina $\underline{\mathbf{n}}(t)$ on valkoinen. Tässä tapauksessa $\underline{\mathbf{w}}_k(t)$ on *satunnaiskulku* eli valkoisen kohinan integraali, johon tutustuimme jo aiemmin.

3.5 Tilan varianssin differentiaaliyhtälö

3.5.1 *Tilansiirtomatriisin differentiaaliyhtälö*

Voimme myös johtaa differentiaaliyhtälöitä, jotka kuvaavat tilavarianssimatriisin ja tilansiirtomatriisin etenemistä ajassa. Oletetaan, että matriisi



KUVA 3.3. Tilavektorin ja tilavarianssin eteneminen kohinan läsnä ollessa.

$F(t)$ on ajan funktio.

Differentioi yhtälö 3.11:

$$\mathbf{x}^-(t) = \Phi_0^t\,\mathbf{x}^-(t_0) \implies \frac{d}{dt}\mathbf{x}^-(t) = \left(\frac{d}{dt}\Phi_0^t\right)\mathbf{x}^-(t_0).$$

Sijoita yhtälöön 3.6:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^-(t) = F(t)\,\mathbf{x}^-(t) = F(t)\,\Phi_0^t\,\mathbf{x}^-(t_0),$$

tuloksena

$$\left(\frac{d}{dt}\Phi_0^t\right)\cancel{\mathbf{x}^-(t_0)} = F(t)\,\Phi_0^t\cancel{\mathbf{x}^-(t_0)} \implies \frac{d}{dt}\Phi_0^t = F(t)\,\Phi_0^t. \tag{3.16}$$

Alkuehdon $\Phi_0^0 = I$ kanssa voimme integroimalla laskea matriisin Φ_0^t.

Olemassa ei ole suljettua ratkaisua, paitsi jos F on vakio tai jos

$$F(t')\,F(t) = F(t)\,F(t') \tag{3.17}$$

mielivaltaisille t ja t' (Wikipedia, Magnus expansion). Silloin yhtälön 3.12 tapaan

$$\Phi_0^t = \exp\left(\int_0^t F(\tau)\,d\tau\right), \tag{3.18}$$

mikä on tulkittava Taylorin sarjakehitelmäksi:

$$\Phi_0^t = I + \int_0^t F(\tau)\,d\tau + \tfrac{1}{2}\left(\int_0^t F(\tau)\,d\tau\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(\int_0^t F(\tau)\,d\tau\right)^3 + \cdots .$$

Tämä on yhtälön 3.12 yleistys, jossa matriisi $F(t)$ vaihtelee ajassa.

Järjestelmä, jossa eksponenttiyhtälö 3.18 *ei* toimi, on alaosion 3.4.2 satelliittiesimerkki:

$$F(t')\,F(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathcal{M}^{(0)}(t') & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathcal{M}^{(0)}(t) & 0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{(0)}(t) & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{(0)}(t') \end{bmatrix} \neq F(t)\,F(t').$$

3.5.2 Tilan varianssin differentiaaliyhtälö

Tilan varianssimatriisin Σ differentiaaliyhtälön johtamiseksi lähdetään yhtälöstä 3.13:

$$\Sigma^-(t) = \Phi_0^t\,\Sigma^-(t_0)\left(\Phi_0^t\right)^T + \Theta_0^t.$$

Differentioidaan ja käytetään yhtälöä 3.16:

$$\frac{d}{dt}\Sigma^-(t) = \left(\frac{d}{dt}\Phi_0^t\right)\Sigma^-(t_0)\left(\Phi_0^t\right)^T + \Phi_0^t\,\Sigma^-(t_0)\left(\frac{d}{dt}\Phi_0^t\right)^T + \frac{d}{dt}\Theta_0^t = \\ = F(t)\,\Phi_0^t\,\Sigma^-(t_0)\left(\Phi_0^t\right)^T + \Phi_0^t\,\Sigma^-(t_0)\left(\Phi_0^t\right)^T F^T(t) + \frac{d}{dt}\Theta_0^t.$$

Kun annetaan $t_0 \to t$, seuraa $\Phi_0^t \to I$ ja

$$\frac{d}{dt}\Sigma^-(t) = F(t)\,\Sigma^-(t) + \Sigma^-(t)\,F^T(t) + \frac{d}{dt}\Theta_0^t.$$

tau τT Integraalin 3.15 kanssa saadaan samassa limiitissä $t_0 \to t$, $\tau \to t$, ja siis $\Phi_\tau^t \to I$, tuloksen

$$\frac{d}{dt}\Theta_0^t = \frac{d}{dt}\int_0^t \left(\Phi_\tau^t\right) Q_n(\tau)\left(\Phi_\tau^t\right)^T d\tau \approx \frac{d}{dt}\int_0^t Q_n(\tau)\,d\tau = Q_n(t),$$

ja siis

$$\frac{d}{dt}\Sigma^-(t) = F(t)\,\Sigma^-(t) + \Sigma^-(t)\,F^T(t) + Q_n(t). \tag{3.19}$$

3.5.3 Tilakohinan differentiaaliyhtälöt

Lähdetään liikkeelle yhtälöstä 3.13, jossa kohina on mukana,

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \Phi_0^t\,\underline{\mathbf{x}}(t_0) + \underline{\mathbf{w}}_0^t. \tag{3.20}$$

Jaetaan aikaväli $[t_0, t]$ n osaväliin, joiden koko on δt, eli

$$t_i = t_0 + j\,\delta t, \qquad j = 1, \ldots, n$$

ja $t = t_n$. Kehitetään

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \Phi_{n-1}^{t} \overbrace{\Phi_{n-2}^{n-1} \overbrace{\Phi_{n-3}^{n-2} \overbrace{\cdots}^{\underline{\mathbf{x}}(t_{n-3})} + \underline{\mathbf{w}}_{n-3}^{n-2}}^{\underline{\mathbf{x}}(t_{n-2})} + \underline{\mathbf{w}}_{n-2}^{n-1}}^{\underline{\mathbf{x}}(t_{n-1})} + \underline{\mathbf{w}}_{n-1}^{t} =$$

$$= \Phi_{n-3}^{t}\,\underline{\mathbf{x}}(t_{n-3}) + \underline{\mathbf{w}}_{n-1}^{t} + \Phi_{n-1}^{t}\,\underline{\mathbf{w}}_{n-2}^{n-1} + \Phi_{n-2}^{t}\,\underline{\mathbf{w}}_{n-3}^{n-2} + \cdots =$$

$$= \Phi_0^t\,\underline{\mathbf{x}}(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_{n-i}^{t}\,\underline{\mathbf{w}}_{n-i-1}^{n-i} = \Phi_0^t\,\underline{\mathbf{x}}(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j^t\,\underline{\mathbf{w}}_{j-1}^{j}.$$

Käytä approksimaatiota

$$\underline{\mathbf{w}}_{j-1}^{j} \approx \delta t \cdot \underline{\mathbf{n}}(t_j),$$

siis

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \Phi_0^t\,\underline{\mathbf{x}}(t_0) + \delta t \sum_{j=1}^{n} \Phi_j^t\,\underline{\mathbf{n}}(t_j),$$

joka tunnistetaan integraalin suorakulmiosäännön approksimaatioksi. Limiitissä $n \to \infty$ saadaan

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \Phi_0^t\,\underline{\mathbf{x}}(t_0) + \int_0^t \Phi_\tau^t\,\underline{\mathbf{n}}(\tau)\,d\tau,$$

siis yhtälön 3.20 kanssa seuraa

$$\underline{\mathbf{w}}_0^t = \int_0^t \Phi_\tau^t\,\underline{\mathbf{n}}(\tau)\,d\tau. \tag{3.21}$$

Samalla tavalla tämän satunnaiskulun variantin autokovarianssifunktio on

$$\Theta_0^t = A_{w,0}(t,t) = \int_0^t \Phi_\tau^t Q_n(\tau)\left(\Phi_\tau^t\right)^{\mathsf{T}} d\tau. \tag{3.22}$$

Juju tässä on tilansiirtomatriisi integraalin sisällä.

Lopuksi huomaa, että edellisissä yhtälöissä voidaan havaita seuraava transitiivinen ominaisuus:

$$\underline{\mathbf{w}}_0^t = \overbrace{\Phi_{t'}^t\,\underline{\mathbf{w}}_0^{t'} + \underline{\mathbf{w}}_{t'}^t}^{\mathrm{I}}. \tag{3.23}$$

Tämä voidaan todistaa sijoittamalla integraalilauseke 3.21:

$$\overbrace{\Phi_{t'}^t\,\underline{\mathbf{w}}_0^{t'} + \underline{\mathbf{w}}_{t'}^t}^{\mathrm{I}} = \Phi_{t'}^t \overbrace{\int_0^{t'} \Phi_\tau^{t'}\,\underline{\mathbf{n}}(\tau)\,d\tau}^{\underline{\mathbf{w}}_0^{t'}} + \overbrace{\int_{t'}^t \Phi_\tau^t\,\underline{\mathbf{n}}(\tau)\,d\tau}^{\underline{\mathbf{w}}_{t'}^t} =$$

$$= \int_0^{t'} \overbrace{\Phi_{t'}^t \Phi_\tau^{t'}}^{\Phi_\tau^t}\,\underline{\mathbf{n}}(\tau)\,d\tau + \int_{t'}^t \Phi_\tau^t\,\underline{\mathbf{n}}(\tau)\,d\tau = \overbrace{\int_0^t \Phi_\tau^t\,\underline{\mathbf{n}}(\tau)\,d\tau}^{\underline{\mathbf{w}}_0^t}.$$

3.5.4 *Integroinnin yhteenveto*

Tilan varianssin differentiaaliyhtälöksi saatiin

$$\frac{d}{dt}\Sigma^-(t) = F(t)\,\Sigma^-(t) + \Sigma^-(t)\,F^T(t) + Q_n(t). \tag{3.19}$$

Yhtälö sopii myös matriisin $\Sigma(t)$ integrointiin, jos $F(t)$ on ajan funktio eikä vakio. Tilaestimaattorin integroimiseksi käytetään yhtälöä 3.6:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^-(t) = F(t)\,\mathbf{x}^-(t). \tag{3.6}$$

Diskreetissä tapauksessa yhtälö 3.11 yhdessä yhtälön 3.16 kanssa on sopiva tilan $\mathbf{x}^-(t)$ integroimiseksi ajassa päivitystapahtumien välillä. Jos matriisi F on vakio, saadaan tilansiirtomatriisi Φ_k^{k+1} suoraan yhtälöllä 3.12.

Tämä kaikki kuitenkin edellyttää, että matriisi F *on olemassa* eli funktio $F(\mathbf{x}, t)$ voidaan *linearisoida*.

3.6 Havaintomalli

Tilavektorin kehitys ajassa ei ole kovin mielenkiintoinen, ellei sitä voida *havaita* jollain tavalla. Havaintomalli lineaarisessa tapauksessa on

$$\underline{\ell} = H\,\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{m}},$$

jossa $\underline{\ell}$ on havaintosuure, yleisessä tapauksessa vektori, $\underline{\mathbf{x}}$ on tilavektori eli "oikea arvo" ja $\underline{\mathbf{m}}$ on havaintoprosessin "kohina" eli mittauksen satunnainen virhe. H on *havaintomatriisi*[5]. Oletus on, että odotusarvo $E\{\underline{\mathbf{m}}\} = 0$. Havaintovektorin varianssimatriisi on

$$R \stackrel{\text{def}}{=} E\{\underline{\mathbf{m}}\,\underline{\mathbf{m}}^T\}.$$

Olkoon havaintohetki eli epookki t. Tilavektorin estimaattori eteenpäin laskettuna tähän hetkeen on $\mathbf{x}^- = \mathbf{x}^-(t)$. Tästä lasketaan havaintosuureen estimaattori:

$$\widehat{\ell} = H\,\mathbf{x}^-.$$

Nyt voidaan muodostaa nollasuure eli "*sulkuvirhe*" — suure, jonka odotusarvo $E\{\cdot\}$ on nolla — seuraavasti:

$$\underline{\mathbf{y}} = \widehat{\ell} - \underline{\ell} = H\,\mathbf{x}^- - \underline{\ell} = H \cdot (\mathbf{x}^- - \underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{m}},$$

[5] Tämä on käytännössä sama kuin pienimmän neliösumman tasoituksen matriisi A eli *rakennematriisi*.

ja siis

$$\mathrm{E}\{\underline{\mathbf{y}}\} = \mathrm{H} \cdot \Big(\mathrm{E}\{\mathbf{x}^-\} - \mathrm{E}\{\underline{\mathbf{x}}\}\Big) - \mathrm{E}\{\underline{\mathbf{m}}\} = \mathrm{H} \cdot 0 - 0 = 0,$$

olettamuksen $\mathrm{E}\{\mathbf{x}^-\} = \mathrm{E}\{\underline{\mathbf{x}}\}$ perusteella, että $\mathbf{x}^-$ on tilan $\underline{\mathbf{x}}$ *harhaton* estimaattori.

Epälineaarisessa tapauksessa H ei ole matriisi vain tilavektorin funktio $\mathrm{H}(\underline{\mathbf{x}})$:

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} = \mathrm{H}(\underline{\mathbf{x}}) + \underline{\mathbf{m}}, \qquad\qquad \widehat{\boldsymbol{\ell}} = \mathrm{H}(\mathbf{x}^-),$$

ja erotus on

$$\underline{\mathbf{y}} = \widehat{\boldsymbol{\ell}} - \underline{\boldsymbol{\ell}} = \mathrm{H}(\mathbf{x}^-) - \big(\mathrm{H}(\underline{\mathbf{x}}) + \underline{\mathbf{m}}\big) \approx \mathrm{H} \cdot \big(\mathbf{x}^- - \underline{\mathbf{x}}\big) - \underline{\mathbf{m}}\,.$$

Matriisin H alkiot määritellään seuraavasti:

$$\mathrm{H}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{H}_i(\overbrace{x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n}^{\mathbf{x}}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}.$$

H on funktion $\mathrm{H}(\mathbf{x})$ *Jacobin matriisi* eli osittaisderivaattojen matriisi. Sen laskenta tapahtuu vektorin $\mathbf{x}^{(0)}$ sisältämillä tilavektorin likiarvoilla havaintoepookille t.

Varianssien ja kovarianssien laskemiseksi oletetaan, että sekä $\mathbf{x}^-$ että $\underline{\mathbf{x}}$ ovat tilastollisesti riippumattomia havaintokohinasta $\underline{\mathbf{m}}$. Tämä on järkevä oletus, onhan havaintoprosessi yleensä fysikaalisesti täysin riippumaton järjestelmän dynaamisesta prosessista, ja eri epookkien havaintoprosessit ovat riippumattomia toisistaan.

Lasketaan

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\{\underline{\mathbf{y}}\} &= \mathrm{E}\{\underline{\mathbf{y}}\,\underline{\mathbf{y}}^{\mathsf{T}}\} = \mathrm{H}\,\mathrm{E}\big\{(\mathbf{x}^- - \underline{\mathbf{x}})\,(\mathbf{x}^- - \underline{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}}\big\}\,\mathrm{H}^{\mathsf{T}} + \mathrm{R} = \\ &= \mathrm{H}\Sigma^-\mathrm{H}^{\mathsf{T}} + \mathrm{R}, \\ \mathrm{Cov}\{\underline{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^-\} &= \mathrm{E}\big\{\underline{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{x}^- - \underline{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}}\big\} = \mathrm{H}\Sigma^-, \qquad \mathrm{Cov}\{\mathbf{x}^-, \underline{\mathbf{y}}\} = \Sigma^-\mathrm{H}^{\mathsf{T}}. \end{aligned}$$

3.7 Päivitys

Erolla $\underline{\mathbf{y}}$ estimoidusta tilavektorista $\mathbf{x}^-$ lasketun havaintosuureen $\widehat{\boldsymbol{\ell}}$ ja todellisen havainnon $\underline{\boldsymbol{\ell}}$ välillä on odotusarvo nolla. Päivitysaskel käyttää tätä seikkaa optimaalisesti hyväkseen.

Muodostetaan siis parannettu estimaattori[6], [6]

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- - \mathsf{K}\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^- - \mathsf{K}\cdot(\mathsf{H}\mathbf{x}^- - \underline{\boldsymbol{\ell}}) = \mathbf{x}^- - \mathsf{K}\cdot\left(\mathsf{H}\cdot(\mathbf{x}^- - \underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{m}}\right)$$

eli

$$(\mathbf{x}^+ - \underline{\mathbf{x}}) = (\mathrm{I} - \mathsf{K}\mathsf{H})\,(\mathbf{x}^- - \underline{\mathbf{x}}) + \mathsf{K}\,\underline{\mathbf{m}}.$$

Matriisin K nimi on Kalmanin vahvistusmatriisi eli *gain matrix*.

Määritelmän 3.10 mukaan saamme käyttää tätä yhtälöä tilavarianssin päivitysyhtälön johtamiseksi:

$$\Sigma^+ = (\mathrm{I} - \mathsf{K}\mathsf{H})\,\Sigma^-\,(\mathrm{I} - \mathsf{K}\mathsf{H})^{\mathsf{T}} + \mathsf{K}\mathsf{R}\mathsf{K}^{\mathsf{T}}. \tag{3.24}$$

Optimaalinen ratkaisu saadaan valitsemalla

$$\mathsf{K} = \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\left(\mathsf{H}\Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}} + \mathsf{R}\right)^{-1}, \tag{3.25}$$

joka antaa ratkaisuksi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^+ &= \mathbf{x}^- - \mathsf{K}\cdot(\mathsf{H}\mathbf{x}^- - \underline{\boldsymbol{\ell}}) = \\ &= \mathbf{x}^- - \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\left(\mathsf{H}\Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}} + \mathsf{R}\right)^{-1}(\mathsf{H}\mathbf{x}^- - \underline{\boldsymbol{\ell}})\,.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Jos kutsutaan

$$\mathsf{P} \overset{\text{def}}{=} \left(\mathsf{H}\Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}} + \mathsf{R}\right)^{-1} \implies \mathsf{K} = \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P},$$

voimme kirjoittaa yhtälön 3.24 auki:

$$\Sigma^+ = \overbrace{\left(\mathrm{I} - \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\right)\Sigma^-\left(\mathrm{I} - \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\right)^{\mathsf{T}}}^{\mathrm{I}} + \overbrace{\Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{R}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^-}^{\mathrm{II}},$$

jossa

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \left(\mathrm{I} - \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\right)\Sigma^-\left(\mathrm{I} - \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\right)^{\mathsf{T}} = \\ &= \Sigma^- - \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^- - \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^- + \overbrace{\Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^-}^{\mathrm{III}}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathrm{III} + \mathrm{II} &= \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^- + \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{R}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^- = \\ &= \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\overbrace{\left(\mathsf{H}\Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}} + \mathsf{R}\right)}^{\mathsf{P}^{-1}}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^- = \Sigma^-\mathsf{H}^{\mathsf{T}}\mathsf{P}\mathsf{H}\Sigma^-,\end{aligned}$$

[6] Plus-merkin käyttö yläindeksinä merkitsee tässä tilavektoria havainnon käytön eli päivityksen *jälkeen* (*a posteriori*). Myös muita merkintätapoja löytyy, muun muassa alaindeksit k ja $k+1$, jolla viitataan tiloihin ennen ja jälkeen.

siis

$$\Sigma^+ = \Sigma^- - \Sigma^- H^T P H \Sigma^- - \cancel{\Sigma^- H^T P H \Sigma^-} + \cancel{\Sigma^- H^T P H \Sigma^-} =$$

$$= \Sigma^- - \Sigma^- H^T \overbrace{\left(H\Sigma^- H^T + R\right)^{-1}}^{P} H\Sigma^-.$$

Lyhennetään tämä varianssin päivitysyhtälö vielä seuraavasti:

$$\Sigma^+ = \Sigma^- - \Sigma^- H^T \left(H\Sigma^- H^T + R\right)^{-1} H\Sigma^- = (I - KH)\,\Sigma^-, \tag{3.27}$$

Kalmanin vahvistusmatriisin K määritelmän perusteella.

Ehkä intuitiivisempana yhteenvetona:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \mathbf{x}^- - \mathrm{Cov}\{\mathbf{x}^-, \underline{\mathbf{y}}\}\,\mathrm{Var}^{-1}\{\underline{\mathbf{y}}\}\,\underline{\mathbf{y}}, \\ \mathrm{Var}\{\mathbf{x}^+\} &= \mathrm{Var}\{\mathbf{x}^-\} - \mathrm{Cov}\{\mathbf{x}^-, \underline{\mathbf{y}}\}\,\mathrm{Var}^{-1}\{\underline{\mathbf{y}}\}\,\mathrm{Cov}\{\underline{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^-\}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

jonkinlainen tilavektorin estimaattorin $\mathbf{x}^-$ regressio ”sulkuvirheen” $\underline{\mathbf{y}}$ suhteen.

Näin ovat löytyneet Kalmanin suotimen *päivitysyhtälöt* sekä tilavektorille että sen varianssimatriisille.

Kirjallisuudesta löytyy monta tapaa laskea nämä yhtälöt tehokkaasti ja tarkasti. Pääasia kuitenkin on, että ”sulkuvirheen” varianssimatriisi

$$\mathrm{Var}\{\underline{\mathbf{y}}\} = H\Sigma H^T + R$$

on vektorin $\underline{\mathbf{y}}$ kokoinen. Ja vektorin $\underline{\mathbf{y}}$ koko on yhtä kuin samanaikaisten havaintojen lukumäärä. Tästä syystä Kalmanin suodinta kutsutaan myös *perättäiseksi suotimeksi*, koska se käsittelee havainnot epookki kerrallaan eikä, kuten esimerkiksi perinteinen tasoituslasku, kaikki yhtä aikaa.

3.8 Päivityksen optimaalisuus

Yhtälöt 3.28 ovat *optimaalisia* pienimmän neliösumman merkityksessä. Sen todistaminen onnistuu seuraavasti, vain hieman yksinkertaistaen.

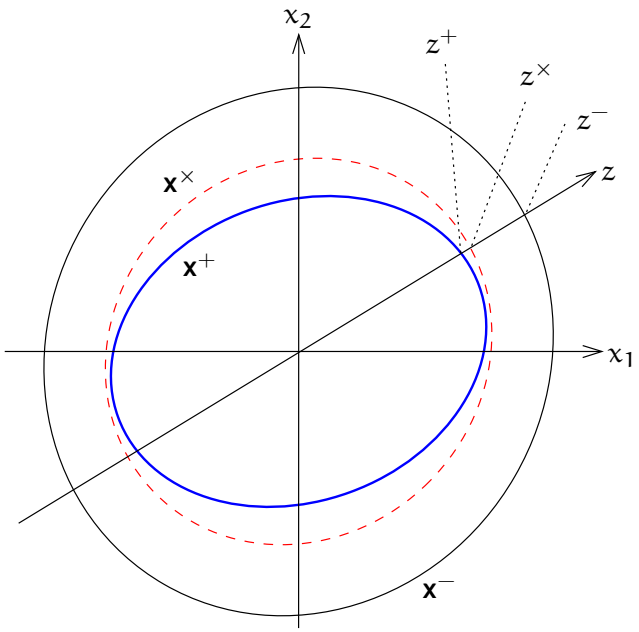
Ensin lasketaan ensimmäisen yhtälön 3.28 avulla:

$$\mathrm{Cov}\{\mathbf{x}^+, \underline{\mathbf{y}}\} = \mathrm{Cov}\{\mathbf{x}^-, \underline{\mathbf{y}}\} - \mathrm{Cov}\{\mathbf{x}^-, \underline{\mathbf{y}}\}\,\mathrm{Var}^{-1}\{\underline{\mathbf{y}}\}\,\mathrm{Var}\{\underline{\mathbf{y}}\} = 0, \tag{3.29}$$

muistamalla, että määritelmän mukaan $\mathrm{Cov}\{\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}}\} = \mathrm{Var}\{\underline{\mathbf{y}}\}$.

Oleta nyt, että löytyy vaihtoehtoinen päivitetty tilavektori $\mathbf{x}^\times$, harhaton estimaattori, joka olisi standardipäivitystä $\mathbf{x}^+$ parempi. Vaikkapa

$$\mathbf{x}^\times = \mathbf{x}^+ + C\underline{\mathbf{y}}$$



KUVA 3.4. Optimaalisen estimaattorin virhe-ellipsi (sininen) on kokonaan muiden estimaattorien — myös päivitystä edeltävän estimaattorin! — virhe-ellipsien sisällä.

jollakin kerroinmatriisilla C. Silloin yhtälön 3.29 ansiosta olisi

$$\operatorname{Var}\{\mathbf{x}^\times\} = \operatorname{Var}\{\mathbf{x}^+\} + C \operatorname{Var}\{\underline{\mathbf{y}}\} C^T.$$

Koska $\operatorname{Var}\{\underline{\mathbf{y}}\}$ on positiivisesti definiitti, on lauseke

$$\operatorname{Var}\{\mathbf{x}^\times\} - \operatorname{Var}\{\mathbf{x}^+\} = C \operatorname{Var}\{\underline{\mathbf{y}}\} C^T$$

positiivisesti semidefiniitti ja

$$\operatorname{Var}\{\mathbf{x}^\times\} - \operatorname{Var}\{\mathbf{x}^+\} = 0$$

vain, jos $C = 0$.

Toisin sanoen mielivaltaisella lineaariyhdistelmällä

$$\underline{z} = \sum_i c_i \underline{x}_i, \qquad z^\times = \sum_i c_i x_i^\times, \qquad z^+ = \sum_i c_i x_i^+,$$

pätee

$$\operatorname{Var}\{z^\times\} - \operatorname{Var}\{z^+\} = \mathbf{c} C \operatorname{Var}\{\underline{\mathbf{y}}\} C^T \mathbf{c}^T$$

jossa $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$. Tämä haviää vain, jos $\mathbf{c}C = 0$, muuten

$$\operatorname{Var}\{z^\times\} - \operatorname{Var}\{z^+\} > 0.$$

Kaksiulotteinen tapaus esitetään graafisesti kuvassa 3.4.

Siis *optimaalisen estimaattorin* $\mathbf{x}^+$ varianssiellipsi — yleisemmin (hyper-)ellipsoidi — on aina *kokonaan* mielivaltaisen vaihtoehtoisen estimaattorin $\mathbf{x}^\times$ varianssiellipsin *sisällä*, tai pahimmillaan koskettaa sitä sisältä. Komponenttien mielivaltaisen lineaariyhdistelmän $\underline{z}$ variansseille pätee sama asia.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä on Kalmanin suotimen tilavektori?
2) Mikä on Kalmanin suotimen dynaaminen malli?
3) Miten dynaaminen malli linearisoidaan?
4) Mikä on tilansiirtomatriisi?
5) Mikä on tilansiirtomatriisin ja lineaarisen dynaamisen mallin kerroinmatriisin F välinen suhde?
6) Mikä on Kalmanin suotimen havaintomalli?
7) Mikä on Kalmanin suotimen päivitysaskel?

Harjoitus 3−1: Yksinkertainen kaksiulotteinen dynaaminen malli

Annettuna on seuraava kaksiulotteinen Gaussin ja Markovin mallin kaltainen dynaaminen malli:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\underline{x}(t)\\ \underline{y}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-k & 1\\ 0 & -k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}(t)\\ \underline{y}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \underline{n}(t)\end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

Tässä $k \in (0,1)$ on pieni vaimennusvakio.

1) Koska matriisi
$$F = \begin{bmatrix}-k & 1\\ 0 & -k\end{bmatrix}$$
on vakio, seuraa, että ehto 3.17 pätee ja tilansiirtomatriisi voidaan kirjoittaa exponenttikehitelmänä. Johda ensin yleinen matriisin F potenssien F^n, $n \in \mathbb{N}$, lauseke tässä eksponenttikehitelmässä.
2) Mikä on F^0? Mikä on F^{-1}?
3) Johda eksponentiaalifunktio $e^{F\Delta t}$ aika-askelin Δt Taylorin sarjakehitelmänä. Kirjoita ensimmäiset neljä termiä auki.

4) Näytä, että yhtälössä esiintyvä tilansiirtomatriisi Φ_i^{i+1} on seuraavan muotoinen:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(t_{i+1}) \\ \underline{y}(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \overbrace{e^{-k\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\Phi_i^{i+1}} \begin{bmatrix} \underline{x}(t_i) \\ \underline{y}(t_i) \end{bmatrix} + \cdots \tag{3.31}$$

Tässä jätettiin kohinatermi pois yksinkertaisuuden vuoksi, ja $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

Vihje *Verifioi*, että yhtälö 3.16:

$$\frac{d}{dt}\Phi_0^t = F(t)\,\Phi_0^t$$

pätee yhtälön 3.31 antamalle tilansiirtomatriisille.

Yksinkertaista merkintätapa sijoituksilla $t_i \to 0$ ja $t_{i+1} \to t$.

Harjoitus 3−2: Dynaamisen kohinan varianssin transitiivinen ominaisuus

Johda transitiivinen ominaisuus samalla tavalla kuin dynaamiselle kohinalle $\underline{\mathbf{w}}_0^t$ alaosiossa 3.5.3:

$$\Theta_0^t = \Phi_{t'}^t\,\Theta_0^{t'}\left(\Phi_{t'}^t\right)^T + \Theta_{t'}^t.$$

Näytä sijoittamalla yhtälö 3.22, että tämä on identtinen yhtälö.

Kalmanin suotimen esimerkkejä ja sovelluksia

4

4.1 Esimerkki 1: yksiulotteinen liike

Tässä esimerkissä fysikaaliset yksiköt jätetään tarkastelun ulkopuolelle. Oletetaan, että matkojen tai koordinaattien yksikkö on metri ja ajan yksikkö on sekunti.

Kysymys Oleta avaruuden yhdessä ulottuvuudessa, että tilavektorin

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix}$$

dynaaminen malli on

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\underline{x} = \underline{n}.$$

Malli on lineaarinen. Muunnetaan se matriisiyhtälöksi, jossa on vain ensimmäisiä derivaattoja ajan suhteen:

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{x}}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{F}\overbrace{\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{v} \end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{x}}} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{n}}}.$$

Tässä $\underline{n}$ on valkoinen kohina, jonka autokovarianssi on $Q_n = 1$. Oleta lisäksi, että alkutilasta hetkellä $t = 0$ on annettu estimaatti

$$\widehat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} \widehat{x}(0) \\ \widehat{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma(0) = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx}(0) & 0 \\ 0 & \Sigma_{vv}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix},$$

toisin sanoen ei ole käyttökelpoista tietoa nopeudesta.

1) Laske tämä tilatieto eteenpäin hetkelle $t = 5$, siis laske

$$\widehat{\mathbf{x}}(5) = \mathbf{x}^-(5),$$
$$\Sigma(5) = \Sigma^-(5).$$

2) Hetkellä $t = 5$ suoritetaan havainto, joka antaa arvon 3:

$$\underline{\ell}' = x^-(5) + \underline{m} = 3.$$

Suure $\underline{m}$ on havainnon satunnainen virhe eli kohina, jonka varianssi on $R = 3$.

(a) Minkä näköinen on matriisi H? Ja matriisi K?

(b) Laske *a posteriori* tila $\mathbf{x}^+(5)$, $\Sigma^+(5)$.

3) Laske vaihtoehtoisesti vastaus käyttäen standardi pienimmän neliösumman tasoitusta. Dynaaminen malli on

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \hat{v}(0) \cdot t,$$

estimoitavissa olevat tuntemattomat ovat $\hat{x}(0)$ ja $\hat{v}(0)$ eli abstrakti vektori $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}(0) & \hat{v}(0) \end{bmatrix}^T$, ja havaintoyhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \underline{\ell}_1 + \underline{v}_1 &= \hat{x}(0), \\ \underline{\ell}_2 + \underline{v}_2 &= \hat{x}(5). \end{aligned}$$

Havaintojen vektori ja sen varianssimatriisi ovat

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx}(0) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Vastaus

1) $\hat{x}(5) = \hat{x}(0) + \hat{v}(0) \cdot 5 = 4$. Koska kerroinmatriisi

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

saadaan tilansiirtomatriisi muodossa

$$\begin{aligned} \Phi_0^5 = e^{F\Delta t} &= \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= I + \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \cdots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

koska

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n = 0, \quad n > 1.$$

Nyt yhtälöiden 3.13 ja 3.15 avulla

$$\Sigma^-(5) = \Sigma(5) =$$

$$= \Phi_0^5 \, \Sigma(0) \left(\Phi_0^5\right)^T + \overbrace{\int_0^5 \Phi_t^5 \, Q_n(t) \left(\Phi_t^5\right)^T dt}^{\Theta_0^5} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_0^5 \begin{bmatrix} 1 & 5-t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5-t & 1 \end{bmatrix} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} 25\,002 & 5000 \\ 5000 & 1000 \end{bmatrix} + \int_0^5 \begin{bmatrix} (5-t)^2 & 5-t \\ 5-t & 1 \end{bmatrix} dt = {}^{1}$$

$$= \begin{bmatrix} 25\,002 & 5000 \\ 5000 & 1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(5-t)^3 & -\frac{1}{2}(5-t)^2 \\ -\frac{1}{2}(5-t)^2 & t \end{bmatrix}_0^5 =$$

$$= \begin{bmatrix} 25\,002 & 5000 \\ 5000 & 1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{125}{3} & \frac{25}{2} \\ \frac{25}{2} & 5 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 25\,043{,}7 & 5012{,}5 \\ 5012{,}5 & 1005{,}0 \end{bmatrix}.$$

(Esitetyt luvut on pyöristetty laskelmassa käytetyistä tarkoista arvoista.)

2) Matriisi $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Siis[2] [2]

$$H\Sigma^- H^T + R = 25\,043{,}7 + 3 = 25\,046{,}7.$$

[1] Vaihtoehtoisesti kehitys polynomeihin:

$$\int_0^5 \begin{bmatrix} (5-t)^2 & 5-t \\ 5-t & 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^5 \begin{bmatrix} 25-10t+t^2 & 5-t \\ 5-t & 1 \end{bmatrix} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} 25t - 5t^2 + \frac{1}{3}t^3 & 5t - \frac{1}{2}t^2 \\ 5t - \frac{1}{2}t^2 & t \end{bmatrix}_0^5 =$$

$$= \begin{bmatrix} 125 - 125 + \frac{1}{3}\cdot 125 & 25 - \frac{1}{2}\cdot 25 \\ 25 - \frac{1}{2}\cdot 25 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{125}{3} & \frac{25}{2} \\ \frac{25}{2} & 5 \end{bmatrix}.$$

[2] Merkintätapa: $\Sigma^- = \Sigma(5)$ on *a priori* tilan varianssimatriisi, juuri ennen havainnon tekoa ajan hetkellä $t = 5$.

Matriisi K on

$$K = \Sigma^- H^T \left(H\Sigma^- H^T + R\right)^{-1} = \\ = \begin{bmatrix} 25\,043{,}7 \\ 5012{,}5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{25\,046{,}7} = \begin{bmatrix} 0{,}999\,88 \\ 0{,}200\,13 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi lasketaan nollasuure eli ”sulkuvirhe”

$$\underline{y} = H\mathbf{x}^-(5) - \underline{\ell}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 = 1.$$

Seuraa

$$\mathbf{x}^+(5) = \mathbf{x}^-(5) - K\underline{y} = \\ = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}999\,88 \\ 0{,}200\,13 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 3{,}000\,12 \\ -0{,}200\,13 \end{bmatrix}.$$

Projisoidaan tämä takaisin hetkelle $t = 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{x}(0) &= x^+(5) - v^+(5) \cdot 5 = \\ &= 3{,}000\,12 - (-0{,}200\,13) \cdot 5 = 4{,}000\,77, \\ \widehat{v}(0) &= v^+(5) = -0{,}200\,13. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Päivitetty tilan varianssimatriisi $\Sigma^+(5)$ on

$$\Sigma^+(5) = (I - KH)\,\Sigma^-(5) = \\ = \left(I - \begin{bmatrix} 0{,}999\,88 \\ 0{,}200\,13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 25\,043{,}7 & 5012{,}5 \\ 5012{,}5 & 1005{,}0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 2{,}999\,64 & 0{,}600\,38 \\ 0{,}600\,38 & 1{,}866\,27 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

3) Koska

$$\begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{x}(0) \\ \widehat{x}(5) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \widehat{x}(0) \\ \widehat{x}(0) + 5 \cdot \widehat{v}(0) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} \widehat{x}(0) \\ \widehat{v}(0) \end{bmatrix}}^{\widehat{\mathbf{x}}},$$

rakennematriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

ja havaintojen vektori $\underline{\ell}$ ja havaintojen varianssimatriisi S on annettu, yhtälöt 4.1. Saadaan ratkaisu

$$A^T S^{-1} A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 50 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(A^T S^{-1} A\right)^{-1} A^T S^{-1} \underline{\ell} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tämä on käytännössä sama tulos kuin kohdassa 2 yhtälöt 4.2. Ratkaisun varianssi on

$$\mathrm{Var}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \left(A^T S^{-1} A\right)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

jota ei voi suoraan verrata aikaisempaan tulokseen 4.3, koska tämän tuloksen ajanhetki eli epookki on $t = 0$. Tämän lisäksi Kalmanin ratkaisu sisältää dynaamisen kohinan vaikutuksen Q_n, jota ei perinteisessä pienimmän neliösumman menetelmässä oteta huomioon.

4.2 Esimerkki 2: pyörivä pyörä

Kysymys Teollisuuskoneessa pyörii pyörä, jonka säde on r. Pyörä pyörii kulmanopeudella $\omega(t)$, jossa t on aika. Hetkellinen kulmanopeus vaihtelee satunnaisesti: kulmakiihtyvyydellä on "valkoisen kohinan" ominaisuudet. oomega ωΩ

1) Kirjoita tämän järjestelmän tilavektori. Montako alkiota tarvitaan?
2) Kirjoita järjestelmän dynaaminen malli.
3) Pyörän reunaan kiinnitetään heijastusprisma mittauksia varten. Pyörähdysliikettä seurataan laseretäisyysmittauksen avulla. Mittauslaite on kaukana koneesta pyörän tasossa.
   Kirjoita havaintomalli.
4) Linearisoi havaintomalli.
5) Millä tavalla dynaaminen malli muuttuu linearisoinnin seurauksena?

Vastaus

1) Tämän järjestelmän tilavektori sisältää paikkakulman $\alpha(t)$. Kuitenkin on annettuna, että *kulmakiihtyvyys* $\frac{d}{dt}\omega(t)$ on alfa αA

luonteeltaan valkoista kohinaa. Tästä syystä on viisasta sisällyttää myös kulmanopeus tilavektoriin.

Näin saadaan tilavektoriksi

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}.$$

2) Kalmanin suotimessa dynaaminen malli on yhtälöryhmä, joka on muotoa

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}}(t) = F\big(\underline{\mathbf{x}}(t), t\big) + \underline{\mathbf{n}},$$

jossa $\underline{\mathbf{x}}$ on järjestelmän tilavektori ja $\underline{\mathbf{n}}$ on dynaaminen kohinavektori.

Tilavektori on yllä annettu. Kirjoitetaan

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_\omega \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

jossa ensimmäinen yhtälö, $\frac{d}{dt}\underline{\alpha} = \underline{\omega}$, ilmaisee kulmanopeuden ω määritelmän ja toinen yhtälö, $\frac{d}{dt}\underline{\omega} = \underline{n}_\omega$, ilmaisee sen, että kulmakiihtyvyydellä on valkoisen kohinan ominaisuudet.

Havaitsemme, että löytynyt dynaaminen malli on *lineaarinen*:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_\omega \end{bmatrix}.$$

3) Jos etäisyys pyörän reunaan kiinnitettyyn prismaan havaitaan kaukaa, havaintoyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\underline{s} = d + r\cos\underline{\alpha} + \underline{m}. \tag{4.5}$$

Kulma α lasketaan prisman sijainnista, joka on kauimpana havaintolaitteesta. Oletetaan d, etäisyys laitteen ja pyörän akselin välillä, tunnetuksi. Ellei se ole, se on lisättävä tilavektoriin dynaamisella lisäyhtälöllä $\frac{d}{dt}\underline{d} = 0$.

4) Tämä malli on epälineaarinen: havaintosuureen riippuvuus tilavektorista on kosini.

Linearisoidaan seuraavalla tavalla: määrittele keskenään yhteensopivia likiarvoja, joilla

$$s^{(0)} = d + r\cos\alpha^{(0)},$$

ja vähennä tämä yhtälöstä 4.5. Tulos on Taylorin sarjakehitelmä katkaistuna ensimmäisen eli lineaarisen $\Delta\alpha$-termin jälkeen:

$$\Delta\underline{s} = r\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\cos\alpha\Big|_{\alpha=\alpha^{(0)}} \cdot \Delta\underline{\alpha} + \underline{m}.$$

Tässä on sovellettu loogisia määritelmiä $\Delta\underline{s} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{s} - s^{(0)}$ ja $\Delta\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\alpha} - \alpha^{(0)}$.

Osittaisdifferentiointi antaa

$$\underbrace{\Delta\underline{s}}_{\underline{\ell}} = -r\sin\alpha^{(0)}\,\Delta\underline{\alpha} + \underline{m} = \overbrace{\begin{bmatrix} -r\sin\alpha^{(0)} & 0 \end{bmatrix}}^{H} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\underline{\alpha} \\ \Delta\underline{\omega} \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} + \overbrace{\underline{m}}^{\mathbf{m}},$$

lineaarinen Kalmanin havaintoyhtälö tyyppi

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} = H\mathbf{x} + \mathbf{m},$$

jos kirjoitetaan muodollisesti

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} = \begin{bmatrix} \Delta\underline{s} \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} -r\sin\alpha^{(0)} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta\underline{\alpha} \\ \Delta\underline{\omega} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \underline{m} \end{bmatrix}.$$

5) Yhteensopiva likitilavektorin dynaaminen malli on

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{(0)} \\ \underline{\omega}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\omega}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix},$$

jonka vähennys dynaamisesta mallista 4.4 antaa

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Delta\underline{\alpha} \\ \Delta\underline{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\underline{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\underline{\alpha} \\ \Delta\underline{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n}_\omega \end{bmatrix},$$

jossa $\Delta\omega \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\omega} - \omega^{(0)}$. Tämä on *linearisoitu* dynaaminen malli, jossa tilavektori nyt koostuu deltasuureista.

4.3 Esimerkki 3: laskuvarjohyppääjä

Kysymys

1) Kirjoita laskuvarjohyppääjän dynaamiset yhtälöt yhdessä ulottuvuudessa: ainoa koordinaatti on korkeus z. Painovoimakiihtyvyys g on vakio. Ilmanvastuksen aiheuttama jarrutuskiihtyvyys on verrannollinen putoamisnopeuteen ja ilman tiheyteen ρ, jonka yhtälöksi saa kirjoittaa

rhoo ρR

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

Vakio H on ilmakehän skaalakorkeus ja ρ_0 on ilman tiheys merenpinnalla.

2) Hyppääjään kiinnitetään heijastintarra mittauksia varten. Maassa oleva takymetri mittaa etäisyyttä tähän heijastimeen. Vaakaetäisyys takymetrin ja laskeutumispaikan välillä on annettu. Hyppääjä tulee suoraan alas, tuulta ei ole.
Kirjoita havaintomalli.

Vastaus

1) Dynaaminen malli on, kun k on ilmanvastuksen vakio:

$$\frac{d^2}{dt^2}\underline{z} = -g - k\rho\,\dot{\underline{z}} + \underline{n} = -g - k\rho_0 \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right)\dot{\underline{z}} + \underline{n}.$$

Määritellään tilavektoriksi $\begin{bmatrix} \underline{z} & \dot{\underline{z}} \end{bmatrix}^T$, jolloin saadaan dynaamiseksi malliksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \underline{z} \\ \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{z}} \\ -g - k\rho_0\,\dot{\underline{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Tämä yhtälö on epälineaarinen. Kirjoita

$$\begin{bmatrix} \underline{z} \\ \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{(0)} \\ \dot{z}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\underline{z} \\ \Delta\dot{\underline{z}} \end{bmatrix},$$

jossa

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z^{(0)} \\ \dot{z}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}^{(0)} \\ -g - k\rho_0\,\dot{z}^{(0)} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Tämä yhtälö voidaan integroida, jos alkuehdot on annettu, esimerkiksi $z^{(0)}(t_0) = h, \dot{z}^{(0)}(t_0) = 0$, jossa h on lentokoneen nimelliskorkeus.

Vähennetään yhtälö 4.7 yhtälöstä 4.6:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \underline{z} - z^{(0)} \\ \dot{\underline{z}} - \dot{z}^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\underline{z}} - \dot{z}^{(0)} \\ -k\rho_0 \left(\dot{\underline{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) - \dot{z}^{(0)} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Delta\underline{z} \\ \Delta\dot{\underline{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{\underline{z}} \\ -k\rho_0 \, \Delta\left(\dot{\underline{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix},$$

jossa $\Delta\underline{z} = \underline{z} - z^{(0)}$, $\Delta\dot{\underline{z}} = \dot{\underline{z}} - \dot{z}^{(0)}$ ja (linearisointi)

$$\Delta\left(\dot{\underline{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) \right) = \dot{\underline{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) - \dot{z}^{(0)} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) =$$

$$= \dot{\underline{z}} \exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) - \dot{\underline{z}} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) +$$

$$+ \dot{\underline{z}} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) - \dot{z}^{(0)} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) =$$

$$= \dot{\underline{z}} \cdot \Delta\left(\exp\left(-\frac{\underline{z}}{H}\right) \right) + \Delta\dot{\underline{z}} \cdot \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \approx$$

$$\approx \dot{z}^{(0)} \left(-\frac{1}{H} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \Delta\underline{z} \right) + \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \Delta\dot{\underline{z}} =$$

$$= \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right) \left(\Delta\dot{\underline{z}} - \frac{\dot{z}^{(0)}}{H} \Delta\underline{z} \right).$$

Lyhennetään

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\frac{z^{(0)}}{H}\right).$$

Sijoitus antaa silloin

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\underline{z} \\ \Delta\dot{\underline{z}} \end{bmatrix}}^{\underline{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\dot{\underline{z}} \\ -k\rho_0 Z \left(\Delta\dot{\underline{z}} - \frac{\dot{z}^{(0)}}{H} \Delta\underline{z} \right) \end{bmatrix}}^{F(\underline{x},t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}}^{\underline{n}} =$$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k\rho_0 \frac{\dot{z}^{(0)}}{H} Z & -k\rho_0 Z \end{bmatrix}}^{F(t)} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\underline{z} \\ \Delta\dot{\underline{z}} \end{bmatrix}}^{\underline{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{n} \end{bmatrix}.$$

Tämä on linearisoitu dynaaminen malli.

2) Olkoon vaakaetäisyys laskuvarjohyppääjän laskeutumispaikan ja takymetrin välillä r. Silloin mitattu etäisyys on

$$s = \sqrt{r^2 + z^2}$$

ja havaintoyhtälö

$$\underline{s} = \sqrt{r^2 + \underline{z}^2} + \underline{m}.$$

Linearisointi — $s = s_0 + \Delta s$, jossa $s_0 = \sqrt{r^2 + z_0^2}$ — antaa käyttäen

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial (z^2)}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial (z^2)} \sqrt{r^2 + (z^2)} = 2z \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z^2)}} = \frac{z}{s}$$

linearisoidun havaintoyhtälön

$$\overbrace{\Delta \underline{s}}^{\ell} = \frac{z_0}{s_0} \Delta \underline{z} + \underline{m} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{z_0}{s_0} & 0 \end{bmatrix}}^{H} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \underline{z} \\ \Delta \dot{\underline{z}} \end{bmatrix}}^{x} + \overbrace{\underline{m}}^{m}.$$

4.4 Realistisen tilastollisen käyttäytymisen mallintaminen

Värillistä kohinaa, tarkemmin Gaussin ja Markovin prosesseja, käytetään usein tosielämän stokastisten prosessien mallinnuksessa.

Saatamme esimerkiksi tietää, että mitattu stokastinen prosessi koostuu kahdesta osasta. Toinen osa on *signaali* $\underline{s}$, josta olemme kiinnostuneita ja
tau τT joka vaihtelee nopeasti aikaskaalalla τ_s. Tiedämme, että tämän signaalin odotusarvo on nolla. Toinen on systemaattinen häiriö eli *harha* $\underline{b}$, josta haluamme päästä eroon. Tiedämme myös, että tämä häiriö vaihtelee hitaasti aikaskaalalla, jota luonnehtii vakio τ_b.

Tilavektori voidaan kirjoittaa muotoon $\begin{bmatrix} \underline{s} & \underline{b} \end{bmatrix}^T$ ja dynaaminen malliyhtälö muotoon

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_s & 0 \\ 0 & -1/\tau_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \underline{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{n}_s \\ \underline{n}_b \end{bmatrix}.$$

Tässä τ_b on hitaasti vaihtelevan häiriöprosessin pitkä aikavakio. Aikavakioksi τ_s saa valita paljon lyhyemmän arvon. Se on kuitenkin valittava realistisesti. Jos havainnot saadaan aikavälillä Δt, on oltava $\tau_s \gtrapprox 2\,\Delta t$, jotta prosessi $\underline{s}$ olisi realistisesti määritettävissä havainnoista.

Havaintoyhtälö on

$$\underline{\ell} = \underline{s} + \underline{b} + \underline{m},$$

jossa $\underline{m}$ ja sen varianssi R edustavat havainnon kohinaa eli epävarmuutta. Jos havainnot tehdään riittävän tiheästi, voidaan saada erikseen estimaatteja sekä signaaliprosessista $\underline{s}$ että hitaasti muuttuvasta harhasta $\underline{b}$. Jotta tämä toimisi, on prosesseille $\underline{n}_s$ ja $\underline{n}_b$ liitettävä realistisia autokovarianssiarvoja. Lisäksi vaaditaan, että $E\{\underline{s}\} = 0$. Ellei ole, prosessin $\underline{s}$ systemaattinen osa joutuu suotimen tuottaman estimaattorin $\widehat{b}$ osaksi.

Tässä tapahtuu *spektraalisuodatus* Kalmanin suotimen avulla. Matalan taajuuden osa, nollataajuus mukaan lukien, menee estimaattoriin $\widehat{b}$, ja korkean taajuuden osa menee estimaattoriin $\widehat{s}$. Spektraalialueiden välinen raja ei ole terävä.

Jokseenkin päinvastainen tilanne syntyy, jos mittauksen kohteena on stokastinen prosessi, joka koostuu nopeasti vaihtelevasta kohinaosasta ja hitaasti muuttuvasta signaalista. Oleta, että kohina ei ole valkoinen vaan "värillinen". Kutsu sitä nimellä $\underline{c}$. Sillä on korrelaatiopituus τ_c. Jos olemme kiinnostuneita vain signaalin $\underline{s}$ matalampien taajuuksien osuuksista, voimme käyttää Kalmanin suodinta:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\underline{s}\\ \underline{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/\tau_s & 0\\ 0 & -1/\tau_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{s}\\ \underline{c}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{n}_s\\ \underline{n}_c\end{bmatrix}.$$

Valitaan τ_s sen mukaan, mistä signaalin $\underline{s}$ spektrin osasta olemme kiinnostuneita — mutta aina $\tau_s > \tau_c$. Aikavakio τ_c on valittava realistisesti, niin että se vastaanottaa ja poistaa mahdollisimman paljon prosessin oikeasta kohinasta. Havaintoyhtälö on taas

$$\underline{\ell} = \underline{s} + \underline{c} + \underline{m}.$$

Aiemmin kuvattua tekniikkaa, jolla erotetaan nopeasti vaihteleva signaali hitaasti muuttuvasta taustasystematiikasta, käytettiin Kuun pinnan alaisten massakeskittymien eli "*masconien*" signaalien erottamiseksi Lunar Orbiter -satelliittien dopplersiirtymän seurantadatasta (Tapley ja Schutz, 1975). Tekniikan nimi on *dynamic model compensation*.

4.5 Kalmanin suodin perättäisenä tasoituksena

Kalmanin suotimen päivitysaskel voidaan kirjoittaa parametrisena tasoitustehtävänä.

"Havainnot" ovat päivityksen todellinen havaintovektori $\underline{\ell}'$ ja *a priori* estimoitu päivityshetken t tilavektori $\mathbf{x}^-(t)$.

Parametriset havaintoyhtälöt ovat standardimuodossa

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\ell}' \\ \mathbf{x}^-(t) \end{bmatrix}}^{\underline{\ell}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{v}' \\ \underline{v}'' \end{bmatrix}}^{\underline{v}} = \overbrace{\begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^+(t) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{x}}}.$$

Rakennematriisin nähdään olevan

$$A = \begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix}.$$

"Havaintojen" varianssimatriisi on

$$S = \mathrm{Var}\left\{ \begin{bmatrix} \underline{\ell}' \\ \mathbf{x}^- \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \Sigma^- \end{bmatrix},$$

ja *a posteriori* tilavektorin ratkaisu on

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \left(A^T S^{-1} A\right)^{-1} A^T S^{-1} \underline{\ell} = \\ &= \left(H^T R^{-1} H + (\Sigma^-)^{-1}\right)^{-1} \left(H^T R^{-1} \underline{\ell}' + (\Sigma^-)^{-1} \mathbf{x}^-\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

A posteriori tilavarianssi on

$$\Sigma^+ = \left(H^T R^{-1} H + (\Sigma^-)^{-1}\right)^{-1}. \tag{4.9}$$

Katso Kallio (1998), sivut 63–64.

Nyt käytetään liitteessä C johdettua Woodburyn yhtälöä,

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U \left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1} VA^{-1}, \tag{C.5}$$

seuraavalla tavalla:

$$\left(H^T R^{-1} H + (\Sigma^-)^{-1}\right)^{-1} = \Sigma^- - \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} H\Sigma^-. \tag{4.10}$$

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \left(\Sigma^- - \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} H\Sigma^-\right) \left(H^T R^{-1} \underline{\ell}' + (\Sigma^-)^{-1} \mathbf{x}^-\right) = \\ &= \Sigma^- H^T R^{-1} \underline{\ell}' + \mathbf{x}^- - \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} H \left(\Sigma^- H^T R^{-1} \underline{\ell}' + \mathbf{x}^-\right) = \\ &= \mathbf{x}^- + \Sigma^- H^T R^{-1} \underline{\ell}' \overbrace{- \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} H\Sigma^- H^T R^{-1} \underline{\ell}'}^{\mathrm{I}} - \\ &\qquad - \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} H\mathbf{x}^-, \end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned} I &= -\Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} H\Sigma^- H^T R^{-1} \underline{\ell}' = \\ &= -\Sigma^- H^T \cancel{\left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} \left(R + H\Sigma^- H^T\right)} R^{-1} \underline{\ell}' + \\ &\quad + \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} \cancel{R \cdot R^{-1}} \underline{\ell}' = \\ &= -\Sigma^- H^T R^{-1} \underline{\ell}' + \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} \underline{\ell}', \end{aligned}$$

antaen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \mathbf{x}^- + \cancel{\Sigma^- H^T R^{-1} \underline{\ell}' - \Sigma^- H^T R^{-1} \underline{\ell}'} + \\ &\quad + \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} \underline{\ell}' - \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} H\mathbf{x}^- = \\ &= \mathbf{x}^- - \Sigma^- H^T \left(H\Sigma^- H^T + R\right)^{-1} \left(H\mathbf{x}^- - \underline{\ell}'\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tämän lisäksi yhtälöistä 4.9 ja 4.10 saadaan

$$\Sigma^+ = \Sigma^- - \Sigma^- H^T \left(R + H\Sigma^- H^T\right)^{-1} H\Sigma^-. \quad (4.12)$$

Yhtälöt 4.11 ja 4.12 ovat Kalmanin suotimen päivitysyhtälöt. Verrattuna yhtälöihin 4.8 ja 4.9 käännettävä matriisi on havaintosuureiden vektorin $\underline{\ell}'$ eikä tilavektorin $\underline{\mathbf{x}}$ kokoinen. Usein matriisin koko on jopa 1×1 eli se on pelkkä luku[3]. Nopea käänteismatriisien laskeminen helpottaa tosiaikaisia sovelluksia.

Edellisestä näkyy, että perättäinen tasoitus on sama kuin Kalmanin suodatus silloin, kun tilavektori on vakio ajassa. Tasoituksessa laskentamenetelmä on yleensä parametrinen, ja tasoituksessa käytetään havaintoyhtälöitä. Sen sijaan Kalmanin suotimen tapauksessa käytetään ehtoyhtälötasoitusta.

4.6 Kalmanin suotimen käyttö "kahdesta päästä"

Ilmagravimetriassa, luku 12, Kalmanin suodinta voidaan käyttää havaintojen käsittelemiseen "lennossa", sitä mukaa kun niitä kerätään. Yleensä halutaan kuitenkin käyttää jälkikäsittelyä, jotta raakahavainnoista saadaan mahdollisimman hyviä tuloksa irti. Tätä varten on tarjolla pienimmän neliösumman kollokaation tapaisia eräkäsittelyn menetelmiä.

[3] . . . tai se on pelkistettävissä sellaiseksi, jos yhden epookin havainnot ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan. Silloin ne voidaan käsitellä muodollisesti peräkkäin eli erikseen.

Myös Kalmanin suodin voidaan valjastaa tähän. Havainnot käsitellään sekä eteen- että taaksepäin ajassa, ja sen jälkeen yhdistetään optimaalisesti molempien tulokset. Tämä voi olla eräkäsittelyn esivaihe. Tätä lähestymistapaa kuvataan seuraavaksi.

4.6.1 Havaintoyhtälöt ja normaaliyhtälöt

Jos käytettävissä ovat havainnot $\underline{\ell}_k$, $k = 1, \ldots, n$ ja dynaaminen malli on differentiaaliyhtälöryhmä

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = F(t)\,\mathbf{x}(t) \tag{4.13}$$

— tässä kirjoitettuna ei-stokastisena eli ilman dynaamista kohinaa $\underline{\mathbf{n}}$ — voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{x}(t_k) = \Phi_0^k\,\mathbf{x}(t_0),$$

fii φϕΦ jossa Φ_0^k on tilansiirtomatriisi, joka voidaan laskea. Näin havaintoyhtälöt voidaan kirjoittaa standardimuotoon

$$\underline{\ell}_k + \underline{v}_k = H_k\,\widehat{\mathbf{x}}(t_k) = H_k\Phi_0^k\,\widehat{\mathbf{x}}(t_0), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

perinteinen havaintoyhtälöryhmä

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} + \underline{\mathbf{v}} = A\widehat{\mathbf{X}},$$

jossa rakennematriisi sekä havaintojen, jäännösvirheiden ja tuntemattomien vektorit ovat

$$A = \begin{bmatrix} H_1\Phi_0^1 \\ \vdots \\ H_k\Phi_0^k \\ \vdots \\ H_n\Phi_0^n \end{bmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\ell}} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \vdots \\ \underline{\ell}_k \\ \vdots \\ \underline{\ell}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_k \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}(t_0) \end{bmatrix}.$$

Tästä näkyy, että pienimmän neliösumman ratkaisu voidaan saada ratkaisemalla tasoitustehtävä.

Voimme jakaa havainnot kahteen osaan, ”ennen” (”$<$”) tiettyä ajanhetkeä ja sen ”jälkeen” (”$>$”). Silloin havaintojen vektori, sen varianssimatriisi ja havaintoyhtälöiden rakennematriisi ovat

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\ell}} \\ < \\ \underline{\boldsymbol{\ell}} \\ > \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} S & 0 \\ < & \\ 0 & S \\ & > \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A \\ < \\ A \\ > \end{bmatrix}.$$

Näin muodostuvat erilliset normaaliyhtälöt:

$$\left(\underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{A}\right) \underset{<}{\hat{\mathbf{x}}} = \underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{\underline{\ell}}, \qquad \left(\underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{A}\right) \underset{>}{\hat{\mathbf{x}}} = \underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{\underline{\ell}},$$

ratkaisuilla

$$\underset{<}{\hat{\mathbf{x}}} = \left(\underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{A}\right)^{-1} \underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{\underline{\ell}}, \qquad \underset{>}{\hat{\mathbf{x}}} = \left(\underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{A}\right)^{-1} \underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{\underline{\ell}},$$

ja ratkaisujen varianssit erikseen

$$\underset{<}{\Sigma} = \left(\underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{A}\right)^{-1}, \qquad \underset{>}{\Sigma} = \left(\underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{A}\right)^{-1}.$$

Toisaalta *kokonaistasoituksen* normaaliyhtälö on

$$A^T S^{-1} A \, \hat{\mathbf{x}} = A^T S^{-1} \underline{\ell}.$$

Oletamme havainnot $\underset{<}{\underline{\ell}}$ ja $\underset{>}{\underline{\ell}}$ tilastollisesti riippumattomiksi. Siksi S on ositettu lävistäjämatriisi ja saamme hajottaa normaaliyhtälön seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} \underset{<}{A}^T & \underset{>}{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{<}{S} & 0 \\ 0 & \underset{>}{S} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underset{<}{A} \\ \underset{>}{A} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underset{<}{A}^T & \underset{>}{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{<}{S} & 0 \\ 0 & \underset{>}{S} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underset{<}{\underline{\ell}} \\ \underset{>}{\underline{\ell}} \end{bmatrix}$$

eli

$$\left(\underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{A} + \underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{A}\right) \hat{\mathbf{x}} = \underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{\underline{\ell}} + \underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{\underline{\ell}}.$$

Määritetään *painomatriisit*

$$\underset{<}{P} \overset{\text{def}}{=} \underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{A}, \qquad \underset{>}{P} \overset{\text{def}}{=} \underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{A}, \tag{4.14}$$

ja normaaliyhtälöstä tulee

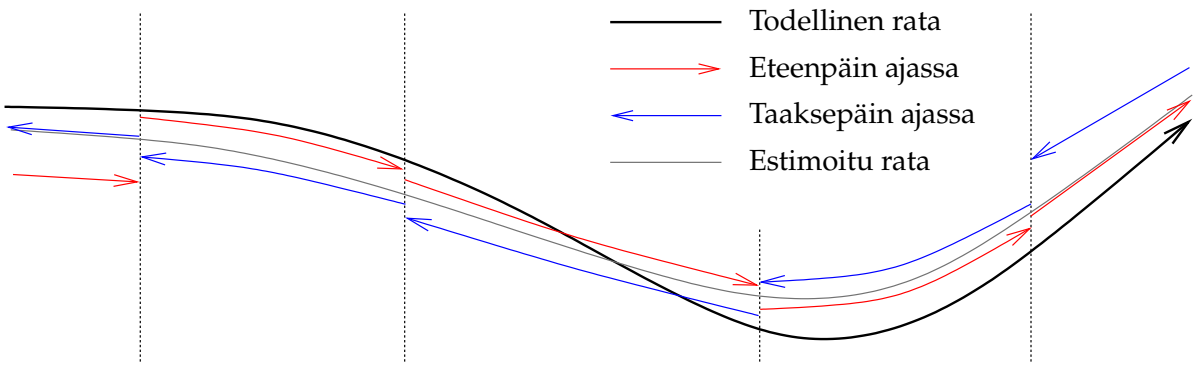
$$\left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right) \hat{\mathbf{x}} = \underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{\underline{\ell}} + \underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{\underline{\ell}}.$$

Ratkaisu on

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1} \left(\underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{\underline{\ell}} + \underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{\underline{\ell}}\right) =$$

$$= \left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1} \left(\underset{<}{P} \underbrace{\left(\overbrace{\underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{A}}^{\underset{<}{P}}\right)^{-1} \underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{\underline{\ell}}}_{\underset{<}{\hat{\mathbf{x}}}} + \underset{>}{P} \underbrace{\left(\overbrace{\underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{A}}^{\underset{>}{P}}\right)^{-1} \underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{\underline{\ell}}}_{\underset{>}{\hat{\mathbf{x}}}} \right) =$$

$$= \left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1} \left(\underset{<}{P} \underset{<}{\hat{\mathbf{x}}} + \underset{>}{P} \underset{>}{\hat{\mathbf{x}}}\right),$$



KUVA 4.1. Kalmanin suodin käytettynä ajassa eteen- ja taaksepäin.

ja

$$\Sigma = \left(\underset{<}{A}^T \underset{<}{S}^{-1} \underset{<}{A} + \underset{>}{A}^T \underset{>}{S}^{-1} \underset{>}{A}\right)^{-1} = \left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1} = \left(\underset{<}{\Sigma}^{-1} + \underset{>}{\Sigma}^{-1}\right)^{-1}$$

on kokonaistasoituksen ratkaisun varianssimatriisi.

Tämä näyttää, että erillisratkaisut ”<” ja ”>” voidaan ”pinota” eli yhdistää kokonaisratkaisuksi:

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1} \left(\underset{< <}{P}\,\underset{<}{\hat{\mathbf{x}}} + \underset{> >}{P}\,\underset{>}{\hat{\mathbf{x}}}\right), \qquad \Sigma = \left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1}, \tag{4.15}$$

joka on toisin sanoen osaratkaisujen *painotettu keskiarvo*.

4.6.2 *Kalmanin suodin eteen- ja taaksepäin*

Tärkeä tässä on, että osittaiset tehtävät — ”ennen” (”<”) ja ”jälkeen” (”>”) — voidaan ratkaista myös Kalmanin suotimen avulla! Eli voimme kaikille ajoille $t \in [t_0, t_n]$ laskea erikseen

1) Kalmanin suotimen ratkaisun alkuhetkestä t_0 eteenpäin integroimalla dynaamista mallia ja päivittämällä tilavektoria ja sen varianssimatriisia käyttäen havaintoja $\underline{\ell}_1, \ldots, \underline{\ell}_k, \ldots, \underline{\ell}_n$.
2) Kalmanin suotimen ratkaisun loppuhetkestä t_n taaksepäin ajassa integroimalla dynaamista mallia ja päivittämällä tilavektoria ja varianssimatriisia käyttäen havaintoja $\underline{\ell}_n, \ldots, \underline{\ell}_k, \ldots, \underline{\ell}_1$ käänteisessä järjestyksessä. Kalmanin suotimen yhtälö tähän on yhtälön 4.13 perusteella
$$\frac{d}{dt'}\mathbf{x}'(t') = F'(t')\,\mathbf{x}'(t'),$$
jossa $t' = -t$, $\mathbf{x}'(t') = \mathbf{x}(t)$ ja $F'(t') = -F(t)$.
3) Kokonaisratkaisu syntyy yhdistämällä saadut osaratkaisut yllä olevien yhtälöiden 4.15 ja 4.14 avulla.

Näin voidaan hyödyntää Kalmanin menetelmän edut myös jälkilaskennassa. Ja huomaa, että yllä olevassa menetelmän johtamisessa käytetty yhtälö 4.13 ei sisällä dynaamista kohinaa $\underline{\mathbf{n}}$. Todellisuudessa tätä rajoitusta ei ole: Kalmanin suotimen malliin *on* mahdollista sisällyttää dynaamista kohinaa. Integroidaan vain eteen- ja taaksepäin, lasketaan eteen- ja taaksetulosten painotettu keskiarvo koko aikavälillä ja saadaan kokonaisratkaisu. Tämä on merkittävä etu eräajoon verrattuna.

4.6.3 Esimerkki 4: satunnaiskulku kahteen suuntaan

Satunnaiskulkua kuvaa yhtälö

$$\frac{d}{dt}\underline{w}(t) = \underline{n}(t), \tag{2.25}$$

ja sen autokovarianssi on

$$A_{w,0}(t,t) = Q_n \cdot (t - t_0)\,. \tag{2.26}$$

Satunnaiskulkua havaitaan kahdella ajan hetkellä t_1 ja t_2. Havaintoarvot ovat

$$\underline{\ell}_1 = \underline{w}(t_1), \qquad \underline{\ell}_2 = \underline{w}(t_2),$$

ja molemmat oletetaan virheettömiksi.

Silloin välillä (t_1, t_2) eteenpäin-ratkaisu on

$$\underset{<}{\widehat{w}}(t) = \underline{\ell}_1, \qquad \underset{<}{\Sigma}(t) = Q_n \cdot (t - t_1)\,, \tag{4.16}$$

ja taaksepäin-ratkaisu

$$\underset{>}{\widehat{w}}(t) = \underline{\ell}_2, \qquad \underset{>}{\Sigma}(t) = Q_n \cdot (t_2 - t)\,. \tag{4.17}$$

Lasketaan eteen- ja taakse- ratkaisujen painotettu keskiarvo. Lähdetään yhtälöstä 4.15:

$$\widehat{\mathbf{X}} = \left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1}\left(\underset{<}{P}\,\underset{<}{\widehat{\mathbf{X}}} + \underset{>}{P}\,\underset{>}{\widehat{\mathbf{X}}}\right) = \left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1}\underset{<}{P}\,\underset{<}{\widehat{\mathbf{X}}} + \left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1}\underset{>}{P}\,\underset{>}{\widehat{\mathbf{X}}}.$$

Kirjoita kertoimet uudelleen:

$$\left(\underset{<}{P} + \underset{>}{P}\right)^{-1}\underset{<}{P} = \left(\underset{<}{\Sigma}^{-1} + \underset{>}{\Sigma}^{-1}\right)^{-1}\underset{<}{\Sigma}^{-1} =$$
$$= \left(\underset{<}{\Sigma}\left(\underset{<}{\Sigma}^{-1} + \underset{>}{\Sigma}^{-1}\right)\right)^{-1} = \left(I + \underset{<}{\Sigma}\,\underset{>}{\Sigma}^{-1}\right)^{-1} = \underset{>}{\Sigma}\left(\underset{>}{\Sigma} + \underset{<}{\Sigma}\right)^{-1}$$

ja samalla tavalla

$$\left(\underset{<}{P}+\underset{>}{P}\right)^{-1}\underset{>}{P}=\underset{<}{\Sigma}\left(\underset{>}{\Sigma}+\underset{<}{\Sigma}\right)^{-1}.$$

Siis

$$\widehat{\mathbf{x}}=\underset{>}{\Sigma}\left(\underset{>}{\Sigma}+\underset{<}{\Sigma}\right)^{-1}\underset{<}{\widehat{\mathbf{x}}}+\underset{<}{\Sigma}\left(\underset{>}{\Sigma}+\underset{<}{\Sigma}\right)^{-1}\underset{>}{\widehat{\mathbf{x}}}.$$

Sovellettuna yhden alkion tilavektorillemme:

$$\widehat{w}(t)=\frac{\underset{>}{\Sigma}(t)}{\underset{<}{\Sigma}(t)+\underset{>}{\Sigma}(t)}\underset{<}{\widehat{w}}(t)+\frac{\underset{<}{\Sigma}(t)}{\underset{<}{\Sigma}(t)+\underset{>}{\Sigma}(t)}\underset{>}{\widehat{w}}(t).$$

Sijoitetaan varianssit 4.16 ja 4.17:

$$\begin{aligned}\widehat{w}(t)&=\frac{Q_n\cdot(t_2-t)}{Q_n\cdot(t-t_1)+Q_n\cdot(t_2-t)}\underset{<}{\widehat{w}}(t)+\\&\quad+\frac{Q_n\cdot(t-t_1)}{Q_n\cdot(t-t_1)+Q_n\cdot(t_2-t)}\underset{>}{\widehat{w}}(t)=\\&=\frac{t_2-t}{t_2-t_1}\underset{<}{\widehat{w}}(t)+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\underset{>}{\widehat{w}}(t)=\frac{t_2-t}{t_2-t_1}\underline{\ell}_1+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\underline{\ell}_2,\end{aligned}$$

lineaarinen interpolointi havaintoepookkien välillä. Ja varianssi on

$$\begin{aligned}\Sigma(t)&=\left(\underset{<}{\Sigma}^{-1}(t)+\underset{>}{\Sigma}^{-1}(t)\right)^{-1}=\\&=Q_n\cdot\left(\frac{1}{t-t_1}+\frac{1}{t_2-t}\right)^{-1}=Q_n\frac{(t-t_1)(t_2-t)}{t_2-t_1},\end{aligned}$$

neliöllinen lauseke, joka saavuttaa arvon nolla molemmissa päissä ja maksimiarvon $\frac{1}{4}(t_2-t_1)Q_n$ keskellä. Keskihajonta on tämän neliöjuuri, suurimmillaan $\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{(t_2-t_1)Q_n}$ keskellä. Katso kuva 4.2.

4.6.4 *Esimerkki 5: vakion estimointi*

Olkoon x tuntematon vakio, joka estimoidaan. Se on havaittu hetkellä 1, jolloin havaintoarvo on 7 ja keskivirhe ±2, ja hetkellä 2, jolloin havaintoarvo on 5 ja keskivirhe ±1.

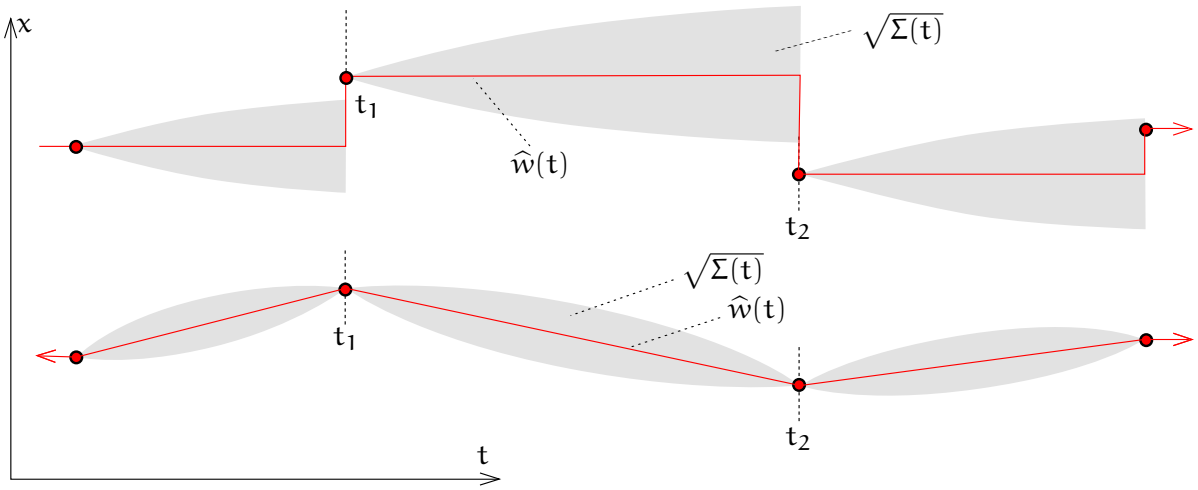
Kysymys Muodosta tavallisen tasoitustehtävän havaintoyhtälöt ja havaintovektorin varianssimatriisi. Laske $\widehat{x}$.

Vastaus

$$\underline{\ell}+\underline{\mathbf{v}}=A\widehat{x},$$

jossa havaintovektori, sen varianssimatriisi ja rakennematriisi ovat

$$\underline{\ell}=\begin{bmatrix}\underline{\ell}_1\\\underline{\ell}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}R_1&0\\0&R_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$



KUVA 4.2. Satunnaiskulku: ratkaisu ja epävarmuus. Ylhäällä ratkaisu eteenpäin ajassa, alhaalla yhdistynyt ratkaisu kahteen suuntaan. Janoja alemmassa kuvaajassa kutsutaan "Brownin silloiksi" (Wikipedia, Brownian bridge).

Ratkaisu:

$$\widehat{x} = \left(A^T S^{-1} A\right)^{-1} A^T S^{-1} \underline{\ell} = \\ = \tfrac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{27}{5} = 5{,}4. \tag{4.18}$$

Ratkaisun varianssimatriisi:

$$\Sigma = \left(A^T S^{-1} A\right)^{-1} = \tfrac{4}{5} = 0{,}8. \tag{4.19}$$

Kysymys Kirjoita Kalmanin suotimen dynaamiset yhtälöt. Muista, että x on *vakio*.

Vastaus Yleinen dynaaminen yhtälö diskreetissä tapauksessa on

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \Phi_k^{k+1} \underline{x}(t_k) + \underline{w}_k^{k+1}$$

jossa $\Phi_k^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, 1×1 -kokoinen yksikkömatriisi, ja $\underline{w}_k^{k+1} = 0$: deterministinen liike, dynaamista kohinaa ei ole. Siis

$$x(t_{k+1}) = x(t_k).$$

Vaihtoehtoisesti kirjoitetaan differentiaaliyhtälö:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = F\,\underline{x} + \underline{n}.$$

Tässä tapauksessa $F = 0$ eikä dynaamista kohinaa ole eli $\underline{n} = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Kysymys Kirjoita Kalmanin suotimen päivitysyhtälöt niin, että yläindeksi ”−” merkitsee *a priori* ja ”+” *a posteriori*:

$$x_k^+ = x_k^- - K_k\left(H_k x_k^- - \underline{\ell}_k\right), \qquad \Sigma_k^+ = \left(I - K_k H_k\right)\Sigma_k^-,$$

jossa vahvistusmatriisi on

$$K_k = \Sigma_k^- H_k^\mathsf{T}\left(R_k + H_k^\mathsf{T}\Sigma_k^- H_k\right)^{-1}.$$

Minkä näköisiä ovat tässä tapauksessa matriisit H ja K?

Vastaus Koska tässä tapauksessa havainto $\underline{\ell}_k = x_k + \underline{m}$ — tila havaitaan suoraan — on $H_k = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, 1×1-kokoinen matriisi, jonka ainoa alkio on 1.

$$K_k = \frac{\Sigma_k^-}{R_k + \Sigma_k^-}.$$

Jos alkuperäinen Σ_k^- on suuri, on $K \sim 1$.

$$x_k^+ = x_k^- - \frac{\Sigma_k^-}{R_k + \Sigma_k^-}\left(x_k^- - \underline{\ell}_k\right) =$$

$$= \overbrace{\frac{\Sigma_k^-}{R_k + \Sigma_k^-}}^{w_k}\underline{\ell}_k + \overbrace{\frac{R_k}{R_k + \Sigma_k^-}}^{W_k} x_k^- = \frac{\Sigma_k^-\underline{\ell}_k + R_k x_k^-}{R_k + \Sigma_k^-},$$

$$\Sigma_k^+ = \left(1 - K_k\right)\Sigma_k^- = \frac{R_k}{R_k + \Sigma_k^-}\Sigma_k^-.$$

- *A posteriori* tila x_k^+ on *a priori* tilan x_k^- ja havainnon $\underline{\ell}_k$ painotettu keskiarvo painoilla W_k ja w_k, $w_k + W_k = 1$.
- Mitä huonompi on *a priori* tilan varianssi Σ_k^- havainnon varianssiin R_k verrattuna, sitä enemmän päivitetty tilavarianssi Σ_k^+ tuo parannusta.

Kysymys Laske manuaalisesti läpi molemmat havaintotapahtumat ja anna sen jälkeinen tila-arvio x_2^+ ja sen varianssimatriisi Σ_2^+. Tilan alkuarvo x_1^- on 0 ja sen varianssimatriisin — siis varianssin — alkuarvoksi laitetaan ”numeerisesti ääretön”:

$$\Sigma_1^- = 100.$$

Vastaus Ensimmäinen askel:

$$K_1 = \frac{\Sigma_1^-}{R_1 + \Sigma_1^-} = \frac{100}{4 + 100} = \frac{100}{104}.$$

Siis

$$x_1^+ = x_1^- - K_1\left(x_1^- - \ell_1\right) = 0 - \frac{100}{104}(0 - 7) = 6{,}73 = x_2^-,$$

$$\Sigma_1^+ = \left(I - K_1\right)\Sigma_1^- = \left(1 - \frac{100}{104}\right)100 = \frac{400}{104} = 3{,}85 = \Sigma_2^-.$$

Toinen askel:

$$K_2 = \frac{\Sigma_2^-}{R_2 + \Sigma_2^-} = \frac{3{,}85}{1 + 3{,}85} = 0{,}79.$$
$$x_2^+ = x_2^- - K_2 (x_2^- - \ell_2) = 6{,}73 - 0{,}79\,(6{,}73 - 5) =$$
$$= 6{,}73 - 0{,}79 \cdot 1{,}73 = 5{,}36.$$
$$\Sigma_2^+ = (I - K_2)\,\Sigma_2^- = (1 - 0{,}79) \cdot 3{,}85 = 0{,}81.$$

Nämä ovat lähellä tasoituksen tuloksia 4.18 ja 4.19.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Lisää yllä olevassa esimerkissä 4.1 fysikaaliset yksiköt suureille $\underline{x}$, $\underline{v}$, $\underline{n}$, Q, Σ, Φ_0^5, $\underline{\ell}'$, H, R, S ja K.
2) Montako alkiota on tilavektorilla, kun kuvataan pistemäisen kohteen liikettä avaruudessa?
3) Ja montako alkioita on, jos kohde on laajempi, jäykkä kappale, esimerkiksi lentokone?
4) Mitä dynaaminen kohina kuvaa?
5) Mitä havaintokohina kuvaa?
   Mikä on vakion k dimensio yllä olevassa laskuvarjohyppääjän ongelmassa 4.3?
   (a) aika^{-1}
   (b) $\dfrac{\text{massa}}{\text{pituus}^3\ \text{aika}}$
   (c) $\dfrac{\text{pituus}^3}{\text{massa aika}}$
   (d) $\dfrac{\text{massa}}{\text{aika}}$.

Harjoitus 4–1: Yksinkertainen Kalmanin suotimen esimerkki

1) Oleta seuraava dynaaminen malli yhden alkion tilavektorille x:

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = 0 + \underline{n}(t),$$

jossa $\underline{n}(t)$ on valkoinen kohina, jonka autokovarianssi $Q_n = 1\,\text{m}^2/\text{s}$. Alkutilan estimaatti on $\hat{x}(0) = 0\,\text{m}$ ja *a priori* tilavarianssi $\Sigma(0) = 100\,\text{m}^2$. Laske tilaestimaatti epookille $t = 3\,\text{s}$, siis $x^-(3)$ ja $\Sigma^-(3)$.

2) Epookilla $t = 3\,\mathrm{s}$ havaitaan $\underline{x}$: havaintoyhtälö on

$$\underline{\ell} = \underline{x}(3) + \underline{m},$$

jossa $\underline{m}$ on havainnon satunnainen virhe eli kohina, jonka varianssi R on annettuna[4]. Havainnon arvo on $\underline{\ell} = 10\,\mathrm{m}$. Laske

(a) Kalmanin vahvistusmatriisi K

(b) *a posteriori* tilaestimaatti $x^+(3)$ ja sen varianssi $\Sigma^+(3)$.

Harjoitus 4−2: Hieman monimutkaisempi Kalmanin suotimen esimerkki

Oleta nyt, että dynaaminen malli on

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{v}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \underline{n}\end{bmatrix},$$

jossa valkoisen kohinan prosessin $\underline{n}$ autokovarianssi on $50\,\mathrm{m^2/s^3}$, toisin sanoen

$$Q_n = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 50\,\mathrm{m^2/s^3}\end{bmatrix}.$$

Annettuna on alkuhetken tilaestimaatti $\hat{x}(0) = \hat{v}(0) = 0$ ja sen varianssimatriisi

$$\Sigma(0) = \begin{bmatrix}100\,\mathrm{m^2} & 0\\ 0 & 100\,\mathrm{m^2/s^2}\end{bmatrix}.$$

1) Laske tilansiirtomatriisi Φ_0^3.

theeta ϑθΘ 2) Laske tilakohinan varianssi θ_0^3.

3) Laske *a priori* tilan estimaatti

$$x^-(3), v^-(3), \Sigma^-(3)$$

epookilla $t = 3\,\mathrm{s}$. Huomaa, että nyt $x^-(3)$ ja $v^-(3)$ ovat korreloituneet.

4) Havaintoyhtälö on taas

$$\underline{\ell} = \underline{x}(3) + \underline{m}.$$

Jos $\underline{\ell} = 10\,\mathrm{m}$, laske

(a) Kalmanin vahvistusmatriisi K

[4] Varianssiksi voi ottaa syntymäpäiväsi päivän numero kuukauden sisällä!

(b) *a posteriori* tilavarianssi $\Sigma^{+}(3)$.

Laske mielenkiinnon vuoksi varianssimatriisien $\Sigma(0)$, $\Sigma^{-}(3)$ ja $\Sigma^{+}(3)$ determinantit. Tämän determinantin neliöjuuri kerrottuna luvulla π on virhe-ellipsin pinta-ala (x, v)-avaruudessa ja samalla järkevä tilavektorin epävarmuuden yleinen mitta.

Oleta R samanarvoiseksi kuin edellisessä tehtävässä tai pidä se symbolina.

Vihje: analysoi huolellisesti osion 4.1 esimerkki 1.

Harjoitus 4−3: Laskuvarjohyppääjä uudelleen

Oleta esimerkissä 4.3, että ilmanvastus on verrannollinen putoamisnopeuden *neliöön*. Johda uudelleen ja linearisoi dynaaminen malli.

Inertianavigointi

5

5.1 Periaate

Inertianavigointi perustuu Isaac Newtonin[1] ensimmäiseen liikelakiin, [1]
joka tunnetaan myös nimellä liikkeen jatkuvuuden eli *inertian laki*:

> *Kappale jatkaa tasaista suoraviivaista liikettä vakionopeudella tai pysyy levossa, jos siihen ei vaikuta ulkoisia voimia.*

Tämä johtaa ajatukseen, että kulkuneuvon liike olisi mahdollista rekonstruoida alkutilasta — sijainnista ja nopeudesta — vain mittaamalla jatkuvasti kaikkia kulkuneuvoon kohdistuvia voimia, ilman ulkopuolisten kohteiden tai signaalien käyttöä. Juuri näin inertianavigointi toimii.

Hyvä oppikirja inertianavigoinnista ja sen käytöstä geodesiassa on Jekeli (2001).

Esitetään ensin, miten inertianavigointi tapahtuu inertiaalisessa eli vapaasti putoavassa koordinaatistossa vapaassa avaruudessa, ihannetilanteessa kaukana paikallisista vetovoiman lähteistä. Inertianavigointia Maan painovoimakentässä käsitellään myöhemmin.

Inertianavigoinnissa mitataan jatkuvasti seuraavia suureita:

1) Kulkuneuvon kolmiulotteinen *kiihtyvyys*,

$$\mathbf{a}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\mathbf{k},$$

tai abstraktina komponenttien tai koordinaattien vektorina

$$\mathbf{a}_\beta(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}_\beta(t) = \left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad \frac{d^2z(t)}{dt^2}\right]^\mathsf{T}.$$

[1] Sir Isaac Newton PRS (1643–1727) oli englantilainen yleisnero, joka matematisoi liikkeen fysiikan sovellettuna tähtitieteeseen ja geofysiikkaan.

Tässä

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

on kappaleen kolmiulotteinen sijainti ja

$$\mathbf{x}_\beta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}^T$$

on sen koordinaattien abstrakti vektori ortonormaalilla kannalla $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

beeta βB

2) Kulkuneuvon *asento*:

$$\begin{aligned} R &= R_3(\alpha_3)\,R_2(\alpha_2)\,R_1(\alpha_1) = \\ &= \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_2c_3 & c_1s_3 + s_1s_2c_3 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 \\ -c_2s_3 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & s_1c_3 + c_1s_2s_3 \\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa $c_i \stackrel{\text{def}}{=} \cos\alpha_i$, $s_i \stackrel{\text{def}}{=} \sin\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$.

alfa αA

Asentoa kuvaa kolme tuntematonta, $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, eli *Eulerin kulmaa*, jotka ovat ajan funktioita ja muuttuvat kulkuneuvon liikkeiden mukana.

Ennen matkan alkamista matriisi $R(t_0)$, tai vastaavasti asentokulmat $\alpha_i(t_0)$, $i = 1, 2, 3$, on määritettävä riittävällä tarkkuudella. Matkan aikana asennon muutokset eli kulmanopeudet $\frac{d}{dt}\alpha_i$ mitataan kolmen *gyroskoopin* avulla ja integroidaan ajassa, jotta saadaan hetkellinen asento $\alpha_i(t)$ ja siten matriisi $R(t)$.

Yhteensä mitataan jatkuvasti kuutta parametria: kolmea kulmanopeutta ja kolmea lineaarista kiihtyvyyttä.

Kolmella kiihtyvyysmittarilla mitattu *kiihtyvyys* on kulkuneuvon akseleilla $\beta' \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ kirjoitettuna:

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{\beta'}(t) = R(t)\,\mathbf{a}_\beta(t),$$

jossa tilde eli aaltoviiva merkitsee mitattua suuretta.

Inertialaitteen laskentayksikkö *integroi* nyt kiihtyvyydet $\widetilde{\mathbf{a}}$ muunnoksen

$$\mathbf{a}_\beta(t) = R^{-1}(t)\,\widetilde{\mathbf{a}}_{\beta'}(t) = R^T(t)\,\widetilde{\mathbf{a}}_{\beta'}(t)$$

jälkeen kolmessa ulottuvuudessa, kaksi kertaa peräkkäin. Ensimmäinen integrointi antaa kulkuneuvon nopeusvektorin, toinen sen paikan.

Seuraavasti, inertiaalisissa koordinaateissa β:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_\beta(t) &= \boldsymbol{v}_\beta(t_0) + \int_{t_0}^{t} R^T(\tau)\, \tilde{\boldsymbol{a}}_{\beta'}(\tau)\, d\tau, \\ \boldsymbol{x}_\beta(t) &= \boldsymbol{x}_\beta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}_\beta(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{5.1}$$

jossa $\boldsymbol{x}_\beta(t_0)$ ja $\boldsymbol{v}_\beta(t_0)$ ovat integrointivakioita. Ne voivat edustaa esimerkiksi laukaisupaikan sijaintia ja tietoa, että avaruusalus seisoo liikkumatta laukaisualustalla.

Kuten yhtälöistä 5.1 näkyy, paikan $\boldsymbol{x}(t)$ tarkkuus huononee ajan kuluessa, koska sekä kiihtyvyyden $\tilde{\boldsymbol{a}}$ mittaus että kiertomatriisin R määritys ovat epätarkkoja: niiden sisältämä virhe kasautuu integroitaessa. Kasautuminen tapahtuu peräti kaksi kertaa päällekkäin, koska on kaksi peräkkäistä integrointia.

Suosittu temppu maanpinnan inertianavigoinnin tarkkuuden säilyttämiseksi on *pysähtyä* säännöllisesti eli suorittaa ”nollanopeuspäivitys”. Silloin $\boldsymbol{v}(t_1) = 0$ jonakin ajan hetkenä $t_1 > t_0$ ja ensimmäinen integraali eli nopeusintegraali alkaa uudelleen tunnetusta lähtöarvosta.

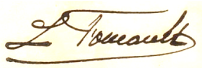
5.2 Inertialaitteen osat

Inertialaite eli IMU, inertiamittausyksikkö, sisältää seuraavat mittaavat osat:

1) gyroskoopit
2) kiihtyvyysmittarit.

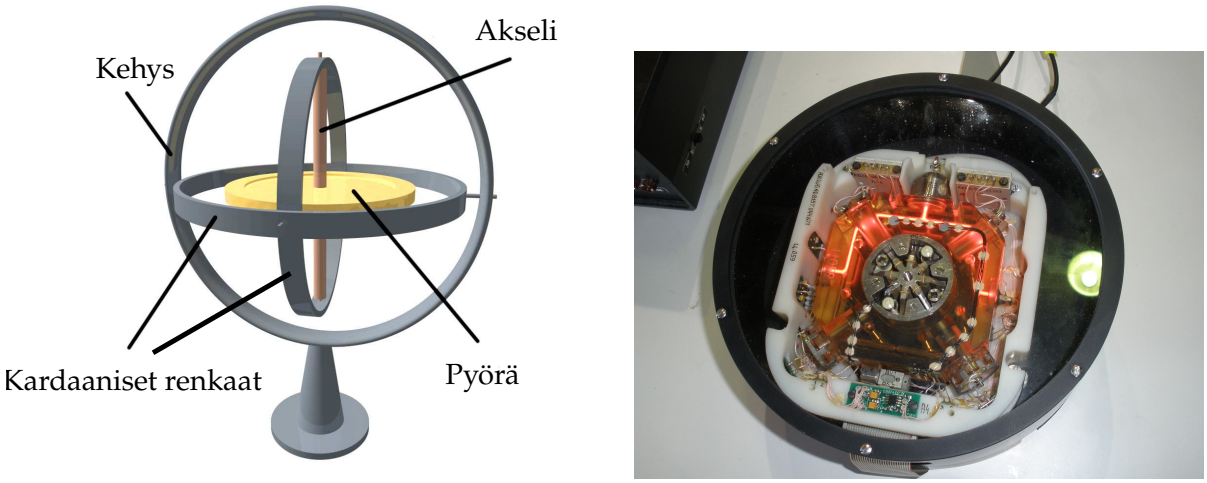
5.2.1 Gyroskooppi

Gyroskooppi on nopeasti pyörivä vauhtipyörä, jonka inertia tekee sen pyörimisakselin suunnan muuttamisen vaikeaksi.


2

Nimen ”gyroskooppi” keksi Léon Foucault[2]. Hän rakensi gyroskoopin onnistuneesti osoittaakseen maapallon pyörimisen, sen jälkeen kun oli onnistuneesti tehnyt saman hänen nimeään kantavalla heilurilla. Nimi tulee kreikan kielestä ja viittaa kirjaimellisesti maapallon pyörähdysliikkeen näkemiseen (Sommeria, 2017).

[2] Jean Bernard Léon Foucault FRS (1819–1868) oli ranskalainen fyysikko, joka tunnetaan parhaiten Maan pyörähdysliikettä koskevista empiirisistä tutkimuksistaan.



KUVA 5.1. Vasemmalla gyroskooppi. Wikimedia Commons, Gyroskooppi. Napsauta animaatiota varten. Oikealla ilmailussa käytetty rengaslasergyroskooppi. Nockson (2011).

Pyörivän kappaleen liikettä kuvaa inertiaalisessa koordinaatistossa seuraava yhtälö[3]:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \left(\frac{d}{dt}J\right)\boldsymbol{\omega}, \tag{5.2}$$

jossa

$\mathbf{N}$ vääntömomentti (engl. *torque*)

$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$ pyörähdysmomentti (*angular momentum*)

oomega ωΩ $\boldsymbol{\omega}$ pyörähdysnopeus (*angular velocity*)

J *hitaustensori*, komponenteittain (x, y, z)-koordinaatiston kannalla β:

$$J_\beta = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix},$$

3×3 -kokoinen matriisi.

Kappaleen hitaustensorin J komponenttimatriisi J_β on symmetrinen ja

[3] Yhtälö muistuttaa Newtonin toista liikelakia:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

jossa $\mathbf{F}$ on (lineaarinen) voima ja $\mathbf{v}$ (lineaarinen) nopeus. $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ on *impulssi* eli (lineaarinen) liikemäärä. m, massa, vastaa hitaustensoriin J, mutta on skalaari. Newtonin liiketeoriassa se on vakio.

positiivisesti definiitti. Sen alkiot ovat seuraavat integraalit:

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= \iiint \rho(x,y,z)\,(y^2+z^2)\;dx\,dy\,dz,\\
J_{yy} &= \iiint \rho(x,y,z)\,(x^2+z^2)\;dx\,dy\,dz,\\
J_{zz} &= \iiint \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2)\;dx\,dy\,dz,\\
J_{xy} &= -\iiint \rho(x,y,z)\,xy\,dx\,dy\,dz,\\
J_{xz} &= -\iiint \rho(x,y,z)\,xz\,dx\,dy\,dz,\\
J_{yz} &= -\iiint \rho(x,y,z)\,yz\,dx\,dy\,dz,
\end{aligned}$$

jossa ρ on ainetiheys. Siis rhoo ρR

$$J_\beta = \iiint \rho(x,y,z) \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} dx\,dy\,dz.$$

Ilmeisesti tulos riippuu koordinaatiston (x,y,z) valinnasta. *Origo* vaikuttaa suuresti: kun valitsee origon kaukana kappaleen ulkopuolelta, voi tehdä matriisin J_β alkioista mielivaltaisen suuria! Siksi kun puhutaan hitaustensorista kappaleen ominaisuutena, valitaan aina origoksi kappaleen massakeskipiste:

$$\mathbf{x}_{mkp} = \frac{1}{M}\iiint \rho(\mathbf{x})\,\mathbf{x}\,d\mathcal{V}$$

eli

$$\begin{aligned}
x_{mkp} &= \frac{1}{M}\iiint \rho(x,y,z)\,x\,dx\,dy\,dz,\\
y_{mkp} &= \frac{1}{M}\iiint \rho(x,y,z)\,y\,dx\,dy\,dz,\\
z_{mkp} &= \frac{1}{M}\iiint \rho(x,y,z)\,z\,dx\,dy\,dz,
\end{aligned}$$

jossa

$$M = \iiint \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

on kappaleen kokonaismassa. Tämän jälkeen käytetään J:n laskennassa

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{mkp}.$$

Akseleiden suunnista puheen ollen, koordinaatiston kierron kautta voidaan aina saada symmetrinen tensori *pääakseleille*. Silloin hitaustensorista tulee lävistäjämatriisi

$$J_{\beta'} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Alkioita J_x, J_y ja J_z kutsutaan *päähitausmomenteiksi*. Ne ovat itse asiassa tensorin J ominaisarvot.

Mitä nopeammin gyroskooppi pyörii, eli mitä suurempi on pyörähdysnopeusvektori $\boldsymbol{\omega}$ ja siten pyörähdysmomentti $\mathbf{L}$, sitä enemmän vääntömomenttia $\mathbf{N}$ tarvitaan gyroskoopin pyörimisakselin kääntämiseksi.

Yhtälö 5.2 pätee *inertiaalisessa* koordinaatistossa: Yleisessä ei-inertiaalisessa koordinaatistossa β vektorin aikaderivaatan yhtälö antaa

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_\beta = \frac{d}{dt}\mathbf{L}_\beta + \left\langle \boldsymbol{\omega}_\beta^{[\beta]} \times \mathbf{L}_\beta \right\rangle = \\ = J_\beta \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_\beta + \left(\frac{d}{dt}J_\beta\right)\boldsymbol{\omega}_\beta + \left\langle \boldsymbol{\omega}_\beta^{[\beta]} \times J_\beta \boldsymbol{\omega}_\beta \right\rangle . \quad (5.4)\end{aligned}$$

Symboli $\times$ on ulkoinen tulo eli vektoritulo. Vektori $\boldsymbol{\omega}^{[\beta]}$ on ei-inertiaalisen koordinaatiston pyörähdysnopeus, joka voi olla erilainen kuin itse kappaleen pyörähdysnopeus $\boldsymbol{\omega}$.

Ei-inertiaalisessa koordinaatistossa, jossa J_β on pääakseleilla ja *vakio* eikä riipu ajasta[4], pätee yhtälön 5.4 perusteella:

[4]

$$\begin{aligned}N_x &= J_x \frac{d}{dt}\omega_x + \omega_y^{[\beta]} J_z \omega_z - \omega_z^{[\beta]} J_y \omega_y, \\ N_y &= J_y \frac{d}{dt}\omega_y + \omega_z^{[\beta]} J_x \omega_x - \omega_x^{[\beta]} J_z \omega_z, \\ N_z &= J_z \frac{d}{dt}\omega_z + \omega_x^{[\beta]} J_y \omega_y - \omega_y^{[\beta]} J_x \omega_x.\end{aligned} \quad (5.5)$$

Vektori $\boldsymbol{\omega}^{[\beta]}$ on koordinaatiston pyörähdysnopeus. Huomaa, että J on jo vakio, jos koordinaatisto on kiinnitetty vain kappaleen *muotoon* eikä itse kappaleeseen. Esimerkiksi pyörähdyssymmetrisen gyroskoopin roottorin tapauksessa x- ja y-akselien ei tarvitse pyöriä roottorin kanssa, kunhan z-akseli on samansuuntainen pyörimisakselin kanssa. Silloin $\omega_z^{[\beta]} = 0$ vaikka $\omega_z \neq 0$.

Jos $\omega_z^{[\beta]} = \omega_z$, on $\boldsymbol{\omega}^{[\beta]} = \boldsymbol{\omega}$ ja saadaan Eulerin yhtälöiden klassinen muoto mukana pyörivissä kappalekoordinaateissa:

$$\begin{aligned}N_x &= J_x \frac{d}{dt}\omega_x + (J_z - J_y)\,\omega_y \omega_z, \\ N_y &= J_y \frac{d}{dt}\omega_y + (J_x - J_z)\,\omega_z \omega_x, \\ N_z &= J_z \frac{d}{dt}\omega_z + (J_y - J_x)\,\omega_x \omega_y.\end{aligned} \quad (5.6)$$

[4] Oletus, että sellainen koordinaatisto on olemassa on luonnollinen vauhtipyörän, muttei esimerkiksi koko maapallon tapauksessa, koska maapallon muoto muuttuu jatkuvasti.

Nämä yhtälöt pätevät vapaasti pyörivälle kappaleelle, esimerkiksi Maalle avaruudessa[5]. 5

Hyvän gyroskoopin rakentaminen on haastava insinööritaidonnäyte. Laitteiden mittaustarkkuus on vaikuttava: huippulaatuisen mekaanisen gyroskoopin pyörimisakselin vakaus voi olla luokkaa $0^\circ,000\,1$ tunnissa.

Gyroskooppi koostuu roottorista ja akselista, joka on laakeroitu molemmissa päissä pyörää ympäröivässä kehikossa eli pöydässä. Kehikko voi koostua useista renkaista ja akseleista, niin sanotusta *kardaanisesta* järjestelmästä.

Olkoon pyörimisakseli z-akseli. Jos pyörimisakselin suunta on vakio ulkoisessa inertiaalisessa koordinaatistossa,

$$\omega_x^{[\beta]} = \omega_y^{[\beta]} = 0,$$

ja voidaan valita $\omega_z^{[\beta]} = 0$. Myös $\omega_x = \omega_y = 0$ ja siis

$$\frac{d}{dt}\omega_x = \frac{d}{dt}\omega_y = 0.$$

Jos lisäksi roottorin pyörähdysnopeus on vakio eli

$$\frac{d}{dt}\omega_z = 0,$$

seuraa yhtälöistä 5.5, että

$$N_x = \frac{d}{dt}L_x = 0, \quad N_y = \frac{d}{dt}L_y = 0, \quad N_z = \frac{d}{dt}L_z = 0.$$

---

[5] Jos yhtälöissä 5.6 nollataan vääntömomentti $\mathbf{N} = 0$, ensimmäisestä kahdesta yhtälöstä saadaan, olettaen $\Delta J = J_z - J_x = J_z - J_y$ pyörähdyssymmetriselle kappaleelle,

$$J_x \frac{d}{dt}\omega_x = -\Delta J\, \omega_y \omega_z, \quad J_y \frac{d}{dt}\omega_y = \Delta J\, \omega_z \omega_x,$$

ja käyttäen $C = \Delta J\, \omega_z / J_x = \Delta J\, \omega_z / J_y \overset{\text{def}}{=} \Delta J\, \omega_z / J_0$:

$$\frac{d}{dt}\omega_x = -C\omega_y, \quad \frac{d}{dt}\omega_y = C\omega_x,$$

joka antaa ristisijoituksella toisen kertaluvun yhtälöt

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega_x = -C^2\omega_x, \quad \frac{d^2}{dt^2}\omega_y = -C^2\omega_y,$$

joilla molemmilla on jaksollisia ratkaisuja jaksolla

$$T = \frac{2\pi}{C} = 2\pi\frac{J_0}{\Delta J\, \omega_z} = \frac{J_0}{\Delta J}\frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{J_0}{\Delta J} \text{ tähtivuorokautta.}$$

Tässä oletettiin, että $J_x = J_y \overset{\text{def}}{=} J_0$. Näin olemme löytäneet Eulerin maapallon vapaan nutaation, ympyräliikkeen, joka on napaliikkeen yksi komponentti.

Tässä tapauksessa gyroskooppiin ei siis kohdistu vääntöjä.

Ja koska tässä koordinaatistossa hitaustensori J on pääakseleilla, yhtälö 5.3, ja[6]

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k} \implies \omega \overset{\text{def}}{=} \|\boldsymbol{\omega}\| = \omega_z,$$

seuraa, että

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega} = J_z\omega_z\mathbf{k} = J_z\omega\mathbf{k} \implies L \overset{\text{def}}{=} \|\mathbf{L}\| = L_z = J_z\omega_z = J_z\omega. \quad (5.7)$$

Siis molemmat vektorit, pyörimisnopeusvektori $\boldsymbol{\omega}$, suuruus ω, ja pyörähdysmomentti $\mathbf{L}$, suuruus L, ovat aina samansuuntaisia gyroskoopin fysikaalisen pyörimisakselin ja toistensa kanssa. Tämä pitää edelleen likimäärin paikkansa inertiaalisessa koordinaatistossa, jos gyroskoopin pyörimisakseli kääntyy vain hitaasti[7]. Se pitää myös eksaktisti paikkansa gyroskoopin kappalekoordinaatistossa, koska $\omega_x = \omega_y = 0$, kun gyroskooppi on mekaanisesti pakotettu pyörimään vain symmetria-akselinsa ympäri.

Tutkitaan gyroskoopin käyttäytymistä pyörähdysmomentin $\mathbf{L}$ säilymisen periaatetta käyttäen, kun $\mathbf{L}$ on linjassa pyörimisakselin kanssa. Ainoa tapa saada gyroskoopin pyörimisakseli kääntymään on kohdistaa siihen vääntöä. Vääntömomentin N_x kohdistaminen x-akselin ympäri muuttaa pyörähdysmomenttia sen akselin ympäri määrällä

$$\frac{d}{dt}L_x = N_x.$$

Koska kokonaispyörähdysmomentti on $L = J_z\omega$ ja se osoittaa aina gyroskooppin pyörimisakselin suuntaan, seuraa että pyörimisakselin suunnan muutoksen θ on oltava[8]

theeta ϑθΘ

$$\omega_y^{[\beta]} = \frac{d}{dt}\theta_y = \frac{\frac{d}{dt}L_x}{L} = \frac{N_x}{J_z\omega}. \quad (5.8)$$

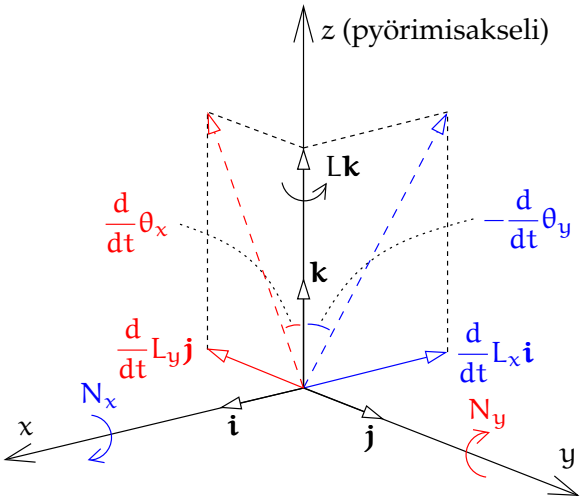
Samalla tavalla

$$\omega_x^{[\beta]} = \frac{d}{dt}\theta_x = -\frac{\frac{d}{dt}L_y}{L} = -\frac{N_y}{J_z\omega}.$$

Siis vääntömomentti N_x x-akselin ympäri aiheuttaa pyörimisakselin kääntämisen eli *prekession* y-akselin ympäri. Vääntömomentti N_y y-

[6] Oletettu on, että vektori $\boldsymbol{\omega}$ osoittaa positiivisen z-akselin suuntaan.

[7] Esimerkkinä tyypillinen gyroskoopin pyörimisnopeus on 20 000 kierrosta minuutissa eli yli 300 Hz. Tämä on tuhat kertaa nopeampi kuin kulkuneuvojen tavalliset kiertoliikkeet ja yli miljoona kertaa matalalla kiertoradalla olevan satelliitin kulmanopeus.



KUVA 5.2. Kuinka vääntö aiheuttaa gyroskoopin pyörimisakselin prekessiota. Huomaa korkkiruuvisääntö: $N_x, N_y, \frac{d}{dt}L_x, \frac{d}{dt}L_y$ ja $\frac{d}{dt}\theta_y$ ovat negatiivisia ja L ja $\frac{d}{dt}\theta_x$ ovat positiivisia.

akselin ympäri aiheuttaa pyörimisakselin kääntämisen x-akselin ympäri. Katso kuva 5.2.

Tavanomaisesti määritellään kolme keskenään kohtisuoraa akselia: syöttöakseli, jonka ympäri kohdistuu vääntöä, gyroskoopin pyörimisakseli ja lähtöakseli, jonka ympäri tapahtuu prekessiota.

R-säteisen lieriön, kuva 5.3, hitausmomentti sen z-akselin ympäri on

$$J_z = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \iint_{\text{ympyrälevy}} \rho\left(x^2+y^2\right) dx\, dy\, dz = \\ = \rho \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot r\, dr\, d\theta\, dz =$$

[8] Tämä saadaan myös ensimmäisestä yhtälöstä 5.5:

$$N_x = J_x \frac{d}{dt}\omega_x + \omega_y^{[\beta]} J_z \omega_z - \omega_z^{[\beta]} J_y \omega_y = \omega_y^{[\beta]} L,$$

koska kappalekoordinaatistossa mekaanisen pakkoehdon takia

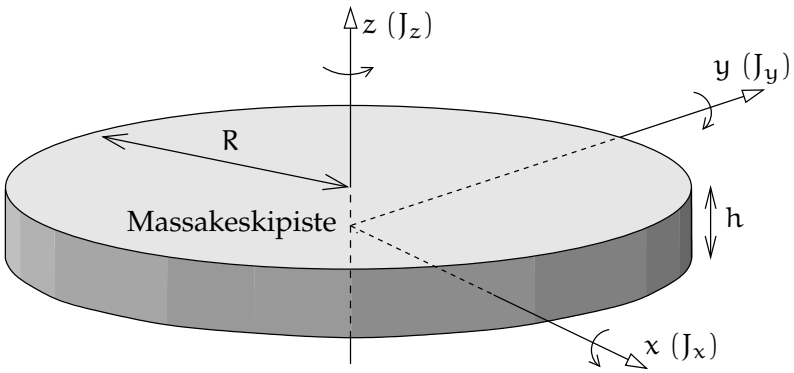
$$\omega_x = \omega_y = 0$$

ja siis myös

$$J_z \omega_z = J_z \omega = L.$$

Sama pätee toiselle yhtälölle ja $\omega_x^{[\beta]}$:

$$N_y = J_y \frac{d}{dt}\omega_y + \omega_z^{[\beta]} J_x \omega_x - \omega_x^{[\beta]} J_z \omega_z = -\omega_x^{[\beta]} L.$$



KUVA 5.3. Gyroskoopin roottori ja sen päähitausmomentit.

$$= \rho \overbrace{\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} dz}^{h} \overbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}^{2\pi} \overbrace{\int_0^R r^2 \cdot r\, dr}^{\frac{1}{4}R^4} = \tfrac{1}{2}\left(\rho \cdot \pi R^2 \cdot h\right) R^2 = \tfrac{1}{2} M R^2,$$

jossa $r^2 = x^2 + y^2$ ja $M = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h$ on kokonaismassa. ρ on lieriön ainetiheys.

Litteälle lieriölle (h, ja siis z, on pieni) voimme myös laskea määritelmällä $Y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{R^2 - x^2}$:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \int_{-R}^{+R} \int_{-Y(x)}^{+Y(x)} \rho\left(y^2 + z^2\right) dy\, dx\, dz \approx \\ &\approx \rho \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \int_{-R}^{+R} \int_{-Y(x)}^{+Y(x)} y^2\, dy\, dx\, dz = \\ &= \rho \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \sin\theta)^2\, r\, dr\, d\theta\, dz = \\ &= \rho \overbrace{\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} dz}^{h} \overbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta}^{\pi} \overbrace{\int_0^R r^2 \cdot r\, dr}^{\frac{1}{4}R^4} = \tfrac{1}{4}\left(\rho \cdot \pi R^2 \cdot h\right) R^2 = \tfrac{1}{4} M R^2. \end{aligned}$$

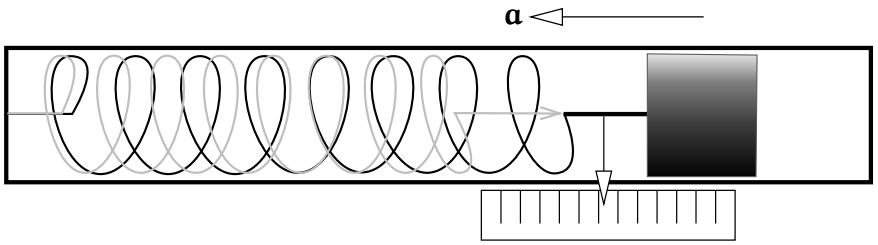
Molemmissa vaihdettiin integroinnin koordinaatit (x, y) napakoordinaateiksi (θ, r): $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dx\, dy = r\, dr$.

Samalla tavalla tietenkin $J_y = J_x = \frac{1}{4} M R^2 = \frac{1}{2} J_z$.

5.2.2 *Kiihtyvyysmittari*

Alkeellinen kiihtyvyysmittari voidaan rakentaa yhdistämällä jousi, koemassa ja asteikko. Jousen venytys on verrannollinen koemassaan ja kiihtyvyyteen, ja venytys voidaan lukea asteikolta.

Automaattinen lukeminen on mahdollista esimerkiksi kapasitiivisesti tai pietsosähköisen anturin avulla. Itse asiassa mikroelektroninen



KUVA 5.4. Jousikiihtyvyysmittarin periaate.

kiihtyvyysanturi (eräs MEMS-anturi eli mikroelektroninen liikeanturi) toimii juuri tällä tavoin.

Kiihtyvyysmittarit kiinnitetään samaan kehikkoon, mihin myös gyroskoopit on kiinnitetty. Mittausakselit asetetaan mahdollisimman samansuuntaisiksi.

Nykyiset kiihtyvyysmittarit voivat olla hyvin herkkiä, esimerkiksi 10 ppm $\approx$ 10 mGal[9]. Halutut ominaisuudet ovat herkkyyden lisäksi *lineaarisuus* ja hyvä käyttäytyminen silloin, kun kiihtyvyys vaihtelee runsaasti tai syntyy *värähtelyä* (raketin laukaisu!).

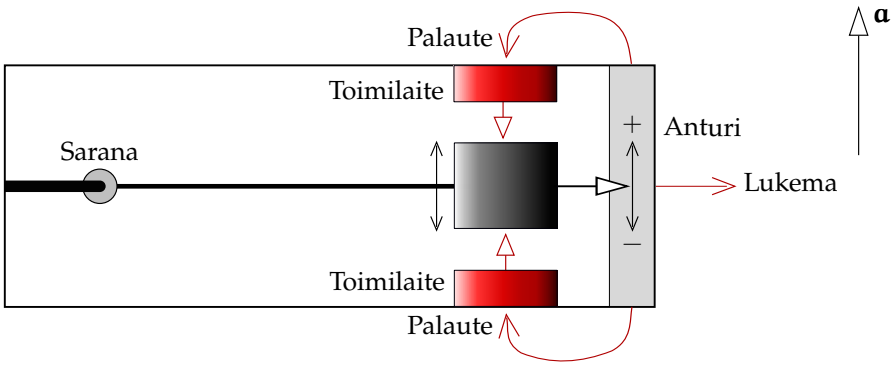
Anturit, jotka mittaavat painovoimaa hyvin tarkasti, ovat erikoistapauksia. Ne ovat verrattavissa gravimetreihin: jos ne perustuvat aineen elastisuuteen, ne vaativat samanlaista säännöllistä kalibrointia. Ne muuttuvat ajassa, niin sanottu *käynti*.

Vaihtoehtoinen mittarityyppi on *heilurikiihtyvyysmittari*. Laitteessa massa on kiinnitetty puomin päähän. Puomin poikkeama mitataan anturilla ja *nollataan* toimilaitteella. Nollaus periaatteessa takaa lineaarisen käyttäytymisen. Tällä mittarityypillä ei ole myöskään käyntiä. Mittauksen laatu riippuu kuitenkin laadusta, jolla tunnettu nollausvoima voidaan tuottaa, esimerkiksi sähkövirtana sähkömagneettisen toimilaitteen läpi.

Gyroskooppipohjaisia heilurikiihtyvyysmittareita on käytetty pitkään ohjuksissa, koska niiden tarkkuus on ylivoimainen. Niissä puomi on samalla pyörivän gyroskoopin akseli, ja puomin päässä oleva massa aiheuttaa väännön, joka saa gyroskoopin prekessoimaan kiihtyvyyden suunnan eli z-akselin ympäri. Tämä prekessioliike mitataan kiihtyvyysmittarin mittasuureena[10]. Nollaava palautesignaali y-akselista z-akselin vääntötoimilaitteeseen (engl. *torquer*) aiheuttaa oikean määrän prekessio-

[9] Yksikköä mGal käytetään painovoiman ja kiihtyvyyden yhteydessä, ja se on $10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$. Maanpinnan painovoima on $\approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 981\,000$ mGal.

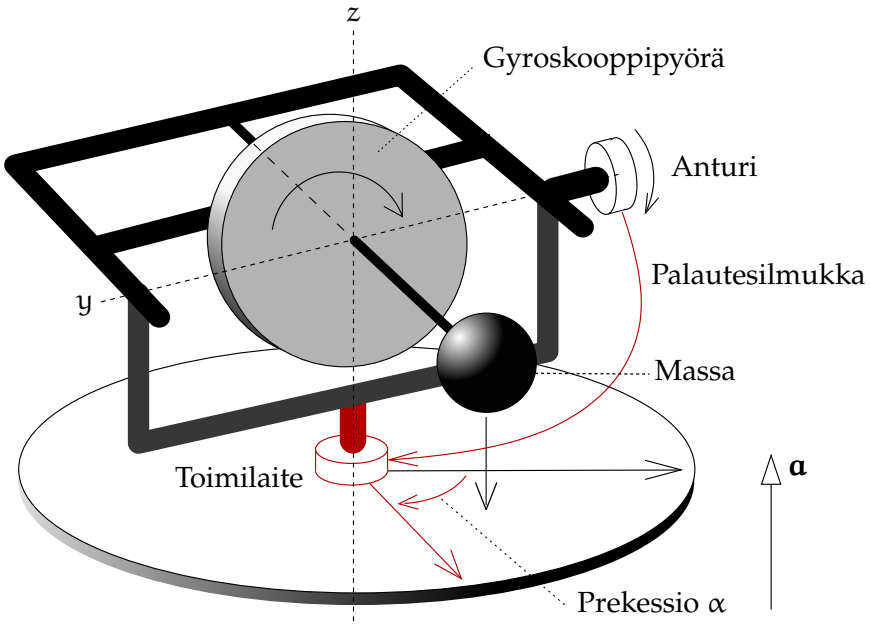
[10] Esimerkiksi saksalainen V-2 käytti integroivaa gyroskooppipohjaista kiihtyvyysmit-



KUVA 5.5. Heilurikiihtyvyysmittari.

ta ja kompensoi näin puomin vääntöä. Näin varmistetaan, että z-akselin ympäri ei kohdistu vääntömomenttia takaisin gyroskooppiin. Tämä pitää gyroskoopin pyörimisakselin kohtisuorassa z-akseliin nähden. Katso kuva 5.6.

Inertianavigoinnin strategisen tärkeyden takia (ohjukset) hyvät kiihtyvyysmittarit, kuten hyvät gyroskoopit, olivat kauan vaikeasti saatavia ja kalliita. Nykyisin tilanne on parempi. Modernit kiihtyvyysmittarit ovat usein MEMS-pohjaisia (*microelectronic motion sensors* eli mikroelektroniset



KUVA 5.6. Gyroskooppipohjainen heilurikiihtyvyysmittari. Kulma α on kokonaisprekessiokulma, joka on verrannollinen mitatun kiihtyvyyden aikaintegraaliin.

taria laittamaan ajoainehanat kiinni (”*Brennschluss*”), kun tavoitenopeus oli saavutettu (Wikipedia, PIGA accelerometer).

liikeanturit) ja edullisia. Ne eivät kuitenkaan yllä gyroskooppipohjaisten kiihtyvyysmittareiden tarkkuuteen.

5.3 Toteutus

Kansantajuisen inertianavigoinnin ja inertiamittausyksiköiden alkeiden selityksen antaa King (1998).

Inertiamittausyksikön toteuttamiseen on olemassa kaksi hyvin erilaista lähestymistapaa:

1) *strapdown*-ratkaisu
2) vakautettu alusta -ratkaisu.

5.3.1 Strapdown-*ratkaisu*

Strapdown-ratkaisussa gyroskooppialusta on kytketty kiinteästi kulkuneuvon runkoon. Kun kulkuneuvon asento muuttuu, gyroskoopin akselin päät painavat kehikkoa vasten voimalla, joka mitataan tarkasti voima-antureiden avulla. Voimasta $\mathbf{F}$ saadaan vääntömomentti $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \langle \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{F} \rangle,$$

jossa $\boldsymbol{\ell}$ on gyroskoopin akselin pituus vektorina: ”vääntö on varsi kertaa voima”. Symboli $\times$ on taas ulkoinen tulo eli vektoritulo. Mitatuista vääntömomenteista lasketaan kulkuneuvon kääntymisnopeudet kulmamitassa $\frac{d}{dt}\alpha_i$ käyttäen yhtälöä 5.2:

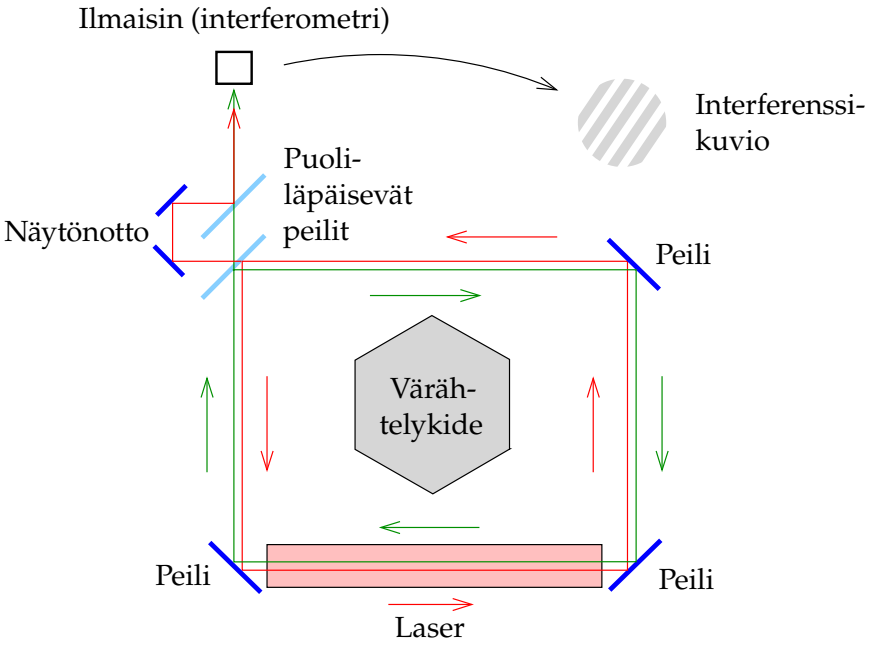
$$\frac{\mathbf{N}}{\omega} = J\left(\frac{1}{\omega}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right).$$

Suluissa oleva lauseke edustaa gyroskoopin pyörimisvektorin kääntymistä, mikä vastaa kulkuneuvon rungon kääntymistä. On selvää, että jokainen gyroskooppi pystyy antamaan kääntymisnopeudet vain kahteen suuntaan, jotka ovat kohtisuorassa sen pyörimisakseliin nähden. Kun gyroskooppeja on kolme, käytetään jokaista niistä havaitsemaan kiertymiä vain yhden akselin ympäri.

Toinen teknologinen ratkaisu on niin sanottu *rengaslasergyroskooppi*, joka perustuu valon interferenssiin: Sagnacin[11] ilmiö, 1913. Laitteessa monokromaattinen laservalo kulkee renkaassa kahteen vastakkaiseen suuntaan. Ilman pyörähdysliikettä valo muodostaa *seisovan aallon*, jossa

11

[11] Georges Sagnac (1869–1928) oli ranskalainen fyysikko ja fysikaalisen optiikan tutkija.



KUVA 5.7. Sagnacin interferometriin perustuva rengaslasergyroskooppi.

solmut eivät liiku. Kuitenkin renkaan pienikin kiertoliike saa solmut kulkemaan renkaan sisällä vastakkaiseen suuntaan, jolloin tuloksena on, että ei-pyörivässä koordinaatistossa ne pysyvät paikoillaan.

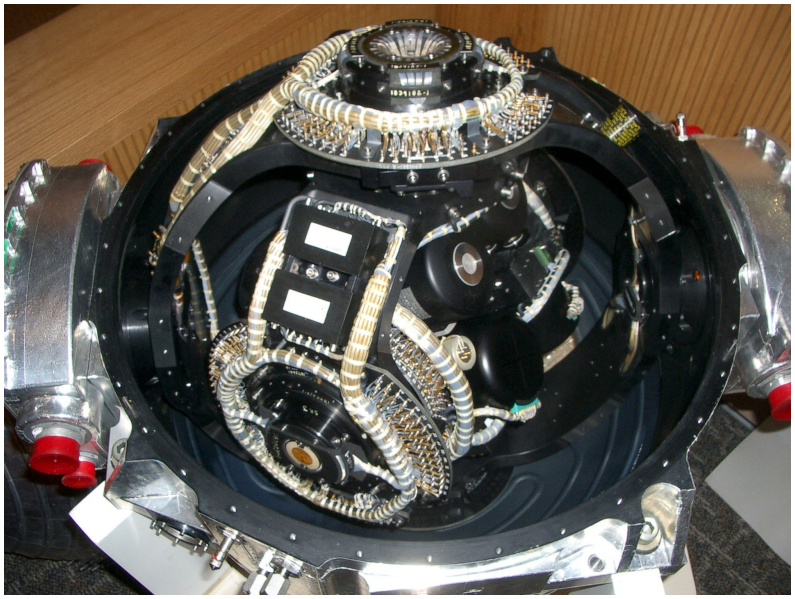
Yksinkertaisin tapa rakentaa rengaslaser on käyttää kiinteitä peilejä. Nykyisin käytetään usein pitkää valokuitua, joka on kelattu renkaan reunan ympärille tuhansia kertoja. Näin efekti monituhatkertaistuu ja herkkyys kasvaa. Saavutettava herkkyys on luokkaa 0,000 01 astetta tunnissa. MathPages, The Sagnac Effect.

5.3.2 *Vakautetun alustan ratkaisu*

Vakautetun alustan ratkaisussa koko gyroskooppijärjestelmä on ripustettu kolmiakselisen, vapaasti kääntyvän kardaanisen rengasjärjestelmän sisälle. Tämän ansiosta, vaikka kulkuneuvon asento vaihtelisi, gyroskooppinen kehikko säilyttää asentonsa avaruudessa.

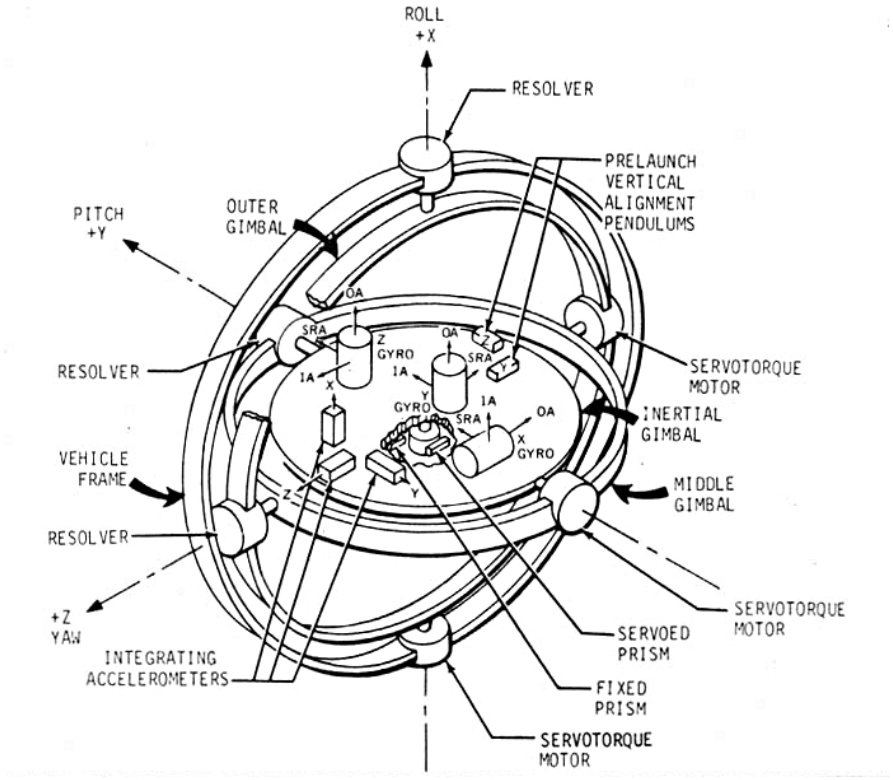
Kuvassa 5.8 on esitetty kolmiakselinen laite, jota käytettiin syvän avaruuden tehtävissä. Laitteella on kolme gyroskooppia sen asennon säilyttämiseksi inertiaalisen akseliston suhteen. Jokainen gyroskooppi on oman gyroskooppikokoonpanon sisällä. Kokoonpanon kotelo on piirretty pikkulieriönä.

Jokainen gyroskooppikokoonpano on itsenäinen yksikkö, joka on rakennettu reagoimaan vain kiertymiin yhden akselin eli syöttöakselin



(a)

Valokuva, Durbin (2004)



(b)

Kuvio, NASA. IA = *input axis*, syöttöakseli, OA = *output axis*, lähtöakseli ja SRA = *spin reference axis*, pyörimisakselin vertaussuunta

Kuva 5.8. Inertialaite ST-124. Tätä vakautettu alusta -tyyppistä laitetta käytettiin Saturnus V -kuuraketissa.

ympäri. Sitä kutsutaan myös yhden vapausasteen gyroskoopiksi, katso Jekeli (2001), kuva 3.1.

Tässä inertialaitteessa gyroskooppikokoonpanoja käytetään nollausantureina. Havaittu kiertymä syötetään takaisin vastaavalle "*servotorque*-moottorille" kiertymän nollaamiseksi, jotta sisäisen alustan, "*inertial gimbalin*", asento pysyy muuttumattomana inertiaalisessa avaruudessa. Koko laitteen lähtö koostuu kolmesta "*resolverien*" antamasta kulmasta, jotka ovat itse asiassa raketin rungon asentokulmat α_i, $i = 1, 2, 3$ inertiaalisessa avaruudessa.

Huomaa, että jokaisen gyroskoopin pyörimisakseli on kohtisuorassa gyroskooppikokoonpanon kotelon akseliin nähden. Kotelon akseli on myös gyroskoopin lähtöakseli (OA).

Terrestrisissä sovelluksissa käytetään inertiaalisen ei-pyörivän koordinaatiston sijasta *paikallista* kiinteään Maahan kiinnitettyä koordinaatistoa. Gyroskooppien akseleita pidetään samansuuntaisina toposentrisen koordinaatiston akselien kanssa:

- vaakatason suunnat x ja y
- ylös-suunta z.

Vaakatasossa olevien kahden gyroskoopin akselit eivät välttämättä osoita pohjoiseen ja itään, vaan kahteen muuhun suuntaan vaakatasossa. Nämä suunnat ovat keskenään kohtisuoria ja eroavat pohjoisesta ja idästä atsimuuttikulmalla α, joka muuttuu ajassa. Käsitteellisesti voi kuitenkin olla järkevä ajatella, että kyse on virtuaalisista "pohjoisen" ja "idän" gyroskoopeista[12].

Tämän lisäksi terrestrisissä sovelluksissa, mukaan lukien ilmailu, käytetään vain kahta vaakatasossa olevaa kiihtyvyysmittaria. Korkeudesta huolehditaan muilla tavoin, koska inertianavigoinnin tarkkuus ei pidemmällä aikavälillä riitä siihen.

Jotta vaakagyroskooppien akselit saadaan pidettyä vaakatasossa, gyroskooppikehikkoon kohdistetaan sopivia vääntöjä tähän tarkoitukseen suunniteltujen vääntötoimilaitteiden (engl. *torquers*) avulla. Tarvittavat väännöt voidaan laskea analogisesti tai digitaalisesti laitteen paikan ratkaisemisen yhteydessä. Lähestymistapa tunnetaan nimellä *Schulerin viritys*.

[12] Inertia-alustan suuntaus on itse asiassa mahdollista saada seuraamaan pohjoista, niin sanottu "*north-following*", kun gyroskooppeihin kohdistetaan sopiva vääntö, katso Jekeli (2001, alaosio 4.2.2) ja osio 5.10.

5.4 Inertianavigointi kiinteän Maan järjestelmässä

Vaihtoehtoinen lähde on Cooper (1987), sivut 104–107, jolla on hieman erilainen käsittelytapa.

5.4.1 *Maan pyörähdysliike*

Kirjoitetaan inertiaalinen paikkavektori $\mathbf{x}_{\beta'}$ Maan mukana pyörivän koordinaatiston paikkavektorin $\mathbf{x}_\beta$ funktioksi:

$$\mathbf{x}_{\beta'} = R(\theta)\,\mathbf{x}_\beta, \tag{5.9}$$

jossa θ on *Greenwichin tähtiaika*, maapallon asentoa avaruudessa kuvaava kulma. Sen aikaderivaatta $\omega_\oplus = \frac{d}{dt}\theta$ on Maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus.

Yhtälössä 5.9 sekä inertiaalisen että Maan mukana pyörivän koordinaatiston z-akselit osoittavat Maan pyörimisakselin suuntaan. Avaruusvektorit esitetään tavanomaisesti kahtena eri abstraktina vektorina, jotka koostuvat niiden komponenteista molemmissa koordinaatistoissa:

$$\mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\beta'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z \end{bmatrix}.$$

Kiertomatriisi näiden kahden koordinaatiston välillä on

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ja matriisin aikaderivaatta on (ketjusääntö):

$$\frac{d}{dt}R(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt}.$$

Differentiointi Leibnizin tulon derivoimissäännön avulla antaa nopeusvektorille

$$\mathbf{v}_{\beta'} = \frac{d}{dt}\mathbf{x}_{\beta'} = \frac{d}{dt}\left(R(\theta)\,\mathbf{x}_\beta\right) = R(\theta)\,\frac{d}{dt}\mathbf{x}_\beta + \left(\frac{d}{dt}R(\theta)\right)\mathbf{x}_\beta =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_\beta + \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Tässä toinen termi on

$$\left(\frac{d}{dt}R(\theta)\right)\boldsymbol{x}_\beta = \frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix} -x\sin\theta - y\cos\theta \\ x\cos\theta - y\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jos määritellään Maan kulmanopeus- eli pyörähdysvektoriksi

$$\boldsymbol{\omega}_\oplus = \boldsymbol{\omega}_{\oplus,\beta} = \boldsymbol{\omega}_{\oplus,\beta'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\oplus \end{bmatrix} = \frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

saadaan

$$R(\theta)\left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{x}_\beta \right\rangle = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left\langle \frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right\rangle =$$

$$= \frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d\theta}{dt}\begin{bmatrix} -x\sin\theta - y\cos\theta \\ x\cos\theta - y\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

sama tulos. Siis

$$\left(\frac{d}{dt}R(\theta)\right)\boldsymbol{x}_\beta = R(\theta)\left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{x}_\beta \right\rangle.$$

Seuraa, että

$$\boldsymbol{v}_{\beta'} = R(\theta)\,\boldsymbol{v}_\beta + R(\theta)\left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{x}_\beta \right\rangle. \tag{5.11}$$

Otetaan tilannekuva, kun inertiaaliset ja mukana pyörivät akselit ovat samansuuntaisia: $\theta = 0 \implies R(\theta) = I$, antaen

$$\boldsymbol{v}_{\beta'} = \boldsymbol{v}_\beta + \left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{x}_\beta \right\rangle \iff \boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} + \left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{x} \right\rangle.$$

Näin on tullut osoitetuksi tunnettu *tulos*:

> *Koordinaatiston kiertoliikkeen vaikutus vektorin aikaderivaattaan voidaan esittää kiertovektorin $\boldsymbol{\omega}_\oplus$ ristitulona sen vektorin kanssa.*

Tämä pätee yleisesti, esimerkiksi

$$\dot{R}(\theta)\,\boldsymbol{v} = R(\theta)\left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v} \right\rangle,$$
$$\dot{R}(\theta)\left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{x} \right\rangle = R(\theta)\left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{x} \right\rangle \right\rangle,$$

tulokset, joita käytetään seuraavasti. Yhtälön 5.11 toinen differentiointi antaa kiihtyvyyden:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\beta'} = R(\theta)\,\mathbf{a}_\beta + \dot{R}(\theta)\,\boldsymbol{v}_\beta + \frac{d}{dt}\Big(R(\theta)\,\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{x}_\beta\rangle\Big) = \\ = R(\theta)\,\mathbf{a}_\beta + R(\theta)\,\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v}_\beta\rangle + \\ + \Big(R(\theta)\,\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v}_\beta\rangle + \dot{R}(\theta)\,\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{x}_\beta\rangle\Big) = \\ = R(\theta)\Big(\mathbf{a}_\beta + 2\,\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v}_\beta\rangle + \Big\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{x}_\beta\rangle\Big\rangle\Big).\end{aligned}$$

Laittamalla taas $\theta = 0$ saadaan

$$\mathbf{a}_{\beta'} = \mathbf{a}_\beta + 2\,\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v}_\beta\rangle + \Big\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{x}_\beta\rangle\Big\rangle. \tag{5.12}$$

5.4.2 Kiihtyvyys

Pyörivällä maapallolla määritetty kolmiulotteinen geosentrinen koordinaatisto (x, y, z) ei ole inertiaalinen: kiihtyvyydelle pätee yhtälö 5.12. Symbolisesti kirjoitettuna:

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} + 2\,\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v}\rangle + \Big\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{x}\rangle\Big\rangle, \tag{5.13}$$

jossa

- $\mathbf{a}^*$ kiihtyvyys inertiaalisessa koordinaatistossa
- $\mathbf{a}$ kiihtyvyys Maan pintaan nähden, ”mukana pyörivässä” kiinteän Maan koordinaatistossa
- $\boldsymbol{\omega}_\oplus$ Maan pyörähdysvektori, vakio aksiaalivektori, joka on suunnattu pyörähdys- eli z-akselia pitkin
- $\boldsymbol{v}$ nopeus samassa Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa
- $\mathbf{x}$ kulkuneuvon geosentrinen sijainti.

Yhtälössä 5.13 toinen termi oikealla on niin sanottu *corioliskiihtyvyys* ja kolmas termi on *keskipakoiskiihtyvyys*.

5.4.3 Inertianavigoinnin perusyhtälö

Kiihtyvyysmittarit mittaavat käytännössä paikallisen painovoiman ja kulkuneuvon geometristen liikkeiden *yhteisvaikutusta*. Toisin sanoen *kulkuneuvossa* mitattu kiihtyvyys on inertiaalisessa koordinaatistossa

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^* - \mathbf{g}^*(\mathbf{x}), \tag{5.14}$$

eli käyttäen yhtälöä 5.13,

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \overbrace{2\left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v} \right\rangle}^{\text{corioliskiihtyvyys}} + \overbrace{\left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{x} \right\rangle \right\rangle}^{\text{keskipakoiskiihtyvyys}} - \mathbf{g}^*(\mathbf{x}),$$

jossa

$\tilde{\mathbf{a}}$ kulkuneuvossa mitattu kiihtyvyysvektori. Tämä on $-\tilde{\mathbf{g}}$, kulkuneuvossa havaitun "painovoiman" vastaluku[13]

$\mathbf{a}^*$ kiihtyvyys inertiaalisessa koordinaatistossa

$\mathbf{a}$ kiihtyvyys Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa

$\mathbf{g}^*(\mathbf{x})$ *gravitaation* (vetovoiman) kiihtyvyys paikan $\mathbf{x}$ funktiona eli vapaan putoamisen kiihtyvyys inertiaalisessa koordinaatistossa.

Pallosymmetriselle maapallolle $\mathbf{g}^*$ voidaan laskea suoraan Newtonin gravitaatiolaista:

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}) \approx -GM_\oplus \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3},$$

mutta myös monimutkaisemmat mallit kelpaavat: esimerkiksi pyörähdysellipsoidinen normaalikenttä, jossa Maan litistyneisyyden vaikutus on mukana, ja jopa hyvin yksityiskohtaiset Maan gravitaatiokentän mallit, kuten EGM2008 (Earth Gravity Model 2008).

Kirjoitetaan

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^* - \left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{x} \right\rangle \right\rangle, \tag{5.15}$$

jossa $\mathbf{g}$ on *painovoimavektori*, gravitaation ja keskipakoiskiihtyvyyden yhteisvaikutus eli vapaan putoamisen kiihtyvyys Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa. Silloin

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + 2\left\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v} \right\rangle - \mathbf{g}(\mathbf{x}). \tag{5.16}$$

Yhtälöjä 5.14 ja 5.16 kutsutaan molempia *inertianavigoinnin perusyhtälöksi*. Molemmat mahdollistavat sijainnin $\mathbf{x}$, nopeuden $\boldsymbol{v}$ ja kiihtyvyyden $\mathbf{a}$ yhtaikaisen integroinnin dynaamisesti, siis "lennossa", edellyttäen, että ulkopuolinen kenttä $\mathbf{g}$ tai $\mathbf{g}^*$ on annettuna ja että kulkuneuvossa mitataan kiihtyvyyttä $\tilde{\mathbf{a}}$.

[13] On tärkeää ymmärtää tämä. Kiihtyvyys $\tilde{\mathbf{a}} = -\tilde{\mathbf{g}}$ kiihtyvyysantureiden havaitsemana edustaa *kulkuneuvon* kiihtymistä vapaasti putoavan koordinaatiston suhteen. Painovoima $\tilde{\mathbf{g}} = -\tilde{\mathbf{a}}$ painovoima-antureiden havaitsemana edustaa vapaan putoamisen kiihtyvyyttä *kulkuneuvon sisällä* sen kappalekoordinaatiston suhteen. Toisin sanoen kyseessä on kulkuneuvon sisällä toimiva pseudovoima.

Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa planeetamme pyörähdysliike aiheuttaa kiihtyvyysmittareiden havaitseman painovoimavektorin hidasta kääntymistä itä-länsisuunnassa gyroskooppien määräämien inertiaalisuuntien suhteen, vaikka kulkuneuvo seisoisi maassa.

Ilmiötä käytetään gyroskooppikehikon suuntaamiseksi oikein paikalliseen pohjoissuuntaan nähden, ennen esimerkiksi lentokoneen nousua ilmaan tai raketin laukaisua. Vastaavasti ilmiötä voidaan käyttää paikallisen pohjoissuunnan ratkaisemiseksi gyroskooppien kehikon järjestelmässä. Lisäksi kiihtyvyysanturit antavat heti paikallisen painovoiman eli luotiviivan suunnan. Yhdessä kaksi suuntaa riittävät koko kehikon suuntaamiseksi — paitsi pohjois- tai etelänavalla.

5.5 Vakautettu alusta

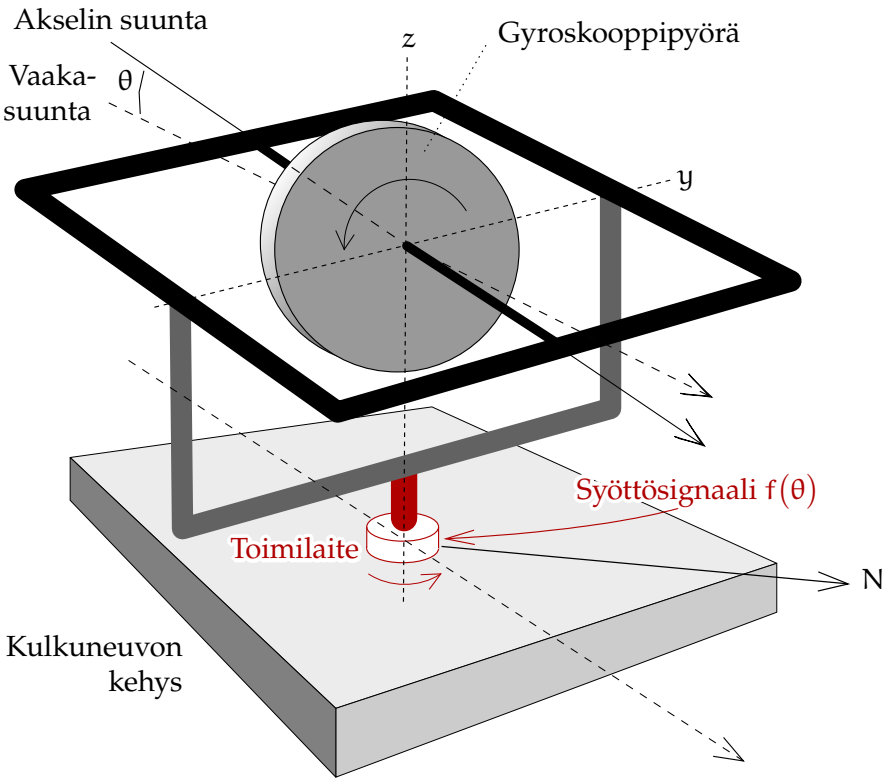
Tutkitaan ensin *vakautettu alusta*. Se toteutetaan gyroskoopilla, joka on kiinnitetty kehikkoon, joka pidetään paikallisen horisontin suuntaisena. Vakautettu alusta toimii esimerkiksi meri- tai ilmagravimetrin alustana, koska kojeen mittausakselin on oltava koko ajan paikallisen luotiviivan suuntainen muutaman kaariminuutin tarkkuudella.

Vakautetun alustan ratkaisussa käytetään palautesilmukkaa nimeltä *Schulerin silmukka*. Näin saadaan ohjattua gyroskoopin pyörimisakselin suuntaa siten, että sen, ja sen sisältävän sisäisen renkaan, suunta seuraa vaakatasoa. Tämä tapahtuu sillä tavalla, että gyroskoopin kehyksen kääntämisyritys vaakatasossa — kehyksen pystyakselin ympäri — aiheuttaa gyroskoopin *prekessioilmiön*: gyroskoopin oma pyörimisakseli kääntyy alas- tai ylöspäin.

Vakautettu alusta edellyttää *sopivaa anturia*, joka havaitsee, että gyroskoopin akseli poikkeaa vaakatasosta kulman θ verran. Anturi lähettää kulmaan θ liittyvän signaalin $f(\theta)$ palautesilmukan kautta pystyakselin moottorille eli *toimilaitteelle*, kuva 5.9. Tällaisen silmukan rakentaminen, joka toimii hyvin kulkuneuvon liikkuessa, on haaste, ja aiheen käsittelyä lykätään osioon 5.7.

Kun laite seisoo kiinteän Maan pinnalla, asia on helpompi. Oleta, että vääntö pystyakselin ympäri tehdään yksinkertaisesti verrannolliseksi gyroskoopin havaittuun akselin poikkeamaan θ vaakatasosta. Silloin tämän poikkeaman θ muutos ajassa on

$$\frac{d\theta}{dt} = -k_1\theta,$$



KUVA 5.9. Vakautetun alustan periaate. Syöttösignaali aiheuttaa prekessioliikkeen, joka pitää gyroskoopin akselin suunnan vaakatasossa. Tavanomaisesti pystysuoraa akselia eli z-akselia, jonka ympäri kohdistuu vääntöä, kutsutaan syöttöakseliksi ja vaakasuoraa y-akselia, jonka ympäri syntyy prekessiota, lähtöakseliksi.

ratkaisuna

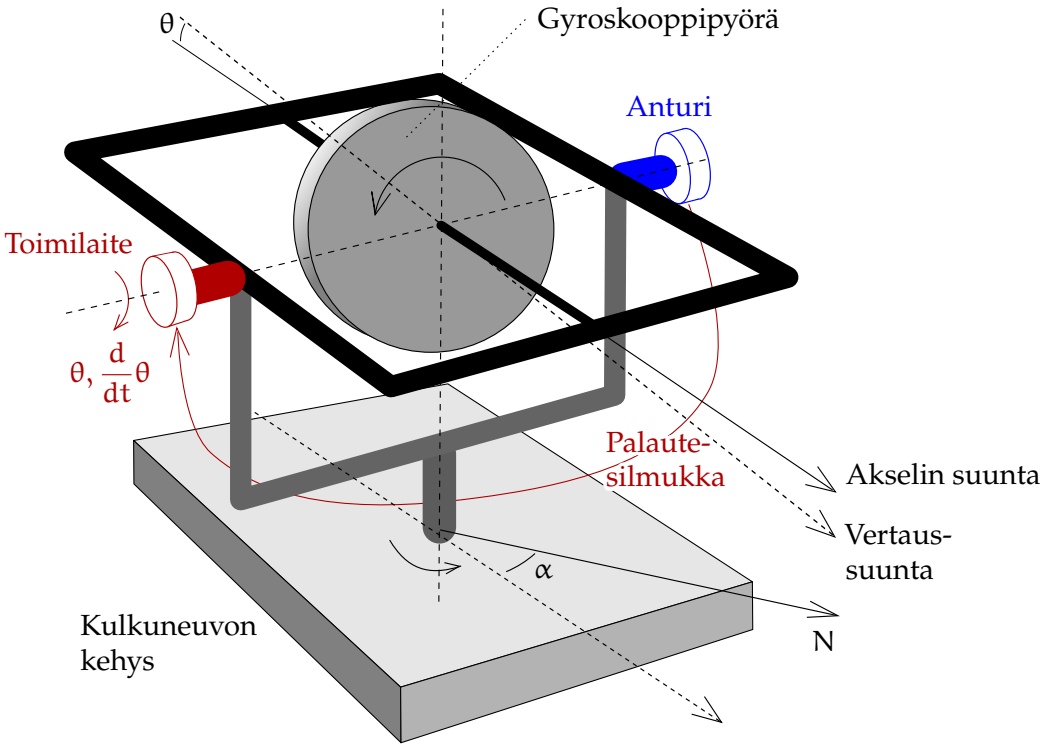
$$\theta(t) = \theta(t_0)\, e^{-k_1(t-t_0)},$$

siis poikkeama menee eksponentiaalisesti nollaan. Virittämällä palautesilmukan vakio k_1 saadaan tämä tapahtumaan sopivan nopeasti. Tätä tekniikkaa voidaan käyttää vakautetun alustan tasaamiseksi ennen lentoon lähtöä.

5.6 Hyrräkompassi

Hyrräkompassin kuvassa 5.10 näkyvä palautesilmukka käyttää hyväkseen *Maan pyörähdysliikettä*. Koska Maa pyörii akselinsa ympäri, kallistuu horisonttitaso koko ajan. Itäinen horisontti vajoaa, läntinen horisontti nousee. Pyörivä ja vapaasti ripustettu gyroskooppi, jonka pyörimisakseli oli alun perin vaakatasossa, ei ole enää vaakatasossa jonkin ajan kuluttua.

Jos Maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus on $\omega_\oplus$, on kulman θ



KUVA 5.10. Hyrräkompassin periaate. Palautesilmukka tuottaa prekessioliikkeen, joka saa gyron pyörimisakselin kääntymään pohjoiseen.

aikaderivaatta tämän ilmiön takia

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_\oplus \cos\varphi \sin\alpha,$$

jossa φ on leveysaste ja α gyroskoopin pyörimisakselin atsimuutti. fii φϕΦ

Palautesilmukka saa anturilta kulman θ *aikaderivaatan* $\frac{d}{dt}\theta$ ja syöttää sen sopivasti vahvistettuna aktuaattoriin eli toimilaitteeseen. Kun toimilaite yrittää kääntää gyroskoopin akselin takaisin vaakatasoon, on lopputulos *prekessio* pystyakselin ympäri: α muuttuu. Kirjoitetaan yhtälö

$$\frac{d\alpha}{dt} = -k_2 \frac{d\theta}{dt} = -k_2 \omega_\oplus \cos\varphi \sin\alpha \qquad (5.17)$$

jossa k_2 oletetaan positiiviseksi. Jos α on riittävän pieni, $\sin\alpha \approx \alpha$ ja ratkaisu on

$$\alpha(t) \approx \alpha(t_0)\, e^{-k_2 \omega_\oplus (t-t_0)\cos\varphi}.$$

Toisin sanoen α menee eksponentiaalisesti ja asymptoottisesti nollaan, ja *gyroskoopin akseli kääntyy pohjoiseen*. Näin toimii hyrräkompassi. Tämä tietysti edellyttää, että laite pysyy samalla paikalla tasattuna tai käytännössä liikkuu vain hitaasti, esimerkiksi laivalla.

Yleisempi tapa rakentaa toimiva hyrräkompassi on käyttää itse kulmaa θ sen aikaderivaatan lisäksi. Jos kirjoitetaan

$$\frac{d\alpha}{dt} = -k_3\theta,$$

saadaan differentioimalla

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k_3\frac{d\theta}{dt} = -k_3\omega_\oplus \cos\varphi \sin\alpha \approx -k_3\omega_\oplus \cos\varphi \cdot \alpha.$$

Tämä on *harmonisen värähtelijän* yhtälö, jonka eräät ratkaisut ovat

$$\alpha(t) = \cos\left(t\sqrt{k_3\omega_\oplus \cos\varphi}\right), \qquad \alpha(t) = \sin\left(t\sqrt{k_3\omega_\oplus \cos\varphi}\right).$$

Valitettavasti nämä ratkaisut ovat jaksollisia, eivätkä ne suppene pohjoissuuntaan $\alpha = 0$. Paras ratkaisu saadaan yhdistämällä θ ja $\frac{d}{dt}\theta$ seuraavalla tavalla:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k_2\,\omega_\oplus \cos\varphi\frac{d\alpha}{dt} - k_3\,\omega_\oplus \cos\varphi \cdot \alpha$$

eli

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_\oplus \cos\varphi\left(k_2\frac{d\alpha}{dt} + k_3\,\alpha\right) = 0.$$

Tämä on yleinen toisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö. Riippuen kertoimista k_2 ja k_3 sillä on aaltomaisia, eksponentiaalisesti vaimennettuja tai *kriittisesti vaimennettuja* ratkaisuja, katso Wikipedia, Damping ratio. Viimeksi mainittu vaihtoehto on paras kompassin toimivuuden kannalta.

Jos värähtelyn sirkulaarinen taajuus on $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k_3\,\omega_\oplus \cos\varphi}$ ja

$$k_2 = \frac{2\omega}{\omega_\oplus \cos\varphi},$$

saadaan kriittisesti vaimennettu tapaus

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\omega\frac{d\alpha}{dt} + \omega^2\alpha = 0,$$

jonka yleinen ratkaisu on

$$\alpha(t) = (a + bt)\,e^{-\omega t},$$

jossa a ja b ovat mielivaltaisia, alkuehtojen määrittämiä vakioita.

Usein k_3, harmoninen palautuskerroin, toteutetaan kiinnittämällä jäykästi gyroskooppikehikon sisäiseen renkaaseen painava puolirengas, joka ulottuu alaspäin. Paino yrittää vetää gyroskoopin pyörimisakselin takaisin vaakatasoon. Vaimennuskerroin k_2 puolestaan toteutetaan perinteisesti käyttämällä tahmeaa nestettä sisäisen renkaan laakereissa.

5.7 Schulerin heiluri

5.7.1 *Periaate*

Schulerin[14] *heiluri* on heiluri, jonka pituus on sama kuin Maan säde R. Jos sellainen heiluri olisi käytännössä mahdollinen, esimerkiksi massana pitkän massattoman sauvan päässä, sen jakso olisi (yhden g:n painovoimakentässä!)

$$P_{\text{Schuler}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

jossa g on painovoima Maan pinnalla.

Tämä jakso, Schulerin jakso, $P_{\text{Schuler}} = 84{,}4$ minuuttia, on sama kuin Maan pinnan tuntumassa Maata kiertävän satelliitin rataperiodi — jos ilmakehää ei olisi olemassa.

Vaikka näin pitkää heiluria ei voida rakentaa, voidaan kuitenkin ajatella heiluria, jonka jakso on P_{Schuler}. Tällainen voisi olla esimerkiksi laaja kappale, jonka ripustuspiste on hyvin lähellä sen massakeskipistettä[15].

Kaiken yksinkertaisin heiluri on massa massattoman sauvan päässä. Olkoon sen pituus ℓ. Jos se heiluu pois pystysuunnasta kulman[16] θ verran, on palauttava voima

$$F = mg\sin\theta,$$

ja kun sen massa on m, voidaan sen kiihtyvyys laskea Newtonin toisen lain avulla:

$$m\frac{d^2(-\theta\ell)}{dt^2} = mg\sin\theta \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{\ell}\theta, \tag{5.18}$$

värähtely-yhtälö, jonka eräs ratkaisu on

$$\theta(t) = \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right),$$

josta seuraa jakso

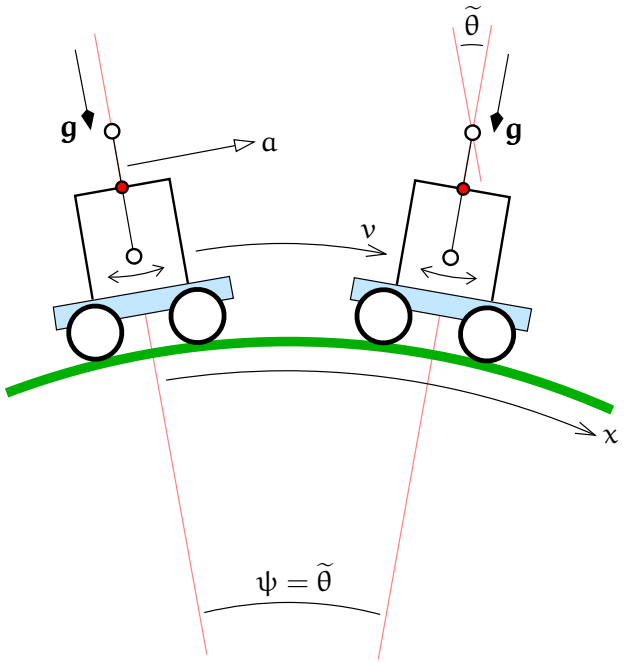
$$P = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

---

[14] Maximilian Joseph Johannes Eduard Schuler (1882–1972) oli saksalainen navigointiteknologian pioneeri, Wikipedia, Max Schuler.

[15] Valitettavasti ei edes tämä toimi. Kuten Schuler jo osoitti, ripustuspisteen ja heilurin massakeskipisteen välisen etäisyyden olisi oltava kohtuullisen kokoisen heilurin tapauksessa alle mikrometri.

[16] Yhdenmukaisuuden takia muiden kulmien kanssa kulma θ lasketaan positiiviseksi negatiiviselle lineaariselle massan siirtymälle.



KUVA 5.11. Yksiulotteinen vaunu Schulerin heilureineen kulkee kaarevan Maan pinnalla.

5.7.2 *Heiluri vaunulla*

Laitetaan tämä heiluri vaunulle, joka liikkuu vaakasuuntaan lineaarisella kiihtyvyydellä $a(t)$. Heilurin massa kokee vaunun koordinaatistossa samansuuruisen vastakkaisen kiihtyvyyden $-a(t)$. Koska heilurin pituus on ℓ, sen kulmakiihtyvyys on

$$\frac{d^2\tilde{\theta}}{dt^2} = \frac{1}{\ell}\left(a - g\cdot(\tilde{\theta} - \psi)\right).$$

Tässä $\tilde{\theta}$ on heilurin poikkeama *lähtöpisteen* luotiviivan suunnasta.

Vaunun kulkema matka ajan funktiona on $x(t)$. Tämä lineaarinen etäisyys liittyy kiihtyvyyteen näin:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a(t).$$

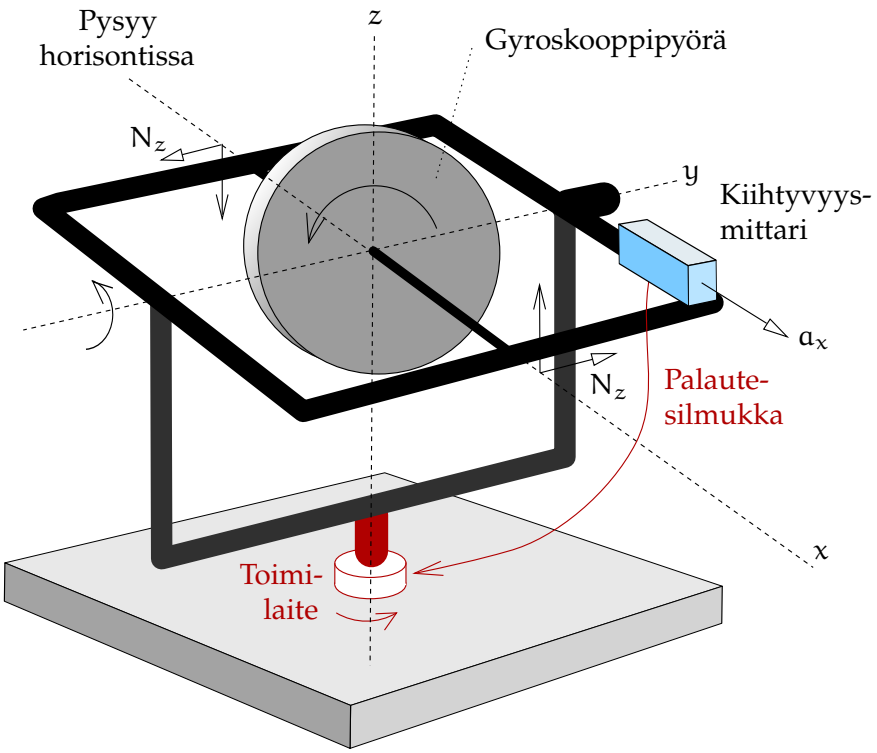
psii $\psi\Psi$

Sama matka ilmaistuna *geosentrisenä kulmaetäisyytenä* eli kulmana ψ Maan keskipisteestä katsottuna on $\psi(t) = {}^{x(t)}/_{R}$. Tämä suure, joka edustaa myös paikallisen luotiviivan muutosta matkan varrella, noudattaa differentiaaliyhtälöä

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{1}{R}a(t). \tag{5.19}$$

Vähennys antaa

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\tilde{\theta} - \psi\right) = \frac{1}{\ell}\left(a - g(\tilde{\theta} - \psi)\right) - \frac{a}{R}.$$



KUVA 5.12. Schulerin palautesilmukka x-suunnassa.

Nyt oleta, että heilurin pituus $\ell = R$. Silloin, jos $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\theta} - \psi$, seuraa

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{R}\theta(t). \tag{5.20}$$

Tässä θ on kulma heilurin ja *paikallisen* luotiviivan välillä. Yhtälö 5.20 on identtinen heiluriyhtälön 5.18 kanssa.

Eräs yhtälön 5.20 ratkaisu on $\theta = 0$ identtisesti. Siis:

> *Vaikka vaunu liikkuu ja kiihtyy vaakasuuntaan, heiluri osoittaa koko ajan Maan keskipisteeseen.*

Tämä on Schulerin heiluria määrittelevä ominaisuus.

5.7.3 *Toteutus inertialaitteessa*

Vakautettuun alustaan perustuva inertialaite toteuttaa paria palautesilmukkaa eli *Schulerin silmukkaa*, jotka saavat koko gyroskooppikehikon käyttäytymään Schulerin heilurin tavoin. Aina kun kehikko kääntyy pois vaakatasosta, vaakasuuntien x ja y kiihtyvyysmittarit mittaavat painovoiman $\mathbf{g}$ projektiota kallistuvaan tasoon ja lähettävät korjausimpulssit vastaaviin gyroskooppikehikon toimilaitteisiin. Näin kehikko seuraa paikallista vaakatasoa.

Yhtälön 5.19 mukaan

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{1}{R}a(t), \tag{5.19}$$

jossa $a(t)$ on x-suunnan lineaarinen kiihtyvyys ja R maapallon säde. Kulmafunktio $\psi(t)$ kuvaa, miten paikallinen luotiviivan suunta muuttuu matkan varrella.

Gyroskoopin roottorin pyörähdysmomentti on yhtälön 5.7 mukaan

$$L = L_x = J_x\omega, \tag{5.21}$$

jossa J_x on roottorin hitausmomentti sen pyörimisakselin ympäri ja ω on sen pyörähdysnopeus. Tässä oletetaan, että gyroskoopin pyörimisakseli on horisonttitasossa (x, y), tarkemmin x-akselin suunnassa.

Kuvassa 5.12 piirretyssä geometriassa

$$\mathbf{L} = L_x\mathbf{i} + L_y\mathbf{j} + L_z\mathbf{k} \approx J_x\omega\mathbf{i} + L_y\mathbf{j} + L_z\mathbf{k},$$

jossa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ on (x, y, z)-koordinaatiston ortonormaali kanta. Oletetaan, että vektorit $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ ovat lähtöpisteen horisontin tasossa ja $\mathbf{k}$ osoittaa ylöspäin.

Gyroskooppiakselin absoluuttisen suunnan muuttumisen kokonaismäärä laskettuna lähtöpisteestä on $\tilde{\theta} = \theta + \psi$. Laske yhteen yhtälöt 5.20 ja 5.19:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\theta(t) &= -\frac{g}{R}\theta(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}\psi(t) &= \frac{1}{R}a(t) \end{aligned}\right\} \implies \frac{d^2}{dt^2}\tilde{\theta}(t) = \frac{1}{R}\overbrace{(a(t) - g\,\theta(t))}^{\tilde{a}(t)}. \tag{5.22}$$

Kulmat θ, ψ ja $\tilde{\theta}$ oletetaan pieniksi. Nyt gyroskooppiakselin suunnan muutoksen $\tilde{\theta}$ toteuttaminen merkitsee yhtälön 5.21 kanssa z-akselin pyörähdysmomentin muutosta[17]

$$L_z = -\tilde{\theta}L = -\tilde{\theta}J_x\omega.$$

Kulman $\tilde{\theta}$ toinen derivaatta on

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{\theta} = -\frac{1}{J_x\omega}\frac{d^2}{dt^2}L_z.$$

Yhtälön 5.22 kanssa:

$$\frac{d^2}{dt^2}L_z = -J_x\omega\frac{d^2}{dt^2}\tilde{\theta} = -\frac{J_x\omega}{R}\tilde{a} \implies \frac{d}{dt}L_z = -\frac{J_x\omega}{R}\int \tilde{a}(t)\,dt.$$

[17] Oletus on, että vektori $\boldsymbol{\omega}$ osoittaa positiivisen x-akselin suuntaan.

Yhtälön 5.2 mukaan

$$N_z = \frac{d}{dt}L_z = -\frac{J_x\omega}{R}\int \tilde{a}(t)\,dt. \tag{5.23}$$

Yhtälössä 5.23 N_z on tarvittava vääntö z-akselin ympäri, katso kuva 5.12. Näin Schulerin silmukka toteutetaan.

Yhtälössä 5.23 mitattu kiihtyvyys on $\tilde{a} = a - g\theta$, jossa a on geometrinen kiihtyvyys ja $g\theta$ painovoiman komponentti, joka toimii gyroskooppiakselin suuntaan.

Yhtälön 5.23 mukaisesti Schulerin silmukka toteutetaan joko laitteistotasolla — vanhemmissa laitteissa kerroin $-J_x\omega/R$ on laitevakio ja käytetään analogista laitteistotason integraattoria[18] — tai inertialaitteen ohjelmistossa. Aina on *kaksi* Schulerin silmukkaa, yksi x-suuntaa ja yksi y-suuntaa varten.

[18]

5.8 Mekanisointi

Koska tosielämän inertialaite on aika lailla monimutkaisempi kuin yksinkertaiset periaatteet, on laitteiston kaikkien osien käyttäytyminen mallinnettava huolellisesti. Tätä mallinnusta kutsutaan inertialaitteen *mekanisoinniksi*.

Yksinkertaisena mekanisoinnin esimerkkinä esitetään yksiulotteinen vaunu pallon muotoisen Maan pinnalla, kuva 5.11.

Määritelmän mukaisesti nopeus on

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t).$$

Kiihtyvyyttä *mitataan* jatkuvasti kiihtyvyysanturilla. Mittausarvo on $\tilde{a}(t)$. Tämä mittasuure, joka on ajan funktio, koostuu kahdesta osasta:

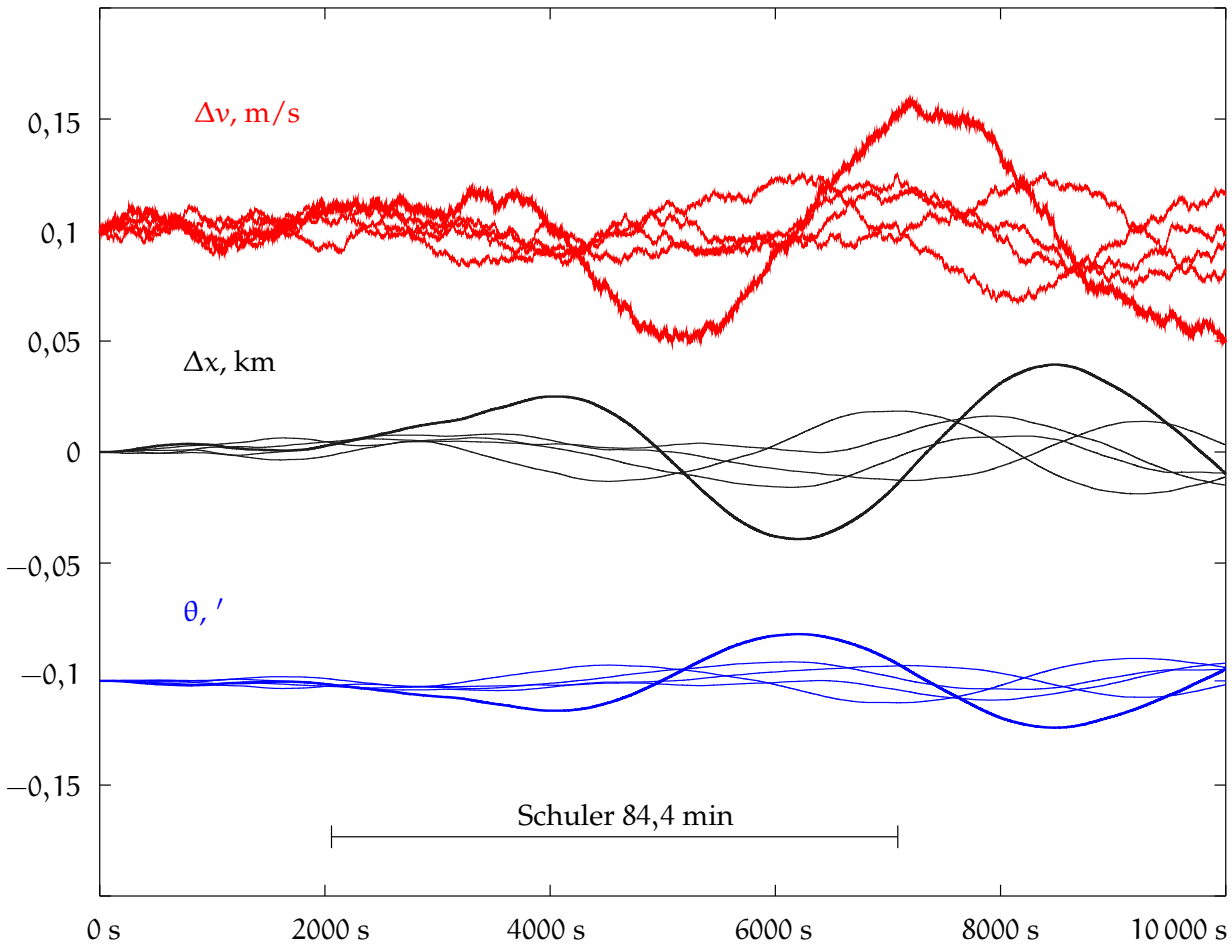
- geometrinen kiihtyvyys,
$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$$
- painovoimavektorin projektio kiihtyvyysmittarin akselille, $g\,\theta(t)$, jossa $\theta(t)$ on vaunun kallistuskulma paikallisesta pystysuunnasta eli luotiviivan suunnasta.

Tulos on

$$\frac{dv(t)}{dt} = \tilde{a}(t) + g\,\theta(t), \tag{5.24}$$

jossa funktio $\tilde{a}(t)$ on jatkuvan mittausprosessin tuottama.

[18] Esimerkiksi osiossa 5.2.2 esitetty integroiva gyroskooppipohjainen kiihtyvyysmittari.



KUVA 5.13. Virheiden kasautuminen yhtälön 5.27 yksiulotteisen mekanisoinnin mukaan. Käytetyt arvot ovat: $\underline{n}_a$ on $\pm 100\,\mathrm{mGal}$, $\underline{n}_g = 0$. Δv- ja θ-käyrät on siirretty selkeyden vuoksi.

Lopuksi käsitellään Schulerin silmukkaa. Kallistuskulma θ käyttäytyy Schulerin heilurin tavoin ja yrittää palautua nollaan yhtälön 5.20 mukaisesti:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{R}\theta(t). \tag{5.20}$$

Seuraavaksi *linearisoidaan*. Määritellään *likiarvot*, ajan funktiot $x^{(0)}(t)$ ja $v^{(0)}(t)$ sekä erotussuureet $\Delta x(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) - x^{(0)}(t)$ ja $\Delta v(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t) - v^{(0)}(t)$, seuraavasti:

$$\frac{dx^{(0)}(t)}{dt} = v^{(0)}(t), \quad \frac{dv^{(0)}(t)}{dt} = \widetilde{a}(t), \tag{5.25}$$

jossa $\widetilde{a}(t)$ oletetaan jatkuvasti mitatuksi[19], ja

$$\frac{d\,\Delta x(t)}{dt} = \Delta v(t), \quad \frac{d\,\Delta v(t)}{dt} = g\,\theta(t).$$

[19] Lienee sopivaa määritellä tämä mitattu $\widetilde{a}(t)$ ja kaikki siitä johdetut suureet stokastisiksi. Emme tee sitä, mutta katso $\underline{n}_a$ yhtälössä 5.27.

Nyt yhtälöön 5.20 voidaan sijoittaa

$$g\,\theta(t) = \frac{d\,\Delta v(t)}{dt},$$

tuloksena

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{1}{R}\frac{d\,\Delta v(t)}{dt}.$$

Integroimalla — siis jättämällä pois yksi $\frac{d}{dt}$ molemmilta puolilta — saadaan

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{R}\Delta v(t), \tag{5.26}$$

ja kokonaiseksi Kalmanin suotimen dynaamiseksi malliksi saadaan

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta \underline{x}\\ \Delta \underline{v}\\ \underline{\theta}\end{bmatrix}}^{\underline{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & g\\ 0 & -1/R & 0\end{bmatrix}}^{F}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta \underline{x}\\ \Delta \underline{v}\\ \underline{\theta}\end{bmatrix}}^{\underline{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix}0\\ \underline{n}_a\\ \underline{n}_g\end{bmatrix}}^{\underline{n}}. \tag{5.27}$$

Tähän on lisätty mahdolliset (stokastiset) kiihtyvyysanturin ja gyroskoopin kohinatermit $\underline{n}_a, \underline{n}_g$.

Ratkaisu toimii sillä tavalla, että lasketaan jatkuvasti ja tarkasti integroimalla tosiajassa liki- eli vertausarvot $v^{(0)}(t)$ ja $x^{(0)}(t)$, yhtälöt 5.25, ja Kalmanin suotimen 5.27 avulla integroidaan $\Delta\underline{x}(t)$, $\Delta\underline{v}(t)$ ja $\underline{\theta}(t)$.

Kuvassa 5.13 nähdään, miten nämä suureet Δx, Δy ja θ käyttäytyvät ajassa. Heilahteleva käyttäytyminen Schulerin aikaskaalalla on ilmeinen: ratkaisussa sekä vaunun kallistuskulma θ että nopeuspoikkeama Δv — sekä paikkapoikkeama Δx — heilahtelevat harmonisesti Schulerin heilurin tavoin[20], jaksona $P_{Schuler} = 84{,}4$ minuuttia. Korkeus on saatava muulla tavoin, esimerkiksi lentokoneessa ilmanpaineanturin avulla.

5.9 Maan pinnalla kahdessa ulottuvuudessa

Sama asia on yleistettävissä kahteen ulottuvuuteen. Näin voidaan rakentaa ”navigaattori”, joka toimii Maan pinnalla. Jokainen yhtälön 5.27 tilavektorin alkio tulee tuplata pohjois- ja itäkomponenteiksi.

[20] Jos kulman θ amplitudi on vaikkapa $A_\theta = 1' = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ rad, seuraa yhtälöstä

$$\frac{d\,\Delta v}{dt} = g\theta,$$

että

- Δv:n amplitudi on $A_{\Delta v} = g\sqrt{R/g}\,A_\theta = 2{,}3\,\mathrm{m/s}$
- Δx:n amplitudi on $A_{\Delta x} = \sqrt{R/g}\,A_{\Delta v} = 1855\,\mathrm{m}$.

TAULU 5.1. Mekanisoinnin simulointi yhdessä ulottuvuudessa, `octave`-koodi.

```
s = [1:10000];

x(s) = 0;
v(s) = 0;
th(s) = 0;

g = 9.8; R = 6378137;

for j = 1:5
  for i=1:9999
    v(i+1) = v(i) + g*th(i) + 0.001*(rand() - 0.5);
    x(i+1) = x(i) + v(i);
    th(i+1) = th(i) - v(i)/R + 0.00000000*(rand() - 0.5);
  endfor
  hold on
  plot(s, 0.001*x, 'b');
  plot(s, v + 0.1, 'c');
  plot(s, 57*60*th - 0.1, 'm');
endfor

print -dpdf "schuler.pdf"
```

lambda λΛ

Koska maantieteelliset koordinaatit φ ja λ ovat globaalissa käytössä käytännöllisempiä kuin karttakoordinaatit x_{pohj} ja $x_{\text{itä}}$, tehdään seuraavat sijoitukset. Korvaa Δx_{pohj} leveysasteella $\Delta\varphi = \Delta x_{\text{pohj}}/M$ ja $\Delta x_{\text{itä}}$ pituusasteella $\Delta\lambda = \Delta x_{\text{itä}}/N\cos\varphi$. Saadan linearisoiduiksi derivaatoiksi

$$\frac{d}{dt}\Delta\varphi = \frac{1}{M}\Delta v_{\text{pohj}}, \quad \frac{d}{dt}\Delta\lambda = \frac{\Delta v_{\text{itä}}}{N\cos\varphi},$$

ja unohdetaan suureen $\Delta\lambda$ riippuvuutta leveysasteesta φ funktion $\cos\varphi$ kautta. $N(\varphi)$ ja $M(\varphi)$ ovat vertausellipsoidin poikittainen ja meridiaanin kaarevuussäde. Jos korkeus merenpinnalta eroaa nollasta, N ja M tulisi korvata arvoilla $N + h$ ja $M + h$, jossa h on korkeus vertausellipsoidin yläpuolella. Molempien lievä riippuvuus leveysasteesta φ sivuutetaan.

Hypätään kevyesti sen tosiseikan yli, että riippuen toteutuksesta todellisten vaakagyroskooppien ja kiihtyvyysmittareiden akselit eivät välttämättä osoita pohjoiseen ja itään.

Pohjois- ja itäsuuntien *kääntyminen*, kun matkustaa pituussuunnassa vaatii erityiskäsittelyä. Naiivisti nopeuden yhtälö 5.24 kirjoitettaisiin muotoon

$$\frac{d}{dt}v_{\text{pohj}} = \tilde{a}_{\text{pohj}} + g\,\theta_{\text{pohj}}, \quad \frac{d}{dt}v_{\text{itä}} = \tilde{a}_{\text{itä}} + g\,\theta_{\text{itä}},$$

mutta se olisi liian yksinkertainen. On olemassa lisätermejä:

$$\frac{d}{dt}v_{pohj} = \tilde{a}_{pohj} + g\,\theta_{pohj} - v_{itä}\frac{d}{dt}\alpha,$$
$$\frac{d}{dt}v_{itä} = \tilde{a}_{itä} + g\,\theta_{itä} + v_{pohj}\frac{d}{dt}\alpha,$$

jossa α on suunta eli atsimuuttikulma laskettuna pohjoissuunnasta myötäpäivään.

Kulmat θ_{pohj} ja $\theta_{itä}$ ovat kallistuskulmat pohjoiseen ja itään paikallisen luotiviivan suhteen, yhtälö 5.26. Kallistuskulmille löytyvät samanlaiset lisätermit ja lisäksi Maan pyörähdysliikkeen termi:

$$\frac{d}{dt}\theta_{pohj} = -\frac{1}{M}\Delta v_{pohj} - \theta_{itä}\frac{d}{dt}\alpha,$$
$$\frac{d}{dt}\theta_{itä} = -\frac{1}{N}\Delta v_{itä} + \theta_{pohj}\frac{d}{dt}\alpha - \omega_{\oplus}\cos\varphi.$$

Vastaavat deltayhtälöt ovat

$$\frac{d}{dt}\Delta v_{pohj} = g\,\Delta\theta_{pohj} - \Delta v_{itä}\frac{d}{dt}\alpha,$$
$$\frac{d}{dt}\Delta v_{itä} = g\,\Delta\theta_{itä} + \Delta v_{pohj}\frac{d}{dt}\alpha,$$
$$\frac{d}{dt}\Delta\theta_{pohj} = -\frac{1}{M}\Delta v_{pohj} - \Delta\theta_{itä}\frac{d}{dt}\alpha,$$
$$\frac{d}{dt}\Delta\theta_{itä} = -\frac{1}{N}\Delta v_{itä} + \Delta\theta_{pohj}\frac{d}{dt}\alpha + \omega_{\oplus}\sin\varphi\,\Delta\varphi.$$

Atsimuutin derivaatta $\frac{d}{dt}\alpha = \dot{\alpha}$ otetaan vertausarvon $\alpha^{(0)}$ integroinnista, yhtälö 5.29.

Kahdessa ulottuvuudessa mekanisointiyhtälö on nyt yhtälön 5.28 näköinen.

Kerroinmatriisi F lasketaan käyttäen liki- eli vertausarvot, jotka integroidaan *tarkasti* ajassa yhtälöillä[21]

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\varphi^{(0)}\\ \lambda^{(0)}\end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} v^{(0)}_{pohj}\Big/M(\varphi^{(0)}) \\ v^{(0)}_{itä}\Big/N(\varphi^{(0)})\cos\varphi^{(0)}\end{bmatrix}(t),$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}v^{(0)}_{pohj}\\ v^{(0)}_{itä}\end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix}\tilde{a}_{pohj}\\ \tilde{a}_{itä}\end{bmatrix}(t) + g\begin{bmatrix}\theta^{(0)}_{pohj}\\ \theta^{(0)}_{itä}\end{bmatrix}(t) + \\ + \begin{bmatrix}-v^{(0)}_{itä}\\ v^{(0)}_{pohj}\end{bmatrix}(t)\cdot\frac{d}{dt}\alpha^{(0)}(t),$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta^{(0)}_{pohj}\\ \theta^{(0)}_{itä}\end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix}-\theta^{(0)}_{itä}\\ \theta^{(0)}_{pohj}\end{bmatrix}(t)\cdot\frac{d}{dt}\alpha^{(0)}(t) - \begin{bmatrix}0\\ \omega_{\oplus}\cos\varphi^{(0)}(t)\end{bmatrix}.$$

[21] Mittasuureiden $\tilde{a}_{pohj}$ ja $\tilde{a}_{itä}$ muodostus, kun oikeasti mitatut suureet ovat $\tilde{a}_x$ ja $\tilde{a}_y$, edellyttää atsimuutin α tarkkaa tuntemista.

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\underline{\varphi} \\ \Delta\underline{\lambda} \\ \hline \Delta\underline{v}_{\text{pohj}} \\ \Delta\underline{v}_{\text{itä}} \\ \hline \Delta\underline{\theta}_{\text{pohj}} \\ \Delta\underline{\theta}_{\text{itä}} \\ \hline \Delta\underline{\alpha} \end{bmatrix}}^{\underline{x}} = \overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{N\cos\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\dot{\alpha} & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha} & 0 & 0 & g & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{M} & 0 & 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \omega_\oplus \sin\varphi & 0 & 0 & -\frac{1}{N} & \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ \hline \dot{\alpha}_\varphi & 0 & 0 & \frac{\tan\varphi}{N} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}^{F} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\underline{\varphi} \\ \Delta\underline{\lambda} \\ \hline \Delta\underline{v}_{\text{pohj}} \\ \Delta\underline{v}_{\text{itä}} \\ \hline \Delta\underline{\theta}_{\text{pohj}} \\ \Delta\underline{\theta}_{\text{itä}} \\ \hline \Delta\underline{\alpha} \end{bmatrix}}^{\underline{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline \underline{n}_{a,\,\text{pohj}} \\ \underline{n}_{a,\,\text{itä}} \\ \hline \underline{n}_{g,\,\text{pohj}} \\ \underline{n}_{g,\,\text{itä}} \\ \hline \underline{n}_{g,\alpha} \end{bmatrix}}^{\underline{n}}. \tag{5.28}$$

Kuva 5.14. Mekanisointiyhtälö, inertianavigointi Maan pinnalla.

Suunnan eli atsimuutin yhtälö on

$$\frac{d}{dt}\alpha = \frac{\tan\varphi}{N}\left(v_{\text{itä}} + \omega_\oplus N\cos\varphi\right) = \frac{\tan\varphi}{N}v_{\text{itä}} + \omega_\oplus \sin\varphi,$$

joka sisältää Maan pyörähdystä kuvaavan termin: vakautettu alusta on myös Foucault'n heiluri.

Liki- eli vertausarvolle pätee

$$\frac{d}{dt}\alpha^{(0)} = \frac{\tan\varphi^{(0)}}{N(\varphi^{(0)})}v_{\text{itä}}^{(0)} + \omega_\oplus \sin\varphi^{(0)}, \tag{5.29}$$

ja linearisoitu yhtälö on

$$\frac{d}{dt}\Delta\alpha = \frac{\tan\varphi}{N}\Delta v_{\text{itä}} + \dot{\alpha}_\varphi\Delta\varphi, \qquad \dot{\alpha}_\varphi \approx \frac{v_{\text{itä}}}{N\cos^2\varphi} + \omega_\oplus\cos\varphi.$$

Tämä on esimerkki mekanisoinnin monimutkaisuudesta.

Käytännön sovelluksessa vain liki- eli vertaustila $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ integroidaan eksaktisti. Linearisoitua dynaamista mallia 5.28 ja kerroinmatriisia F sigma $\sigma\Sigma$ käytetään tilavarianssin $\Sigma(t)$ laskemiseksi eteenpäin yhtälön 3.19 avulla. Ja tietenkin matriisia F käytetään linearisoidun tilaestimaattorin $\Delta\mathbf{x}^-(t)$ laskemiseksi eteenpäin. Nämä deltat on pidettävä aina pieninä eli samankokoisina kuin tilavarianssin antamat epävarmuudet. Linearisointi on approksimointia, eikä yllä johdettu matriisi F ole eksakti.

5.10 Inertialaitteen alustus

Kiinnostavaa on, miten inertiamittausyksikkö *tasataan* ja *suunnataan* ennen matkaa. Paikallaan oltaessa inertialaitteen kiihtyvyysmittarit

toimivat kallistusmittareina ja palautesilmukat voivat saada gyroskooppien akselit kääntymään vaakatasoon.

Pohjoissuunta voidaan saada käyttämällä laitetta hyrräkompassin tavoin eli tuntemalla, miten paikallisen painovoiman suunta kääntyy hitaasti etelä-pohjoisakselin ympäri. Näin määritetään alkuatsimuutti $\alpha(t_0)$.

Sen jälkeen käytetään yhtälöä 5.29 suunnan $\alpha(t)$ laskennalliseksi seuraamiseksi lennon aikana. Tätä kutsutaan *vapaan atsimuutin* ratkaisuksi.

Vaihtoehtoisesti alkuatsimuutti $\alpha(t_0)$ voidaan nollata ja soveltaa lennossa vääntöä gyroskooppeihin niin, että ne ja alusta seuraavat pohjoista ja $\alpha(t)$ pysyy nollana. Tätä kutsutaan *"north-followingiksi"*. Tarvittava kompensoiva vääntö on, analogisesti yhtälön 5.8 kanssa, esimerkiksi x-gyroskoopille:

$$N_y = -L\frac{\frac{d}{dt}L_y}{L} = \\ = -J_x\omega\left(-\frac{d}{dt}\alpha\right) = J_x\omega\left(\frac{\tan\varphi}{N(\varphi)}v_{\text{itä}} + \omega_\oplus \sin\varphi\right). \quad (5.30)$$

Tässä oletetaan, että gyroskoopin pyörimisakseli on positiivinen x-akseli ja että akseleiden geometria on kuvan 5.2 mukaan.

Lentokentillä näkee usein lähtöportin ulkopuolella taulun, johon on kirjoitettu sen tarkka ($\pm 0{,}1'$) maantieteellinen sijainti. Itse asiassa näiden arvojen avulla voidaan alustaa koordinaatit inertialaitteessa, jota liikennelentokoneet käyttävät. Lähtöporttien koordinaatit löytyvät myös *Jeppeseniltä*. Inertialaitteen tasaus ja suuntaus pohjoiseen tapahtuu koneen seisomisen aikana.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä on nollanopeuspäivitys?
2) Mitkä kahta anturityyppiä esiintyy yleisesti inertiamittausyksiköissä? Mitä ne mittaavat?
3) Alaviitteessä 5 sivulla 105 johdetaan Maan vapaan nutaation yhtälöt. Jos ratkaisuun sijoittaa arvot J_0 ja ΔJ kirjallisuudesta, saa jaksoksi noin 306 tähtivuorokautta. Tiedämme kuitenkin havainnoista, että Maan vapaan nutaation eli Chandlerin huojunnan jakso on noin 433 vuorokautta. Mistä ero lienee peräisin?
4) Mitkä kaksi inertiamittausyksikön teknistä ratkaisua on olemassa?

5) Miten hyrräkompassi toimii?
6) Miten vakautettu alusta toimii? Mihin sitä käytetään?
7) Mikä on Schulerin heiluri?
8) Mitä tarkoitetaan inertiaalisen navigointilaitteen mekanisoinnilla?
9) Millä tavalla inertiamittausyksikkö alustetaan lentokoneessa ennen lentoon lähtöä tai avaruusaluksessa ennen laukaisua? Mitä kahta vektoria käytetään tähän tarkoitukseen? Missä kahdessa maapallon pisteessä tämä alustus epäonnistuisi?
10) Miksi *"north-following"*-tyyppisen inertialaitteen käyttö voi olla ongelmallista navan ylitse lentävässä lentokoneessa?
11) Mikä on yhtälöä 5.30 vastaava yhtälö y-gyroskoopille?

Harjoitus 5−1: Tennismailalause

Todista tennismailalause eli väliakselilause käyttämällä Eulerin yhtälöitä 5.6 vapaasti pyörivälle kappaleelle kappaleen mukana pyörivissä koordinaateissa.

Harjoitus 5−2: Hyrräkompassin yhtälö

Yksinkertaisessa hyrräkompassin yhtälössä 5.17 oikealla puolella on miinusmerkki, ja yhtälön oikea puoli oletetaan siis negatiiviseksi. Miten hyrräkompassi käyttäytyisi, jos oikea puoli olisi positiivinen? Älä käytä approksimaatiota $\sin\alpha \approx \alpha$!

Harjoitus 5−3: Schulerin jakso

Näytä, että Schulerin jakso pallon muotoiselle taivaankappaleelle, jonka tiheys on homogeeninen, riippuu ainoastaan tästä tiheysarvosta.

Navigointi ja rataliike

6

Satelliittiratojen ja niiden geometrian ymmärrys on olennaista Kalmanin suotimen käytölle, kun navigoidaan avaruudessa tosiajassa tehtyjen havaintojen avulla. Yhtä välttämätöntä se on myös maanpäällisen GNSS-navigoinnin yhteydessä, kun lasketaan rata-alkioista satelliittien paikat ensin avaruudessa ja sen jälkeen navigaattorin paikallisella taivaalla.

Aihetta käsitellään laajemmin lähteissä Poutanen (2017), luku 5, ja Hofmann-Wellenhof ym. (1997), luku 4.

Tärkeää on myös kahden kiertävän kappaleen välisen suhteellisen dynamiikan ymmärtäminen. Mainittava tässä yhteydessä on Hillin (1886) lähestymistapa ja julkaisun Clohessy ja Wiltshire (1960) tuloksia, joita tullaan esittämään.

6.1 Keplerin rata

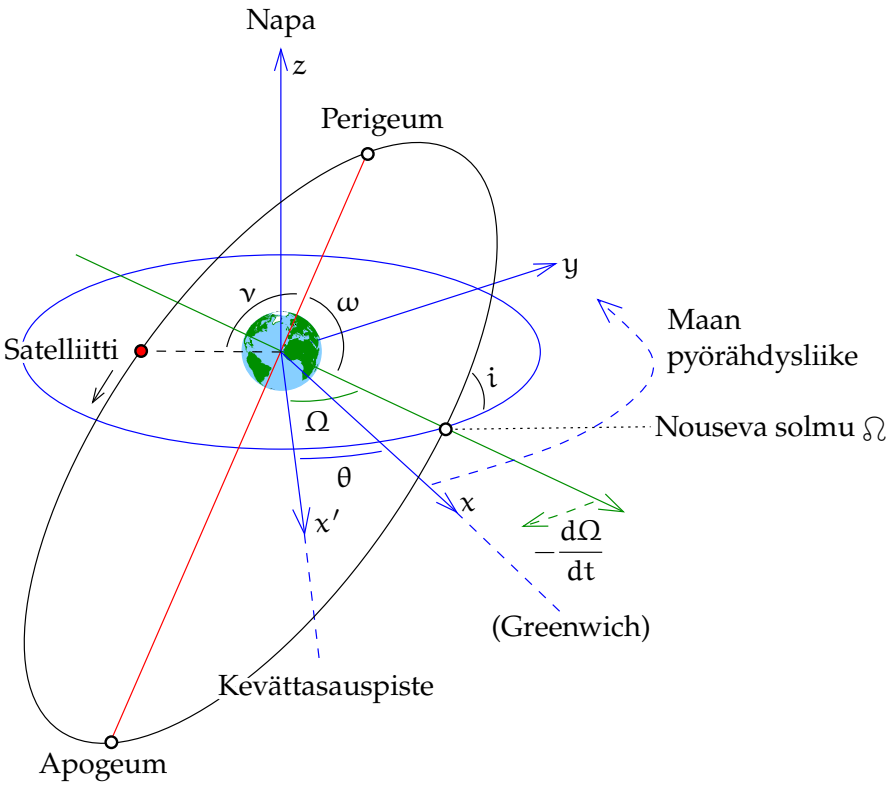
Jos oletetaan, että satelliitti liikkuu keskeisvoimakentässä — esimerkiksi massapisteen tai pallon muotoisen Maan pallosymmetrisessä vetovoimakentässä — seuraa, että satelliitin rata on *Keplerin rata*. Johannes Kepler (1571–1630) löysi hänen mukaansa nimetyt planeettojen rataliikkeen lait Tycho Brahen (1546–1601) Mars-planeetan laajan ja ennennäkemättömän tarkan havaintoaineiston perusteella ja mestarillisen analyysin tuloksena, katso Physics Classroom, Kepler's Three Laws.

Satelliitin liike voidaan kuvata vektoriyhtälöillä näin:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \boldsymbol{v}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} = -\frac{GM_\oplus}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}.$$

Tässä $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja $\boldsymbol{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ ovat satelliitin paikka- ja nopeusvektorit kolmiulotteisessa avaruudessa, jossa on määritelty ortonormaali kanta $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Yhdistetty abstrakti vektori

beeta βB



KUVA 6.1. Keplerin rata-alkiot avaruudessa.

$$\mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\beta & \boldsymbol{v}_\beta \end{bmatrix}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{array}\right]^T$$

sovitulla kannalla β on kiertävän satelliitin muodostaman dynaamisen järjestelmän *tilavektori*.

Keplerin rata-alkiot ovat vain tilavektorin eri kirjoitustapa, joka perustuu tietoon, että kiertorata on eksentrinen tasoellipsi, jonka yhdessä polttopisteessä[1] vetovoiman lähteenä oleva kappale sijaitsee. Wikipedia, Orbital elements antaa hyvän kuvauksen.

Katso kuvat 6.1 ja 6.2 ja taulu 6.1. Keskianomalia M on pelkkä lineaarinen ajankulun mitta skaalattuna satelliitin kiertoaikaan eli periodiin P ja laskettuna sen perigeumin läpikulkuhetkestä t_P:

$$M(t) \overset{\text{def}}{=} 2\pi \frac{t - t_P}{P}. \tag{6.3}$$

nyy νN E ja ν taas, eksentrinen ja luonnollinen anomalia, ovat puhtaasti geometrisia suureita.

[1] Ellipsillä on kaksi polttopistettä. Ellipsi voidaan määritellä pisteiden joukoksi, joiden etäisyyksien *summa* polttopisteisiin on vakio. Tämä merkitsee, että jos valonlähde laitetaan yhteen heijastavasta materiaalista tehdyn ellipsin polttopisteeseen, lähteen kuva tulee näkyviin toisessa polttopisteessä. Katso Wikipedia, Dandelin spheres.

TAULU 6.1. Keplerin rata-alkiot.

Ω	nousevan solmun rektaskensio eli tähtitieteellinen pituus. Nouseva solmu on piste, jossa satelliitti lentää päiväntasaajan yli eteläiseltä pohjoiselle pallonpuoliskolle. Pituuksien nollapiste on paikka tähtitaivaalla, jossa eläinratataso eli ekliptikataso ja päiväntasaajan taso kohtaavat (kevättasauspiste): kyseessä on Auringon paikka kevään alkaessa, kun Aurinko siirtyy eteläiseltä pohjoiselle pallonpuoliskolle.
i	inklinaatio eli ratatason kaltevuuskulma päiväntasaajatasoon nähden. GPS-satelliittien ratatason kaltevuus on 55°.
ω	perigeumin argumentti. Kulmaetäisyys ratatasossa nousevan solmun ja satelliitin rataellipsin perigeumin välillä. Perigeum on piste, jossa satelliitti on radallaan lähimpänä maapalloa.
a	satelliittin rataellipsin isoakselin puolikas.
e	satelliittin rataellipsin eksentrisyys. $1 - e^2 = b^2/a^2$, jossa b on pikkuakselin puolikas.
ν, E, M	kuvaavat satelliitin sijainnin radallaan ajan funktiona: $\nu(t)$ luonnollinen anomalia $E(t)$ eksentrinen anomalia $M(t)$ keskianomalia. Niiden väliset yhteydet ovat $$E(t) = M(t) + e \sin E(t), \quad (6.1)$$ $$\frac{\tan \frac{1}{2}\nu(t)}{\tan \frac{1}{2}E(t)} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \quad (6.2)$$

Kuvassa 6.1 kulma θ on *Greenwichin tähtiaika*, joka kuvaa maapallon asentoa tähtitaivaaseen nähden. Greenwichin tähtiaika koostuu vuotuisesta ja vuorokautisesta osasta[2], jotka johtuvat Maan rata- ja theeta $\theta\Theta$ [2]

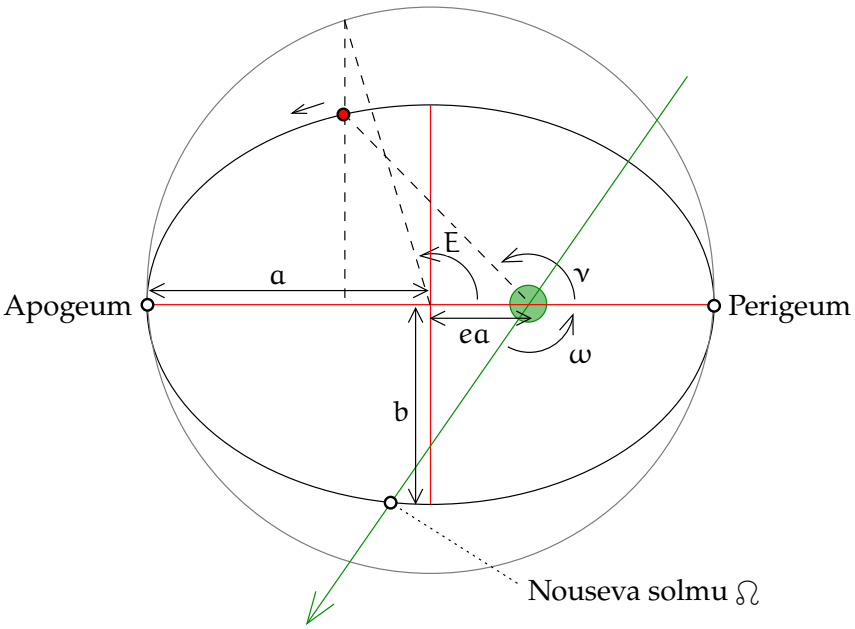
[2]Greenwichin tähtiaika lasketaan muutaman minuutin tarkkuudella seuraavasti:

1) Ota kuukausiarvo seuraavasta taulukosta:

tam	hel	maa	huh	tou	kes	hei	elo	syy	lok	mar	jou
6 38	8 40	10 30	12 33	14 31	16 33	18 31	20 34	22 36	0 34	2 36	4 35

2) Lisää tähän neljä minuuttia jokaista kuukauden päivää kohti.

3) Lisää tähän kelloaika (UTC eli Greenwichin aika).



KUVA 6.2. Keplerin rata-alkiot tasossa.

pyörähdysliikkeistä.

Näin on saatu tilavektorin vaihtoehtoinen esitystapa:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a & e & M & i & \omega & \Omega \end{bmatrix}^T.$$

Keskeisvoimakentässä tämän tilavektorin alkiot ovat *vakioita*, paitsi keskianomalia $M(t)$, yhtälö 6.3. Jos voimakenttä ei ole tarkasti keskeinen, voivat muutkin rata-alkiot muuttua hitaasti ajassa. Esimerkiksi maapallon litistyneisyys aiheuttaa nousevan solmun hidasta kääntymistä, joka
oomega ωΩ tekee $\Omega(t)$ riippuvaiseksi ajasta. Sellaisia aikariippuvaisia Keplerin alkioita, kuten litistyneen maapallon tapauksessa $\Omega(t)$ ja $\omega(t)$, kutsutaan
3 *oskuloiviksi alkioiksi*[3].

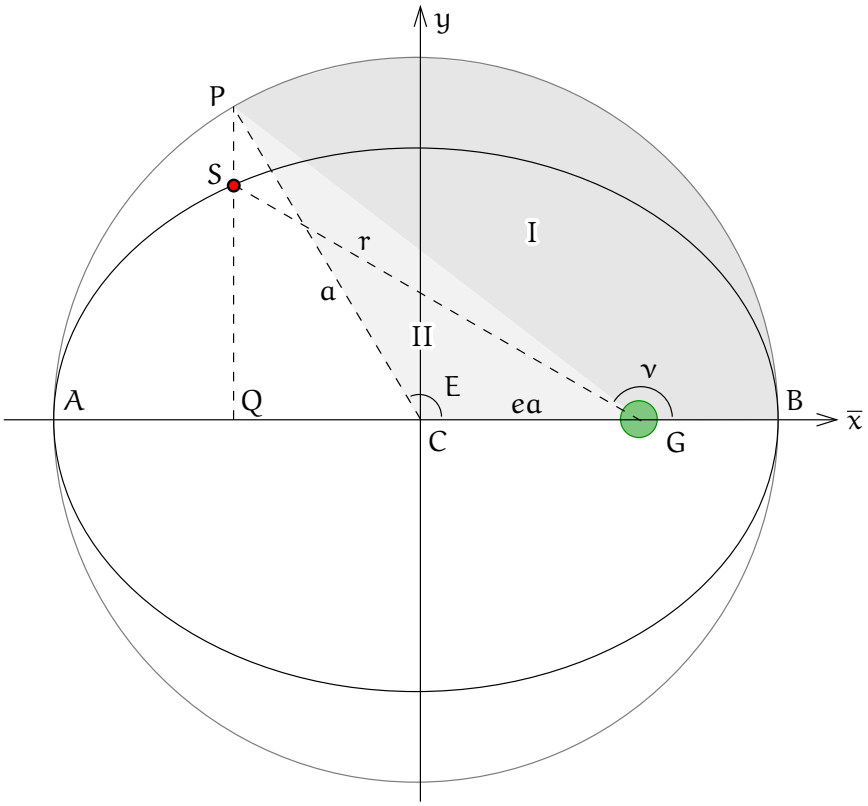
6.1.1 Sädevektori

Katso ratatason kuva 6.3. Sädevektorin r ilmaisemiseksi eksentriseen anomaliaan E tarvitaan ensin havainto, että rataellipsin akselien suhde on

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = \frac{SQ}{PQ}.$$

Paikallisen tähtiajan laskemiseksi lisää tähän paikallinen itäinen pituusaste muunnettuna aikayksikköihin: $15° = 1^h$, $1° = 4^m$, $15' = 1^m$.
Tarkkuus on $\pm 4^m$, koska taulukko ei ole sama vuodesta toiseen: se vaihtelee karkausvuosisyklin mukaan.

[3] Latinasta *osculatio*, suudelma.



KUVA 6.3. Eksentrinen rata.

Silloin

$$\begin{aligned} r = \sqrt{SQ^2 + QG^2} &= \sqrt{(1-e^2)\,PQ^2 + (QC + CG)^2} = \\ &= \sqrt{(1-e^2)\,a^2 \sin^2 E + (-a\cos E + ea)^2} = \\ &= \sqrt{(1-e^2)\,a^2\,(1-\cos^2 E) + a^2\cos^2 E - 2ea^2\cos E + e^2a^2} = \\ &= a\sqrt{1 - \cancel{\cos^2 E} - \cancel{e^2} + e^2\cos^2 E + \cancel{\cos^2 E} - 2e\cos E + \cancel{e^2}} = \\ &= a\sqrt{(1 - e\cos E)^2} = a\,(1 - e\cos E)\,. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Kun halutaan ilmaista sädevektori r luonnolliseen anomaliaan ν, lähdetään liikkeelle ellipsin yhtälöstä suorakulmaisissa koordinaateissa, joiden origo on ellipsin keskipiste C:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Koordinaattien $\bar{x}$ ja y ilmaiseminen luonnolliseen anomaliaan ν antaa

$$\frac{(r\cos\nu + ea)^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\nu}{a^2\,(1-e^2)} = 1$$

eli

$$(1-e^2)\,(r\cos\nu + ea)^2 + r^2\sin^2\nu = a^2\,(1-e^2)\,.$$

Termien uudelleen järjestely antaa

$$\left(\left(1-e^2\right)\cos^2\nu+\left(1-\cos^2\nu\right)\right)r^2+\left(2\left(1-e^2\right)ea\cos\nu\right)r+ \\ +\left(\left(1-e^2\right)e^2a^2-a^2\left(1-e^2\right)\right)=0$$

eli

$$\left(1-e^2\cos^2\nu\right)r^2+\left(2\left(1-e^2\right)ea\cos\nu\right)r+\left(-a^2\left(1-e^2\right)^2\right)=0,$$

delta $\delta\Delta$ kvadraattinen yhtälö, jolla on standardiratkaisu. Diskriminantti Δ on

$$\Delta=\left(2\left(1-e^2\right)ea\cos\nu\right)^2-4\left(1-e^2\cos^2\nu\right)\left(-a^2\left(1-e^2\right)^2\right)= \\ =4a^2\left(1-e^2\right)^2\left(\left(e\cos\nu\right)^2+\left(1-e^2\cos^2\nu\right)\right)=4a^2\left(1-e^2\right)^2.$$

Ratkaisu on

$$r_{1,2}=\frac{-2\left(1-e^2\right)ea\cos\nu\pm\sqrt{\Delta}}{2\left(1-e^2\cos^2\nu\right)}= \\ =\frac{-2a\left(1-e^2\right)e\cos\nu\pm2a\left(1-e^2\right)}{2\left(1-e^2\cos^2\nu\right)}=\frac{a\left(1-e^2\right)\left(\pm1-e\cos\nu\right)}{1-e^2\cos^2\nu}.$$

Näistä otetaan positiivinen ratkaisu:

$$r=\frac{a\left(1-e^2\right)\left(1-e\cos\nu\right)}{1-e^2\cos^2\nu}=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\nu}.$$

Voimme siis laskea satelliitin hetkellisen säteen

$$r(t)=a\left(1-e\cos E(t)\right)=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\nu\left(t\right)}.$$

6.1.2 *Keskianomalioiden muuntaminen eksentrisiksi*

Käytämme tähän Keplerin toista lakia eli alueiden lakia. Siinä sanotaan, että aikayksikköä kohti satelliitin sädevektori pyyhkäisee aina saman pinta-alan yli. Se on pyörähdysmomentin säilymisen erikoistapaus.

Katso taas kuva 6.3. Alueiden laki ei päde vain satelliitin S, vaan myös vastinpisteen P liikkeelle. Kaikki alueet ovat vain a/b kertaa suurempia. Tämä merkitsee, että sektorin PGB pinta-alan, kuvassa I, on oltava murto-osa $M/2\pi$ koko ympyrän pinta-alasta. Koko ympyrän pinta-ala on πa^2. Siis

$$I=\frac{M}{2\pi}\pi a^2=\tfrac{1}{2}a^2M. \tag{6.5}$$

Samalla tavalla sektori PCB, joka koostuu alueista I ja II, on pinta-alaltaan geometrisesti $E/2\pi$ kertaa pienempi kuin ympyrä. Siis

$$I + II = \frac{E}{2\pi}\pi a^2 = \tfrac{1}{2}a^2 E. \tag{6.6}$$

Lopuksi kolmion PCG pinta-ala on

$$II = \tfrac{1}{2}CG \cdot PQ = \tfrac{1}{2}ae \cdot a\sin E = \tfrac{1}{2}a^2 e\sin E. \tag{6.7}$$

Näistä kolmesta tuloksesta 6.5, 6.6 ja 6.7 saadaan *Keplerin yhtälö* 6.1:

$$E = M + e\sin E,$$

josta E voidaan ratkaista iteratiivisesti, jos M on annettuna.

6.1.3 *Eksentristen anomalioiden muuntaminen luonnollisiksi*

Satelliitin x-koordinaatille pätee

$$x = r\cos\nu = a\cos E - ea \implies r\cos\nu = a\left(\cos E - e\right).$$

Puolikulmasijoitus

$$\cos\nu = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\nu - 1$$

antaa

$$2r\cos^2\tfrac{1}{2}\nu - r = a\left(\cos E - e\right)$$

eli yhtälön 6.4 kanssa

$$2r\cos^2\tfrac{1}{2}\nu - a\left(1 - e\cos E\right) = a\left(\cos E - e\right)$$

eli

$$2r\cos^2\tfrac{1}{2}\nu = a\big((\cos E - e) + (1 - e\cos E)\big) = a\left(1 - e\right)\left(\cos E + 1\right).$$

Toisen puolikulmasijoituksen

$$\cos E = 2\cos^2\tfrac{1}{2}E - 1$$

avulla tämä antaa

$$2r\cos^2\tfrac{1}{2}\nu = 2a\left(1 - e\right)\cos^2\tfrac{1}{2}E. \tag{6.8}$$

Samalla tavalla yhtälöiden

$$\cos\nu = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\nu, \qquad \cos E = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}E$$

käyttö antaa

$$\begin{aligned} r - 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\nu &= a(\cos E - e) \\ &\Longrightarrow\ a(1 - e\cos E) - 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\nu = a(\cos E - e) \\ &\Longrightarrow\ -2r\sin^2\tfrac{1}{2}\nu = a\big((\cos E - e) - (1 - e\cos E)\big) = \\ &= a(1+e)(\cos E - 1) = -2a(1+e)\sin^2\tfrac{1}{2}E \\ &\Longrightarrow\ 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\nu = 2a(1+e)\sin^2\tfrac{1}{2}E. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Jaetaan yhtälö 6.9 yhtälöllä 6.8 antaen

$$\tan^2\tfrac{1}{2}\nu = \frac{1+e}{1-e}\tan^2\tfrac{1}{2}E \implies \frac{\tan\frac{1}{2}\nu}{\tan\frac{1}{2}E} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

tulos 6.2.

6.1.4 *Suorakulmaiset koordinaatit ja aikaderivaatat*

Säteen r aikaderivaatta saadaan differentioimalla yhtälö 6.4:

$$\frac{dr}{dt} = ae\sin E\frac{dE}{dt}.$$

Keplerin yhtälöstä 6.1 saadaan

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dM}{dt} + e\cos E\frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{P} + e\cos E\frac{dE}{dt},$$

siis

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{P(1 - e\cos E)},$$

jossa P on kiertoaika eli periodi. Ratatasossa

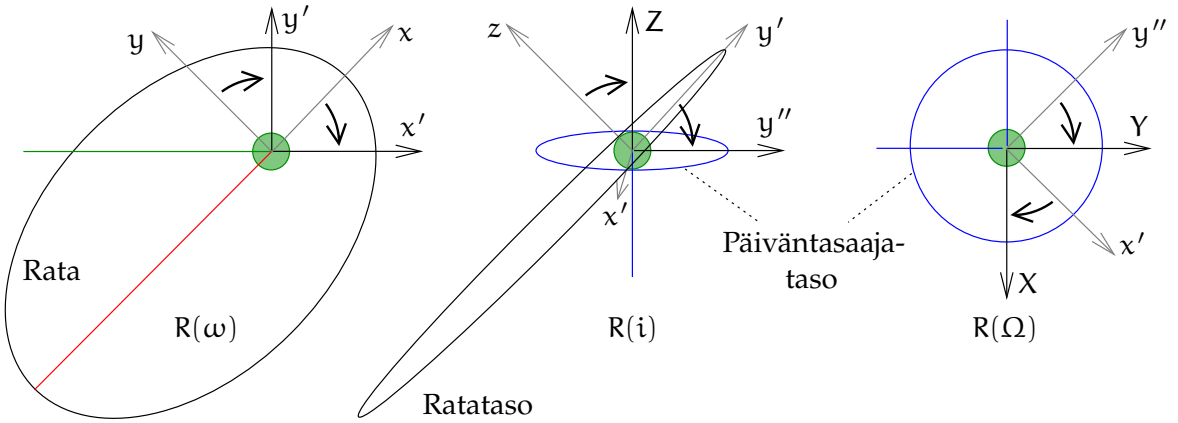
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\nu \\ r\sin\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ b\sin E \end{bmatrix}.$$

Tämän differentiointi ajan suhteen antaa

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\sin E \\ b\cos E \end{bmatrix}\frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{P(1 - e\cos E)}\begin{bmatrix} -a\sin E \\ b\cos E \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

6.1.5 *Muunnos geosentriseen koordinaatistoon*

Löytyneet kaksiulotteiset vektorit ratatasossa voidaan muuntaa kolmiulotteisiksi vektoreiksi avaruudessa kiertokulmien ω, i ja Ω avulla. Jos
alfa αA kirjoitetaan ratatason kannalla α:



KUVA 6.4. R-matriisin johtaminen.

$$\mathbf{x}_\alpha \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\nu \\ r\sin\nu \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,(\cos E - e) \\ b\sin E \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (6.11)$$

saadaan geosentrisellä kannalla β:

$$\mathbf{x}_\beta \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R(\Omega, i, \omega)\,\mathbf{x}_\alpha,$$

jossa kiertomatriisi

$$R(\Omega, i, \omega) = R(\Omega)\,R(i)\,R(\omega), \qquad R(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix},$$

$$R(\Omega) = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (6.12)$$

Yhteenvetona

$$R(\Omega, i, \omega) = \\ = \left[\begin{array}{c|c|c} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i & -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i & \sin\Omega\sin i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i & -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i & -\cos\Omega\sin i \\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\sin i & \cos i \end{array}\right]. \qquad (6.13)$$

Katso kuva 6.4.

Näin saadut geosentriset koordinaatit ovat inertiaalisessa eli tähtitieteellisessä koordinaatistossa. Pituuksien origo on kevättasauspiste. Jos halutaan saada satelliitin koordinaatit maapallon mukana pyöriväs-sä koordinaatistossa, jossa pituuksien origo on Greenwich, lasketaan nousevan solmun maantieteellinen pituus

$$\ell = \Omega - \theta, \tag{6.14}$$

jossa θ on Greenwichin tähtiaika. Laitetaan matriisiyhtälöön 6.13 nousevan solmun rektaskension Ω tilalle nousevan solmun pituus ℓ ja annetaan tuloksena olevalle matriisille nimi $R'(\ell, i, \omega)$.

Nopeusvektori saadaan differentioimalla ajan suhteen, yhtälö 6.10:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_\alpha = \frac{2\pi}{P\,(1 - e\cos E)} \begin{bmatrix} -a\sin E \\ b\cos E \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.15}$$

josta geosentrinen vastine seuraa:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_\beta = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R\frac{d}{dt}\mathbf{x}_\alpha.$$

Tämä pätee inertiaalisissa koordinaateissa. Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa, jonka kanta on β', saadaan

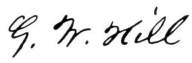
$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_{\beta'} = R'\frac{d}{dt}\mathbf{x}_\alpha + \left(\frac{d}{dt}R'\right)\mathbf{x}_\alpha,$$

jossa $R'(\ell, i, \omega) = R'(\Omega - \theta, i, \omega)$ sisältää tähtiajan θ, yhtälö 6.14, ja riippuu siis ajasta:

$$\frac{d}{dt}R' = \frac{d\ell}{dt}\frac{d}{d\ell}R' = -\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\ell}R' = -\omega_\oplus\frac{d}{d\ell}R' = -\omega_\oplus \cdot$$
$$\cdot \left[\begin{array}{c|c|c} -\sin\ell\cos\omega - \cos\ell\sin\omega\cos i & \sin\ell\sin\omega - \cos\ell\cos\omega\cos i & \cos\ell\sin i \\ \cos\ell\cos\omega - \sin\ell\sin\omega\cos i & -\cos\ell\sin\omega - \sin\ell\cos\omega\cos i & \sin\ell\sin i \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

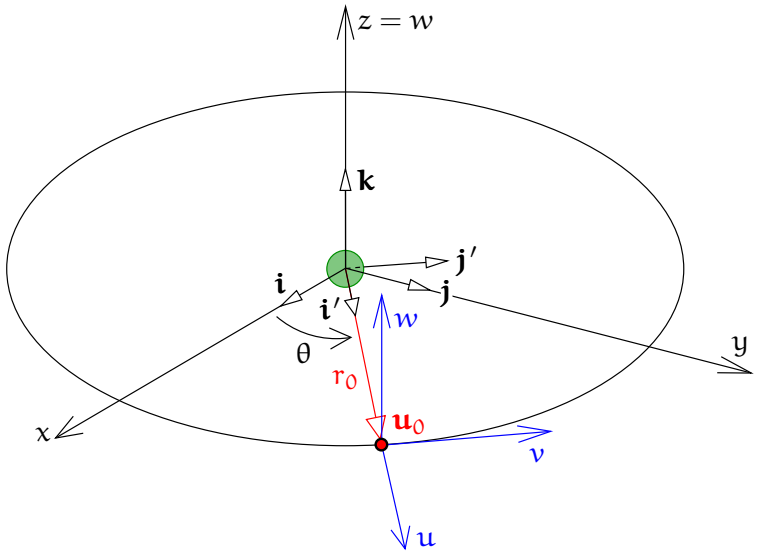
jossa $\omega_\oplus$ on Maan pyörähdysnopeus.

6.2 Hillin koordinaattien käyttö



Hillin koordinaatiston keksi George W. Hill[4] Kuun rataliikkeen tut-

[4]



KUVA 6.5. Hillin koordinaatisto.

kimuksen yhteydessä. Se korvaa tavallisen tavan kuvata rataliikettä inertiaalisessa koordinaatistossa (x, y, z), jonka origo on liikkeen keskipiste eli Aurinko. Sen sijaan käytetään ei-inertiaalista, mukana liikkuvaa ja pyörivää koordinaatistoa (u, v, w). Sen origo on Maan kohdalla[5] ja pyörii tasaisesti Maan keskimääräisellä kulmanopeudella Auringon ympäri, yhden kierron vuodessa. Koska Kuun ja Maan välinen etäisyys on vain 0,26 % Maan ja Auringon välisestä etäisyydestä, Auringon vaikutuksen matematiikka voidaan linearisoida tehokkaasti.

Menetelmän eräs variantti mallintaa Maan satelliitin liikettä kuviteellisen pisteen suhteen, joka kiertää Maata ympyrän muotoisessa radassa, jonka periodi on sama kuin satelliitin. Tärkeä yksinkertaistus verrattuna alkuperäiseen sovellukseen on, että kuvitteellisella pisteellä, toisin kuin maapallolla, ei ole omaa vetovoimaa. Tämä lähestymistapa on ollut hyödyllinen ratahäiriöiden ja *rendezvous*-ongelman tutkimisessa.

Kirjoitetaan kuvan 6.5 mukaan

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_0. \tag{6.16}$$

[4]George William Hill (1838–1914) oli amerikkalainen tähtitieteilijä, matemaatikko ja kolmen kappaleen ongelman tutkija. Kuun liike on klassinen kolmen kappaleen ongelma, jossa Maan ja Auringon vaikutukset ovat samaa suuruusluokkaa.
Hill oli yksinoloa arvostava henkilö, joka työskenteli mieluiten yksin ja teki uraauurtavaa työtään sukutilallaan Länsi-Nyackissa, New Yorkin osavaltiossa.

[5]Tarkemmin: Maan ja Kuun yhteisen massakeskipisteen kohdalla.

Kehitetään vektorit komponentteihin:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x\cos\theta + y\sin\theta)\,\mathbf{i}' + (y\cos\theta - x\sin\theta)\,\mathbf{j}' + z\mathbf{k},\\ \mathbf{u} &= u\mathbf{i}' + v\mathbf{j}' + w\mathbf{k},\\ \mathbf{u}_0 &= r_0\mathbf{i}'.\end{aligned}$$

Muodostetaan abstraktit komponenttivektorit ortonormaalilla kannalla $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

ja ortonormaalilla kannalla $\beta' \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{x}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{\beta'} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{0,\beta'} = \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöstä 6.16 tulee

$$R\mathbf{x}_\beta = \mathbf{x}_{\beta'} = \mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}, \tag{6.17}$$

jossa matriisi R edustaa koordinaatiston kiertoa z-akselin ympäri kulmamäärällä θ:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektori $\mathbf{x}_\beta$ koostuu komponenteista inertiaalisessa koordinaatistossa ja vektori $\mathbf{u}_{\beta'}$ komponenteista koordinaatistossa, joka kiertää satelliitin mukana. $\mathbf{i}'$- eli u-akseli osoittaa ulospäin eli ”ylös”, $\mathbf{j}'$- eli v-akseli eteenpäin lentosuunnassa ja $\mathbf{k}$- eli w- eli z-akseli kohtisuoraan ulos ratatasosta ”paapuuriin”. (u, v, w)-koordinaatiston origo liikkuu vakionopeudella ympyräradalla: kulmanopeus on Keplerin kolmannen lain mukaan

$$n = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_0^3}}.$$

r_0 on radan säde ja samalla (u, v, w)-koordinaatiston origon etäisyys (x, y, z)-koordinaatiston origosta.

Yhtälö 6.17 voidaan kääntää:

$$\mathbf{x}_\beta = R^{-1}\left(\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}\right) = R^T\left(\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}\right),$$

koska ortogonaaliselle matriisille $RR^T = I \iff R^{-1} = R^T$.

6.3 Muunnos inertiaalisen ja Hillin koordinaatiston välillä

Johdetaan yhtälöt vektorin $\mathbf{x}$ ja matriisin R ensimmäiselle ja toiselle aikaderivaatalle ja sijoitetaan ne. Sen jälkeen kerrotaan yhtälön molemmat puolet vasemmalta matriisilla R.

Differentioimalla Leibnizin tulosäännöllä saadaan

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_\beta &= \dot{R}^T(\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}) + R^T\dot{\mathbf{u}}_{\beta'},\\ \ddot{\mathbf{x}}_\beta &= \ddot{R}^T(\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}) + 2\dot{R}^T\dot{\mathbf{u}}_{\beta'} + R^T\ddot{\mathbf{u}}_{\beta'}.\end{aligned}$$

Kiertomatriisin R derivaatat saadaan ketjusäännön avulla:

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} n,$$

$$\ddot{R} = \frac{d^2R}{d\theta^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & -\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} n^2.$$

Sijoitus antaa

$$\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{bmatrix} = \overbrace{n^2\begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}^{\ddot{R}^T}\begin{bmatrix}u + r_0\\ v\\ w\end{bmatrix} +$$

$$+ \overbrace{2n\begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}^{\dot{R}^T}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} +$$

$$+ \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}^{R^T}\begin{bmatrix}\ddot{u}\\ \ddot{v}\\ \ddot{w}\end{bmatrix}.$$

Kertomalla vasemmalta matriisilla R saadaan

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{bmatrix} = n^2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u + r_0\\ v\\ w\end{bmatrix} +$$

$$+ 2n \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

6.4 Keskeisvoimakentän sarjakehitelmä

Keskeisvoimakentän yhtälö (x, y, z)-koordinaatistossa on

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{GM_\oplus}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x} \implies R\ddot{\mathbf{x}}_\beta = -\frac{GM_\oplus}{\|\mathbf{x}\|^3}R\mathbf{x}_\beta = -\frac{GM_\oplus}{\|\mathbf{x}\|^3}\left(\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}\right),$$

komponenteittain:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{GM_\oplus}{\|\mathbf{x}\|^3} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

jossa

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{u}_{\beta'} + \mathbf{u}_{0,\beta'}\| = \sqrt{(u + r_0)^2 + v^2 + w^2}.$$

Taylorin kehitelmä (u, v, w)-koordinaatiston origon ympäri antaa

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{GM_\oplus}{r_0^3} \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{M}^{(0)}_{\beta'} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

jossa *gravitaatiogradienttitensorin* matriisi $\mathcal{M}^{(0)}_{\beta'}$ koostuu osittaisderivaatoista

$$\mathcal{M}^{(0)}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \end{bmatrix} \left(-\frac{GM_\oplus}{\|\mathbf{u} + \mathbf{u}_0\|^3} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) \Bigg|_{u,v,w=0} = -\frac{GM_\oplus}{r_0^3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

yhtälö 3.9 laskettuna pisteessä $\mathbf{u}_0$.

Keplerin kolmannen lain mukaan

$$\frac{GM_\oplus}{r_0^3} = n^2.$$

Yhdistämällä saadaan

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \\ = -n^2 \left(\begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right). \quad (6.19)$$

6.5 Liikeyhtälöt Hillin koordinaatistossa

Yhdistämällä yhtälöt 6.18 ja 6.19 saadaan

$$0 = n^2 \left(\begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) + \\ + n^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u + r_0 \\ v \\ w \end{bmatrix} + \\ + 2n \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}.$$

Yksinkertaistaminen antaa

$$0 = n^2 \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + 2n \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}.$$

Lopputulos saadaan poimimalla erikseen yhtälöt komponenteille u, v ja w[6]:

$$\ddot{u} = 2n\dot{v} + 3n^2 u, \quad \ddot{v} = -2n\dot{u}, \quad \ddot{w} = -n^2 w,$$

joissa kolmas tunnistetaan klassiseksi harmoniseksi värähtelijäksi.

[6] Tässä nähdään pyörivän koordinaatiston pseudovoimat, erityisesti coriolisvoiman termit $2n\dot{v}$ ja $-2n\dot{u}$, jotka riippuvat nopeudesta. Keskipakoisvoima on hieman piilossa, $n^2 u$. Loput $2n^2 u$ ja $-n^2 w$ ovat keskeiskentän gravitaatiogradientteja.

6.6 Hillin yhtälöiden ratkaiseminen

6.6.1 *Koordinaatin w yhtälö*

Ensimmäiseksi ratkaistaan helpoin eli kolmas yhtälö,

$$\ddot{w} = -n^2 w.$$

Kokeillaan yleistä jaksollista ratkaisua,

$$w(t) = A\sin(Bt + C).$$

Differentiointi kahdesti ja sijoitus antaa

$$-AB^2\sin(Bt + C) = -n^2 A\sin(Bt + C) \implies B = \pm n.$$

Siis ratkaisu on

$$w(t) = A\sin(\pm nt + C),$$

jossa A ja C ovat mielivaltaisia vakioita. Sinin summakaavan

$$\sin(\pm nt + C) = \sin(\pm nt)\cos C + \cos(\pm nt)\sin C$$

avulla saadaan

$$w(t) = A_1\sin nt + A_2\cos nt,$$

jossa $A_1 = \pm A\cos C$ ja $A_2 = A\sin C$ ovat taas mielivaltaisia vakioita.

Nopeus saadaan differentioimalla:

$$\dot{w}(t) = nA_1\cos nt - nA_2\sin nt.$$

Tilansiirto ajasta t_0 aikaan $t_1 = t_0 + \Delta t$:

$$\begin{aligned}
w(t_1) &= A_1\sin n(t_0 + \Delta t) + A_2\cos n(t_0 + \Delta t) = \\
&= A_1(\sin nt_0\cos n\Delta t + \cos nt_0\sin n\Delta t) + \\
&\quad + A_2(\cos nt_0\cos n\Delta t - \sin nt_0\sin n\Delta t) = \\
&= (A_1\sin nt_0 + A_2\cos nt_0)\cos n\Delta t + \\
&\quad + (A_1\cos nt_0 - A_2\sin nt_0)\sin n\Delta t = \\
&= w(t_0)\cos n\Delta t + \frac{1}{n}\dot{w}(t_0)\sin n\Delta t, \\
\dot{w}(t_1) &= nA_1\cos n(t_0 + \Delta t) - nA_2\sin n(t_0 + \Delta t) = \\
&= nA_1(\cos nt_0\cos n\Delta t - \sin nt_0\sin n\Delta t) - \\
&\quad - nA_2(\sin nt_0\cos n\Delta t + \cos nt_0\sin n\Delta t) = \\
&= n(A_1\cos nt_0 - A_2\sin nt_0)\cos n\Delta t - \\
&\quad - n(A_1\sin nt_0 + A_2\cos nt_0)\sin n\Delta t = \\
&= \dot{w}(t_0)\cos n\Delta t - nw(t_0)\sin n\Delta t.
\end{aligned}$$

Matriisiyhtälönä:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} w \\ \dot{w} \end{bmatrix}(t_1)}^{x(t_1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos n\Delta t & (\sin n\Delta t)/n \\ -n\sin n\Delta t & \cos n\Delta t \end{bmatrix}}^{\Phi_0^1} = \overbrace{\begin{bmatrix} w \\ \dot{w} \end{bmatrix}(t_0)}^{x(t_0)}. \qquad (6.20)$$

6.6.2 *Koordinaattien u ja v yhtälöt*

$$\ddot{u} = 2n\dot{v} + 3n^2 u, \qquad \ddot{v} = -2n\dot{u}. \qquad (6.21)$$

Ne on ratkaistava yhdessä. Kokeilkaamme taas jaksollista ratkaisua:

$$u(t) = A\sin nt + B\cos nt, \qquad v(t) = C\sin nt + D\cos nt. \qquad (6.22)$$

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned} -n^2(A\sin nt + B\cos nt) &= \\ &= 2n\cdot n(C\cos nt - D\sin nt) + 3n^2(A\sin nt + B\cos nt), \\ -n^2(C\sin nt + D\cos nt) &= -2n\cdot n(A\cos nt - B\sin nt). \end{aligned}$$

Tarkastele erikseen sini- ja kosinitermejä ja ilmaise C ja D kertoimiin A ja B:

$$\begin{aligned} -n^2A &= -2n^2D + 3n^2A, & -n^2B &= 2n^2C + 3n^2B, \\ -n^2C &= 2n^2B, & -n^2D &= -2n^2A, \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} -A &= -2D + 3A, & -B &= 2C + 3B, \\ -C &= 2B \implies C = -2B, & -D &= -2A \implies D = 2A. \end{aligned}$$

Sijoitus yhtälöihin 6.22 antaa yleisen ratkaisun

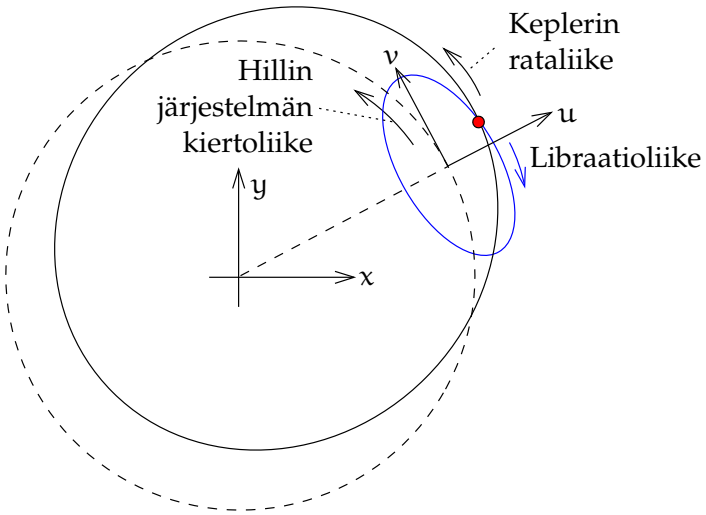
$$u(t) = A\sin nt + B\cos nt, \qquad v(t) = -2B\sin nt + 2A\cos nt.$$

Matriisiyhtälönä:

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -2B & 2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin nt \\ \cos nt \end{bmatrix}.$$

Tätä ratkaisua kutsutaan *libraatioliikkeeksi*, kuva 6.6. Se on jaksollinen liike, jonka keskipiste on Hillin koordinaatiston origo $u = v = 0$.

Inertiaalisessa koordinaatistossa satelliitti on elliptisellä Keplerin kiertoradalla origon $x = y = 0$ ympäri. Hillin ratkaisun periodi on $2\pi/n$, sama kuin Keplerin radan periodi.



KUVA 6.6. Libraatioliike.

6.7 Toinen ratkaisu

Tämä ei ole kuitenkaan tarinan loppu. Kokeillaan vaihteeksi *lineaarista*, ei-jaksollista ratkaisua:

$$u(t) = Et + F, \qquad v(t) = Gt + H.$$

Sijoitetaan tämä alkuperäisiin differentiaaliyhtälöihin 6.21 ja lasketaan E ja G F:n ja H:n funktioina:

$$0 = 2nG + 3n^2(Et + F), \qquad 0 = -2nE,$$

josta

$$E = 0, \qquad G = -\tfrac{3}{2}nF.$$

Ratkaisu on

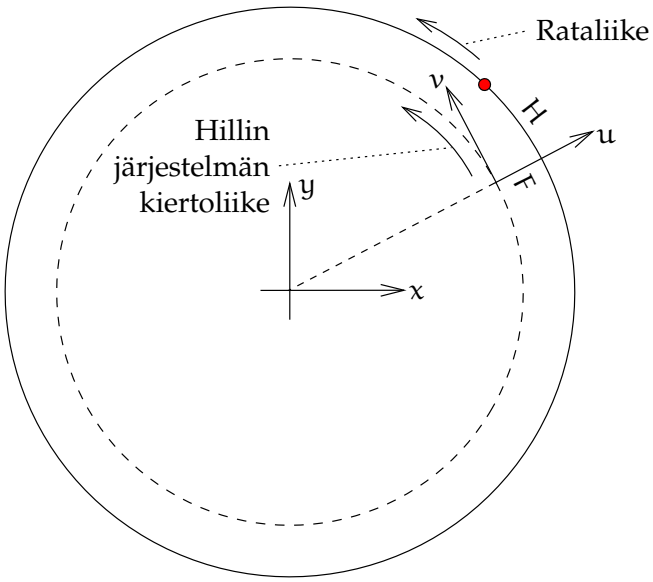
$$u(t) = F, \qquad v(t) = -\tfrac{3}{2}Fnt + H,$$

joissa F ja H ovat mielivaltaisia vakioita. Tämä edustaa *rataliikettä, jonka periodi on eri kuin* $2\pi/n$. Radan säde on $r_0 + F$, radan kulmanopeus $n - \frac{3}{2}Fn$ (Keplerin kolmas laki!) ja satelliitti on hetkellä $t = 0$ radallaan (u, v, w)-koordinaatiston origon edellä etäisyyden H verran. Katso kuva 6.7.

Yhtälöryhmän lineaarisuuden perusteella saamme vapaasti yhdistellä löytyneitä ratkaisuja.

6.8 Clohessyn ja Wiltshiren malli

Johdetaan tilansiirtomatriisi.



KUVA 6.7. Lineaarinen ajelehtiminen, jos satelliitin periodi eroaa Hillin koordinaatiston periodista.

6.8.1 *Yleinen tapaus*

Katsotaan vain (u, v)-tasoa. Yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} u(t) &= A \sin nt + B \cos nt + F, \\ v(t) &= -2B \sin nt + 2A \cos nt - \tfrac{3}{2} Fnt + H. \end{aligned}$$

Differentioimalla saadaan myös nopeuskomponentit:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= nA \cos nt - nB \sin nt, \\ \dot{v}(t) &= -2nA \sin nt - 2nB \cos nt - \tfrac{3}{2} Fn. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan alkuepookille t_0:

$$u(t_0) = A \sin nt_0 + B \cos nt_0 + F = \mathcal{S}(t_0) + F, \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned} v(t_0) &= -2B \sin nt_0 + 2A \cos nt_0 - \tfrac{3}{2} Fnt_0 + H = \\ &= 2\mathcal{C}(t_0) - \tfrac{3}{2} Fnt_0 + H, \end{aligned}$$

$$\dot{u}(t_0) = nA \cos nt_0 - nB \sin nt_0 = n\mathcal{C}(t_0), \tag{6.24}$$

$$\dot{v}(t_0) = -2nA \sin nt_0 - 2nB \cos nt_0 - \tfrac{3}{2} Fn = -2n\mathcal{S}(t_0) - \tfrac{3}{2} Fn. \tag{6.25}$$

Tässä käytettiin määritelmiä

$$\mathcal{S}(t) \stackrel{\text{def}}{=} A \sin nt + B \cos nt, \qquad \mathcal{C}(t) \stackrel{\text{def}}{=} A \cos nt - B \sin nt.$$

Kirjoitetaan epookille t_1 soveltamalla sinin ja kosinin summakaavoja:

$$\begin{aligned}
u(t_1) = u(t_0 + \Delta t) = \\
&= A \sin n(t_0 + \Delta t) + B \cos n(t_0 + \Delta t) + F = \\
&= A \sin nt_0 \cos n\Delta t + A \cos nt_0 \sin n\Delta t + \\
&+ B \cos nt_0 \cos n\Delta t - B \sin nt_0 \sin n\Delta t + F = \\
&= \cos n\Delta t \, \mathcal{S}(t_0) + \sin n\Delta t \, \mathcal{C}(t_0) + F = \\
&= u(t_0) + (\cos n\Delta t - 1) \, \mathcal{S}(t_0) + \sin n\Delta t \, \mathcal{C}(t_0).
\end{aligned}$$

Samalla tavalla

$$\begin{aligned}
v(t_1) &= 2A \cos n(t_0 + \Delta t) - 2B \sin n(t_0 + \Delta t) - \tfrac{3}{2} F n t_1 + H = \\
&= 2A \cos nt_0 \cos n\Delta t - 2A \sin nt_0 \sin n\Delta t - \\
&- 2B \sin nt_0 \cos n\Delta t - 2B \cos nt_0 \sin n\Delta t - \tfrac{3}{2} F n t_1 + H = \\
&= \cos n\Delta t \, (2A \cos nt_0 - 2B \sin nt_0) - \\
&- \sin n\Delta t \, (2A \sin nt_0 + 2B \cos nt_0) - \tfrac{3}{2} F n t_1 + H = \\
&= v(t_0) + 2 (\cos n\Delta t - 1) \, \mathcal{C}(t_0) - 2 \sin n\Delta t \, \mathcal{S}(t_0) - \tfrac{3}{2} F n \, \Delta t.
\end{aligned}$$

Sijoita yhtälö 6.23, $F = u(t_0) - \mathcal{S}(t_0)$, tähän. Tulos on

$$\begin{aligned}
v(t_1) = v(t_0) + 2 (\cos n\Delta t - 1) \, \mathcal{C}(t_0) - 2 \sin n\Delta t \, \mathcal{S}(t_0) - \\
&- \tfrac{3}{2} u(t_0) \, n \, \Delta t + \tfrac{3}{2} \mathcal{S}(t_0) \, n \, \Delta t = \\
&= v(t_0) + 2 (\cos n\Delta t - 1) \, \mathcal{C}(t_0) + \\
&+ \left(\tfrac{3}{2} n \, \Delta t - 2 \sin n\Delta t \right) \mathcal{S}(t_0) - \tfrac{3}{2} u(t_0) \, n \, \Delta t.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi nopeudet:

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t_1) = nA \, (\cos nt_0 \cos n\Delta t - \sin nt_0 \sin n\Delta t) - \\
&- nB \, (\sin nt_0 \cos n\Delta t + \cos nt_0 \sin n\Delta t) = \\
&= \cos n\Delta t \, (nA \cos nt_0 - nB \sin nt_0) - \\
&- \sin n\Delta t \, (nA \sin nt_0 + nB \cos nt_0) = \\
&= \cos n\Delta t \, n\mathcal{C}(t_0) - \sin n\Delta t \, n\mathcal{S}(t_0)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\dot{v}(t_1) = -2nA \, (\sin nt_0 \cos n\Delta t + \cos nt_0 \sin n\Delta t) - \\
&- 2nB \, (\cos nt_0 \cos n\Delta t - \sin nt_0 \sin n\Delta t) - \tfrac{3}{2} F n = \\
&= \cos n\Delta t \, (- 2nA \sin nt_0 - 2nB \cos nt_0) + \\
&+ \sin n\Delta t \, (- 2nA \cos nt_0 + 2nB \sin nt_0) - \tfrac{3}{2} F n = \\
&= \dot{v}(t_0) - (\cos n\Delta t - 1) \, 2n\mathcal{S}(t_0) - 2 \sin n\Delta t \, n\mathcal{C}(t_0).
\end{aligned}$$

Määritellään merkintätapa

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sin n\Delta t, \qquad c \stackrel{\text{def}}{=} \cos n\Delta t.$$

Yhteenveto:

$$\begin{aligned}
u(t_1) &= u(t_0) + (c-1)\,\mathcal{S}(t_0) + s\mathcal{C}(t_0),\\
v(t_1) &= v(t_0) + 2(c-1)\,\mathcal{C}(t_0) + \left(\tfrac{3}{2}n\,\Delta t - 2s\right)\mathcal{S}(t_0) - \tfrac{3}{2}u(t_0)\,n\,\Delta t,\\
\dot{u}(t_1) &= nc\mathcal{C}(t_0) - ns\mathcal{S}(t_0),\\
\dot{v}(t_1) &= \dot{v}(t_0) - 2n(c-1)\,\mathcal{S}(t_0) - 2ns\mathcal{C}(t_0).
\end{aligned}$$

Yhdistä yhtälöt 6.23 ja 6.25:

$$\tfrac{3}{2}nu(t_0) + \dot{v}(t_0) = -\tfrac{1}{2}n\mathcal{S}(t_0).$$

Tästä ja yhtälöstä 6.24:

$$\mathcal{S}(t_0) = -\left(3u(t_0) + \frac{2}{n}\dot{v}(t_0)\right), \qquad \mathcal{C}(t_0) = \frac{\dot{u}(t_0)}{n}.$$

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned}
u(t_1) &= u(t_0) - (c-1)\left(3u(t_0) + \frac{2}{n}\dot{v}(t_0)\right) + \frac{s}{n}\dot{u}(t_0),\\
v(t_1) &= v(t_0) + \frac{2(c-1)}{n}\dot{u}(t_0) -\\
&\quad - \left(\tfrac{3}{2}n\,\Delta t - 2s\right)\left(3u(t_0) + \frac{2}{n}\dot{v}(t_0)\right) - \tfrac{3}{2}u(t_0)\,n\,\Delta t =\\
&= v(t_0) + \frac{2(c-1)}{n}\dot{u}(t_0) - (6n\,\Delta t - 6s)\,u(t_0) - \frac{3n\,\Delta t - 4s}{n}\dot{v}(t_0),\\
\dot{u}(t_1) &= c\dot{u}(t_0) + s\left(3nu(t_0) + 2\dot{v}(t_0)\right),\\
\dot{v}(t_1) &= \dot{v}(t_0) + (c-1)\left(6nu(t_0) + 4\dot{v}(t_0)\right) - 2s\dot{u}(t_0) =\\
&= 6n(c-1)\,u(t_0) - 2s\dot{u}(t_0) + (4c-3)\,\dot{v}(t_0).
\end{aligned}$$

Matriisiyhtälönä, jossa tilansiirtomatriisi Φ_0^1: fii φϕΦ

$$\overbrace{\left[\begin{array}{c}u\\ v\\ \hline \dot{u}\\ \dot{v}\end{array}\right](t_1)}^{\underline{x}(t_1)} = \overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 4-3c & 0 & s/n & -2(c-1)/n\\ 6s-6n\,\Delta t & 1 & 2(c-1)/n & 4s/n - 3\,\Delta t\\ \hline 3ns & 0 & c & 2s\\ 6n(c-1) & 0 & -2s & 4c-3\end{array}\right]}^{\Phi_0^1} \overbrace{\left[\begin{array}{c}u\\ v\\ \hline \dot{u}\\ \dot{v}\end{array}\right](t_0)}^{\underline{x}(t_0)}. \qquad (6.26)$$

Tämä tilansiirtomatriisi yhdessä yhtälön 6.20 kanssa w-koordinaatille tunnetaan nimellä "Clohessyn ja Wiltshiren malli", Clohessy ja Wiltshire (1960).

Yhtälö 6.26 voidaan kirjoittaa osioituna kannalla β':

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t_1) &= (\Phi_{11})_0^1\,\mathbf{u}(t_0) + (\Phi_{12})_0^1\,\dot{\mathbf{u}}(t_0),\\ \dot{\mathbf{u}}(t_1) &= (\Phi_{21})_0^1\,\mathbf{u}(t_0) + (\Phi_{22})_0^1\,\dot{\mathbf{u}}(t_0),\end{aligned}$$

jossa esimerkiksi

$$(\Phi_{11})_0^1 = \begin{bmatrix} 4-3\cos n\Delta t & 0\\ 6\sin n\Delta t - 6n\,\Delta t & 1\end{bmatrix}.$$

6.8.2 *Tapaus pieni* Δt

Kirjoitetaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä

$$\ddot{u} = 2n\dot{v} + 3n^2 u, \qquad \ddot{v} = -2n\dot{u}$$

ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u\\ v\\ \dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n\\ 0 & 0 & -2n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u\\ v\\ \dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}.$$

[7] Pienelle aikaerolle[7] Δt:

$$\begin{bmatrix} u\\ v\\ \dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}(t_1) \approx \begin{bmatrix} u\\ v\\ \dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}(t_0) + \Delta t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n\\ 0 & 0 & -2n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u\\ v\\ \dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}(t_0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0\\ 0 & 1 & 0 & \Delta t\\ 3n^2\,\Delta t & 0 & 1 & 2n\,\Delta t\\ 0 & 0 & -2n\,\Delta t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u\\ v\\ \dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}(t_0).$$

Voidaan tarkistaa alkio alkiolta, että tämä on sama tulos kuin yhtälö 6.26, sijoituksilla $c = \cos n\Delta t \approx 1$ ja $s = \sin n\Delta t \approx n\,\Delta t$.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mitkä ovat Keplerin kolme planeettojen liikkeen lakia?

[7] "Pieni" radan kiertoajan suhteen, siis $n\,\Delta t \ll 1$.

2) Mitkä ovat Keplerin kuusi rata-alkiota?
3) Mitä kolmea vaihtoehtoista rata-alkiota käytetään kuvaamaan satelliitin sijaintia kiertoradalla?
4) Mitkä ovat Hillin koordinaatit?
5) Kuvaile libraatioliike, joka oli Hillin yhtälöiden eräs ratkaisu, ja sen yhteys Keplerin kiertorataan.
6) Kirjoita auki kolme muuta Clohessyn ja Wiltshiren mallin 6.26 tilansiirtomatriisia $(\Phi_{12})_0^1$, $(\Phi_{21})_0^1$ ja $(\Phi_{22})_0^1$.

Harjoitus 6−1: Keplerin rata

1) Johda Keplerin tilavektorin dynaaminen malli. Olettaen että voimakenttä on keskeiskenttä, kirjoita auki seuraava linearisoitu dynaaminen malliyhtälö:

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{a} = F\,\Delta\mathbf{a},$$

jossa $\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & e & M & i & \omega & \Omega \end{bmatrix}^T$. Alkuperäinen epälineaarinen malli tulee linearisoida valitsemalla sopivia liki- eli vertausarvoja $\mathbf{a}^{(0)}(t)$, jotka saadaan tarkalla integroinnilla alkuarvosta $\mathbf{a}^{(0)}(t_0)$ ratamekaniikkaa käyttäen. Deltasuureet liittyvät niihin. Tarvitaan myös Keplerin kolmatta lakia:

$$GM_\oplus P^2 = 4\pi^2 a^3,$$

jossa P on radan kiertoaika eli periodi.

2) Maapallon litistyneisyyden takia radan nousevan solmun rektaskensio Ω muuttuu hitaasti (niin sanottu *ratatason prekessio*) seuraavan yhtälön mukaan:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{GM_\oplus}{a^3}}\left(\frac{a_\oplus}{a}\right)^2 J_2 \cos i. \tag{6.27}$$

Tämä on pitkäaikainen keskiarvo. Oletettu on ympyrän muotoinen rata eli eksentrisyys $e \approx 0$. $a_\oplus$ on maapallon päiväntasaajasäde ja J_2 niin sanottu dynaaminen litistyneisyys, joka on dimensioton luku.

Miten tämä vaikuttaa yllä johdettuun dynaamisen mallin kerroinmatriisiin F?

3) Onko sallittua käyttää yhtälöä 6.27 liki- eli vertausarvon $\Omega^{(0)}(t)$ ajallisen kehityksen laskentaan?

4) Johdettiin yhteydet 6.11, 6.12 ja 6.15 ratatason koordinaattien ja nopeuskomponenttien ja rata-alkioiden välillä:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ b \sin E \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{P(1 - e\cos E)} \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a\sin E \\ b\cos E \end{bmatrix}.$$

Linearisoi yhteys tilavektorien

$$\Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{bmatrix} \text{ ja } \Delta\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta e \\ \Delta\omega \\ \Delta E \end{bmatrix}$$

välillä. Muista $b = a\sqrt{(1 - e^2)}$ ja Keplerin kolmas laki.

5) *Havaintoasema*. Miten mallinnetaan havaintoaseman kolmiulotteinen rata

$$\begin{bmatrix} X(t) & Y(t) & Z(t) \end{bmatrix}^T$$

inertiaalisissa koordinaateissa maapallon pyörähdysliikkeen takia? Olettaen, että Maan pyörähdysliike on säännöllinen ja aseman sijainti kiinteä[8], kirjoita havaintoaseman koordinaattien dynaaminen malli.

Harjoitus 6−2: *Rendezvous*

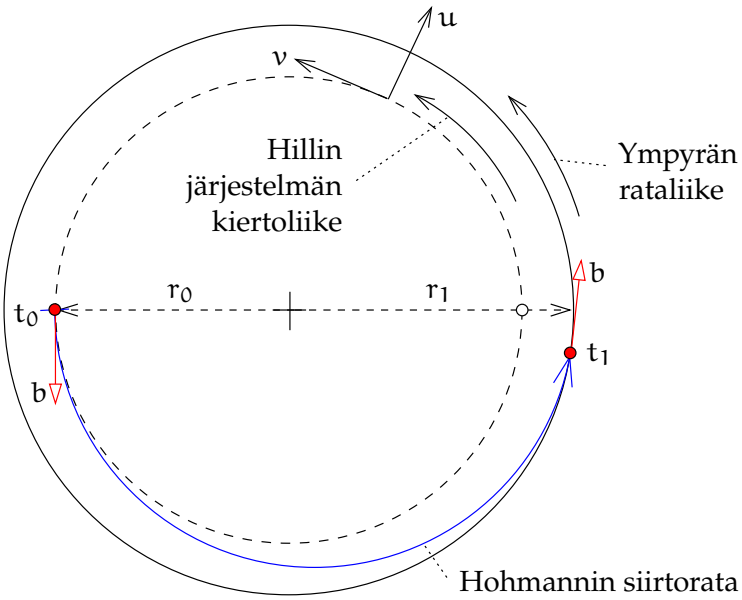
Tutkitaan kahden aluksen niin sanottu *rendezvous*-tilanne. Molemmat alukset ovat ympyäradalla, mutta saaliin rata on korkeampi. Tässä harjoituksessa tutkitaan rakettivoiman käyttöä pyöreän kiertoradan muuttamiseksi ensin elliptiseksi Hohmannin[9] siirtoradaksi, jonka apogeum on saaliin kiertoradalla. Puolen periodin jälkeen apogeumissa käytetään rakettivoimaa kiertoradan muuttamiseksi taas ympyäradaksi.

Yksinkertaisuuden vuoksi unohdetaan kolmas koordinaatti w.

1) Erikoista tilansiirtoyhtälö 6.26 siihen tapaukseen, että $n\,\Delta t = \pi$.

[8] Siis unohda napaliike ja vuorokauden pituuden vaihtelut, kiinteän Maan vuorovesi, laattatektoniikka, jääkauden jälkeinen isostaattinen palautusliike ja niin edelleen. Lyhyesti sanottuna: unohda geodynamiikka.

[9] Walter Hohmann (1880–1945) oli saksalainen insinööri ja teoreettisen astronautiikan pioneereja. Hohmann (1925).



KUVA 6.8. *Rendezvous* ja Hohmannin siirtorata.

2) Jos on annettuna alkuepookin t_0 paikkakoordinaatit

$$\mathbf{u}(t_0) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(t_0) = 0,$$

yksinkertaista yhtälö. Mitkä sarakkeet voidaan poistaa?

3) Jos lisäksi on annettuna ($b =$ *"boost"*, rakettivoiman työntö eli nopeuden muutos):

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},$$

mikä arvo $u(t_1)$ ja etäisyys $r_1 = r_0 + u(t_1)$ vetovoiman keskuksesta on saavutettavissa tällä työnnöllä? Yksinkertaista yhtälö vielä lisää.

4) Mikä on aluksen nopeus $\dot{v}(t_1)$ hetkellä t_1 suhteessa *lähtöradan* Hillin koordinaatistoon?

5) Paljonko on lähtöradan Hillin koordinaatiston lineaarinen nopeus etäisyydellä r_1?

6) Mikä on aluksen nopeus hetkellä t_1 *ei-pyörivässä* koordinaatistossa?

7) Mitkä ovat ympyräradan kulmanopeus n' ja lineaarinen nopeus $n' r_1$ etäisyydellä r_1 Keplerin kolmannen lain mukaan? Ilmaise suureisiin n, r_0 ja r_1.

8) Kuinka suuri on toisen eli apogeumin rakettityönnön oltava, jotta

ympyränopeus saavutetaan uudella säteellä r_1? Analysoi huolellisesti!

9) Mikä on koordinaatti $v(t_1)$ lähtöradan Hillin koordinaatistossa? Toisin sanoen paljonko takaa-ajaja on ”jäljessä”?

10) Aluksella on mukana mittalaite alusten välisen etäisyyden $\|\mathbf{u}\|$ ja lähestymisnopeuden $-\|\dot{\mathbf{u}}\|$ määrittämiseksi. Muodosta *havaintoyhtälöt*, jos tilavektori on

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} u & v & w & \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \end{array}\right]^T.$$

Satelliittinavigoinnin teknologiat

7

7.1 GPS-paikannusjärjestelmä

Globaali paikannusjärjestelmä GPS oli ensimmäinen satelliittijärjestelmä, jonka avulla voitiin navigoida tosiajassa. Sen mahdollisti kiertoradan geometria, satelliittien määrä ja ennen kaikkea signaalin koodaus, jonka ansiosta etäisyysmittaussignaaleja voitiin vastaanottaa monilta satelliiteilta yhtaikaa.

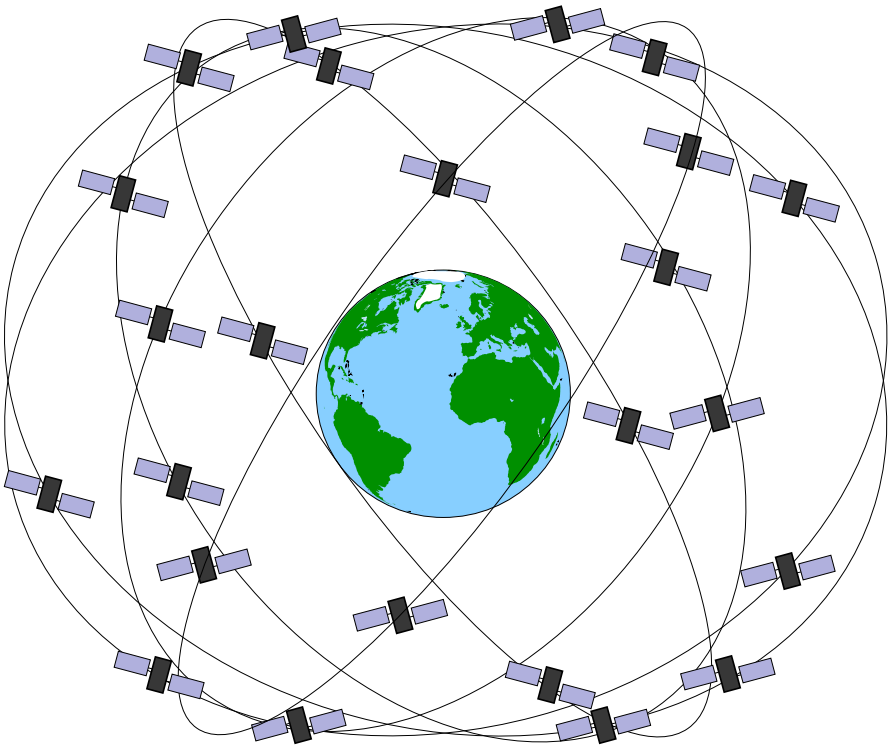
GPS-järjestelmä koostuu *kolmesta segmentistä* eli lohkosta: avaruus-, valvonta- ja käyttäjälohko. Avaruuslohkoon kuuluu vähintään 24, käytännössä 27–31 satelliittia, mukaan lukien *"active spares"*. Ratatasoja on kuusi 60° välein. Jokaisessa ratatasossa on neljä satelliittia. Ratatasojen kaltevuuskulma päiväntasaajan nähden eli inklinaatio on 55°.

Koko GPS-konstellaation ja yksittäisten satelliittien geometria toistuu $23^{h}56^{m}$ eli yhden tähtivuorokauden eli kahden GPS-satelliittien rataperiodin välein. Aina tämän ajan kuluttua sekä havaitsijat pyörivän Maan pinnalla että yksittäiset satelliitit ovat inertiaalisessa geosentrisessä koordinaatistossa taas samoissa paikoissa avaruudessa. Havaintogeometria siis toistuu.

GPS-satelliitit kuuluvat eri teknologiasukupolviin eli *blokkeihin*. Vanhat blokkien I, II ja IIA satelliitit eivät ole enää toimimassa. Uusin tyyppi on Block III, jonka ensimmäinen satelliitti laukaistiin vuonna 2018. Seuraavan blokin, Block IIIF:n ("III Follow-on"), sopimuksen voitti Lockheed Martin.

Valittu geometria merkitsee, että melkein missä päin maailmaa ja melkein koska tahansa horisontin yläpuolella näkyy ainakin kahdeksan satelliittia. Tavallisesti niitä näkyy enemmän, joskus jopa kaksitoista.

Lisää aiheesta GPS ja navigointi löytyy kirjasta Strang ja Borre (1997), sivuilla 495–514. Hyvä oppikirja satelliittipaikannuksesta yleisemmin



KUVA 7.1. GPS-konstellaatio. Perustason konstellaatio, 24 satelliittia.

on Poutanen (2017).

Valvontalohko sisältää (Control Segment, tilanne 2020):

- Kuusitoista seuranta-asemaa ympäri maapalloa. Toisin kuin tavallisilla GPS-havaintoasemilla, seuranta-asemilla käytetään tarkkoja atomikelloja.
- Tähän joukkoon kuuluu neljä ”antenniasemaa”, joiden kautta uudet rata-alkiot ja muu tieto ladataan satelliittien muistiin, tavallisesti kahdesti vuorokaudessa. Tehtävään voidaan käyttää myös seitsemää Air Force Satellite Control Network (AFSCN) -asemaa.
- Laskenta- ja ohjauskeskus (MCS, *Master Control Station*) sijaitsee Schrieverin ilmavoimien tukikohdassa Colorado Springsissä ja sen varakeskus (*Alternate* MCS) Vandenbergissa Kaliforniassa.

7.2 GPS-satelliitit ja signaalin rakenne

GPS-satelliitin lähettämä radiosignaali koostuu *kantoaallosta*, niin sanotuista *näennäissatunnaiskoodeista*, jotka on moduloitu kantoaallolla, ja *navigointiviestistä*. Sekä kantoaaltoja että koodeja voidaan käyttää paikannuksessa. Käyttöliittymän ohjausasiakirjat (GPS ICD) kertovat lisää.

Erikseen kannattaa mainita navigointiviesti, joka sisältää myös almanakan. Jokainen satelliitti lähettää almanakan, joka sisältää konstellaation kaikkien satelliittien likimääräisiä ratatietoja. Bittinopeus on vain 50 bittiä sekunnissa, ja viestin kokonaispituus on 12,5 minuuttia.

Alhaisen bittinopeuden takia voi kestää useita minuutteja, ennen kuin kylmäkäynnistetty vastaanotin lukittuu niin moniin satelliitteihin, että ensimmäisen paikannusratkaisun laskenta onnistuu. Sama pätee, jos vastaanotin on kuljetettu maanosasta toiseen, koska se ei ainoastaan aluksi etsi vääriä satelliitteja paikalliselta taivaalta, vaan myös olettaa niille vääriä dopplersiirtymiä.

Navigointiviesti moduloidaan sekä L1-taajuudelle C/A-koodin päälle että P(Y)-koodin päälle taajuuksilla L1 ja (valinnaisesti) L2. Viestin modulaatio koodien päälle tapahtuu XOR-operaation avulla. GPS:n modernisoinnin myötä otetaan käyttöön uusi navigointiviesti CNAV, joka lähetetään sekä L2C:n osana taajuudella L2 että taajuudella L5. Lisäksi on uusi sotilaallinen navigointiviesti nimeltä MNAV.

7.2.1 Kantoaalto

Kantoaaltojen aallonpituus on noin 20 cm. Paikannustarkkuus kantoaallon vaiheen mittauksilla on noin 1 % siitä eli noin 2 mm. Sekä tarkka paikannus että tarkka navigointi perustuu kantoaallon vaiheen mittaukseen. Tähän tarkoitukseen käytetään aina kaksitaajuusvastaanottimia, jotta ionosfäärin etenemisviive voitaisiin poistaa. Katso taulukko 7.1.

Satelliittien rataliike aiheuttaa vastaanotetussa signaalissa dopplersiirtymän, joka on pienimmillään −5 jaksoa millisekunnissa, kun satelliitti loittonee vastaanottimesta, ja suurimmillään +5 jaksoa millisekunnissa, kun satelliitti lähestyy. Jos vastaanotin itse liikkuu, se aiheuttaa oman dopplersiirtymän.

Vastaanottimen on osattava seurata siirrettyä taajuutta. Siirtymä voidaan laskea almanakan perusteella.

Dopplersiirtymää voidaan käyttää GPS:n havaintosuureena näennäissatunnaiskoodin ja kantoaallon vaiheen mittausten lisäksi.

Kun kantoaallon vaihetta käytetään havaintosuureena, on tunnettu ongelma, että kaikki aallot ovat samannäköisiä. Tarvitaan *kokonaislukutuntemattomien* eli moniselitteisyyksien eli ambiguiteettien *ratkaisemista*. Tähän on kehitetty useita vaihtoehtoisia menetelmiä.

TAULUKKO 7.1. GPS-signaalin kantoaallot. GPS-järjestelmän modernisointi lisää taajuuden L5, jota käytetään lähinnä ilmailussa.

Kantoaalto	Taajuus (MHz)	Aallonpituus (cm)	Perustaajuuden 10,23 MHz monikko
L1	1575,42	19,0	154×
L2	1227,60	24,4	120×
L5	1176,45	25,5	115×

7.2.2 Koodit

P-koodin ”pseudoaallonpituus” on 29,3 m. Tämä on valon nopeus jaettuna P-koodin ”*chip rate*” -arvolla eli bittinopeudella eli bittitaajuudella eli kooditaajuudella, mikä tuottaa bittien välisen etäisyyden lentävällä radioaallolla. Paikannustarkkuus on parhaimmillaan noin 1 % siitä eli noin 30 cm.

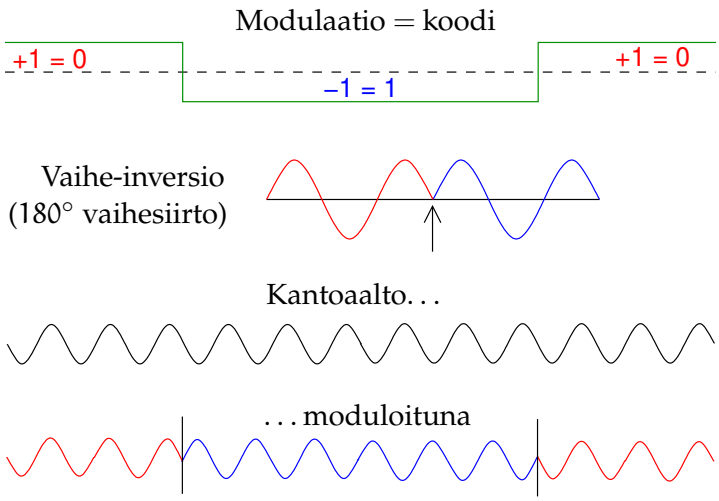
C/A-koodin *chip rate* eli bittinopeus eli bittitaajuus eli kooditaajuus vastaa ”aallonpituutta” 293 m. Katso taulukko 7.2.

Kun vastaanotin aloittaa mittaamisen, se on ensin lukittava C/A-koodiin. Tämä on helppoa, koska koodi on lyhyt: se on 1023 bitin jono, joka toistuu millisekunnin välein. Vastaanotin vertaa jokaisen satelliitin saapuvaa signaalia kyseisen satelliitin koodin vastaanottimen itse generoimaan jäljitelmään 1023 eri mahdollisella viivearvolla. Kun vastaavuus löytyy, vastaanotin lukittuu koodiin ja aloittaa navigointiviestin purkamisen.

C/A-koodi antaa lyhyen toistojaksonsa takia satelliitin pseudoetäisyyden vain modulo 300 km, ja vieläkin heikolla tarkkuudella. Navigointiviesti sisältää kuuden sekunnin välein ”kanavanvaihtosanan”, joka kertoo vastaanottimelle tarkalleen, kuinka pitkälle pidempi P(Y)-koodi on edennyt, jolloin vastaanotin lukittuu myös P(Y)-koodiin. P(Y)-koodi on viikon mittainen viipale paljon pidemmästä (37 viikkoa!) näennäissatunnaiskoodista. Eri satelliitit käyttävät eri viikkoja. Tämä mahdollistaa pseudoetäisyyden määrittämisen satelliitille yksiselitteisesti ja tarkasti.

7.2.3 Modulaatiot

Koodit moduloidaan kantoaaltoon käyttäen niin sanottua *vaihemodulaatiota*, kuva 7.2. Vaiheella on kaksi mahdollista tilaa, joiden välillä on vaihe-ero $180° = \pi$. Jos koodin bittiarvo on 0, kantoaallon vaihe pysyy



KUVA 7.2. Vaihemodulaation periaate.

ennallaan eli vaihesiirtymä on nolla. Jos bittiarvo on 1, kantoaallon vaihetta edistetään määrällä 180°, toisin sanoen kantoaalto kerrotaan arvolla −1. Tekniikan nimi on binaarinen vaiheavainnus (BPSK).

GPS-järjestelmässä käytetään myös vaihesiirtymiä 90° ja 270°. Myös niillä voi koodata bittiarvojen 1 tai 0 virran. Näin yksi kantoaalto voi sisältää rinnakkain kaksi bittivirtaa, joiden välillä on vaihesiirtymä $90° = \frac{1}{2}\pi$. Näitä kahta bittivirtaa kutsutaan modulaation ”suoraksi vaiheeksi” ja ”kvadratuuri”-komponentiksi. Koko moduloitu kantoaalto on näiden kahden komponentin summa. Esimerkiksi kantoaallolla L1 P(Y)-koodi on (sovitusti) moduloitu suoraan vaiheeseen ja C/A-koodi kvadratuuriin.

7.2.4 *Koodijakokanavointi*

GPS-kantoaalloilla moduloidut näennäissatunnaiset koodit ovat yksilöllisiä jokaiselle satelliitille, eli ne toimivat kuin satelliitin ”sormenjälki”. Tämä on välttämätöntä, koska kaikki GPS-satelliitit lähettävät samoilla kantoaaltotaajuuksilla. Ratkaisu on nimeltään *koodijakokanavointi* (CDMA). Koodit on rakennettu huolellisesti keskenään ”ortogonaalisiksi”, jotta eri satelliiteista vastaanottimen antennille tulevien signaalien erottaminen toisistaan olisi helppoa.

C/A-koodeina käytetään Goldin koodeja, jotka esitellään osiossa 7.4. Niiden pituus on 1023 bittiä, eli ne toistuvat millisekunnin välein. P-koodille käytetään paljon pidempiä bittijonoja. Nämä koodit näyttävät satunnaisilta, mutta ne generoidaan tunnetulla algoritmilla, jonka vastaanottimet osaavat toistaa.

TAULUKKO 7.2. GPS-signaalin eri näennäissatunnaiskoodit (PRN, *pseudo-random noise code*). GPS-järjestelmän modernisointi on lisännyt tähän suurehkon määrän uusia koodeja sekä alkuperäisillä kantoaaltotaajuuksilla L1 ja L2 että uudella taajuudella L5. ”I” ja ”Q” merkitsevät suoraa vaihetta ja kvadratuuri-modulaatiota.

Lyhenne	Nimi	Kooditaajuus (Mb/s)	Modulaatiotyyppi	Toistojakso	Kantoaalto	I/Q
C/A	Coarse/Acquisition[b]	1,023	BPSK	1 ms	L1	Q
P, P(Y)[a]	Precise/Protected[b]	10,23	BPSK	1 viikko	L1, L2	I
L1C	L1 siviili, tietoa[b]	1,023	BOC(1,1)	10 ms	L1	I
	pilottisignaali	1,023	TMBOC[c]	10 ms		
	overlay	100 b/s	BPSK	18 s		
L2C	L2 siviili, moderate (CM)[b]	0,5115	BPSK	20 ms	L2	Q[d]
	long (CL)	0,5115	BPSK	1,5 s		
M	Sotilaallinen	5,115	BOC(10,5)		L1, L2	I
I_5	L5 tietoa[b]	10,23	BPSK	1 ms	L5	I
Q_5	L5 pilottisignaali	10,23	BPSK	1 ms		Q

[a] Y- eli P(Y)-koodi saadaan moduloimalla P-koodi XOR-operaattorilla salaisella W-koodilla. Tarkoituksena on estää *”spoofingia”* eli GPS-signaalin väärennöksen generoimista ja lähettämistä.

[b] Kantaa navigointiviestiä.

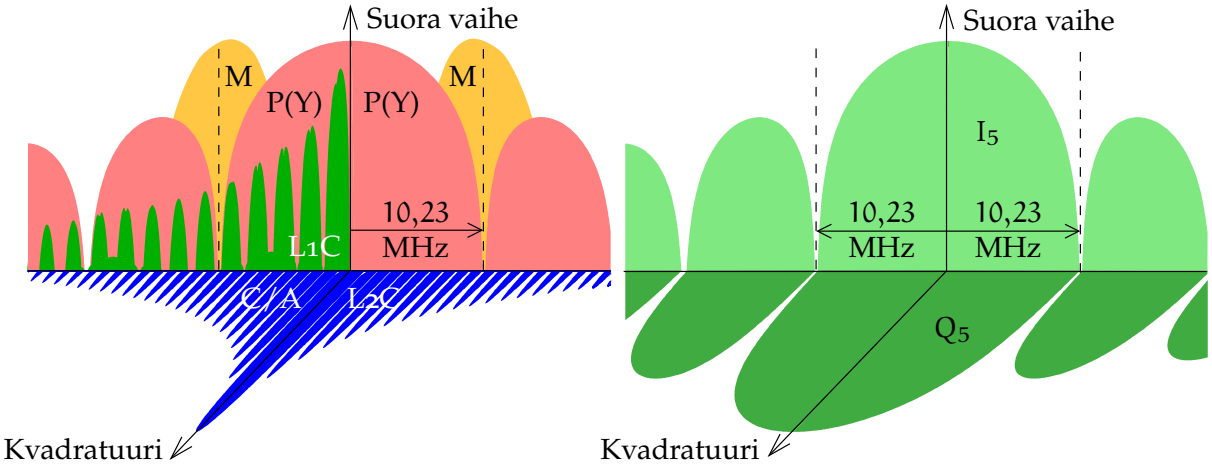
[c] Pilottisignaali käyttää aikamultipleksoitua TMBOC-modulaatiota $(1,1)/(6,1)$.

[d] Oletus. I on valinnainen.

7.2.5 Polarisointi

GPS-järjestelmän radiolähetykset ovat ympyräpolarisoituja myötäpäivään. Tämä merkitsee, että etenemispolkua pitkin katsottuna kenttävektori kiertyy korkkiruuvin tavoin myötäpäivään: yhden täyden kierron jokaista aaltojaksoa kohti. Katso kuva 7.4. Sama pätee järjestelmille GLONASS, Galileo, BeiDou ja QZSS. Tähän ratkaisuun on päädytty siksi, että vastaanottimen antennille halutaan tehdä mahdollisimman helpoksi hylätä kerran heijastuneet signaalit, jotka tulevat esimerkiksi antennin lähellä olevista heijastavista pinnoista. Ei-toivotut heijastukset tunnetaan *monitieongelmana*.

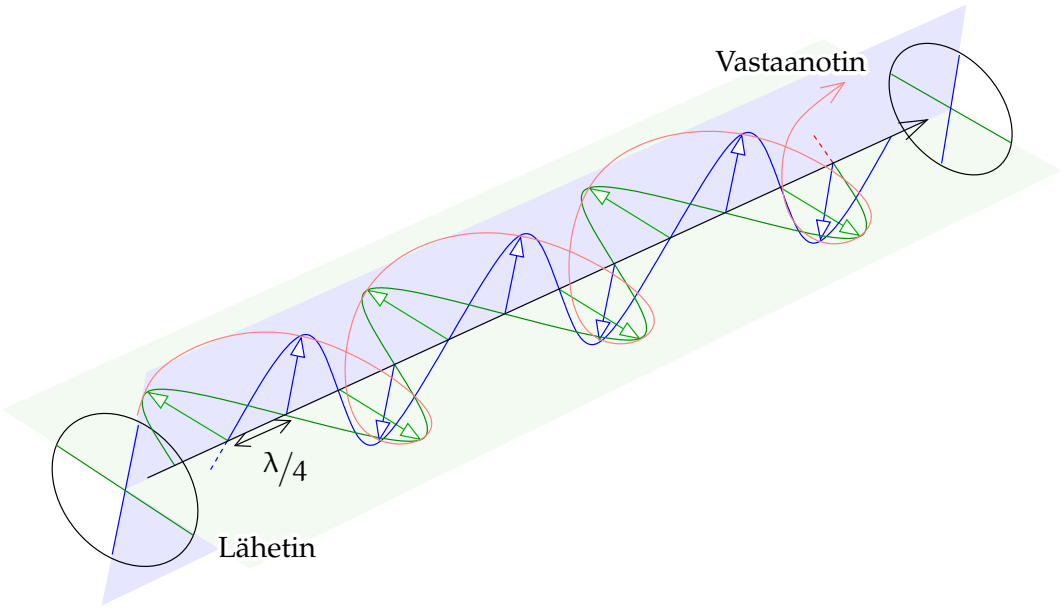
Hylkääminen perustuu siihen, että heijastus täydellisesti heijastavalta pinnalta, esimerkiksi metallipinnalta, muuttaa myötäpäivään ympyrä-



L1, 1575,42 MHz L2, 1227,60 MHz L5, 1176,45 MHz

KUVA 7.3. Kantoaallon suoran vaiheen ja kvadratuurin vaihekulmien GPS-koodien tehospektrit. L1 ja L2 annetaan yhdistetyssä kuvassa: C/A ja L1C moduloidaan taajuudelle L1, kun taas L2C moduloidaan samalla tavalla taajuudelle L2.

polarisoidun säteilyn vastapäivään polarisoiduksi säteilyksi[1]. Myötä- [1]



KUVA 7.4. Ympyräpolarisoidut radioaallot kulkevat lähettimestä vastaanottimeen. Ympyräpolarisoitu aalto saadaan yhdistämällä kaksi aaltoa, jotka ovat lineaarisesti polarisoituja keskenään kohtisuorissa suunnissa, ja joiden välillä on vaihesiirtymä $\pi/2$.

päivään polarisoidun säteilyn voidaan katsoa koostuvan kahdesta komponentista, jotka ovat lineaarisesti polarisoituneita suuntiin, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, ja joiden vaihekulmat eroavat toisistaan määrällä $\pi/2$. Tarkat GPS-vastaanottimet käyttävät ristidipolin tyyppistä antennia, jossa kohtisuorat komponentit yhdistetään viivästyttäen vain toisen komponentin vaihekulmaa määrällä $\pi/2$. Myötäpäivään polarisoidun säteilyn tapauksessa tämä merkitsee, että molempien komponenttien vaiheet ovat identtisiä ja komponentit vahvistavat toisiaan, kun ne yhdistetään. Toisaalta vastapäivään polarisoidun säteilyn komponentit ovat vastavaiheessa ja kumoutuvat täysin tai osittain, kun ne yhdistetään.

7.2.6 Suhteellisuusteoria

Vastaanotetun GPS-signaalin taajuus on siirtynyt relativistisesti kahdesta syystä: vastaanottimet ovat paljon satelliitteja syvemmällä Maan vetovoimapotentiaalikentässä ja satelliitit liikkuvat huomattavalla nopeudella. Vakiokorjausta $-4{,}4647 \cdot 10^{-10}$ f taajuudelle f sovelletaan kaikille satelliittikelloille niiden valmistusvaiheessa. Tämä korjaa suurimman osan satelliittiradan ja keskimerenpinnan välisestä relativistisesta vaikutuksesta. Satelliittiradan eksentrisyyteen liittyvä pieni vaihteleva korjaus jää vastaanottimen tehtäväksi[2].

Pyörivällä maapallolla myös samanaikaisuus on ongelmallinen, niin sanottu *Sagnacin ilmiö*. Suhteellisuusteoriassa ei ole olemassa absoluuttista samanaikaisuutta. Jos GPS-laskelmia tehdään Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa, vastaanottimen on tehtävä mitattuihin pseudoetäisyyksiin Sagnacin korjaus, joka riippuu maapallon paikallisesta pyörimisnopeudesta ja satelliitin etäisyydestä havaintopaikan meridiaanitasosta (Poutanen, 2017, yhtälö 4.19):

$$\delta_{\text{Sagnac}} p = \frac{1}{c} \langle \mathbf{V}' \cdot \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{c} \left\langle \langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{X} \rangle \cdot \mathbf{x} \right\rangle,$$

oomega ωΩ

jossa $\mathbf{V}' = \langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{X} \rangle$ on maapallon pyörimisen aiheuttama havaintopaikan lineaarinen nopeusvektori — joka osoittaa suoraan itään — ja $\mathbf{x}$

[1] Ei-metallipintojen, kuten veden tai maaperän, tapauksessa asia on monimutkaisempi. Kohtisuorasti heijastunut säteily on vastapäivään ympyräpolarisoitu, mutta muiden tulokulmien osalta heijastunut säteily on elliptisesti polarisoitu.

[2] GPS-järjestelmän alkuaikoina laskentateho ei ollut riittävä tämän korjauksen tekemiseksi satelliitilla (Ashby, 2003)!

on satelliitin, $\mathbf{X}$ vastaanottimen geosentrinen paikkavektori. Huomaa, että korjaus voidaan tulkita inertiaalisessa koordinaatistossa havaitsijan tekemäksi matkaksi satelliitin suuntaan sen aikana, kun signaali lentää satelliitista vastaanottimeen nopeudella c.

Tämä on tärkeä asia, kun vertaillaan eri maanosissa olevia atomikelloja GPS-järjestelmän välityksellä. Katso Ashby (2003).

7.3 Kantoaallon korkkiruuvi

7.3.1 Antennin suuntauksen vaikutus

Tutkitaan antennin suuntauksen vaikutusta havaittuun kantoaallon vaiheeseen. Katso kuva 7.5, jossa aalto saapuu antennille alhaalta vasemmalta. Sininen ellipsi näyttää lyhennyksen, joka johtuu kenttävektorin projisoimisesta antennin vaakatasoon. Tässä tasossa saapuva ympyräpolarisoitu aalto, jonka lineaarinen taajuus on f ja siis sirkulaarinen taajuus $\omega = 2\pi f$, voidaan kuvata seuraavasti, kun jätetään pois mielivaltainen ajan origo ja amplitudi:

$$\mathbf{E} = \cos(\omega t)\,\tilde{\mathbf{i}} + \sin(\omega t)\cos\zeta\,\tilde{\mathbf{j}},$$

jossa $\tilde{\mathbf{j}}$ on yksikkövektori vaakatasoon projisoidun näkölinjan suunnassa ja $\tilde{\mathbf{i}}$ siihen kohtisuora yksikkövektori vaakatason sisällä. ζ on satelliitin zeniittikulma. Jos $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ ovat yksikkövektorit antennin ristidipolien suunnissa, signaalit näissä dipoleissa ovat

zeeta ζZ

$$\begin{aligned} s_i = \langle \mathbf{E}\cdot\mathbf{i}\rangle &= \cos(\omega t)\,\langle\tilde{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{i}\rangle + \sin(\omega t)\cos\zeta\,\langle\tilde{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{i}\rangle = \\ &= \cos\omega t\cos\delta\phi + \sin\omega t\cos\zeta\sin\delta\phi, \\ s_j = \langle \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}\rangle &= \cos(\omega t)\,\langle\tilde{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{j}\rangle + \sin(\omega t)\cos\zeta\,\langle\tilde{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{j}\rangle = \\ &= \sin\omega t\cos\zeta\cos\delta\phi - \cos\omega t\sin\delta\phi. \end{aligned}$$

Tässä $\delta\phi$ on atsimuuttiero näkölinjan ja antennin välillä.

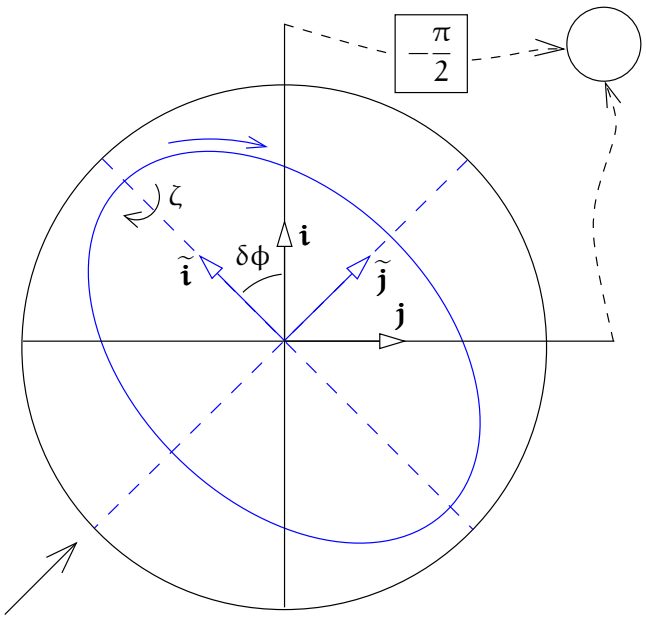
fii φϕΦ

Siirtämällä s_j:n vaihe suhteessa s_i:hin eteenpäin määrällä $\pi/2$ saadaan

$$s_j^* = \cos\omega t\cos\zeta\cos\delta\phi + \sin\omega t\sin\delta\phi,$$

ja yhteenlasku antaa

$$\begin{aligned} s_i + s_j^* &= \cos(\omega t)\,(\cos\delta\phi + \cos\zeta\cos\delta\phi) + \\ &\quad + \sin(\omega t)\,(\cos\zeta\sin\delta\phi + \sin\delta\phi) = \\ &= (1+\cos\zeta)\,(\cos\omega t\cos\delta\phi + \sin\omega t\sin\delta\phi) = \\ &= (1+\cos\zeta)\cos(\omega t - \delta\phi). \end{aligned} \tag{7.1}$$



KUVA 7.5. Ympyräpolarisoidun säteilyn vastaanotto.

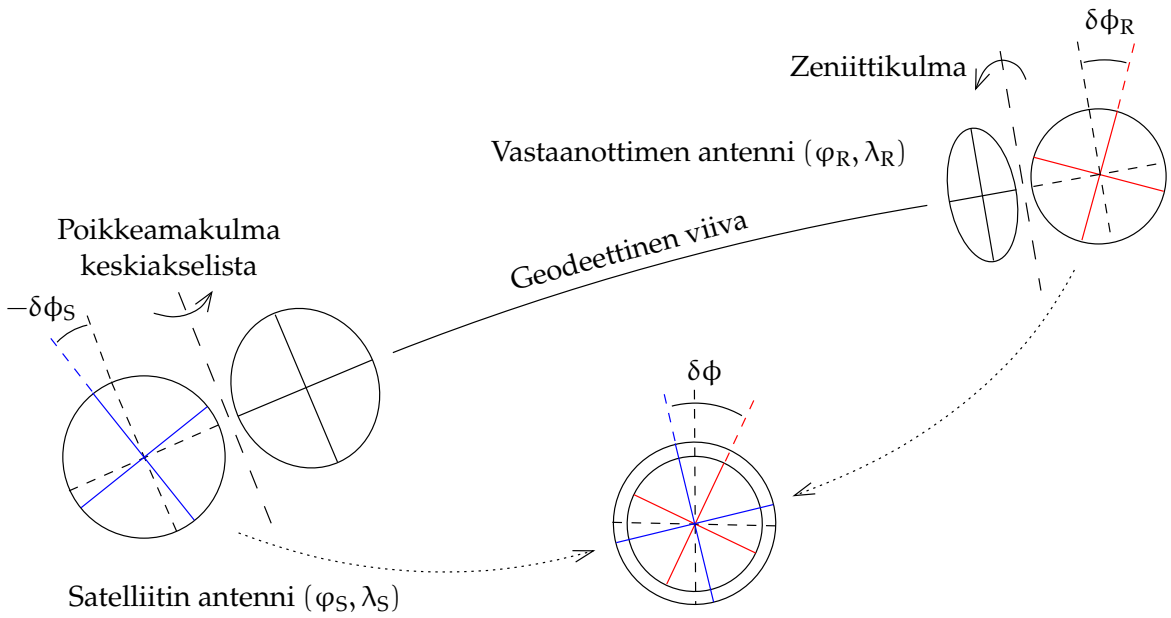
Huomaa, että positiivinen $\delta\phi$ saa satelliitin etäisyyden näyttämään pidemmältä: sama vaihekulma saavutetaan suuremmalla arvolla t, joka on vastaanoton aika.

Vähentäminen taas antaa

$$\begin{aligned} s_i - s_j^* &= \cos(\omega t)\,(\cos\delta\phi - \cos\zeta\cos\delta\phi) + \\ &\quad + \sin(\omega t)\,(\cos\zeta\sin\delta\phi - \sin\delta\phi) = \\ &= (1-\cos\zeta)\,(\cos\omega t\cos\delta\phi - \sin\omega t\sin\delta\phi) = \\ &= (1-\cos\zeta)\cos(\omega t + \delta\phi). \end{aligned}$$

Tämä vastaa käsitteellisesti sitä, mitä yhteenlasku tekee vastapäivään polarisoidulle säteilylle.

Vastapäivään polarisoidun säteilyn hylkääminen on siis täydellistä zeniitiltä tuleville radioaalloille, $\cos\zeta = 1$. Muiden satelliittien korkeuskulmien kohdalla hylkääminen on epätäydellistä, ja horisontissa olevan satelliitin kohdalla antenni poimii vain vaakasuoraan polarisoidun komponentin riippumatta siitä, onko se myötä- vai vastapäivään polarisoidun aallon osa. Näin ollen heijastuksia ei hylätä. Tämä on valitettavaa, koska suurin osa monitieheijastuksista tulee läheisiltä pinnoilta lähellä vaakatasoa.



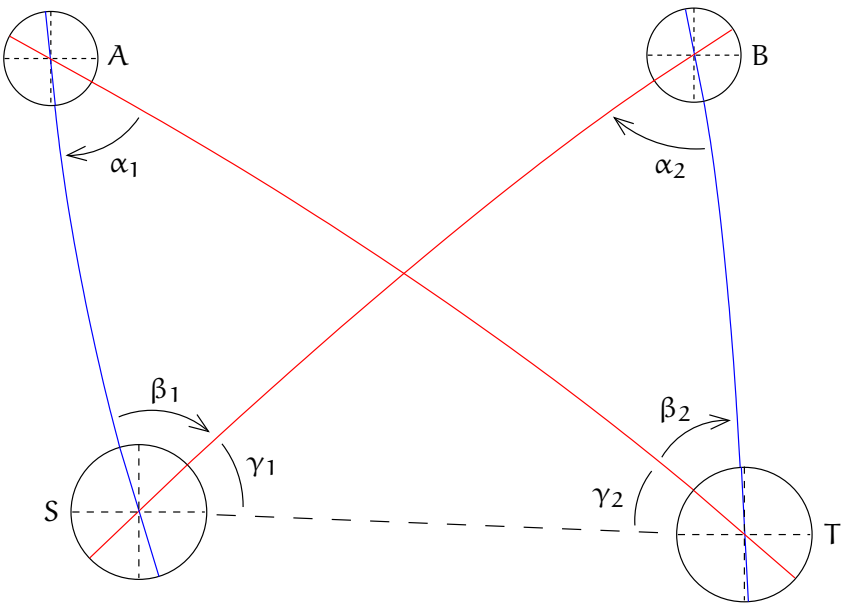
KUVA 7.6. Vaihekelaus. Kantoaallon vaiheen havainnon vaihekelauksen kokonaiskulma on $\delta\phi = \delta\phi_R - \delta\phi_S$: ero vastaanottimen ja satelliitin antennien suuntauspoikkeamien välillä näkölinjan atsimuutilta. Tämän laskemiseksi kummankin antennin pääakseli käännetään vaakaviivan (pitkät katkoviivat) ympäri näkölinjaan, jolloin antennien tasot ja niiden sisältämät ristidipolit kääntyvät tasoiksi, jotka ovat kohtisuorassa näkölinjaan. Nyt kelauskulma on kulma näkölinjan ympäri kahden ristidipoliparin välillä.
Kuva osoittaa tilanteen projisoituna geosentriseen suuntapalloon, jolloin näkölinja projisoituu geodeettiseksi viivaksi.

7.3.2 *Kantoaallon vaihekelaus*

Kantoaallon vaiheen mittauksissa GPS:n radioaaltojen ympyräpolarisointi tuo esiin ikävän lisähaasteen: antennin kiertäminen sen pääakselin ympäri muuttaa kantoaallon vaiheen mittausta. Se on kuin kääntäisi korkillista pulloa, jonka korkissa on korkkiruuvi, ja pitäisi korkkiruuvin kahvasta kiinni: korkkiruuvi liikkuu joko sisään tai ulos pullon kääntösuunnasta riippuen.

Korkkiruuvin kahvakaan ei pysy liikkumatta: GPS-satelliitit kääntyvät kiertoradallaan seuraten Aurinkoa sähkövoimansa vuoksi. Tämä ilmiö voidaan kuitenkin mallintaa. Vastaanottimen antennin tapauksessa se on käyttäjän vastuulla. Ilmiö, *vaihekelaus*, voi vaikuttaa jopa puolen aallonpituuden verran. Kuva 7.6 antaa selityksen.

Vaihekelauksen vaikutus on sekä vastaanottimen että satelliitin antennilla sama kuin näkölinjan ja antennin ristidipolin atsimuuttien välinen



KUVA 7.7. Vaihekelauksen vaikutus kaksoiserotushavainnoille. Kuva näyttää tilanteen projisoituna geosentriseen suuntapalloon, jolloin näkölinjat projisoituvat geodeettisiksi viivoiksi.

ero, yhtälö 7.1. Oletetaan, että näkölinja ei vaikuta asiaan, mikä pitää paikkansa, jos vastaanottimen ja satelliitin luotiviivat ovat samassa tasossa, toisin sanoen Maa on pallo. Katso Wu ym. (1993).

Käy ilmi, että perinteisissä geodeettisissa mittauksissa yksittäisen vastaanottimen tai satelliitin antennin suuntauksen vaikutus häviää, kun lasketaan verkkoa tavan mukaan erotushavainnoista. Paikallisissa verkoissa myös geometrian vaikutus poistuu erotushavainnoista.

Laajemmissa verkoissa, jotka ovat kooltaan 1000 km tai yli, tämä ei enää päde ja geometrian vaikutus on otettava huomioon. Kuvassa 7.7 nähdään, kuinka suurten verkkojen ja kaksoiserotusten tapauksessa syntyy nollasta eroava vaihekelauksen nettovaikutus.

Jokainen antenni, olipa se vastaanottimen A tai B tai satelliitin S tai T, osallistuu osuudella, joka on yhtä kuin kahden muun antennin atsimuutin välinen kulma: α_1 ja α_2 kahden satelliitin antennin välillä katsottuna vastaanottimelta, ja β_1 ja β_2 kahden vastaanottimen antennin välillä katsottuna satelliitilta.

alfa αA

beta βB

Nämä osuudet tulee laskea huolellisesti yhteen asianmukaisilla etumerkeillä varustettuina. Katso kuva 7.8.

Kuvassa ϵ on geosentrisen suuntapallon kolmion *palloylijäämä*. Palloylijäämä on yhtä kuin kolmion pinta-ala yksikkösuuntapallolla. Symmetrisesti myös $\delta\phi^{ST}_{AB} = \epsilon_{TAB} - \epsilon_{SAB}$. Pienten kolmioiden eli paikallisten

epsilon $\varepsilon\epsilon$E

$$
\begin{array}{rcl}
-\delta\phi_{AB}^{ST} = \alpha_1 - (-\beta_1) & - & \Big(\alpha_2 - (-\beta_2)\Big) \\
0 = \gamma_1 + \gamma_2 & - & (\gamma_1 + \gamma_2) \\
\hline
-\delta\phi_{AB}^{ST} = \underbrace{\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) + \gamma_2}_{180^\circ + \epsilon_{AST}} & - & \underbrace{\Big(\alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2) + \gamma_1\Big)}_{180^\circ + \epsilon_{BST}}
\end{array}
$$

$$\implies \delta\phi_{AB}^{ST} = \epsilon_{BST} - \epsilon_{AST}.$$

Kuva 7.8. Vaihekelaus ja palloylijäämä kaksoiserotushavainnoille.

geodeettisten verkkojen kohdalla tämä on häviävän pieni.

GPS:n käsittelymenetelmissä, jotka eivät perustu erotushavaintojen muodostamiseen, vastaanottimen ja satelliittin antennin suuntaus on otettava huomioon nimenomaisesti. Tällainen menetelmä on esimerkiksi tarkka absoluuttinen paikannus (PPP).

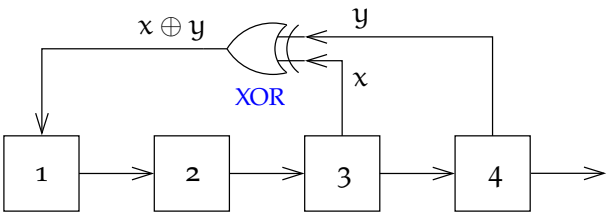
Navigoinnissa esimerkiksi lentokoneeseen kiinnitetty antenni kääntyy koneen kanssa. Antennin kiertäminen sen oman pystyakselin ympäri muuttaa kaikilta satelliiteilta vastaanotetun signaalin vaiheen samalla kulmalla satelliitin zeniittikulmasta riippumatta (García-Fernández ym., 2008). Tästä seuraa, että vaiheen muutos imeytyy vastaanottimen kellotuntemattomaan. Satelliittien väliset erotushavainnot eivät muutu. Tiukkoja käännöksiä tulisi välttää ja käyttää vain suoralla lennolla saatuja mittauksia. Tämä voi olla merkityksellistä, kun tarkkoja GPS-mittauksia käytetään osana tietotuotetta esimerkiksi ilmagravimetriassa, luku 12.

7.4 GPS:n lukuteoria

Nykyisin Internetin finanssi- ja muu liiketoiminta on kriittisesti riippuvainen lukuteoriasta. Tätä eksoottista matematiikan haaraa harrastettiin aikanaan itsensä vuoksi eikä kukaan olisi uskonut, että sitä vielä joskus käytettäisiin johonkin hyödylliseen. Tänään lukuteoria mahdollistaa vahvan salauksen ja todennuksen, jotta ihmiset uskaltavat käyttää Internetiä raha-asioissaan.

Ei varmaan tule yllätyksenä, että lukuteoria on tunkeutunut myös satelliittipaikannukseen: sitä käytetään GPS:n kantoaalloille moduloitujen näennäissatunnaiskoodien muodostamisessa.

x	y	x ⊕ y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0



KUVA 7.9. Lineaarisen palautteen siirtorekisteri. Vasemmalla XOR-operaation määritelmä.

Lähdetään liikkeelle lineaarisen palautteen siirtorekisteristä (LFSR), kuva 7.9. Tämä esimerkki on neljän solun eli kiikun siirtorekisteri. Jokainen solu sisältää bittiarvon 1 tai 0. Kun kellosignaali ”liipaisee” siirtorekisterin, jokaisen solun sisältö siirtyy sen oikealla puolella olevaan soluun. Lisäksi solut 3 ja 4 luovat XOR-portin kautta bittiarvon, joka menee soluun 1.

Kun $n = 4$, rekisterillä on $2^n = 16$ mahdollista sisällön tilaa eli kaikki neljän bitin binaariluvut. Suljemme tästä pois tilan, joka koostuu pelkästään nollista, koska kahden nollan välinen XOR-operaatio $0 \oplus 0 = 0$, joten rekisteri ei koskaan pääsisi pois kaikkien nollien tilasta.

Tässä geometriassa jokainen liipaisu luo nelibittisen luvun ja voidaan näyttää, että joukko, joka koostuu kaikista nollasta eroavista nelibittisistä luvuista kuljetaan läpi satunnaisen näköisessä järjestyksessä. Lukuja on yhteensä

$$2^n - 1 = 15.$$

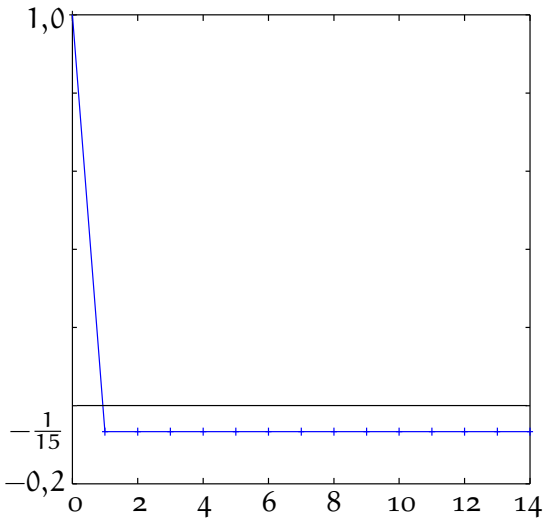
Katso taulukko 7.3. Sen jälkeen sarja palaa lähtöarvoon ja sykli toistuu.

Solun 4 bittijono on myös se, joka tulee rekisteristä ulos.

- Ykkösten määrä jonossa on $2^{n-1} = 8$, ja nollia on yksi vähemmän eli $2^{n-1} - 1 = 7$. Jos kaikki nelibittiset luvut olisivat joukon jäseniä, odotettaisiin yhtä monta loppubittiä 1 kuin loppubittiä 0. Mutta luku 0000 ei ole joukon jäsen!
- Jonon aloittaminen eri luvulla kuin 1000 tuottaa *saman jonon*, vain syklisesti siirrettynä.
- Voidaan näyttää (liite B), että XOR-operaatio jonon x ja sen syklisesti siirretyn version x^α välillä tuottaa vieläkin eri tavalla syklisesti siirretyn version x^β.
- Jono x ja sama jono x^α minkä tahansa syklisen siirron α jälkeen korreloivat minimaalisesti: samanarvoisten bittien lukumäärä on $2^{n-1} - 1$. Toisin sanoen $x \oplus x^\alpha = x^\beta$ sisältää 2^{n-1} ykköstä ja

TAULUKKO 7.3. Kuvan 7.9 rekisterin arvojen jono. Oikealla syklinen autokorrelaatiofunktio.

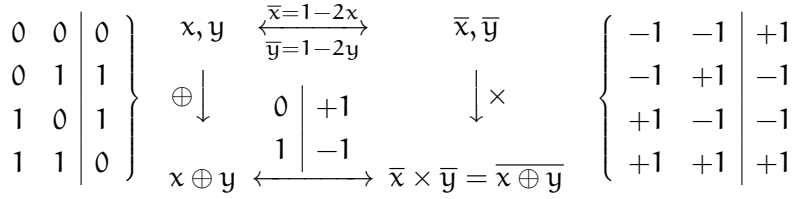
	1	2	3	4	3 ⊕ 4	Ulos
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	1	0	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0
7	1	0	1	1	0	1
8	0	1	0	1	1	1
9	1	0	1	0	1	0
10	1	1	0	1	1	1
11	1	1	1	0	1	0
12	1	1	1	1	0	1
13	0	1	1	1	0	1
14	0	0	1	1	0	1
15	0	0	0	1	1	1
16	1	0	0	0	0	0



$2^{n-1} - 1$ nollaa.

- Koska yhdestä jonosta x on olemassa $2^n - 1$ syklisesti siirrettyä versiota, jotka kaikki korreloivat minimaalisesti keskenään, tuntuu houkuttelevalta käyttää niitä erottamaan yksittäiset satelliitit toisistaan. Tämä ei kuitenkaan toimi[3], koska GPS:n havaintosuure on juuri signaalin siirto ajassa. On löydettävä koodeja, jotka ovat *olennaisesti* erilaisia: ei ole mahdollista muuttaa yhtä toiseksi pelkästään syklisellä siirrolla. [3]
- Robert Gold näytti vuonna 1967, että jos kaksi samanpituista, mutta geometrisesti erilaisten siirtorekisterien generoimaa jonoa x ja y valitaan sopivasti, kaikki jonot $x \oplus y^\alpha$, jotka muodostetaan XOR-operaation avulla jonoista x ja y eri syklisten siirtymien α sovellettaessa
  - ovat olennaisesti erilaisia
  - ristikorreloivat myös minimaalisesti keskenään
  - niiden autokorrelaatiofunktio muistuttaa deltafunktiota: sillä

[3] Itse asiassa GLONASS käyttää tämän tyyppisiä jonoja. Tästä syystä sen on käytettävä eri kantoaaltotaajuuksia eri satelliiteille, katso osio 11.2.



KUVA 7.10. Kommutoiva kaavio, joka selittää koodibittien ja sähkömagneettisten signaaliarvojen välisen suhteen sekä sen, miten XOR-operaattori kuvautuu kertolaskuun.

on huippu origolla ja pieniä arvoja muualla.

Katso liite B.

”Minimaalisen korrelaation” käsite kaipaa selitystä. Jos on kaksi bittijonoa x ja y, joiden alkiot ovat x_i, y_i, $i = 1, \ldots, 2^n - 1$, nämä bitit esiintyvät GPS-signaalin modulaatiossa vaihesiirtoina $0°$ ja $180°$ eli kantoaallon kertomisina arvoilla $+1$ ja -1. Siis bittijonot x, y esitetään signaaliarvojen jonoina $\overline{x}$, $\overline{y}$, joissa arvo -1 edustaa bittiä 1 ja arvo $+1$ bittiä 0. Ilmaistuna lineaarisina suhteina $\overline{x} = 1 - 2x$, $\overline{y} = 1 - 2y$. Katso kaavio 7.10.

Sen jälkeen korrelaatio — ”syklinen ristikorrelaatio” — on

$$\mathrm{Corr}\{\overline{x}, \overline{y}\} = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n-1} \overline{x}_i \overline{y}_i = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n-1} \overline{x_i \oplus y_i} = \\ = \frac{1}{2^n - 1} \left(C_0(x \oplus y) - C_1(x \oplus y) \right),$$

mikä on lähellä nollaa, jos lausekkeen $x \oplus y$ bittien $0 = +1$ ja bittien $1 = -1$ lukumäärät $C_0(x \oplus y)$ ja $C_1(x \oplus y)$ ovat lähellä toisiaan.

Taulukossa 7.3 on piirretty syklinen autokorrelaatiofunktio

$$\mathrm{Corr}\{\overline{x}, \overline{x}^\alpha\} = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n-1} \overline{x_i \oplus x_i^\alpha} = \\ = \frac{1}{2^n - 1} \left(C_0(x \oplus x^\alpha) - C_1(x \oplus x^\alpha) \right) \quad (7.2)$$

syklisen siirron α funktiona. Nähdään, että funktion arvo on yksi, jos $x = x^\alpha$, siis siirto on nolla. Kaikille nollasta eroaville siirroille arvo on $-\frac{1}{15}$. Tämä tulos pätee yleisesti, arvolla $-1/(2^n - 1)$. Siis suurille arvoille n funktio muistuttaa Diracin deltafunktiota, alaosio 2.6.2. Tämä merkitsee, että korrelaattori osaa tunnistaa yksiselitteisesti

TAULUKKO 7.4. Rekisteriarvojen jonot vaihtoehtoisen rekisterin geometrian tapauksessa.

	1 2 3 4	2 ⊕ 4	Ulos
1	1 0 0 0	0	0
2	0 1 0 0	1	0
3	1 0 1 0	0	0
4	0 1 0 1	0	1
5	0 0 1 0	0	0
6	0 0 0 1	1	1
7	1 0 0 0	0	0

	1 2 3 4	2 ⊕ 4	Ulos
1	1 0 0 1	1	1
2	1 1 0 0	1	0
3	1 1 1 0	1	0
4	1 1 1 1	0	1
5	0 1 1 1	0	1
6	0 0 1 1	1	1
7	1 0 0 1	1	1

	1 2 3 4	2 ⊕ 4	Ulos
1	0 1 1 0	1	0
2	1 0 1 1	1	1
3	1 1 0 1	0	1
4	0 1 1 0	1	0

oikean aikasiirron vastaanotetun koodin ja paikallisesti generoidun jäljitelmäkoodin välillä.

Kuvan 7.9 geometrian valinta ei ole sattumaa, kuten voidaan helposti näyttää rakentamalla vaihtoehtoinen siirtorekisteri, jonka XOR on solujen 2 ja 4 eikä solujen 3 ja 4 välillä, taulukko 7.4. Tarvitsemme maksimipituuden jonoja eli *m-jonoja*, jotka toistuvat $2^n - 1$ rekisterin siirron jälkeen. Matematiikan haara, joka tutkii tätä ongelmakenttää on nimeltään Galois'n teoria, Évariste Galois[4]'n mukaan.

GPS-järjestelmän C/A-koodi tuotetaan kahdella lineaarisen palautteen siirtorekisterillä, joilla on eri geometriat. Rekisterit ovat molemmat 10 bittiä pitkiä, ja niiden tuottamat koodit ovat 1023 bittiä pitkiä. Ne yhdistetään XOR-portin kautta eri syklisten siirtymien jälkeen, jolloin ne tuottavat satelliittikohtaiset "Goldin koodit", jotka moduloidaan lähtevälle kantoaallolle. Katso kuva B.1.

7.5 GPS-signaalin tehospektri

GPS-signaalin alkuperäiset näennäissatunnaiskoodin modulaatiot koostuvat yksinkertaisista suorakulmaisista blokeista, kuten funktio

$$B(t) = \begin{cases} 1 & \text{jos } t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ 0 & \text{jos } t \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{7.3}$$

[4] Évariste Galois (1811–1832) oli ranskalainen matemaatikko ja lukuteoreetikko, joka keksi äärellisten kuntien teorian eli Galois'n teorian. Hän kuoli 20-vuotiaana kaksintaistelussa saatuihin vammoihin.

Ei ole vaikeaa näyttää, että tämän funktion Fourier'n muunnos on ($f \neq 0$):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{B\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} B(t)e^{-2\pi ift}\,dt = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-2\pi ift}\,dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi if}\left[e^{-2\pi ift}\right]_{-1/2}^{+1/2} = -\frac{1}{2\pi if}\left(e^{-\pi if} - e^{+\pi if}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi f}\frac{e^{+\pi if} - e^{-\pi if}}{2i} = \frac{\sin \pi f}{\pi f}. \qquad (7.4)\end{aligned}$$

Tapauksessa $f = 0$ saadaan $\mathcal{F}\{B\} = \int_{-1/2}^{+1/2} dt = 1$. Tätä funktiota kutsutaan sinc-funktioksi. Sen määritelmä on

$$\operatorname{sinc} x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{jos } x \neq 0, \\ 1 & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

GPS-signaalin modulaatiota $C(t)$, olipa se C/A-koodi tai P(Y)-koodi, voidaan katsoa stationaariseksi prosessiksi, jonka odotusarvo häviää:

$$E\{C(t)\} = 0.$$

Stationaarisen prosessin autokovarianssifunktio on (yhtälö 2.16):

$$A_C(\Delta t) = \operatorname{Cov}\{\underline{C}(t), \underline{C}(t+\Delta t)\} = E\{\underline{C}(t)\,\underline{C}(t+\Delta t)\}. \qquad (7.5)$$

On myös selvää, että funktio $C(t)$ näennäissatunnaiskohinana koostuu biteistä, jotka eivät korreloi keskenään. Tämä merkitsee, että

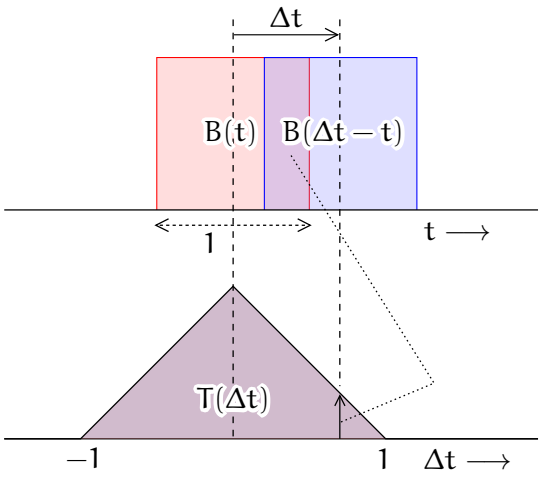
$$A_C(\Delta t) = 0 \quad \text{jos } |\Delta t| > 1,$$

koska silloin yhtälössä 7.5 jokaisen bitin arvo kerrotaan vain muista biteistä tulevien arvojen kanssa, joiden kanssa se ei korreloi.

Ainoat arvot Δt, joille yhtälössä 7.5 oleva kertolasku tuottaa jotain, minkä odotusarvo eroaa nollasta, ovat arvot $-1 < \Delta t < 1$. Näille arvoille kovarianssiarvo on yhtä kuin blokin $B(t)$ ja Δt:n verran ajassa siirtyneen saman blokin $B(t+\Delta t)$ päällekkäinen pinta-ala. Näemme, että tämä on kolmiofunktio $T(\Delta t)$, jonka määritelmä on

$$T(\Delta t) = \begin{cases} \Delta t + 1 & \text{jos } \Delta t \in [-1, 0], \\ 1 - \Delta t & \text{jos } \Delta t \in [0, 1], \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Katso kuva 7.11.



KUVA 7.11. GPS-modulaation autokovarianssifunktio.

Tämä kolmiofunktio on siis näennäissatunnaiskoodin $C(t)$ autokovarianssifunktio $A_C(\Delta t)$. Ja tutkimalla kuvaa nähdään myös, että T on sama kuin blokkifunktion B *konvoluutio* itsensä kanssa,

$$T = B \otimes B \iff T(\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(t)\, B(\Delta t - t)\, dt.$$

Fourier'n teorian konvoluutiolauseen mukaan tämä merkitsee, että T:n Fourier'n muunnos on, yhtälön 7.4 kanssa,

$$\mathcal{F}\{T\} = \mathcal{F}\{B\}^2 = \left(\frac{\sin \pi f}{\pi f}\right)^2.$$

Näin olemme löytäneet GPS:n näennäissatunnaiskoodin autokovarianssifunktion Fourier'n muunnoksen. Se tunnetaan myös nimellä *tehon spektraalitiheys*, yhtälö 2.34:

$$\mathcal{A}_C(f) = \mathcal{F}\{A_C\} = \mathcal{F}\{T\} = \left(\frac{\sin \pi f}{\pi f}\right)^2. \tag{7.6}$$

Tämä funktio C/A- ja P(Y)-koodeille skaalattuna sopivasti niiden eri bittitaajuuksia varten ja desibelin asteikossa on piirretty kuvaan 7.12.

Tämän yhtälön johtamisessa oletettiin, että koodibitin leveys on yksi. Jos se on jotain muuta, kuten $1/f_c$, jossa f_c on "kooditaajuus" yksikössä bittejä sekunnissa, on f korvattava yhtälössä 7.6 arvolla f/f_c. Myös tulos tulee jakaa arvolla f_c[5]. 5

[5] Ajattele sitä näin: jos kooditaajuus f_c on yhden megahertsin, niin voit valita mikrosekunnin uudeksi aikayksiköksi, jolloin jokaisella bitillä on leveys yksi. "Uusi" taajuus, ilmaistuna megahertseinä, on nyt $f' = f/f_c$, ja tehon spektraalitiheys saadaan watteina per megahertsi. Tämä tulee jakaa kertoimella f_c, jotta saadaan se vakioyksikössä watteina per hertsi.

TAULU 7.5. GPS-signaalin tehospektri: laskennan koodi.

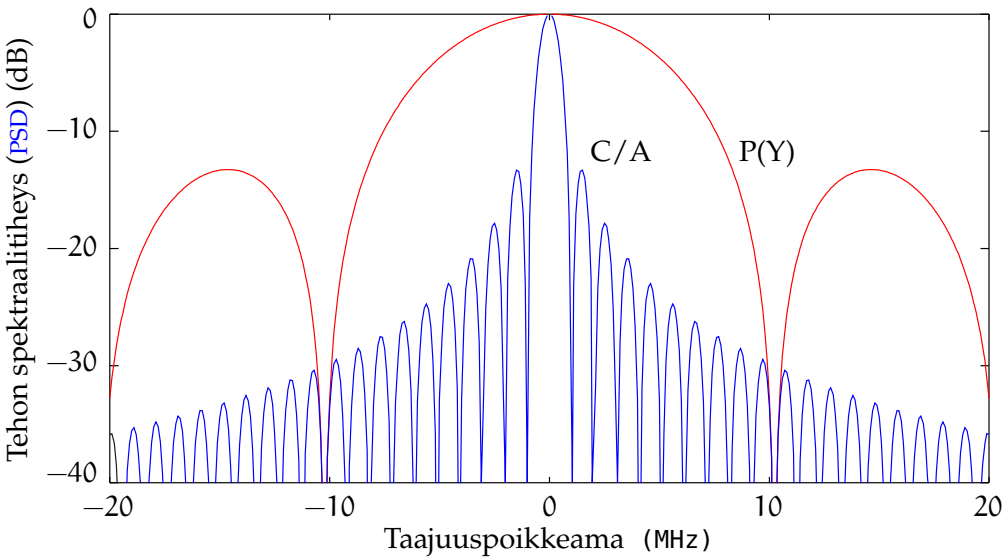
```
f = -20:0.1:20;
psdP = (sin(pi.*f/10.23)./(pi.*f/10.23)).^2;
psdCA = (sin(pi.*f/1.023)./(pi.*f/1.023)).^2;
hold on
axis([-20 20 -40 0])
plot(f, 10*log(psdP)/log(10), '-m')
plot(f, 10*log(psdCA)/log(10), '-b')
xlabel('Taajuuspoikkeama (MHz)')
ylabel('Tehon spektraalitiheys (PSD) (dB)')
print 'GPS-PSD.pdf', '-dpdf'
```

Tämän kanssa yhtälöstä 7.6 tulee

$$\mathcal{A}_C(f) = \frac{1}{f_c}\left(\frac{\sin(\pi\, f/f_c)}{\pi\, f/f_c}\right)^2 = f_c\left(\frac{\sin(\pi\, f/f_c)}{\pi f}\right)^2.$$

7.6 BOC, binaarinen offset kantoaaltomodulaatio

Alkuperainen GPS-järjestelmä otti käyttöön modulaatiotekniikan nimeltä BPSK, *binary phase-shift keying* eli binaarinen vaiheavainnus. Galileo-järjestelmä käyttää uudempaa tekniikkaa nimeltä BOC, *binary offset*



KUVA 7.12. Alkuperäisen GPS-signaalin tehospektri.

carrier modulation eli binaarinen offset kantoaaltomodulaatio. Myös GPS-järjestelmän uusi M-koodi käyttää tätä uutta tekniikkaa.

Alkuperäisessä BPSK-tekniikassa jokaista bittiä edustaa yksi blokki, jonka arvo on joko $+1$ tai -1 riippuen siitä, onko kyseessä bitti 0 vai bitti 1. Näin saatu blokkifunktio kerrotaan kantoaallon kanssa, jolloin tuloksena on vaiheinversio eli vaihesiirto 180° kun bitti 0 tulee bitin 1 jälkeen tai toisinpäin.

BOC:n tapauksessa erilaista on, että yhden blokin sijasta jokaista bittiä edustaa (esimerkiksi) kolmen blokin rykelmä, katso kuva 7.13. Lisäksi tässä esimerkkitapauksessa (kun bitin aliblokkien lukumäärä on pariton) jokaisella bittirajalla on ylimääräinen vaiheinversio. Nettotulos on, että vaihe-inversio on ainoastaan bittirajoilla $1 \to 1$ ja $0 \to 0$, muttei bittirajoilla $0 \to 1$ tai $1 \to 0$.

On mahdollista suunnitella BOC-modulaatioita, joilla valtaosa signaalin tehosta menee kahteen sivukaistaan kantoaallon molemmin puolin. Sivukaistojen keskellä ovat ”alikantoaallot”, joiden taajuuden ero kantoaallosta on (tässä esimerkissä) 1,5× kooditaajuutta. Kantoaallon lähistöön jää vain vähän tehoa. Tämä helpottaa signaalin erottamista signaaleista, jotka ovat jo moduloituina samaan kantoaaltoon BPSK-tekniikalla, joka laittaa tehostaan valtaosan kantoaallon lähelle. Näin on asian laita Galileon E1-signaalille, jonka kantoaallolla on sama taajuus kuin GPS:n L1-kantoaallolla. Sama pätee GPS-järjestelmän uudelle M-koodille, joka taajuudella L1 on päällekkäin jo olemassa olevien C/A- ja P(Y)-koodien BPSK-modulaatioiden kanssa[6].

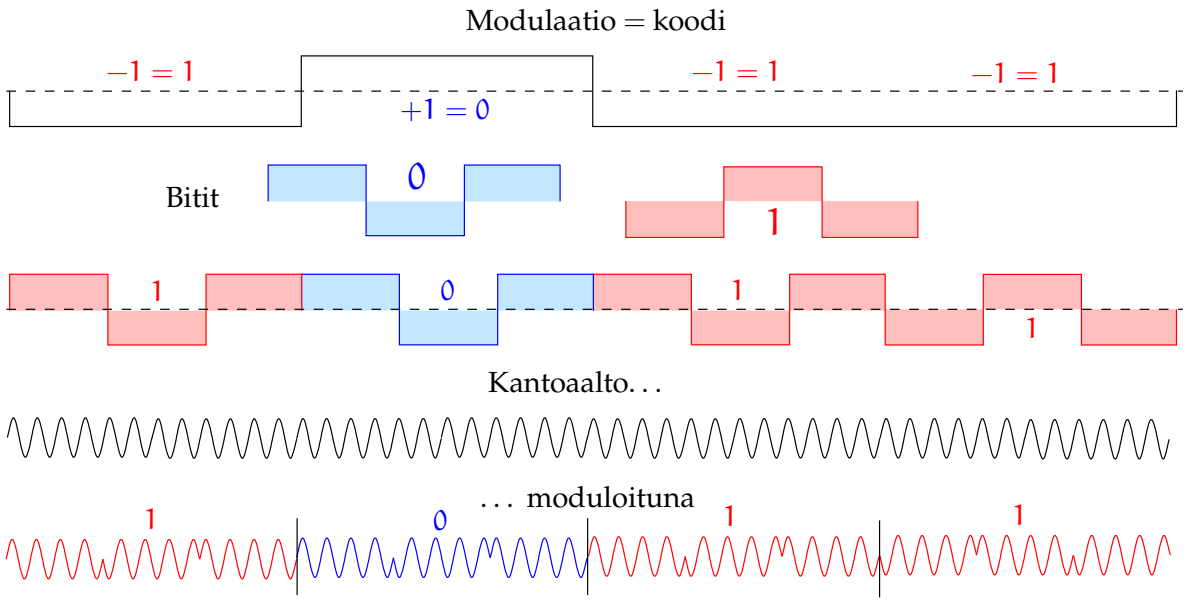
Tutkitaan esimerkiksi bittifunktiota, joka koostuu kahdesta blokista:

$$B_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{jos } t \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \\ -1 & \text{jos } t \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tässä tapauksessa Fourier'n muunos on

$$\mathcal{F}\{B_2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} B_2(t)\, e^{-2\pi i f t} dt = \\ = \int_{-1/2}^{0} e^{-2\pi i f t} dt - \int_{0}^{+1/2} e^{-2\pi i f t} dt =$$

[6] Sotilaallisesta näkökulmasta etuna on, että he voivat valikoivasti häiritä C/A-koodia kieltäen sen ja P-koodin käytön viholliselta, samalla kun he itse jatkavat M-koodin käyttöä.



KUVA 7.13. BOC, binaarinen offset kantoaaltomodulaatio. Esimerkki.

$$= -\frac{1}{2\pi i f}\left[e^{-2\pi i f t}\right]_{-1/2}^{0} + \frac{1}{2\pi i f}\left[e^{-2\pi i f t}\right]_{0}^{+1/2} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i f}\left(e^{\pi i f} - 2 + e^{-\pi i f}\right) = \frac{1}{2\pi i f} e^{-\pi i f}\left(e^{\pi i f} - 1\right)^2 =$$
$$= \frac{2i}{\pi f}\left(\frac{e^{\pi i f/2} - e^{-\pi i f/2}}{2i}\right)^2 = i\frac{\sin^2(\pi f/2)}{\pi f/2}.$$

Identiteetillä $\sin \pi f = 2\sin(\pi f/2)\cos(\pi f/2)$ saadaan

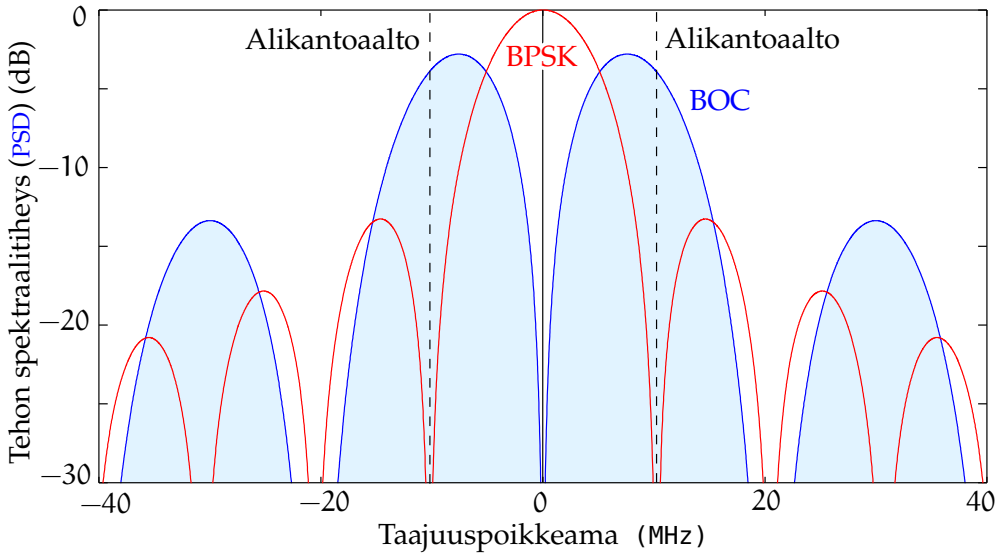
$$\mathcal{F}\{B_2\} = i\frac{\sin(\pi f)\sin(\pi f/2)}{\pi f \cos(\pi f/2)},$$

kirjallisuuden standardimuoto.

Tämä Fourier'n muunnos on puhtaasti imaginaarinen, koska B_2 on antisymmetrinen. Symmetrisille funktioille autokovarianssifunktio ja itsekonvoluutio ovat samoja; antisymmetrisille funktiolle ne ovat toistensa vastafunktiot, yhtälö 2.22. Siis tehon spektraalitiheys on

$$\mathcal{A}_C(f) = \mathcal{F}\{A_C\} = \mathcal{F}\{B_2^\dagger(-t) \otimes B_2(t)\} =$$
$$-\mathcal{F}\{B_2(t) \otimes B_2(t)\} = \left(\frac{\sin(\pi f)\sin(\pi f/2)}{\pi f \cos(\pi f/2)}\right)^2.$$

Kuvassa 7.14 näkyy, miten tehoa siirtyy pois kantoaallon lähistöltä. Galileo käyttää BOCin toteutusta nimeltä AltBOC, Shivaramaiah ja Dempster (2009).



KUVA 7.14. Esimerkki siitä, miten BOC siirtää tehoa sivukaistoihin.

Suosittu symbolinen merkintätapa BOC-modulaatioille on BOC(f_s, f_c), jossa f_s on alikantoaallon taajuus, joka samalla on *puolet* blokkien määrästä sekunnissa, ja f_c on koodibittien eli tiedon yksiköiden määrä sekunnissa. Tällä merkintätavalla yleinen tehon spektraalitiheyden yhtälö on

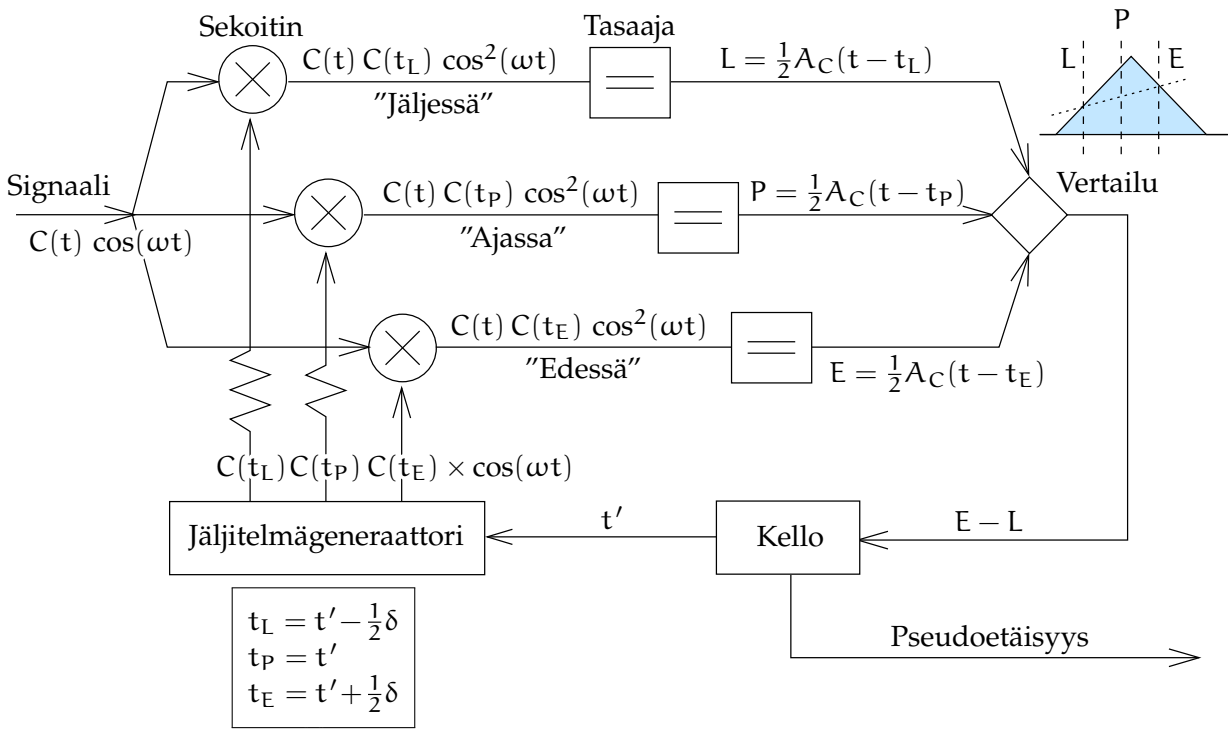
$$\mathcal{A}_C(f) = f_c \left(\frac{\sin(\pi\, f/f_c)\, \sin(\pi\, f/2f_s)}{\pi f \cos(\pi\, f/2f_s)} \right)^2,$$

katso Ma ym. (2020). Tämä on tavallisin BOCin variantti, joka tunnetaan myös nimellä BOC$_{\sin}(f_s, f_c)$ eli ”sini-BOC”.

7.7 Koodin ja kantoaallon vaiheen mittaus

Koodijakokanavoinnin (CDMA) käytön takia maanpinnalla olevan GPS-vastaanottimen antenni vastaanottaa signaaleja kaikista paikallisella taivaalla olevista GPS-satelliiteista, jotka lähettävät samoilla kantoaalto-taajuuksilla. Koska lähetysteho on rajallinen ja se on jaettava tasaisesti maapallon yhden pallonpuoliskon yli, vastaanottimen on oltava todella herkkä. Siksi vastaanotettu signaali esivahvistetaan jo antennissa.

Ennen lisävahvistusta signaali kerrotaan eli *sekoitetaan* vastaanottimen kellon vertaustaajuuden kanssa. Tämä tuottaa kaksi johdannaissignaalia taajuuksilla, jotka ovat signaalin ja vertaustaajuuden summa ja erotus. Näistä erotustaajuus, jota kutsutaan myös *välitaajuudeksi*, kulkee kaistanpäästösuotimen läpi, joka auttaa myös vaimentamaan ulkopuolisia häiriöitä. Tätä välitaajuussignaalia vahvistetaan edelleen ilman vaa-



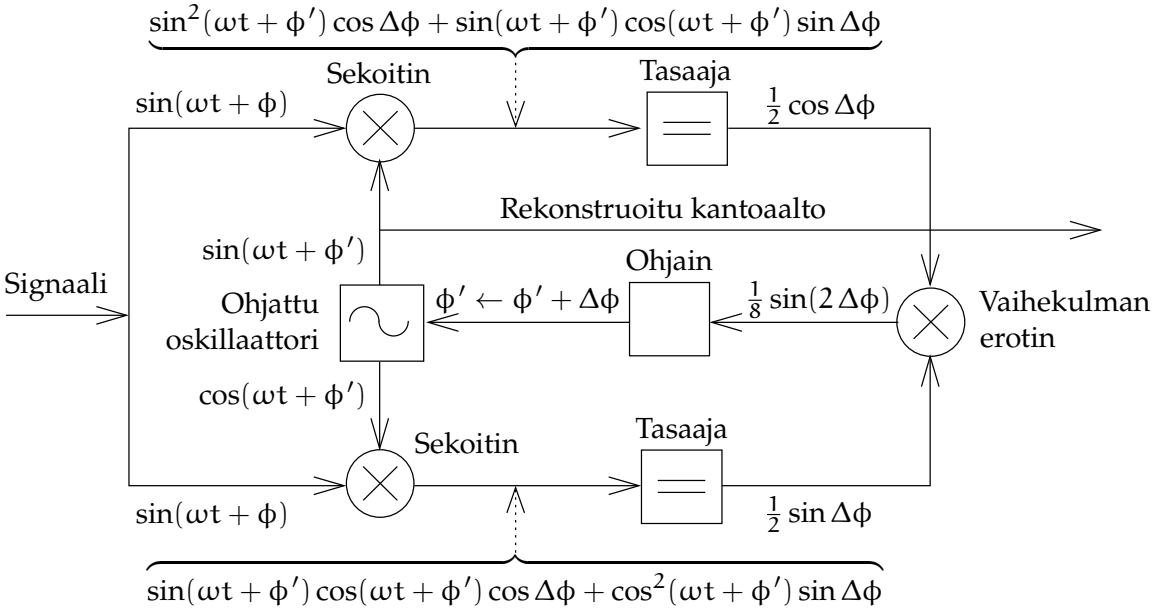
KUVA 7.15. GPS-koodiseuranta.

raa, että vahvistettu signaali vuotaisi takaisin antenniin, niin sanottu *ylikuuluminen*. Vasta sitten vahvistettu signaali lähetetään eteenpäin vastaanottimen käsiteltäväksi.

Koodimittaus on suhteellisen helppoa *korrelaattorilla*, joka korreloi vastaanotettua signaalia vastaanottimessa itse generoitujen signaalien kanssa. Korrelaattorina toimii yleensä niin sanottu DLL eli *delay-locked loop*, viivelukittu silmukka.

Jokaisella GPS-satelliitilla on oma näennäissatunnaiskoodi, joka eroaa kaikkien muiden satelliittien koodeista tavalla, joka tekee niiden erottamisen mahdollisimman helpoksi. Korrelaattorissa generoidaan kolme synteettistä signaalia eli "jäljitelmää" jokaiselle satelliitille: E (*early*), L (*late*) ja P (*prompt*). Katso kuva 7.15. Aikaero δ E:n ja L:n välillä on yhden koodibitin pituinen, GPS:n C/A-koodin tapauksessa mikrosekunnin. Jokainen generoitu signaali kerrotaan eli sekoitetaan saapuvan satelliittisignaalin kanssa. Tulos on kahden signaalin *korrelaatio*: arvo, joka on
7 positiivinen vain, jos signaalit ovat melkein synkrooneja[7].

[7]Tässä oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että sisään tulevan signaalin ja jäljitelmäsignaalin kantoaaltojen vaiheet on jo synkronoitu. Jos tämä *koherentin* DLL:n olettamus ei päde, on käytettävä monimutkaisempaa mutta myös robustimpaa *epäkoherenttia* DLL:ää.



KUVA 7.16. Costasin diskriminaattorin eli silmukan suorittama kantoaallon vaiheen seuranta.

Kuva 7.11 näyttää näennäissatunnaiskoodin autokovarianssifunktion kolmiomuodon. Ristikovarianssifunktio signaalin ja jäljitelmän välillä on (olettaen koherentti DLL) samanmuotoinen. Siis tapauksessa, jossa synkronointi on kohdallaan, pätee $P=\frac{1}{2}\cdot 100\,\%$, $E=L=\frac{1}{2}\cdot 50\,\%$. Ero $E-L$ välillä $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$ kielii epäsynkronisuudesta.

Jos E-sekoitin antaa korkean arvon, on koodigeneraattorin kello jäljessä ja sitä on nopeutettava. Jos päinvastoin L-sekoitin antaa korkeamman arvon, koodigeneraattorin kelloa on hidastettava.

Kantoaallon vaiheen mittaus on kuluttajatason laitteessa epätavallista ja myös hankalampaa. Tarkoitusta palvelee yleensä niin sanottu PLL eli *phase-locked loop*, vaihelukittu silmukka.

Usein käytetty vaiheseurannan ratkaisu on niin sanottu Costasin[8] diskriminaattori eli silmukka. Se havaitsee kantoaallon vaiheen poikkeaman vastaanottimen vertausoskillaattorista ja ohjaa vastaanottimen vertaustaajuutta niin, että ero häviää. Tämä vertaustaajuus havaitaan ja integroidaan kantoaaltovaiheen havaintosuureeksi.

Costasin silmukan käsitteellinen kaavio on kuvassa 7.16. Nähdään, miten sisään tuleva signaali ”sekoitetaan” eli kerrotaan generoitujen

[8] John Peter Costas (1923–2008) oli amerikkalainen sähköinsinööri. Hänen kuuluisa keksintönsä, Costasin silmukka, oli paremman radiovastaanottimen suunnittelun tulos (Costas, 1956).

vertauskantoaallon kopioiden kanssa, joiden välinen vaihe-ero on 90° eli $\pi/2$. Sekoitustoimien ulostulot tasataan, minkä jälkeen vaihekulman erotin tulkitsee ne eron $\Delta\phi = \phi - \phi'$ sini- ja kosinikomponentteiksi. Ero on vertausvaihepoikkeaman ϕ' ja etsityn signaalin vaihepoikkeaman ϕ välillä.

Vaihe-erotin antaa ulos sen syöttösignaalien $\frac{1}{2}\cos\Delta\phi$ ja $\frac{1}{2}\sin\Delta\phi$ tulon $\frac{1}{8}\sin(2\,\Delta\phi)$. Tämä on vertauskantoaallon generaattorin ohjaussignaali, jonka taajuutta ohjataan eron nollaamiseksi.

Costasin diskriminaattori ei osaa tehdä eroa kantoaallon ja miinus kantoaallon, eli määrällä $180° = \pi$ vaihesiirretyn kantoaallon, välillä:

$$\widetilde{\phi} = \pi + \phi \implies \sin(2\,\Delta\widetilde{\phi}) = \sin(2\,\Delta\phi).$$

Tämä merkitsee, että sen kokonaislukutuntemattomien yksikkö on puoli aallonpituutta, $\lambda/2$.

lambda λΛ

Tämä myös merkitsee, että Costasin diskriminaattori on hyvä tapa ”demoduloida” sisään tuleva signaali eli poistaa koodit kantoaallolta: ohjatun oskillaattorin ulostulo on moduloimaton kantoaalto. Toinen yksinkertainen tapa saavuttaa tämä olisi ”neliöidä” signaali kertomalla se itsensä kanssa. Näin vaiheinversiot 180° vain häviävät, ja kaikki modulaatiot, kuten näennäissatunnaiskoodit ja navigointiviesti, häviävät kantoaallosta. Näin tapahtuu navigointiviestiä lukuun ottamatta myös silloin, jos sisään tuleva signaali kerrotaan synkronoidun jäljitelmäsignaalin kanssa.

Sekä koodi- että vaiheseurantapiirissä on komponentteja, joita kutsutaan ”tasaajiksi”. Niitä voidaan kutsua myös integraattoreiksi, keskiarvoistajiksi tai alipäästösuotimiksi. Ne voidaan kuvata käsitteellisesti yhtälöllä

$$\frac{d}{dt}\underline{y}(t) = -\frac{\underline{y}(t)}{T} + \underline{x}(t). \tag{7.7}$$

Tässä T on tasaajaa luonnehtiva aikaskaala. Lähtöprosessi on $\underline{x}(t)$, ja tasattu tulosprosessi on $\underline{y}(t)$.

Yhtälö 7.7 muistuttaa Gaussin ja Markovin prosessia, yhtälöä 2.28, jossa aikaskaala on $T = 1/k$. Kuitenkin $\underline{x}(t)$ on yleinen prosessi, toisin kuin $\underline{n}(t)$, joka on valkoista kohinaa. Myös yleinen ratkaisu on sama, yhtälö 2.29:

$$\underline{y}(t) = \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\left(\underline{y}(t_0)\,\exp\left(\frac{t_0}{T}\right) + \int_{t_0}^{t}\underline{x}(\tau)\,\exp\left(\frac{\tau}{T}\right)d\tau\right).$$

Tässä näkyy, miten lähtöprosessin arvot $\underline{x}(\tau)$ vaimentuvat aikaa myöten suhteessa

$$\exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right),$$

jossa $t-\tau$ on arvon $\underline{x}(\tau)$ ikä. Tätä kutsutaan myös ”häipyvän muistin suotimeksi”. Mitä pidempi on T, sitä suurempi on arvojen $\underline{x}(\tau)$ joukko, jonka yli integraali keskiarvottaa. tau τT

Signaalin ja jäljitelmän välisten ajallisten vaihe-erojen ja koodiviiveiden tarkan määrittämisen kannalta tasausajan T on oltava pitkä. Tämä aiheuttaa kuitenkin hankaluuksia niin sanotuissa korkean dynamiikan sovelluksissa, kuten nopealiikkeisissä taistelukoneissa, joissa vastaanotetun GPS-signaalin dopplersiirtymä vaihtelee nopeasti ja ennakoimattomasti. Liian pitkällä tasausajalla seurantasilmukat menettävät saapuvan signaalin lukituksen. Tästä syystä korkean dynamiikan käyttöön tarkoitettujen vastaanottimien tasausajat ovat lyhyet, mutta samalla herkkyys on huonompi ja mittausepävarmuus korkeampi.

Toinen lähestymistapa korkean dynamiikan käsittelyyn on GPS:n integrointi anturin kanssa, joka pystyy itsenäisesti määrittämään dopplersiirtymän muutokset: laite on inertiamittausyksikkö (IMU). Tähän kelpaa jopa yksinkertainen ja halpa malli.

7.8 Kellon mallinnus

Kellot, kuten GNSS-satelliiteissa olevat atomikellot, mallinnetaan tavallisesti satunnaiskulkuina, yhtälö 2.25. Olkoon $c(t)$ kellolukeman poikkeama oikeasta ajasta hetkellä t. Oleta, että kello sisältää värähtelijän, jonka nimellinen taajuus on f_0. Silloin vaihekulma hetkellä t on radiaaneina

$$\phi(t) = 2\pi f_0 t + \Delta\phi(t),$$

jossa $\Delta\phi(t)$ on vaihepoikkeama. Kellopoikkeama on sekunteina

$$c(t) = \frac{\Delta\phi(t)}{2\pi f_0}.$$

Taajuuspoikkeama $\Delta f(t)$ on hertseinä

$$f(t) = f_0 + \Delta f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\Delta\phi(t) = f_0 + f_0\frac{d}{dt}c(t).$$

Normalisoitu taajuuspoikkeama eli kellon käynti on dimensioton luku[9]: [9]

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta f(t)}{f_0} = \frac{d}{dt}c(t). \tag{7.8}$$

[9]Tulkinta voi olla $^{\text{Hz}}/_{\text{Hz}}$ tai $^{\text{s}}/_{\text{s}}$.

Usein oletetaan, että funktio $d(t)$ käyttäytyy valkoisen kohinan tavoin, jolloin yhtälöiden 2.25 ja 7.8 perusteella kellopoikkeama $c(t)$ käyttäytyy kuin satunnaiskulku. Olkoon kellon käynnin $\underline{d}(t)$ autokovarianssifunktio, yhtälö 2.23:

$$A_d(t, t') = Q_d\, \delta(t - t'),$$

delta δΔ jossa δ on Diracin deltafunktio ja Q_d oletettu varianssi. Yhtälöstä 2.26 seuraa, että kellopoikkeaman $\underline{c}$ autokovarianssi on

$$A_{c,0}(t, t') = Q_d \cdot (t' - t_0)\,, \tag{7.9}$$

jossa t_0 on sopiva aloitusaika. Nähdään, että varianssi kasvaa lineaarisesti ajassa.

Käynnin $\underline{d}(t)$ keskiarvo otosvälillä $\tau = t_i - t_{i-1}$ on

$$\langle \underline{d} \rangle_i \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underline{d}(t)\, dt = \frac{1}{\tau} \left(\underline{c}(t_i) - \underline{c}(t_{i-1}) \right). \tag{7.10}$$

10 Nyt *Allanin varianssi* määritellään seuraavasti[10] [11]:

11

$$\sigma_A^2(\tau) \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} E\left\{ \left(\langle \underline{d} \rangle_{i+1} - \langle \underline{d} \rangle_i \right)^2 \right\}. \tag{7.11}$$

12 Suure on nimetty David W. Allanin[12] mukaan (Allan's Time).

Se voidaan kirjoittaa myös kellopoikkeaman $\underline{c}$ funktiona:

$$\sigma_A^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} E\left\{ \left(\underline{c}(t_{i+1}) - 2\underline{c}(t_i) + \underline{c}(t_{i-1}) \right)^2 \right\}.$$

Empiirinen estimaattori voidaan muodostaa esimerkiksi näin:

$$\widehat{\sigma_A^2}(\tau) = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\langle \underline{d} \rangle_{i+1} - \langle \underline{d} \rangle_i \right)^2.$$

sigma σΣ Allanin varianssin neliöjuurta $\sigma_A(\tau)$ kutsutaan *Allanin keskihajonnaksi*.

Koska $E\{\underline{d}\} = 0$, myös

$$E\left\{ \langle \underline{d} \rangle_{i+1} - \langle \underline{d} \rangle_i \right\} = 0,$$

ja yhtälöstä 7.11 tulee

$$\sigma_A^2(\tau) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Var}\left\{ \langle \underline{d} \rangle_{i+1} - \langle \underline{d} \rangle_i \right\}. \tag{7.12}$$

---

[10] Kirjallisuudessa käytetään symbolia $\sigma_y^2(\tau)$.

[11] Paikkatietoanalyysin tuntijat tunnistavat tämän samanlaiseksi kuin krigingin menetelmän *semivariogrammi*.

[12] David Wayne Allan (s. 1934) on amerikkalainen atomikellofyysikko.

Jos kellopoikkeama $\underline{c}(t)$ on oikea satunnaiskulku, varianssit ovat yhtälöiden 7.10 ja 7.9 perusteella

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\{\langle\underline{d}\rangle_i\} &= \frac{1}{\tau^2}\operatorname{Var}\{\underline{c}(t_i)-\underline{c}(t_{i-1})\} = \\ &= \frac{1}{\tau^2}\left(\operatorname{Var}\{\underline{c}(t_i)\}+\operatorname{Var}\{\underline{c}(t_{i-1})\}-2\operatorname{Cov}\{\underline{c}(t_i),\underline{c}(t_{i-1})\}\right) = \\ &= \frac{1}{\tau^2}\left(Q_d\cdot(t_i-t_0)+Q_d\cdot(t_{i-1}-t_0)-2Q_d\cdot(t_{i-1}-t_0)\right) = \\ &= \frac{1}{\tau^2}Q_d\cdot(t_i-t_{i-1}) = \frac{1}{\tau}Q_d,\end{aligned}$$

ja siis

$$\operatorname{Var}\left\{\langle\underline{d}\rangle_{i+1}\right\} = \operatorname{Var}\left\{\langle\underline{d}\rangle_i\right\} = \frac{1}{\tau}Q_d, \tag{7.13}$$

ja kovarianssi on ilmeisesti

$$\operatorname{Cov}\left\{\langle\underline{d}\rangle_i, \langle\underline{d}\rangle_{i+1}\right\} = 0, \tag{7.14}$$

koska kaikki $\{\,\underline{d}(t)\,|\,t\in(t_{i-1},t_i)\,\}$ ovat korreloimattomia kaikkien $\{\,\underline{d}(t)\,|\,t\in(t_i,t_{i+1})\,\}$ kanssa.

Kirjoita auki yhtälö 7.12 ja sijoita yhtälöt 7.13 ja 7.14:

$$\begin{aligned}\sigma_A^2(\tau) &= \tfrac{1}{2}\operatorname{Var}\left\{\langle\underline{d}\rangle_{i+1}-\langle\underline{d}\rangle_i\right\} = \\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{Var}\left\{\langle\underline{d}\rangle_{i+1}\right\}+\tfrac{1}{2}\operatorname{Var}\left\{\langle\underline{d}\rangle_i\right\}-2\cdot\tfrac{1}{2}\operatorname{Cov}\left\{\langle\underline{d}\rangle_i,\langle\underline{d}\rangle_{i+1}\right\} = \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\tau}Q_d+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\tau}Q_d-0 = \frac{1}{\tau}Q_d.\end{aligned}$$

Tämä on valkoisen taajuuskohinan potenssilaki.

Kaksoislogaritmisessa kuvaajassa, jossa on $\sigma_A^2(\tau)$ vastaan τ, tämä on kulmalla 45° alaspäin suuntaava suora. Tämän kuvaajan piirtäminen on yleisesti sovittu tapa luonnehtia kellojen käyttäytymistä (Allan, 1966).

Oikeat kellot käyttäytyvät tavallisesti tällä tavalla, jos otosväli τ on lyhyt. Pidemmillä otosväleillä taajuuden ryömintä taivuttaa käyrää ylöspäin.

Vaikka Allanin varianssi keksittiin alun perin kellojen luonnehtimiseksi, sitä käytetään myös gyroskooppien ja kiihtyvyysmittareiden yhteydessä.

7.9 Vaihetuettu koodimittaus

Tässä menetelmässä absoluuttinen pseudoetäisyys tulee koodimittauksesta, mutta sen aallonpituuden jakojäännös vaihemittauksesta. GPS:n

kinemaattisissa sovelluksissa on usein hyödyllistä *tasata* raa'at pseudoetäisyyden koodimittaukset käyttämällä paljon tasaisempia ja geometrisesti tarkempia kantoaallon vaihemittauksia, vaikka ne periaatteessa sisältävät kokonaislukutuntemattomia.

Olkoon annettuna koodin pseudoetäisyyshavainnot p_1 ja p_2 metreinä ja kantoaallon vaihehavainnot ϕ_1 ja ϕ_2 kulmayksiköissä, siis radiaaneina epookeilla t_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Ensin konstruoidaan *ennustusyhtälö* tämän hetken *a priori* pseudoetäisyydelle käyttäen edellistä *a posteriori* pseudoetäisyyttä:

$$p^-(t_k) = p^+(t_{k-1}) + \frac{\lambda}{2\pi}\big(\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\big). \tag{7.15}$$

Tässä λ on kantoaallon aallonpituus. Tämä yhtälö pätee molemmille taajuuksille L1 (f_1) ja L2 (f_2) sekä *widelane*- eli leveäkuja-havaintosuureelle, jonka määritelmä on

$$p_{WL} = \frac{f_1 p_1 - f_2 p_2}{f_1 - f_2}, \qquad \phi_{WL} = \phi_1 - \phi_2.$$

Yhtälö 7.15 voidaan ymmärtää Kalmanin suotimen *dynaamiseksi malliksi*: tila on pseudoetäisyys $\underline{p}(t)$. Vaiheen muutostermi $\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})$ voidaan katsoa tunnetuksi, koska vaihemittaukset ovat niin tarkkoja koodimittauksiin verrattuna.

Seuraavaksi lisätään Kalmanin suotimeen *havaintoyhtälö*: havainto on yksinkertaisesti tämän hetken pseudoetäisyys

$$\underline{\ell} = \underline{p}(t_k) + \underline{m},$$

jonka tarkkuus annetaan havainnon varianssina $R = \mathrm{Var}\{\underline{m}\} = E\{\underline{m}^2\}$. *Päivitysyhtälö* on

$$p^+(t_k) = p^-(t_k) - KH\left(p^-(t_k) - \underline{\ell}\right),$$

jossa

$$H = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad K = \Sigma^- H^T \left(H\Sigma^- H^T + R\right)^{-1} = \frac{\Sigma^-}{\Sigma^- + R},$$

ja siis

$$p^+(t_k) = \overbrace{\frac{R}{\Sigma^-(t_k) + R}}^{W} p^-(t_k) + \overbrace{\frac{\Sigma^-(t_k)}{\Sigma^-(t_k) + R}}^{w} \underline{\ell}.$$

Siis *a posteriori* pseudoetäisyys on toisaalta ennustetun ja vaihemittausten avulla tasatun *a priori* pseudoetäisyyden, toisaalta suoraan havaitun pseudoetäisyyden painotettu keskiarvo. Painot W ja w täyttävät ehdon

$$W + w = 1,$$

katso alaosio 2.2.3.

Varianssin päivitys antaa

$$\Sigma^+(t_k) = (I - KH)\,\Sigma^-(t_k) = \frac{R}{\Sigma^-(t_k) + R}\Sigma^-(t_k).$$

Dynaamisen mallin varianssin kasautuminen epookista seuraavaan on yksinkertaisesti $\Sigma^-(t_k) = \Sigma^+(t_{k-1})$.

Tässä menetelmässä voi *testata, onko tapahtunut vaihekatkoja*: testattava suure on erotus eli nollasuure eli ”sulkuvirhe”

$$\underline{y} = \left(p^-(t_k) - \underline{\ell}\right),$$

jonka keskivirhe on tiedossa:

$$\sigma_y = \sqrt{H\Sigma^-(t_k)H^T + R} = \sqrt{\Sigma^-(t_k) + R}.$$

Tämä toimii parhaiten leveäkuja-lineaariyhdistelmää käyttäen sen suuren tehollisen aallonpituuden (86 cm) ansiosta.

Tämä Kalmanin suodin voi pyöriä jatkuvana prosessina vastaanottimessa tai, ilman tosiaikaisuuden etua, jälkikäsittelyohjelmistossa. Suotimen tuottama estimaattori

$$\left\{ p^-(t) \,\middle|\, t \in [t_{k-1}, t_k) \right\} = p^+(t_{k-1}) = p^-(t_k), \qquad k = 2, 3, \ldots$$

on merkittävästi tasaisempi kuin raakahavaintojen aikasarja $\underline{\ell}_k = \underline{p}(t_k) + \underline{m}$.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mitä modulaatiotekniikkaa käytetään GPS-järjestelmän radiolähetyksissä?
2) Mitkä ovat vastaanotetun GPS-signaalin relativistisen taajuussiirtymän kaksi osaa?
3) Kuvaile kantoaaltovaiheen kelauksen ilmiötä.
4) Mitä ovat Goldin koodit? Mitä tarkoittaa, että ne ovat keskenään melkein ortogonaalisia?
5) Kuinka GPS-vastaanotin voi erottaa taivaalla olevien satelliittien signaalit toisistaan, huolimatta siitä, että ne kaikki lähettävät samalla kantoaallon taajuudella?
6) Mikä on jäljitelmäkoodi, ja miten koodikorrelaattori toimii?

7) Mikä on korkean dynaamiikan ympäristö, ja mikä se vaatii GPS-vastaanottimelta?
8) Miksi BOC eli binaarinen offset kantoaaltomodulaatio on hyödyllinen?
9) Miten vastaanottimen kello tavallisesti mallinnetaan?
10) Mikä on Allanin varianssi?
11) Selitä vaihetuettu koodimittaus.

Harjoitus 7−1: Bitin esitys kolmella blokilla

Jokaisen koodibitin esittäminen kolmen blokin sarjalla, kuten on esitetty kuvassa 7.13, voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$B_3(t) = \begin{cases} -1 & \text{jos } t \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right), \\ 1 & \text{jos } t \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

1) Johda tämän esityksen tuottaman modulaation $C(t)$ tehon spektraalitiheys

$$\mathcal{A}_C(f) = \mathcal{F}\{B_3^\dagger(-t) \otimes B_3(t)\} = \mathcal{F}\{B_3\}^2.$$

Vihje Kirjoita blokkien sarja vain kahden yksinkertaisen blokin _____ summana.

2) Miten muuttaisit sarjan keskiblokin korkeutta niin, että tehon spektraalitiheys origossa $f = 0$ häviäisi?

Tosiaikaiset GNSS-havainnot

8

8.1 GNSS:n havaintoyhtälöt

Tässä luvussa kiinnostuksen kohteena on tosiaikaisten GNSS-havaintojen käyttöä navigoinnissa. Tätä varten kehitetään ensin GNSS-mittauksen havaintoyhtälöitä. Esitetään aluksi sekä koodin että kantoaallon vaiheen mittauksen yhtälöt niiden yleisessä ei-stokastisessa, epälineaarisessa muodossa. Sen jälkeen yhtälöt linearisoidaan. Seuraavaksi yhtälöt erikoistetaan valitsemalla, mitkä yhtälön muuttujista ovat tunnettuja ja mitkä tuntemattomia. Jälkimmäiset sisällytetään tuntemattomien vektoriin eli tilavektoriin.

Yhtälöiden ilmakehän parametrit vaativat erityiskäsittelyä. Tästä esitetään erillinen analyysi.

Luvun lopussa esitetään differentiaaliset GNSS-mittaukset, mukaan lukien tosiaikainen kinemaattinen (RTK) mittaustekniikka. Lisäksi esitetään menetelmät ja standardit tietoyhteyden muodostamiseksi vertausvastaanottimen ja liikkuvan vastaanottimen välille.

8.1.1 Koodimittauksen havaintoyhtälö

Tavallisin GNSS:n havaintotyyppi on *koodimittauksen pseudoetäisyys*, jonka yhtälö on

$$p = \rho + c\,(\Delta T - \Delta t) + d_{ion} + d_{trop}, \tag{8.1}$$

jossa

$$\rho = \|\mathbf{X} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(X-x)^2 + (X-y)^2 + (Z-z)^2}$$

on etäisyys avaruudessa satelliitin paikan $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja maaaseman eli vastaanottimen paikan $\mathbf{X} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ välillä Pythagoraan lauseen avulla laskettuna. rhoo ρR

Δt on satelliitin kellopoikkeama.

ΔT on vastaanottimen kellopoikkeama.

d_{ion} on ”ionosfäärin” eli ilmakehän ionisoidun osuuden aiheuttama viive signaalin etenemisessä.

d_{trop} on ”troposfäärin” eli ilmakehän neutraalin osuuden aiheuttama etenemisviive.

Etuliite ”pseudo” sanassa pseudoetäisyys viittaa kellopoikkeamien Δt ja ΔT läsnäoloon. Niiden takia suure käyttäytyy laskennassa eri tavalla kuin oikeat etäisyydet, jotka havaitaan esimerkiksi laseretäisyysmittauksella.

Yhtälöä 8.1 voidaan kutsua ”esihavaintoyhtälöksi”. Se sisältää enemmän muuttujia kuin voidaan koskaan määrittää yhdellä laskelmalla. Tästä yhtälöstä voidaan johtaa varsinaisia havaintoyhtälöitä, joiden muoto riippuu siitä, mitkä valitsemme tuntemattomiksi eli Kalmanin suotimen estimoitaviksi suureiksi. Tuntemattomat, jotka voidaan sisällyttää Kalmanin suotimen tilavektoriin, ovat $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$, Δt ja ΔT.

Ilmakehän etenemisparametrien d_{trop} ja d_{ion} sisällyttäminen on ongelmallista. Yhtälön 8.1 muoto näyttää, että jokaisella satelliitilla on omat parametrit d_{trop} ja d_{ion} jokaiselle epookille. Nämä viiveet riippuvat satelliitin korkeuskulmasta. Siksi niitä ei voida ratkaista havainnoista tämän yhtälön avulla. Korjaukset voivat olla saatavissa jostakin ulkoisesta lähteestä, esimerkiksi ilmakehämallista.

Sivuuttamalla toistaiseksi ilmakehän parametrit saadaan koodimittauksen esihavaintoyhtälöksi

$$p = \rho + c\,(\Delta T - \Delta t)\,. \tag{8.2}$$

8.1.2 *Kantoaallon vaiheen havaintoyhtälö*

Samanlainen yhtälö kuin koodimittauksen pseudoetäisyyden yhtälö 8.1 on olemassa myös kantoaallon vaihehavainnoille:

$$\begin{aligned}\overline{P} = P + \lambda N = \lambda\left(\frac{\phi}{2\pi} + N\right) = \lambda\left(\frac{\overline{\phi}}{2\pi}\right) = \\ = \rho + c\,(\Delta T - \Delta t) + D_{ion} + D_{trop},\end{aligned} \tag{8.3}$$

jossa

$$\rho = \|\mathbf{X} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}$$

on satelliitin, paikalla $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, ja vastaanottimen, paikalla $\mathbf{X} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, välinen geometrinen etäisyys.

ϕ on mitattu eli ”raaka” vaihe-erokulma radiaaneissa. Signaalin lukitushetkellä $\phi(t_0) \in [0, 2\pi)$. Huomaa, että oikeasti tässä mitataan, paljonko vastaanottimen vertausoskillaattorin vaihe on vastaanotetun satelliittisignaalin vaiheen edellä. Kun etäisyys satelliittiin kasvaa, kasvaa myös mitattu vaihekulma. fii $\varphi\phi\Phi$

$\overline{\phi}$ on vaihe-erokulma mukaan lukien yhtälön 8.3 edellyttämä kokonaisten aallonpituuksien lukumäärä N. Lukua $N \in \mathbb{Z}$[1] kutsutaan ambiguiteetiksi, moniselitteisyydeksi eli *kokonaislukutuntemattomaksi* ja pätee [1]

$$\overline{\phi} = \phi + 2\pi N.$$

$\overline{P} = \lambda\, \overline{\phi}/2\pi$ on arvoltaan lähellä koodin pseudoetäisyyttä.

$P = \lambda\, \phi/2\pi$ ei ole.

Δt, ΔT ovat satelliitin ja vastaanottimen kellopoikkeamat.

D_{ion}, D_{trop} ovat ”ionosfäärin” ja ”troposfäärin” aiheuttamat etenemisviiveet — itse asiassa $D_{ion} = -d_{ion}$ ja $D_{trop} = d_{trop}$.

λ on kantoaallon aallonpituus. lambda $\lambda\Lambda$

Myös tässä jätämme ilmakehän etenemisparametrit huomioimatta, jolloin esihavaintoyhtälö on

$$\overline{P} = \lambda \left(\frac{\phi}{2\pi} + N \right) = \rho + c\,(\Delta T - \Delta t)\,. \tag{8.4}$$

8.2 Havaintoyhtälöiden linearisointi

Yllä olevat yhtälöt 8.2 ja 8.4 tulee linearisoida, jotta saadaan Kalmanin suotimen päivitysyhtälöt 3.25, 3.26 ja 3.27:

$$K = \Sigma^- H^T \left(H\Sigma^- H^T + R \right)^{-1}, \qquad \begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \mathbf{x}^- - K\left(H\mathbf{x}^- - \underline{\ell}\right), \\ \Sigma^+ &= (I - KH)\,\Sigma^-. \end{aligned}$$

8.2.1 Vastaanottimien paikkojen estimointi

Oletetaan, että määritettävät tuntemattomat ovat tilavektorin

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \Delta T \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

[1] Puolikokonaisia lukuja voi esiintyä, eli $2N \in \mathbb{Z}$, esimerkiksi Costasin diskriminaattoria käytettäessä, katso osio 7.7.

alkiot. Ne ovat vastaanottimen paikkakoordinaatit X, Y ja Z sekä vastaanottimen kellon poikkeama ΔT. Oletamme siis, että satelliitin sijaintia $\mathbf{x}$ ja kellopoikkeamaa Δt *ei* ole tarkoitus määrittää, vaan ne tunnetaan.

Valitaan seuraava likiarvojen eli vertausarvojen joukko:

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= \rho^{(0)} + c\left(\Delta T^{(0)} - \Delta t\right), \\ \rho^{(0)} &= \sqrt{(X^{(0)} - x)^2 + (Y^{(0)} - y)^2 + (Z^{(0)} - z)^2}, \quad \Delta T^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Tämä merkitsee likimääräisen tilavektorin

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

muodostamista, jossa $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} X^{(0)} & Y^{(0)} & Z^{(0)} \end{bmatrix}^T$.

Vähennetään yhtälö 8.6 yhtälöstä 8.2, kehitään Taylorin sarjaksi ja tunnistetaan tutulla tavalla määritellyt deltasuureet

$$\Delta X \stackrel{\text{def}}{=} X - X^{(0)}, \quad \Delta Y \stackrel{\text{def}}{=} Y - Y^{(0)}, \quad \Delta Z \stackrel{\text{def}}{=} Z - Z^{(0)},$$

ja

$$\begin{aligned} \Delta p \stackrel{\text{def}}{=} p - p^{(0)} \approx \\ \approx \left.\frac{\partial p}{\partial X}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} \Delta X + \left.\frac{\partial p}{\partial Y}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} \Delta Y + \left.\frac{\partial p}{\partial Z}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}} \Delta Z + c\,\Delta T. \end{aligned}$$

Tunnistetaan havaintomatriisi ja lasketaan osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial X} & \frac{\partial p}{\partial Y} & \frac{\partial p}{\partial Z} & \frac{\partial p}{\partial \Delta T} \end{bmatrix}^{(0)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{X-x}{\rho} & \frac{Y-y}{\rho} & \frac{Z-z}{\rho} & c \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}-\mathbf{x}}{\rho} & c \end{bmatrix}^{(0)}, \end{aligned} \tag{8.8}$$

Kalmanin suotimen rakenne- eli havaintomatriisi.

Linearisoitu tilavektori saadaan vähentämällä yhtälö 8.7 yhtälöstä 8.5, ja pudotetaan delta kuten on tapana:

$$\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta X & \Delta Y & \Delta Z & \Delta T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta T \end{bmatrix}. \tag{8.9}$$

Kaikki alkiot ovat ajan funktioita.

Oletetaan, että tietyllä ajan hetkellä t havaitaan joku tilavektorin funktio. Linearisoitu havaintoyhtälö on stokastisena yhtälönä

$$\underline{\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta\underline{p} = H\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{m}, \tag{8.10}$$

jossa H ja $\underline{\mathbf{x}}(t)$ ovat yllä määriteltyjä ja $\underline{m}$ on havainnon satunnainen virhe eli kohina.

Voimme tutkia epookeittain, kuinka tarkasti havainnot kykenevät määrittämään tilavektorin ratkaisun 8.9. Jos on n pseudoetäisyyshavaintoa eri satelliitteihin, havaintoyhtälöstä tulee

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\underline{p}_1 \\ \Delta\underline{p}_2 \\ \vdots \\ \Delta\underline{p}_n \end{bmatrix}}^{\underline{\ell}} = \overbrace{\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}}^{A} \underline{\mathbf{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{m}_1 \\ \underline{m}_2 \\ \vdots \\ \underline{m}_n \end{bmatrix}}^{\underline{m}}.$$

Oletus, että havainnot ovat tilastollisesti riippumattomia ja että kaikkien keskivirhe on sama[2] σ — matemaatikkokielellä *i.i.d.*-oletus — antaa luvan käyttää tavallista pienimmän neliösumman ratkaisumenetelmää. Ratkaisu on

[2] sigma $\sigma\Sigma$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \underline{\ell}$$

ja sen varianssimatriisi

$$\mathrm{Var}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \sigma^2 \left(A^T A\right)^{-1}.$$

Huomion arvoista on, että matriisi $\left(A^T A\right)^{-1}$ on täysin satelliittigeometrian määrittämä, toisin sanoen se riippuu siitä, missä jokainen satelliitti on havaitsijan taivaalla. Kaikki muut tekijät, jotka vaikuttavat ratkaisun $\hat{\mathbf{x}}$ epävarmuuteen, kuten vastaanottimen laatu ja mittausolosuhteet, sisältyvät tehdyn oletuksen takia lukuun σ, jota kutsutaan *painoyksikön keskivirheeksi*.

Matriisi $\left(A^T A\right)^{-1}$ kertoo, kuinka tarkasti tuntemattomat voidaan määrittää: jokaisen tuntemattoman varianssi on yhtä kuin matriisin $\left(A^T A\right)^{-1}$ vastaava lävistäjäalkio kerrottuna arvolla σ^2. GNSS-havaintogeometrian laadun analysoimiseksi usein käytetyt niin sanotut DOP-suureet ovat näiden lävistäjäalkioiden eri summia.

Osiossa 8.4 esitetään tilavektorin kehitystä ajassa Kalmanin suotimessa.

8.2.2 Satelliittien paikkojen estimointi

Satelliitin hetkellinen paikka $\mathbf{x}$ ja kellopoikkeama Δt oletetaan tunnetuiksi eli laskettaviksi ratatiedoista. Tämä oletus ei pidä paikkaansa tar-

[2] Tämä on fysikaalisesti epärealistista: havaintoepävarmuus on paljon suurempi, jos satelliitti on lähellä horisonttia. Tämä johtuu signaalin pitemmästä polusta ilmakehässä.

kasti. Osiossa 8.5 esitetään, miten tämä oletus lievennetään käyttämällä differentiaalitekniikkaa tukiasemineen.

Käsitteellinen lähestymistapa tähän on katsoa tukiaseman havainnot havainnoiksi, joilla määritetään satelliitin tuntemattomat x, y, z ja Δt, kun tukiaseman koordinaatit X, Y ja Z ovat tiedossa. Tämän tehtävän H-matriisi on

$$H = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathbf{X}-\mathbf{x}}{\rho} & c & -c \end{bmatrix}^{(0)}$$

ja vastaava tilavektori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} & \Delta T & \Delta t \end{bmatrix}^{T}. \tag{8.11}$$

Sen jälkeen tämän tilavektorin alkioiden $\Delta\mathbf{x}$ ja Δt estimaatteja käytetään lähetettyjen ratatietojen (*broadcast ephemerisin*) korjaamiseksi, ennen niiden käyttöä liikkuvan vastaanottimen eli *roverin* paikan laskennassa.

Yhtälö 8.11 on myös tilavektorin yleinen muoto, kun estimoidaan satelliittien kiertoratoja käyttäen pseudoetäisyyshavaintoja tunnetuilta seuranta-asemilta. Tosin jos asemilla on synkronoidut atomikellot, asemien kellotuntemattomat ΔT putoavat pois.

8.2.3 Kantoaallon vaihe havaintosuureena

Kantoaallon vaiheen havaintosuureen $P \overset{\text{def}}{=} \overline{P} - \lambda N$ tapauksessa, yhtälö 8.4, kokonaislukutuntemattoman (”ambiguiteetin” eli moniselitteisyysluvun) N pitää sisällyttää linearisoituun havaintoyhtälöön, jolloin tuloksena on

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial X} & \dfrac{\partial P}{\partial Y} & \dfrac{\partial P}{\partial Z} & \dfrac{\partial P}{\partial \Delta T} & \dfrac{\partial P}{\partial N} \end{bmatrix}^{(0)} = \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{X-x}{\rho} & \dfrac{Y-y}{\rho} & \dfrac{Z-z}{\rho} & c & -\lambda \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{X}-\mathbf{x}}{\rho} & c & -\lambda \end{bmatrix}^{(0)}. \end{aligned}$$

Vastaava tilavektori on

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta X & \Delta Y & \Delta Z & \Delta T & N \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta T \\ N \end{bmatrix}.$$

Kaikissa tapauksissa syntyy yksi linearisoitu havaintoyhtälö jokaista satelliittia ja havainnon kantoaaltotaajuutta (GPS:n tapauksessa L1, L2 tai L5) kohti.

Kalmanin suotimessa on sallittua käsitellä kaikki havainnot erikseen ja peräkkäin, vaikka ne on tehty samanaikaisesti. Tämä edellyttää, että ne ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan.

8.3 Ilmakehän mallinnus

Ilmakehän etenemisviiveet jaetaan tavallisesti viiveisiin, jotka johtuvat ”ionosfääristä”, ilmakehän ionisoidusta osuudesta, ja ”troposfääristä” eli neutraalista ilmakehästä, joka sisältää myös stratosfäärin.

Kyseiset mekanismit ovat hyvin erilaisia.

8.3.1 Ionosfääri

Ionosfäärissä etenemiseen vaikuttavat eniten vapaat elektronit. Hyvässä approksimaatiossa viive on kääntäen verrannollinen taajuuden f neliöön.

$$d_{ion} = 40{,}3\,\mathrm{m^3\,Hz^2} \cdot \frac{1}{f^2} \int N_e \, ds, \tag{8.12}$$

jossa N_e on vapaiden elektronien tiheys yksikössä elektroneja per kuutiometri, suure joka integroidaan sädepolkua pitkin. Lauseketta

$$\mathrm{TEC} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 10^{-16}\,\mathrm{TECU} \cdot \mathrm{m^2} \cdot \int N_e \, ds \tag{8.13}$$

kutsutaan *elektronien kokonaispitoisuudeksi*, yksiköissä TECU eli 10^{16} elektronia per neliömetri. Silloin yhtälöstä 8.12 tulee

$$d_{ion} = 40{,}3 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m\,Hz^2/TECU}\,\frac{1}{f^2}\mathrm{TEC},$$

jossa taajuus f on annettava hertseinä. Siis metreissä

$$\begin{aligned} d_{ion,1} &= 0{,}1624\,\mathrm{m/TECU} \cdot \mathrm{TEC}, \\ d_{ion,2} &= 0{,}2674\,\mathrm{m/TECU} \cdot \mathrm{TEC}, \\ d_{ion,5} &= 0{,}2912\,\mathrm{m/TECU} \cdot \mathrm{TEC} \end{aligned}$$

GPS-järjestelmän taajuuksilla.

Ionosfääri on *dispersiivinen*: etenemisviive riippuu taajuudesta f ja on siten erilainen modulaatioille — niin sanottu ryhmäviive — ja kantoaallolle — vaiheviive. Itse asiassa kantoaallon vaiheella on negatiivinen viive[3]: 3

$$D_{ion} = -d_{ion}.$$

[3] Siis kantoaallon aaltorintamat lentävät nopeammin kuin valo tyhjiössä! Tämä ei ole ongelma, koske ne eivät ole aineellisia esineita eivätkä kanna tietoa. Ne muistuttavat enemmän saksien ”leikkaavaa pistettä”, joka voi liikkua myös nopeammin kuin itse terät (Wikipedia, Superluminal motion).

Ionosfäärin etenemisviiveen dispersiivisyys mahdollistaa viiveen eliminoimisen — tai määrittämisen — kaksois- tai monitaajuisten GNSS-vastaanottimien avulla. Tämä tulee ottaa huomioon havaintoyhtälöitä muodostettaessa: esimerkiksi yhtälöstä 8.1 tulee kaksitaajuisen vastaanottimen tapauksessa

$$p_1 = \rho + c\,(\Delta T - \Delta t) + d_{ion,1} + d_{trop},$$
$$p_2 = \rho + c\,(\Delta T - \Delta t) + \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 d_{ion,1} + d_{trop}.$$

Tästä yhteinen tuntematon $d_{ion,1}$ voidaan joko ratkaista tai poistaa. Määritellään ionosfäärivapaa havaintosuure

$$p_{\cancel{ion}} \overset{\text{def}}{=} \frac{f_1^2\,p_1 - f_2^2\,p_2}{f_1^2 - f_2^2} = \rho + c\,(\Delta T - \Delta t) + d_{trop},$$

josta $d_{ion,1}$ on poistettu.

8.3.2 *Troposfääri*

Troposfääri ei ole dispersiivinen: etenemisviive on riippumaton taajuudesta. Se voidaan ilmaista ilman taitekertoimeen:

$$d_{trop} = D_{trop} = \int (n-1)\,ds = 10^{-6} \int N\,ds. \tag{8.14}$$

Taitekertoimen n tilalla käytetään usein kätevämpää suuretta $N \overset{\text{def}}{=} 10^6\,(n-1)$. Taitekerroin riippuu lämpötilasta T, paineesta p ja absoluuttisesta kosteudesta eli vesihöyryn osapaineesta e (Rüeger, 2002):

$$N = \frac{77{,}624\,\mathrm{K/hPa}}{T}\,(p-e) + \frac{64{,}70\,\mathrm{K/hPa}}{T}\left(1 + \frac{5748\,\mathrm{K}}{T}\right) e.$$

Jos nämä kolme arvoa on saatavissa polkua pitkin, etenemisviive saadaan yllä olevasta polkuintegraalista 8.14. Vakiomallit, kuten Hopfieldin ja Saastamoisen, ovat yksinkertaistettuja approksimaatioita ja niihin syötetään pintamittausarvoja.

Troposfäärin erityispiirre on *vesihöyryn* suhteeton vaikutus etenemisviiveeseen: tietyllä vesihöyryn osapaineella on noin 18 kertaa muiden ilmakehän ”kuivien” kaasujen vaikutus. Tämä liittyy vesimolekyylin poolisuuteen, jonka takia se vuorovaikuttaa vahvemmin mikroaaltojen kanssa — kuten myös mikroaaltouunissa.

8.3.3 Kuvausfunktio

Signaalin polku ilmakehän läpi on sitä pidempi, mitä lähempänä horisonttia GNSS-satelliitti on paikallisella taivaalla. Tällä seikalla ei ole merkitystä, kun etenemisviivettä mallinnetaan *ilmakehän* ominaisuutena. Siksi parametri d, joka edustaa viistosti ilmakehän läpi kulkevan säteen etenemisviivettä, korvataan tuntemattomana eli tilavektorin alkiona vastaavalla viiveellä samassa paikassa pystysuoraa polkua pitkin:

$$d = \mu(\zeta)\, d^{\perp}.$$

Tässä $d^{\perp}$ on *zeniitin kokonaisviive* ja $\mu(\zeta)$ niin sanottu *kuvausfunktio*. myy μM

Litteän Maan kuvausfunktio on $\mu(\zeta) = {}^{1}/_{\cos\zeta}$, jossa ζ on satelliitin zeniittikulma paikallisella taivaalla. Todelliselle kaarevalle maapallolle on olemassa tarkempia kuvausfunktioita, joissa otetaan huomioon Maan kaarevuuden vuorovaikutus taiteaineen pystyjakauman kanssa. zeeta ζZ

Nämä uudet ilmakehän viiveparametrit $d^{\perp}$ voidaan lisätä yhtälöön 8.2, josta tulee

$$p = \rho + c\,(\Delta T - \Delta t) + \mu_{\text{ion}}\, d^{\perp}_{\text{ion}} + \mu_{\text{trop}}\, d^{\perp}_{\text{trop}}. \tag{8.15}$$

Uusien parametrien estimoiminen antaa uudeksi tilavektoriksi $\mathbf{x}$ ja havaintomatriisiksi H, kun estimoidaan vastaanottimen sijainnit, yhtälöt 8.9 ja 8.8:

$$\mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} & \Delta T & d^{\perp}_{\text{ion}} & d^{\perp}_{\text{trop}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \quad H = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{X}-\mathbf{x}}{\rho} & c & \mu_{\text{ion}} & \mu_{\text{trop}} \end{bmatrix}^{(0)}.$$

8.3.4 Useita satelliitteja

Jos näkyvissä on useita satelliitteja eri korkeuskulmilla, tästä tulee

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{X}-\mathbf{x}^1}{\rho^1} & c & \mu^1_{\text{ion}} & \mu^1_{\text{trop}} \\ \dfrac{\mathbf{X}-\mathbf{x}^2}{\rho^2} & c & \mu^2_{\text{ion}} & \mu^2_{\text{trop}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\mathbf{X}-\mathbf{x}^n}{\rho^n} & c & \mu^n_{\text{ion}} & \mu^n_{\text{trop}} \end{bmatrix}^{(0)},$$

jossa $\mu^S \overset{\text{def}}{=} \mu(\zeta^S)$ satelliitille S, eri arvot eri satelliiteille. Tästä Kalmanin suodin voi periaatteessa ratkaista tuntemattomat $d^{\perp}$, jotka ovat yhteisiä kaikille satelliiteille.

Jos antureita on useita, havaintoyhtälötkin on muodostettava kaikille. Jos esimerkiksi GNSS-vastaanotin pystyy mittaamaan useilla taajuuksilla,

voidaan ionosfäärin etenemisviive määrittää tarkasti ja eliminoida. Kaksitaajuusvastaanottimelle ja useille satelliiteille tulos on

$$\begin{aligned} p^1_{\cancel{ion}} &= \rho^1 + c\left(\Delta T - \Delta t^1\right) + \mu^1_{trop}\, d^\perp_{trop}, \\ p^2_{\cancel{ion}} &= \rho^2 + c\left(\Delta T - \Delta t^2\right) + \mu^2_{trop}\, d^\perp_{trop}, \\ &\dots \\ p^n_{\cancel{ion}} &= \rho^n + c\left(\Delta T - \Delta t^n\right) + \mu^n_{trop}\, d^\perp_{trop}, \end{aligned}$$

ja tilavektori $\mathbf{x}$ ja H-matriisi ovat

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta T \\ d^\perp_{trop} \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^1}{\rho^1} & c & \mu^1_{trop} \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^2}{\rho^2} & c & \mu^2_{trop} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^n}{\rho^n} & c & \mu^n_{trop} \end{bmatrix}^{(0)}.$$

Tässä on jäljellä vain yksi ilmakehän tuntematon, $d^\perp_{trop}$. Koska $\zeta^i \neq \zeta^j \implies \mu^i_{trop} \neq \mu^j_{trop}$, sen pitäisi olla estimoitavissa, jos on riittävästi satelliitteja eri korkeuskulmilla.

Tässä oletetaan, että tuntematon $d^\perp_{trop}$ on sama kaikille satelliiteille ja yhtä kuin zeniittisuuntainen integraali suoraan vastaanottimen yläpuolella. Tämä pätee täydellisesti kerrostuneen ilmakehän tapauksessa, muttei ole tietenkään tarkasti totta todellisessa ilmakehässä, jossa taiteaineen määrä ei ole vakio vaakasuunnassa.

Ratkaisuna tähän voidaan kehittää $d^\perp$ Taylorin sarjaan:

$$d^\perp = d^\perp_0 + \tan\zeta \cos\alpha\, d^\perp_{pohj} + \tan\zeta \sin\alpha\, d^\perp_{itä} + \cdots,$$

alfa αA

jossa ζ on satelliitin zeniittikulma ja α sen atsimuutti. Yhden estimoitavan tuntemattoman sijasta niitä onkin kolme: $d^\perp_0$, $d^\perp_{pohj}$ ja $d^\perp_{itä}$, ja ne kaikki voidaan estimoida yhdellä vastaanottimella ja yhdellä epookilla, jos näkyviä satelliitteja on riittävästi. Tilavektorista tulee

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} & \Delta T & d^\perp_{trop,\,0} & d^\perp_{trop,\,pohj} & d^\perp_{trop,\,itä} \end{bmatrix}^T$$

ja havaintomatriisista

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^1}{\rho^1} & c & \mu^1_{trop} & \tan\zeta^1 \cos\alpha^1 \mu^1_{trop} & \tan\zeta^1 \sin\alpha^1 \mu^1_{trop} \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^2}{\rho^2} & c & \mu^2_{trop} & \tan\zeta^2 \cos\alpha^2 \mu^2_{trop} & \tan\zeta^2 \sin\alpha^2 \mu^2_{trop} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}^n}{\rho^n} & c & \mu^n_{trop} & \tan\zeta^n \cos\alpha^n \mu^n_{trop} & \tan\zeta^n \sin\alpha^n \mu^n_{trop} \end{bmatrix}^{(0)}.$$

Tätä lähestymistapaa käytetään GNSS:n laskentaohjelmistossa troposfääriviiveen mallintamisessa.

8.3.5 *Vertausmallien käyttö*

Merkittävä parannus saadaan aikaan käyttämällä *residuaalisia* ionosfäärin tai troposfäärin korjauksia suhteessa tiettyyn *a priori* malliin. Merkintätapa on silloin

$$\mu_{ion}\,\Delta d^{\perp}_{ion} = d_{ion} - d^{(0)}_{ion}, \qquad \mu_{trop}\,\Delta d^{\perp}_{trop} = d_{trop} - d^{(0)}_{trop},$$

jossa $d^{(0)}_{ion}$ ja $d^{(0)}_{trop}$ ovat mallien laskemia arvoja.

Ionosfäärin tapauksessa *a priori* malli voisi olla Klobucharin malli, joka sisältyy satelliitin lähettämään navigointiviestiin ja on hyvin yksinkertainen. Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät (SBAS) lähettävät ionosfäärimalleja, jotka pätevät peittoalueillaan, luku 10. Niin tekevät implisiittisesti myös RTK-tukiasemaverkot, jotka käyttävät MAC/MAX-protokollia, osio 9.4.

Troposfäärille tarjoutuvat ratkaisuksi tunnetut Hopfieldin tai Saastamoisen mallit. Niihin syötetään ilmatieteellisten parametrien arvot, kuten lämpötila, ilmanpaine ja kosteus mittauspaikalla. Voidaan käyttää mittauspaikan mitattuja arvoja, jos niitä on, tai vaihtoehtoisesti interpoloituja arvoja läheisiltä sääasemilta. Silloin on otettava asianmukaisesti huomioon monien parametrien pystysuuntaiset gradientit. Ja viimeisenä keinona voidaan käyttää mittauspaikan ilmastollisia keskiarvoja.

Silloin yhtälöstä 8.15 tulee

$$p = \rho + c\,(\Delta T - \Delta t) + d^{(0)}_{ion} + d^{(0)}_{trop} + \mu_{ion}\,\Delta d^{\perp}_{ion} + \mu_{trop}\,\Delta d^{\perp}_{trop}. \quad (8.16)$$

Usein on suositeltavaa jakaa troposfäärin etenemisviive ”kuivaan” ja ”kosteaan” osaan $\Delta d^{\perp}_{kuiva}$ ja $\Delta d^{\perp}_{kostea}$, koska niillä on erilaiset kuvausfunktiot μ_{kuiva} ja μ_{kostea}. Tämä pätee erityisesti, jos käytössä on ilmanpaineanturi, kuten lentokoneissa. Ilmanpaine antaa tietoja ilmapatsassa havaintopaikan yläpuolella olevasta taittavan aineen kokonaismäärästä, mikä auttaa määrittämään kuivat ja kosteat osat erikseen.

8.4 Eri estimointitehtävien dynaamiset mallit

8.4.1 *Satelliittiradan määritys*

Erikoistetaan yhtälö 8.16 seuraavaksi havaintoyhtälöksi:

$$\underline{p} = \underline{\rho} + c\,(\Delta T - \underline{\Delta t}) + d^{(0)}_{ion} + d^{(0)}_{trop} + \mu_{ion}\,\Delta \underline{d}^{\perp}_{ion} + \mu_{trop}\,\Delta \underline{d}^{\perp}_{trop} + \underline{m},$$

$$\underline{\rho} = \sqrt{(X - \underline{x})^2 + (Y - \underline{y})^2 + (Z - \underline{z})^2}.$$

Tässä $\underline{m}$ edustaa havainnon kohinaa eli satunnaista virhettä.

Tämä on *radanmäärityksen* havaintoyhtälö. Siinä maa-aseman eli seuranta-aseman paikka on annettu ei-stokastisena: $\mathbf{X} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$.

Tarkassa radanmäärityksessä näitä koordinaatteja ei saa pitää vakiona. On selvää, että inertiaalisessa vertauskehyksessä maapallon pyöräh-dysliike on mallinnettava. Mukaan on otettava myös Maan suuntaus-parametrit (EOP), kuten napaliike ja vuorokauden pituuden vaihtelut. Aikasarjat saadaan Internetistä. Myös aseman yksittäiset liikkeet on otettava huomioon, esimerkiksi laattatektoniikan tai jääkauden jälkeisen isostaattisen sopeutumisen (GIA) takia.

Satelliitin paikka $\underline{\mathbf{x}} = \underline{x}\mathbf{i} + \underline{y}\mathbf{j} + \underline{z}\mathbf{k}$ on stokastinen ja se estimoidaan suotimen avulla.

Seuranta-aseman kellon oletetaan olevan tiedossa suhteessa GNSS-järjestelmän aikaan, poikkeaman ollessa ΔT. Satelliitin kellopoikkeama $\underline{\Delta t}$ estimoidaan.

Tähän tilanteeseen tunnistamme *tilavektoriksi*

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} & \underline{\boldsymbol{v}} & \underline{\Delta t} & \underline{\Delta d^{\perp}_{\text{ion}}} & \underline{\Delta d^{\perp}_{\text{trop}}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

Tavan mukaan tilavektoriin lisättiin nopeusvektori $\underline{\boldsymbol{v}}$, jotta Kalmanin suo-timen dynaamiset yhtälöt voidaan kirjoittaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiksi.

Seuraavaksi päätetään, millä tavalla jokaisen tilavektorin alkion käyt-täytyminen ajassa mallinnetaan. Sijainnin $\underline{\mathbf{x}}$ tapauksessa tämä päätös on yksinkertainen: määritelmän mukaan

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{v}}$$

tarkasti. Satelliitin likimääräiselle nopeudelle eli vertausnopeudelle tulee käyttää Newtonin teorian tarkat liikeyhtälöt. Likiarvoiksi kelpaa-vat olemassa olevat rataennusteet. Navigoinnissa ainostaan satelliittien tosiajassa lähettämät ennusteet (”*broadcast ephemeris*”) kelpaavat. Vähen-täminen ja *linearisointi* tuottaa deltasuureita. Jos deltasuureet ovat pieniä, keskusvoimakentän approksimaatio voi olla riittävän hyvä lineaariseksi malliksi niiden etenemiselle.

Olkoot likiarvot $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, $\boldsymbol{v}^{(0)}(t)$ ja $\Delta t^{(0)}(t)$. GNSS-järjestelmän rataen-nusteessa ovat aina mukana myös satelliittien kellopoikkeamat. Sen

jälkeen linearisoidut eli differentiaaliset tilavektorin alkiot (”deltasuureet”) ovat

$$\Delta\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(0)}, \quad \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}} = \underline{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu}^{(0)}, \quad \Delta(\Delta\underline{t}) = \Delta\underline{t} - \Delta t^{(0)}.$$

Nyt linearisoitu dynaaminen malli suureille $\underline{\mathbf{x}}$ ja $\underline{\boldsymbol{\nu}}$ on

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}\\ \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}}\end{bmatrix}}^{\underline{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix}0 & I\\ \mathcal{M}^{(0)} & 0\end{bmatrix}}^{F}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}\\ \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}}\end{bmatrix}}^{\underline{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix}0\\ \underline{\mathbf{n}}_a\end{bmatrix}}^{\underline{n}},$$

jossa $\mathcal{M}^{(0)}$ on *gravitaatiogradienttitensori*, joka johdettiin aiemmin keskeisvoimakentälle, yhtälö 3.9. I on yksikkömatriisi, jonka koko on 3×3, ja $\underline{\mathbf{n}}_a$ on satelliittiliikkeen dynaaminen kohina.

Miten mallinnetaan satelliitin kellon käyttäytyminen $\Delta\underline{t}$? Usein valitaan *satunnaiskulun* prosessimalli, yhtälö 2.25, osio 7.8:

$$\frac{d}{dt}\Delta(\Delta\underline{t}) = \underline{n}_t.$$

Troposfäärin ja ionosfäärin etenemisviiveitä edustavat zeniittiviiveet $\Delta\underline{d}^{\perp}_{ion}$ ja $\Delta\underline{d}^{\perp}_{trop}$, joista on poistettu polun viiston suunnan vaikutus ilmakehässä, joka riippuu GNSS-satelliitin zeniittikulmasta paikallisella taivaalla. Zeniittiviiveistä on vähennetty myös vertausmallin antamat arvot.

Tässä tapauksessa käytetään usein Gaussin ja Markovin mallia ja valitaan järkevä aikaparametri τ. Parametri tulisi valita edustamaan ilmakehän muutoksen aikaskaalaa: muutamaa tuntia. Suositeltavaa on jakaa troposfäärin etenemisviive ”kuivaan” ja ”kosteaan” osaan sekä muodostaa niihin erillisiä dynaamisia malleja, koska ne käyttäytyvät eri tavalla ajassa. tau τT

Yhteenveto Kalmanin suotimen dynaamisen mallin muodossa on

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}\\ \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}}\\ \Delta(\Delta\underline{t})\\ \Delta\underline{d}^{\perp}_{ion}\\ \Delta\underline{d}^{\perp}_{trop}\end{bmatrix}}^{\underline{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix}0 & I & & & \\ \mathcal{M}^{(0)} & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -\frac{1}{\tau_{ion}} & \\ & & & & -\frac{1}{\tau_{trop}}\end{bmatrix}}^{F}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}\\ \Delta\underline{\boldsymbol{\nu}}\\ \Delta(\Delta\underline{t})\\ \Delta\underline{d}^{\perp}_{ion}\\ \Delta\underline{d}^{\perp}_{trop}\end{bmatrix}}^{\underline{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix}0\\ \underline{\mathbf{n}}_a\\ \underline{n}_t\\ \underline{n}_{ion}\\ \underline{n}_{trop}\end{bmatrix}}^{\underline{n}}.$$

Huomaa, että tilavektorin alkioiden $\Delta\underline{d}^{\perp}_{ion}$ tai $\Delta\underline{d}^{\perp}_{trop}$, tai jopa $\Delta d^{\perp}_{kuiva}$ ja $\Delta d^{\perp}_{kostea}$, sisällyttäminen tilavektoriin ei takaa, että prosessit tuottavat

hyviä estimaatteja! Kaikki riippuu käytettävissä olevista havainnoista. Esimerkiksi kaksitaajuisen GNSS-vastaanottimen käyttö mahdollistaa suureen $\Delta\underline{d}^{\perp}_{ion}$ eliminoinnin. Ja jos saatavilla on suureen $\Delta\underline{d}^{\perp}_{trop}$ riippumattomia tosiaikaisia estimaatteja, esimerkiksi alueella toimivasta GNSS-seurantaverkosta, niitä voidaan käyttää suureen eli alkion eliminoimiseksi tilavektorista.

Jos tilanne ei ole kuvatunlainen, tilavektorin alkion estimaatin epävarmuus jää suureksi ja samalla se korreloi vahvasti tilavektorin muiden samalla tavalla epävarmojen alkioiden kanssa. Tämä on numeerisesti epämiellyttävä tilanne.

8.4.2 Maa-aseman paikan määritys

Lähtien samasta yhtälöstä 8.16 muodostetaan eri havaintoyhtälö:

$$\underline{p} = \underline{\rho} + c\,(\underline{\Delta T} - \Delta t) + d^{(0)}_{ion} + d^{(0)}_{trop} + \mu_{ion}\,\Delta\underline{d}^{\perp}_{ion} + \mu_{trop}\,\Delta\underline{d}^{\perp}_{trop} + \underline{m},$$
$$\underline{\rho} = \sqrt{(\underline{X} - x)^2 + (\underline{Y} - y)^2 + (\underline{Z} - z)^2}.$$

Tämä on *geodeettisen paikannuksen* havaintoyhtälö. Tässä satelliitin rataalkiot ja kellopoikkeama oletetaan tunnetuiksi: $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja Δt voidaan laskea tarkasti käytettävissä olevista ratatiedoista. Nyt *tilavektori* on

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} & \underline{\mathbf{V}} & \underline{\Delta T} & \Delta\underline{d}^{\perp}_{ion} & \Delta\underline{d}^{\perp}_{trop} \end{bmatrix}^{T},$$

jossa $\underline{\mathbf{V}}$ on aseman liikkeen nopeusvektori. Uutena ongelmana on maa-aseman vektoreiden $\underline{\mathbf{X}}(t)$ ja $\underline{\mathbf{V}}(t)$ käyttäytymisen mallinnus.

Mikäli maa-aseman paikka on vakio, voidaan malliksi valita Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa

$$\underline{\mathbf{V}} = \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{X}} = 0.$$

Jos tiedetään, että maa-asemat liikkuvat, mutta hitaasti ja vakionopeudella esimerkiksi laattatektoniikan tai jääkauden jälkeisen isostaattisen sopeutumisliikkeen takia, voidaan kirjoittaa

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} \\ \underline{\mathbf{V}} \end{bmatrix}}^{\underline{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{F} \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}} \\ \underline{\mathbf{V}} \end{bmatrix}}^{\underline{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\underline{n}}.$$

Kalmanin suodin parantaa hitaasti mutta varmasti suureiden estimaattorit $\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{V}}$ ajan edetessä, kun lisää havaintoja $\underline{p}$ käsitellään.

Jotkut olemassa olevat GNSS:n laskentaohjelmistot (GYPSY/OASIS) käyttävät Kalmanin suodinta juuri tällä tavalla.

Samoja yhtälöitä voi käyttää myös *liikkuvalle kulkuneuvolle*, esimerkiksi lentokoneelle, mutta se on mutkikkaampaa. Hyväksi voidaan käyttää tietoa, että kulkuneuvon *kiihtyvyys* $\mathbf{A}$ on rajallinen ja mallintaa se värillisenä kohinana, esimerkiksi Gaussin ja Markovin prosessina. Yhtälön 2.31 mukaan tällaisen prosessin varianssi on $q_n/2k$, kun prosessiyhtälö on

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{A}} = -k\,\underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{n}}_A.$$

Olkoon $\tau_A = 1/k$ liikkeen aikavakio. Tyypillisesti on kyse sekunneista, koska se on kulkuneuvon liikkeiden aikaskaala. Lisäksi olkoon α tyypillisesti esiintyvien kiihtyvyyksien suuruusluokka. Kirjoittamalla

$$\frac{q_n}{2k} = \frac{1}{2} q_n \tau_A = \alpha^2$$

saadaan pakotekohinan $\underline{\mathbf{n}}_A$ varianssiksi

$$\mathrm{Var}\{\|\underline{\mathbf{n}}_A\|\} = E\{\|\underline{\mathbf{n}}_A\|^2\} = q_n = \frac{2\alpha^2}{\tau_A}.$$

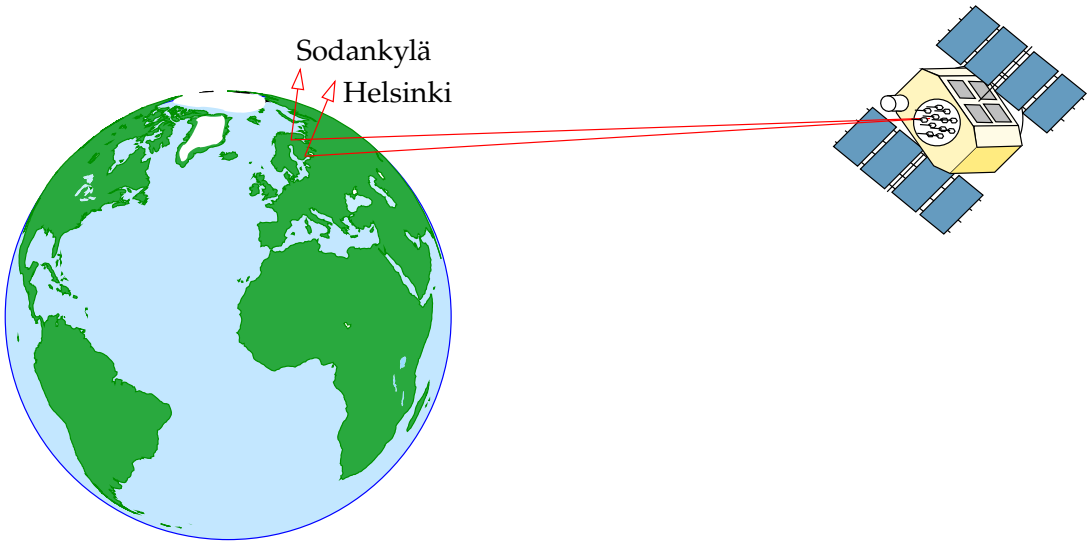
Näin saadaan täydelliseksi dynaamiseksi malliksi, johon on lisätty myös $\underline{\Delta T}$, $\Delta\underline{d}^{\perp}_{ion}$ ja $\Delta\underline{d}^{\perp}_{trop}$:

$$\overbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{X}}\\ \underline{\mathbf{V}}\\ \underline{\mathbf{A}}\\ \underline{\Delta T}\\ \Delta\underline{d}^{\perp}_{ion}\\ \Delta\underline{d}^{\perp}_{trop}\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{x}}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & & & & & \\ & 0 & I & & & & \\ & & -\frac{1}{\tau_A} I & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & -\frac{1}{\tau_{ion}} & & \\ & & & & & -\frac{1}{\tau_{trop}} & \end{bmatrix}}^{F} \overbrace{\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{X}}\\ \underline{\mathbf{V}}\\ \underline{\mathbf{A}}\\ \underline{\Delta T}\\ \Delta\underline{d}^{\perp}_{ion}\\ \Delta\underline{d}^{\perp}_{trop}\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{x}}} + \overbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{2\alpha^2}{\tau_A}\underline{\mathbf{n}}_1\\ \underline{n}_t\\ \underline{n}_{ion}\\ \underline{n}_{trop}\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{n}}}, \tag{8.17}$$

jossa $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{V}$ ei ole linearisoitu. Jos tilavektorin päivittämiseen halutaan käyttää havaintoina pseudoetäisyyksiä, epälineaarinen havaintoyhtälö on linearisoitava, mikä tuottaa linearisoidut $\Delta\mathbf{X}$ ja $\Delta\mathbf{V}$. Niitä tulee silloin käyttää myös dynaamisessa mallissa 8.17. Jätämme tämän lukijan harjoitustehtäväksi.

Kohinavektori $\underline{\mathbf{n}}_1$ on ”yksikkövarianssin valkoinen kohina”, tässä tapauksessa kolmiulotteinen vektori.

Sekä α että τ_A riippuvat kulkuneuvon tyypistä. Ympäristöä, jossa α on suuri ja τ_A lyhyt kutsutaan usein ”*high dynamic*” eli korkean dynamiikan



KUVA 8.1. Differentiaalipaikannus. Kahden maa-aseman, tässä Helsingin ja Sodankylän, välinen etäisyys on aina *pieni* satelliittiradan korkeuteen, 20 000 km, verrattuna. Siksi differentiaalimittausten ratavirhe kumoutuu enemmiltä osin. Satelliitin kellovirhe kumoutuu kokonaan.

ympäristöksi. Ympäristö on haastava GNSS-vastaanottimien suunnittelun kannalta, koska vastaanotetun signaalin taajuuden dopplersiirtymien vaihtelut ovat nopeita ja ennakoimattomia.

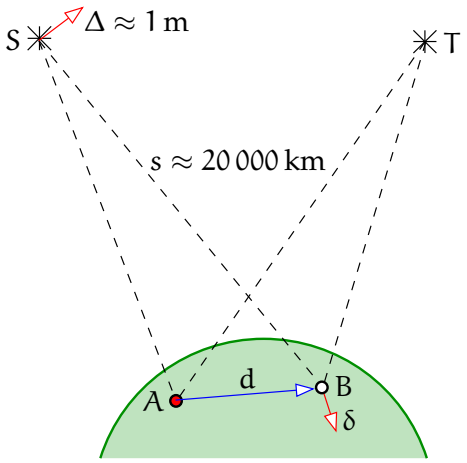
8.5 Differentiaalipaikannus

Koodimittauksen ja kantoaallon vaiheen mittauksen yhteinen ongelma on satelliittien rataennusteiden epätarkkuus. Tosiajassa satelliittien lähettämät rataennusteet eli *broadcast ephemeris* antavat noin ±1 m tarkkuuden satelliitin kolmiulotteisessa paikassa[4].

Ratkaisun tarjoaa differentiaalitekniikka eli tukiaseman tai tukiasemien verkon käyttö. Jos etäisyys tukiasemalta on riittävän pieni, suurin osa ratavirheestä kumoutuu lopputuloksesta, katso kuva 8.1.

Klubiaskin kannen arvio differentiaalipaikannuksen tarkkuudesta tehdään helposti geometrisen tarkastelun avulla. Katso kuva 8.2. Jos satelliittiradan geometrista tarkkuutta kutsutaan Δ ja satelliitin etäisyyttä

[4] Kansainvälinen GNSS-palvelu IGS kuitenkin julkaisee ”erittäin nopeita” rataennusteita eli *ultra-rapid orbits* neljä kertaa vuorokaudessa. Ennusteiden arvioitu tarkkuus on ±5 cm. Ennusteet ovat saatavilla tosiajassa (International GNSS Service). Tärkkuusarvio on sama kuin yksittäisten koordinaattien keskivirheet σ_x, σ_y ja σ_z.



d (km)	δ (mm)
1	0,05
10	0,5
100	5
1000	50

KUVA 8.2. Differentiaalipaikannuksen tarkkuuden arvioimisen geometria. Oletettu ratavirhe $\Delta = 1$ m vastaa *broadcast ephemeris* -rataennusteiden nykyistä tarkkuutta.

havaitsijasta s — aina yli 20 000 km — saadaan paikannustarkkuudeksi

$$\delta \approx \frac{d}{s}\Delta,$$

jossa d on mitattavan vektorin pituus. Tämän kaavan avulla muodostetaan taulukko kuvassa 8.2.

Differentiaali-GNSS on laajasti käytössä geodeettisessa GNSS-laskennassa. Aina kun käytetään ohjelmistoa, jossa rakennetaan niin sanottuja kaksoiserotushavaintosuureita, käytetään differentiaalimenetelmää. Kaksoiserotuksethan lasketaan vähentämällä toisistaan kahden maaaseman havainnot — ei vain kahden satelliitin. Näin asemien välisestä vektoriratkaisusta poistetaan monet virhelähteet, jotka ovat periaatteessa huomattavia, mutta jotka muuttuvat vain hitaasti paikan mukaan, kuten

- ratavirheet, satelliittien kellovirheet
- ilmakehän eli ionosfäärin ja troposfäärin aiheuttamat signaalin etenemisviiveet
- antennin vaiheviivekuvion aiheuttamat satelliitin suunnasta (atsimuutti, korkeuskulma) ja sen kautta paikallisen luotiviivan suunnasta riippuvat virheet.

8.6 Tosiaikainen kinemaattinen paikannus

Käytämme lyhennettä RTK merkitsemään tosiaikaista kinemaattista GNSS-paikannusta (*real-time kinematic*).

Kinemaattisen mittausmenetelmän keksi amerikkalainen Benjamin Remondi. Menetelmä käyttää havaintosuureena GNSS-satelliitin lähettämän radiosignaalin kantoaallon vaihekulmaa. Tämä havaintosuure kärsii ambiguiteettien eli moniselitteisyyksien eli kokonaislukutuntemattomien ongelmasta: vaihekulma on jaksollinen jaksolla 2π. Mitatun vaihekulman oletetaan olevan mittauksen alussa yhden täyden kierroksen, $[0, 2\pi)$, sisällä. Sen jälkeen kun etäisyys muuttuu, mitattu vaihekulma seuraa näitä muutoksia kokonaisine kierroksineen. Todellinen etäisyys kuitenkin eroaa vaihekulmasta pääteltävissä olevasta etäisyydestä kokonaislukumäärän verran täysiä vaihekierroksia eli aallonpituuksia. Kokonaislukua ei voida määrittää ainoastaan vaihemittauksen avulla.

RTK-mittauksen aikana vastaanotin pysyy ”lukittuna” GNSS-kantoaallon vaiheeseen. Niin kauan kuin lukitus säilyy eikä tapahdu vaihekatkoa (”*cycle slip*”), kantoaallon vaihemittaukseen kuuluva tuntematon kokonaisluku ei muutu.

Oleta nyt, että nämä kokonaisluvut saadaan jollain tavalla määritettyä, esimerkiksi käymällä sijainniltaan tunnetulla pisteellä, jonka etäisyys satelliiteista voidaan laskea. Ratkaisemisen jälkeen vastaanottimen jatkuvasti seuraamat vaihekulma-arvot edustavat nyt oikeita etäisyyksiä satelliiteista.

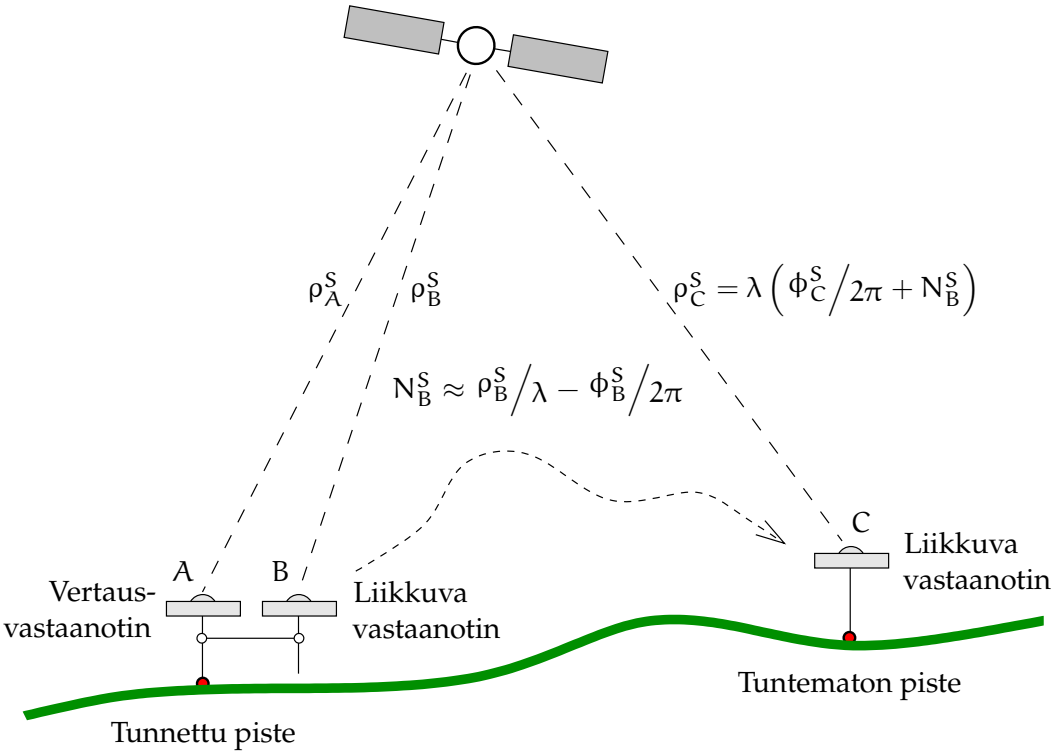
Sen jälkeen voidaan siirtää vastaanotin — tästä tulee sana ”kinemaattinen” — toisille pisteille, joiden tuntemattomat sijainnit ratkaistaan tosiajassa, vaikkakin vain tunnetun lähtöpisteen suhteen.

Katso kuva 8.3.

Tässä esitetty menettely ei vielä sisällä kuvan 8.3 liikkumatonta vertausvastaanotinta. Vertausvastaanotinta ei tarvittaisi, jos virhelähteet, jotka vaikuttavat satelliitin etäisyyden mittaukseen tunnetusta pisteestä, voitaisiin olettaa ajassa muuttumattomiksi. Todellisuudessa ne tietenkin muuttuvat.

Ensisijainen virhelähde on vastaanottimen kellon poikkeama ja etenkin sen *käynti*. Siksi havaintosuuretta kutsutaan ”pseudoetäisyydeksi” eikä etäisyydeksi. Tulevassa alaosiossa 9.1.2 nähdään, miten tämä virhelähde voidaan poistaa muodostamalla erotushavaintosuureita.

Tämän lisäksi on olemassa satelliittien kellopoikkeamia ja etenemisviiveitä signaalin muuttuvaa polkua pitkin ilmakehässä. Vertausvastaanotin yrittää seurata näiden satelliittien ja ilmakehän aiheuttamien virheiden ajallisia muutoksia, jotta liikkuva vastaanotin voi ottaa ne korjauksina huomioon. Tietenkin tämä toimii vain vertausvastaanottimen



KUVA 8.3. Tosiaikaisen kinemaattisen GNSS-paikannuksen idea. Ko-lokaation avulla voidaan määrittää kokonaislukutuntematon N, mikä mahdollistaa satelliitin todellisen etäisyyden määrittämisen tuntemattomalla paikalla C. Oletettu on tässä, epärealistisesti, että kaikki mitatun kantoaallon vaiheen ϕ muutokset ovat satelliitin ja vastaanottimen välisen geometrisen etäisyyden ρ muutosten aiheuttamia.

lähellä, jossa se ”näkee” saman satelliittien ja ilmakehän geometrian kuin liikkuva vastaanotin.

Tosiaikaisiin mittauksiin tarvitaan *tietoyhteys* vertausvastaanottimelta liikkuvalle vastaanottimelle.

8.7 Tietoyhteys

Tosiaikaisissa differentiaalimenetelmissä *radioyhteyttä* käytetään joko alkuperäisten havaintojen tai differentiaalikorjausten välittämiseksi ”tukiasemalta”, jonka sijainti tunnetaan, toiselle usein liikkuvalle vastaanottimelle tuntemattomassa paikassa. Eri menetelmät

- välittävät joko kantoaallon vaihetta tai kantoaaltoon moduloitua PRN- eli näennäissatunnaiskoodin saapumisajan poikkeamaa
- voivat käyttää yhtä vertausasemaa kokonaiselle alueelle tai useita asemia interpoloinnin avulla

- voivat interpoloida erikseen jokaiselle käyttäjälle, joiden on siten ilmoitettava sijaintinsa, jolloin puhutaan *täsmälähetyksestä*. Toinen vaihtoehto on antaa käyttäjien interpoloida itse, jolloin kyseessä on *yleislähetys*. Välimuoto on *ryhmälähetys*, jossa eri viestit lähetetään eri käyttäjäryhmille.

Tietolinkkinä voi toimia radiolähetysverkko, pari radiomodeemia, matkapuhelinverkko tai jopa geostationaarinen satelliitti. Peittävyys voi olla paikallinen (radiomodeemit), kansallinen (Suomessa kaupalliset palvelut Trimnet VRS™[5] ja HxGN SmartNet™[6]), mannerlaajuinen (satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät) tai globaali (GDGPS, Jet Propulsion Laboratory).

8.8 RTCM-standardi

Radio Technical Commission for Maritime Services (RTCM, http://www.rtcm.org/) on vuonna 1947 perustettu riippumaton järjestö. Jäsenjärjestöjä on yli sata, ja joukossa on radionavigointilaitteiden valmistajia, valtiollisia elimiä, joilla on vastuu radiopaikannuksesta, laivanvarustajia, paikannuspalveluiden tarjoajia ja akateemisia laitoksia.

RTCM Special Commission 104 on laatinut GPS-differentiaalitietopalvelun standardin, joka kantaa nimeä RTCM SC-104 eli RTCM-104 eli "RTCM". Laajassa käytössä oleva versio on RTCM 10402.3 eli 2.3.

Viestityyppejä on lueteltu taulussa 8.1. Jokainen viesti on 30 bitin jono.

Uusin versio on RTCM 10403.2 eli 3.2, joka ei kuitenkaan ole yhteensopiva aikaisempien versioiden 2.x kanssa. Se käyttää tehokkaampaa datansiirtomekanismia kuin 2.x-protokolla. Kuten versiot 2.x, sekin soveltuu tosiaikaiseen kinemaattiseen mittaukseen.

Standardin tärkeä uusi kehitys on MSM, Multiple Signal Message, joka mahdollistaa kaikkiin GNSS- ja SBAS-järjestelmiin liittyvien tietojen esittämisen ja levittämisen tosiaikaisesti yhtenäisessä muodossa. Se hyödyntää parhaiten useiden järjestelmien rinnakkaisoloa.

Saksalainen tutkimuslaitos BKG on laatinut 3-version viesteistä hyvän yhteenvedon, mukaan lukien MSM: BKG, Ntrip and RTCM version 3.

Markkinoilla on monia laitteistoja, jotka lähettävät ja osaavat käyttää

[5] VRS on Trimble Inc:n tavaramerkki.

[6] HxGN SmartNet on Leica Geosystems AG:n tavaramerkki.

TAULU 8.1. RTCM SC-104-formaatin viestityypit. Protokollaversio 2.3, kevyesti muokattu. Tähti merkitsee: poistunut käytöstä tai käyttö vähäistä.

Message type	Message title	Message type	Message title
1	DGPS corrections	20	RTK carrier-phase corrections
2	Delta DGPS corrections*	21	RTK pseudorange corrections
3	GNSS Reference station parameters	22	Extended reference station parameters*
4	Carrier surveying information	23	Antenna type definition record
5	GPS constellation health	24	Antenna reference point (ARP)
6	GPS null frame	25–26	Undefined
7	DGPS radiobeacon almanac*	27	Extended radiobeacon almanac
8	Pseudolite almanac*	31	Differential GLONASS corrections
9	High-rate DGPS corrections	32	GLONASS reference station parameters
10	P-code DGPS corrections*	33	GLONASS constellation health
11	C/A code L1/L2 delta corrections*	34	GLONASS differential corrections
12	Pseudolite station parameters*	35	GLONASS radiobeacon almanac
13	Ground transmitter parameters*	36	GLONASS special message
14	Surveying auxiliary message	37	GNSS system time offset
15	Ionospheric/tropospheric message	38–40	Undefined
16	GPS special message	41–43	Experimental (generic GNSS)
17	GPS ephemeris almanac	44–58	Undefined
18	Uncorrected carrier phases	59	Proprietary message
19	Uncorrected pseudoranges	60–63	Differential Loran C messages

mainittuja viestityyppejä differentiaalipaikannuksessa käyttäen joko GPS-signaalin kantoaallon vaihemittauksia (RTK-tekniikka) tai kantoaalloille moduloituja näennäissatunnaiskoodeja (DGPS-tekniikka). Molemmissa tapauksissa paikannus on *tosiaikainen*: saadun paikkaratkaisun ”ikä” jää aina annettua raja-arvoa lyhyemmäksi.

RTCM-viestit lähetetään *tukiaseman* puolesta. Tukiaseman sijainti on geodeettisen tarkasti määritetty staattisella GNSS-paikannuksella. Koska paikka on tiedossa, voidaan satelliittien lähettämien ratatietojen avulla laskea, mikä pseudoetäisyyden *pitäisi* olla jokaiseen satelliittiin[7]. Tämän [7]

arvon vähennys mitatusta pseudoetäisyydestä antaa *korjauksen*, joka
8 koodataan viestiin (viestityypit 1, 20 ja 21)[8].

Lähetetyt korjaukset pätevät tukiaseman kohdalla ja pienellä alueella sen ympärillä. Alueen koko riippuu halutusta tarkkuudesta. Tarkkuus on metrin luokkaa jopa satojen kilometrien päässä tukiasemalta, mutta senttimetrin luokkaa vain noin kymmeneen kilometriin saakka.

8.9 NTRIP-protokolla

NTRIP merkitsee ”Networked Transport of RTCM via Internet Protocol”. Se perustuu oivallukseen, että vaikka RTCM-protokollan mukaiset differentiaalikorjaukset voidaan siirtää kahden radiomodeemin avulla, Internet tarjoaa houkuttelevamman vaihtoehdon. Mobiilia tukiasemaverkkoa voidaan käyttää korjausten lähettämiseen kentällä toimiville GNSS-kojeille Internetin välityksellä. 3G-, 4G- ja 5G-teknologiasukupolvien datansiirtonopeudet ovat tähän tarkoitukseen enemmän kuin riittäviä.

Käytetty protokolla on luonteeltaan *suoratoisto* (”*streaming*”), joka perustuu hypertekstin siirtoprotokollaan HTTP (”Hypertext Transfer Protocol”). Se on jo massiivisessa käytössä verkkosivujen välittämisessä Internetin kautta. Protokolla muokattiin sopivaksi GNSS-tietovirtojen siirtämiseen, ja se pystyy tarjoamaan useita tietovirtoja useille käyttäjille. Eri tietovirrat eli tietolähteet erotetaan toisistaan nimetyillä liityntäkohdilla (”*mount points*”). NTRIP-protokolla kehitetään aktiivisesti Saksan liittovaltion tutkimuslaitoksessa BKG, joka ylläpitää avoimen lähdekoodin mallitoteutusta. Katso BKG, NTRIP v. 1.0.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä on havaintoyhtälö koodin pseudoetäisyysmittauksille?
2) Mikä on havaintoyhtälö kantoaallon vaiheen mittauksille?
3) Mikä on zeniitin etenemisviive? Mikä on kuvausfunktio?
4) Kun määritetään maa-asemien koordinaatit GNSS:n avulla, mitkä maa-asemien liikkeet on mallinnettava?

[7] Tämä logiikka ei ota huomioon vastaanottimen kellopoikkeamaa. Sillä ei ole kuitenkaan merkitystä, jos tosiaikaiseen paikannukseen käytetään tavan mukaisesti kaksoiserotuksia, koska silloin kellopoikkeama kumoutuu.

[8] RTK-mittauksissa lähetetään usein mieluummin alkuperäiset vaihehavainnot, tyypit 18 ja 19, mutta käsitteellisesti kyse on samasta asiasta.

5) Kuinka mallinnettaisiin maa-ajoneuvon tai lentokoneen liikkeitä Kalmanin suotimessa?
6) Mitä merkitsee, kun sanotaan että ionosfääri on *dispersiivinen*? Kuinka ionosfäärin etenemisviive d_{ion} poistetaan GNSS-pseudoetäisyyden havainnoista?
7) Miksi ilmakehän etenemisviiveen tuntemattoman d korvaaminen zeniittiviivetuntemattomalla $d^{\perp}$ on hyvä idea?
8) Millä vertausmalleilla voidaan laskea GNSS-signaalin ionosfäärin etenemisviive?
9) Millä vertausmalleilla voidaan laskea troposfäärin etenemisviive? Miten mallit sovelletaan?
10) Millä tavalla differentiaalinen paikannus parantaa paikannustarkkuutta?
11) Miksi tosiaikainen differentiaalipaikannus vaatii datayhteyden?
12) Mikä on vaihekatko?
13) Kuvaile RTCM-standardia. Millaisia havaintoja se käsittää?
14) Mikä on NTRIP-protokollan tarjoama lisäarvo?
15) Mitkä ovat edut ja haitat, kun havaintosuureena käytetään GNSS:n kantoaallon vaihetta eikä koodin pseudoetäisyyttä?

Harjoitus 8−1: Dynaamisen mallin 8.17 linearisointi

Minkä näköinen olisi vastaava linearisoitu malli? Ja mitkä ovat dynaamiset yhtälöt likiarvoille $\mathbf{X}^{(0)}$ ja $\mathbf{V}^{(0)}$?

RTK-navigointi

9

9.1 RTK ja kokonaislukutuntemattomat

9.1.1 *Yksinkertaisin tapaus*

Tutkitaan tosiaikaista kinemaattista mittausta kahdella vastaanottimella jättäen ensin ilmakehän vaikutukset huomiotta. Se on sallittua, jos vastaanotinten välinen etäisyys on lyhyt. Olkoon A vertausvastaanotin tukiasemalla ja B liikkuva vastaanotin eli *rover*. Kantoaallon vaihe mitataan molemmilla vastaanottimilla. Vertausvastaanottimen mittaustulokset siirretään tietoyhteyden kautta *roveriin*, jossa lasketaan vaihemittausten erotus.

Ensin mitataan kantoaallon vaihe, *kun molemmat vastaanottimet ovat tunnetulla pisteellä* eli tukiasemalla, katso kuva 8.3. Yhtälöstä 8.4:

$$\frac{1}{2\pi}\phi^S_{A,1} + N^S_A = \frac{f}{c}\rho^S_A + f\tau^S_{A,1}, \qquad \frac{1}{2\pi}\phi^S_B + N^S_B = \frac{f}{c}\rho^S_B + f\tau^S_{B,1},$$

jossa

$$\tau^S_{A,1} = \Delta T_A - \Delta t^S_1, \qquad \tau^S_{B,1} = \Delta T_B - \Delta t^S_1$$

ovat vastaanotinten kellojen poikkeamien ΔT_A ja ΔT_B sekä saman ajanhetken satelliitin kellon poikkeaman Δt^S_1 väliset erotukset. Alaindeksi 1 viittaa alkutilanteeseen, jossa molemmat vastaanottimet ovat tunnetulla pisteellä. $f = \omega/2\pi = c/\lambda$ on lineaarinen taajuus, ja c on valon nopeus. oomega ωΩ

Suureet $N^S_A, N^S_B \in \mathbb{Z}$ ovat tuntemattomia kokonaislukuja eli *kokonaislukutuntemattomia* eli ambiguiteetteja. Niitä tarvitaan, koska arvot ϕ voidaan mitata vain modulo 2π. lambda λΛ fii φϕΦ

Vähennys antaa vastaanotinten väliset vaihemittausten erotukset hetkellä 1, kun $\rho^S_B = \rho^S_A$: rhoo ρR

$$\frac{1}{2\pi}\phi^S_{AB} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\phi^S_B - \phi^S_{A,1}\right) = f\,\Delta T_{AB} - \left(N^S_B - N^S_A\right), \qquad (9.1)$$

jossa $\Delta T_{AB} = \Delta T_B - \Delta T_A$.

Sen jälkeen liikkuva vastaanotin siirretään tuntemattomalle pisteelle C, jolloin saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\phi^S_C + N^S_C = \frac{f}{c}\rho^S_C + f\tau^S_{C,2}, \qquad \frac{1}{2\pi}\phi^S_{A,2} + N^S_A = \frac{f}{c}\rho^S_A + f\tau^S_{A,2},$$

jossa 2 viittaa uuteen tilanteeseen tuntemattomalla pisteellä ja

$$\tau^S_{C,2} = \Delta T_C - \Delta t^S_2, \qquad \tau^S_{A,2} = \Delta T_A - \Delta t^S_2.$$

Vähentämällä saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\phi^S_{AC} &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\phi^S_C - \phi^S_{A,2}\right) = \\ &= \frac{f}{c}\left(\rho^S_C - \rho^S_A\right) + f\,\Delta T_{AC} - \left(N^S_C - N^S_A\right) = \\ &= \frac{f}{c}\left(\rho^S_C - \rho^S_A\right) + f\,\Delta T_{AB} - \left(N^S_B - N^S_A\right). \quad (9.2)\end{aligned}$$

Tässä

$$\Delta T_{AC} = \tau^S_{C,2} - \tau^S_{A,2} = \Delta T_C - \Delta T_A \approx \Delta T_B - \Delta T_A = \Delta T_{AB}.$$

Tehtiin seuraavat oletukset:

1) Ei ole tapahtunut ”vaihekatkoa”, siis $N^S_C = N^S_B$.
2) Kulunut aika on niin lyhyt, että $\Delta T_C \approx \Delta T_B = \Delta T_A + \Delta T_{AB}$, jossa ΔT_{AB} on kahden vastaanottimen kellojen välinen kellopoikkeamien ero, oletettu *vakioksi*. Siis
$$\tau^S_{B,1} = \tau^S_{A,1} + \Delta T_{AB}, \quad \tau^S_{C,2} = \tau^S_{A,2} + \Delta T_{AB}.$$
3) Tunnetulla pisteellä vertaus- ja liikkuva vastaanotin ovat samassa paikassa[1] eli $\rho^S_A = \rho^S_B$.

Yhtälöissä 9.1 ja 9.2 vasemmat puolet *mitataan*. Niiden vähennys antaa havaintoyhtälöksi

$$\frac{1}{2\pi}\phi^S_{AC} - \frac{1}{2\pi}\phi^S_{AB} = \frac{f}{c}\left(\rho^S_C - \rho^S_A\right),$$

jossa vasen puoli on ”havaittu” suure eli vaihemittausten erotusten erotus, ja oikealla puolella ρ^S_C on *roverin* koordinaattien $\mathbf{X}_C$ eli tämän tasoitusongelman tuntemattomien funktio. Linearisointi tuottaa havaintoyhtälön, jota voidaan käyttää esimerkiksi Kalmanin suotimessa.

[1] Käytännöllisemmin ilmaistuna niiden sijaintien välinen (pieni) ero on tarkasti tiedossa.

Huomaa, että sekä suure ΔT_{AB} eli vastaanottimien vakioksi oletettu kelloero että kokonaislukutuntemattomien ero $N_B^S - N_A^S$ on poistunut. Tämä pätee kaikille satelliiteille $S = 1, \ldots, n$.

Tässä lähestymistavassa etenkin olettamus 2 on ongelmallinen. Todellisuudessa vastaanotinten kellopoikkeamat ΔT muuttuvat nopeasti ajassa, ellei vastaanottimia ole varustettu atomikelloilla. Kenttätason vastaanottimia ei ole koskaan varustettu atomikelloilla.

9.1.2 Kaksoiserotusten käyttö

Tässä geometriassa on houkuttelevaa käyttää *kaksoiserotuksia*, toisin sanoen havaintosuureita, jotka saadaan laskemalla erotus kahden eri satelliitin avulla saatujen havaintojen välillä. Silloin saadaan tukiasemalla eli vertausvastaanottimella

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\phi_{AB}^{ST} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\phi_B^T - \phi_A^T\right) - \frac{1}{2\pi}\left(\phi_B^S - \phi_A^S\right) = \\ &= -\Big(\left(N_B^T - N_A^T\right) - \left(N_B^S - N_A^S\right)\Big) + f\tau_{AB}^{ST}, \quad (9.3)\end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned}\tau_{AB}^{ST} = \tau_{AB}^T - \tau_{AB}^S &= \\ &= \Big(\left(\Delta T_B - \Delta t_1^T\right) - \left(\Delta T_{A,1} - \Delta t_1^T\right)\Big) - \\ &\quad - \Big(\left(\Delta T_B - \Delta t_1^S\right) - \left(\Delta T_{A,1} - \Delta t_1^S\right)\Big) = 0,\end{aligned}$$

ja samalla tavalla *roverilla* eli liikkuvalla vastaanottimella

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\phi_{AC}^{ST} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\phi_C^T - \phi_A^T\right) - \frac{1}{2\pi}\left(\phi_C^S - \phi_A^S\right) = \\ &= \frac{f}{c}\Big(\left(\rho_C^T - \rho_A^T\right) - \left(\rho_C^S - \rho_A^S\right)\Big) - \\ &\quad - \Big(\left(N_B^T - N_A^T\right) - \left(N_B^S - N_A^S\right)\Big) + f\tau_{AC}^{ST}, \quad (9.4)\end{aligned}$$

jossa taas

$$\begin{aligned}\tau_{AC}^{ST} = \tau_{AC}^T - \tau_{AC}^S &= \\ &= \Big(\left(\Delta T_C - \Delta t_2^T\right) - \left(\Delta T_{A,2} - \Delta t_2^T\right)\Big) - \\ &\quad - \Big(\left(\Delta T_C - \Delta t_2^S\right) - \left(\Delta T_{A,2} - \Delta t_2^S\right)\Big) = 0.\end{aligned}$$

Kaikki kellotuntemattomat ovat hävinneet, ilman mitään vastaanotinten kelloja koskevia oletuksia, kuten $\Delta T_C \stackrel{?}{=} \Delta T_B$ tai $\Delta T_{A,2} \stackrel{?}{=} \Delta T_{A,1}$. Tämä on kaksoiserotusten käytön suuri etu.

Tässä tapauksessa suure, joka ratkaistaan laittamalla vertausvastaanotin ja liikkuva vastaanotin vierekkäin, on kahdelle satelliitille S ja T:

$$N_{AB}^{ST} \stackrel{\text{def}}{=} \left(N_B^T - N_A^T\right) - \left(N_B^S - N_A^S\right).$$

Tämä on kokonaisluku. ”Havaitaan” kaksoiserotussuureet, yhtälö 9.3:

$$\frac{1}{2\pi}\phi_{AB}^{ST} = -N_{AB}^{ST}, \tag{9.5}$$

kaikille satelliittipareille $S = 1, \ldots, n$, $T = S + 1, \ldots, n$, jossa n on satelliittien lukumäärä, ja pyöristetään saadut arvot lähimpään kokonaislukuarvoon.

Löytyneitä arvoja voidaan käyttää suureiden

$$\rho_{AC}^{ST} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\rho_C^T - \rho_A^T\right) - \left(\rho_C^S - \rho_A^S\right)$$

laskemiseksi havainnoista ϕ_{AC}^{ST}. Yhtälö 9.4 antaa

$$\frac{1}{2\pi}\phi_{AC}^{ST} + N_{AB}^{ST} = \frac{f}{c}\rho_{AC}^{ST}. \tag{9.6}$$

Tässä ρ_C^S ja ρ_C^T ovat taas *roverin* koordinaattien $\mathbf{X}_C$ funktioita. Nämä koordinaatit on linearisoinnin jälkeen ratkaistava pienimmän neliösumman menetelmän, esimerkiksi Kalmanin suotimen, avulla.

Helpointa on *float*-ratkaisu. Se saadaan yksinkertaisesti laskemalla kokonaislukutuntemattomat reaalilukuina yhtälön 9.5 avulla ja sen jälkeen laskemalla ratkaisu käyttämällä yhtälöä 9.6 havaintoyhtälönä.

Tarkkuuden kannalta on kuitenkin edullista kiinnittää ensin kokonaislukutuntemattomat N_{AB}^{ST} niiden oikeisiin kokonaislukuarvoihin käyttämällä yhtälöä 9.5 — olettaen, että se voidaan tehdä varmasti ja yksiselitteisesti. Vasta sen jälkeen ratkaistaan $\mathbf{X}_C$ eli *roverin* sijainti yhtälön 9.6 avulla. Tämä on tarkempi *fix*-ratkaisu.

9.2 Nopea kokonaislukutuntemattomien ratkaisu

Edellä kuvattu mittausmenetelmä edellyttää, että liikkuva vastaanotin seisoo ennen kenttämittausta, ja tarkistuksen vuoksi myös kenttämittauksen jälkeen, vertausvastaanottimen vieressä, eli kyseessä on niin sanottu *ko-lokaatio*. Kenttämittauksessa mitataan useilla tuntemattomilla pisteillä.

Usein ko-lokaatio on hankalaa: vertausvastaanotin voi olla mittausalueen ulkopuolella ja ulkoisen palveluntarjoajan operoima. Tämä on

eräs syy siihen, miksi on keksitty *nopea kokonaislukutuntemattomien ratkaisu*. Se ei vaadi mitään ko-lokaatiota vertausvastaanottimen kanssa tai edes käyntiä tunnetussa pisteessä — vaikkakin se on aina hyödyllinen tarkistusmielessä.

Menetelmä toimii parhaiten, jos liikkuvan vastaanottimen ja vertausvastaanottimen välinen etäisyys on niin lyhyt, luokkaa 10–20 km, että vastaanotinten väliset differentiaaliset ilmakehä- ja ratavirheet voidaan jättää huomioimatta. Tässä tapauksessa yhtälö 9.6 on

$$\frac{1}{2\pi}\phi_{AC}^{ST} + N_{AC}^{ST} = \frac{f}{c}\rho_{AC}^{ST},$$

jossa

$$N_{AC}^{ST} = \left(N_C^T - N_A^T\right) - \left(N_C^S - N_A^S\right), \quad \rho_{AC}^{ST} = \left(\rho_C^T - \rho_A^T\right) - \left(\rho_C^S - \rho_A^S\right).$$

Tässä etäisyyden kaksoiserotukset ρ_{AC}^{ST} ovat puhtaasti geometrisia. Jos kirjoitetaan auki satelliiteille $S = 1, \ldots, n$, $T = S + 1, \ldots, n$:

$$\rho_C^S = \sqrt{(X_C - x^S)^2 + (Y_C - y^S)^2 + (Z_C - z^S)^2},$$
$$\rho_C^T = \sqrt{(X_C - x^T)^2 + (Y_C - y^T)^2 + (Z_C - z^T)^2},$$

näkyy, että ainoat tuntemattomat ovat liikkuvan vastaanottimen paikkakoordinaatit

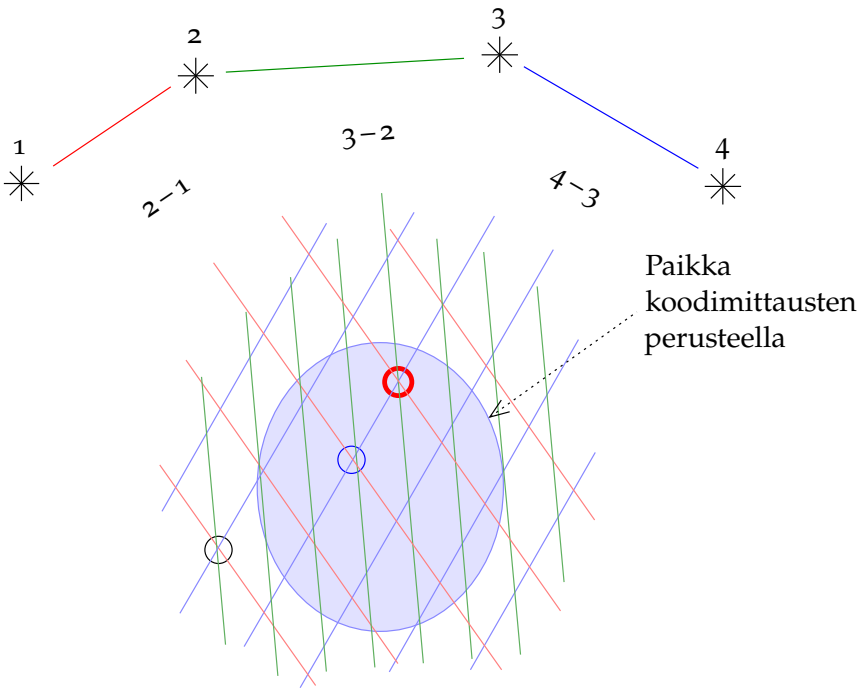
$$\mathbf{X}_C = \begin{bmatrix} X_C & Y_C & Z_C \end{bmatrix}^T.$$

Liikkuvan vastaanottimen paikka tunnetaan muutaman metrin tarkkuudella GNSS-koodimittauksen ansiosta, jolla ei ole kokonaislukutuntemattomien ongelmaa. Siksi riittää, että mahdollisten vastaanottimen paikkojen joukosta eli etsintäavaruudesta, joka kuuluu joukkoon $\mathbb{R}^3$, etsitään ainoastaan ne paikat $\mathbf{X}_C$, joille *kaikki* arvot, kaikille satelliittipareille S, T,

$$N_{AC}^{ST} = \frac{f}{c}\rho_{AC}^{ST} - \frac{1}{2\pi}\phi_{AC}^{ST}$$

ovat kokonaislukuja, katso kuva 9.1.

Kääntäen, jos on n satelliittia, on $n - 1$ riippumatonta kokonaislukutuntematonta N_{AC}^{ST}. Nämä kokonaislukutuntemattomien yhdistelmät eli kaksoiserotukset ovat siis $n - 1$ -ulotteisen avaruuden alkioita. Jos jokaisella kokonaislukutuntemattomalla on esimerkiksi kymmenen mahdollista arvoa, jotka ovat yhteensopivia koodimittauksesta saadun likisijainnin kanssa, antaa tämä jo 10^{n-1} eri kokonaislukutuntemattomien kaksoiserotusta. Jos on kahdeksan satelliittia, luku on kymmenen



KUVA 9.1. Kokonaislukutuntemattomien ratkaisu. Tässä kuvassa viivakimput (punaiset, vihreät ja siniset) edustavat liikkuvan vastaanottimen mahdollisia paikkoja, jotka ovat yhteensopivia havaittujen vaiheen kaksoiserotusten kanssa. Kokonaislukutuntemattomien ratkaisun on oltava yhteensopiva kaikkien havaittujen kaksoiserotusten kanssa (punainen ympyrä), mutta myös kontrastin toiseksi parhaiten sopivan ratkaisun (sinisen ympyrän) kanssa on oltava selkeä.

miljoonaa, mikä lienee liikaa vaihtoehtoja tutkittavaksi tosiajassa laitteessa, jolla on rajallinen laskentateho.

Kuitenkin havaitaan, että kokonaislukutuntemattomien vaihtoehdoista vain hyvin pieni osa on yhteensopiva liikkuvan vastaanottimen *tietyn* sijainnin kanssa: keskenään yhteensopivat kokonaislukutuntemattomien yhdistelmät kuuluvat kokonaislukutuntemattomien muodostaman avaruuden *kolmiulotteiseen aliavaruuteen*, jonka eräs parametrisointi on *roverin* koordinaatit $\begin{bmatrix} X_C & Y_C & Z_C \end{bmatrix}^T$, kuten yllä jo nähtiin.

Vuosien saatossa on kehitetty ovelia ja tehokkaita menetelmiä kokonaislukutuntemattomien ratkaisemiseksi tässä sisäisesti yhteensopivassa aliavaruudessa, kuten LAMBDA-menetelmä (Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment, Teunissen ym. 1997).

Kuvatunlainen kokonaislukutuntemattomien ratkaisumenetelmä onnistuu ilmeisesti vain, jos vertaus- ja liikkuvan vastaanottimen välinen matka on riittävän lyhyt, käytännössä alle 10–20 km. Siinä tapauksessa

voidaan käyttää hyväksi sitä seikkaa, että satelliitit lähettävät signaaliaan kahdella tai jopa kolmella eri kantoaaltotaajuudella. Voimme siis muodostaa *leveäkuja*-havaintosuureita. Kokonaislukutuntemattomien ratkaisua saadaan joko heti tai muutaman epookin jälkeen.

Kokonaislukutuntemattomien ratkaisu on mahdollinen myös pitemmille vektoreille, mutta se on hankalampi, koska ilmakehän vaikutus on otettava huomioon.

Kalmanin suotimessa kokonaislukutuntematon lisätään tilavektoriin tuntemattomana N_{AC}^{ST}, mutta aluksi reaaliarvoisena alkiona. Oletetaan, että liikkuvan vastaanottimen C lisäksi alueella on kiinteä vertausvastaanotin tai vastaanotinten verkko A. Suotimen havaintosuureet ovat kantoaaltovaiheen kaksoiserotuksia, tyyppi ϕ_{AC}^{ST}.

Kun suodin etenee ajassa, arvoon N_{AC}^{ST} sidottu tilavarianssi pienenee ja pienenee, kunnes tulee mahdolliseksi samaistaa reaaliarvoinen tuntematon yksiselitteisesti erääseen kokonaislukuun.

Käytännössä jokaiselle epookille — kaksoiserotusyhtälö 9.6 — ei ole vain yhtä havaintoyhtälöä, vaan monta. Jos käyttökelpoisten satelliittien lukumäärä taivaalla on n, tavallisesti 5–12, riippumattomien kokonaislukutuntemattomien N_{AC}^{ST} määrä on $n-1$. Tällä kokonaislukutuntemattomien joukolla eli vektorilla on *tilavarianssimatriisi*, jonka koko on $(n-1)\times(n-1)$. Tyypillisesti tämän matriisin virhe-ellipsoidi on hyvin pitkänomainen ”hyper-sikari”, jonka pääakseleista kolme on pitkiä ja muut lyhyitä.

On analysoitava, sijaitseeko koko arvojen N_{AC}^{ST} *joukko* eli vektori kaikille satelliittipareille S, T riittävän lähellä jonkun kokonaislukuarvojen joukkoa, joka edustaa yhtä pistettä pisteiden muodostamassa hilassa abstraktissa vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^{n-1}$.

”Riittävän lähellä” pitää ymmärtää tämän tilavarianssimatriisin suhteen. Olkoon

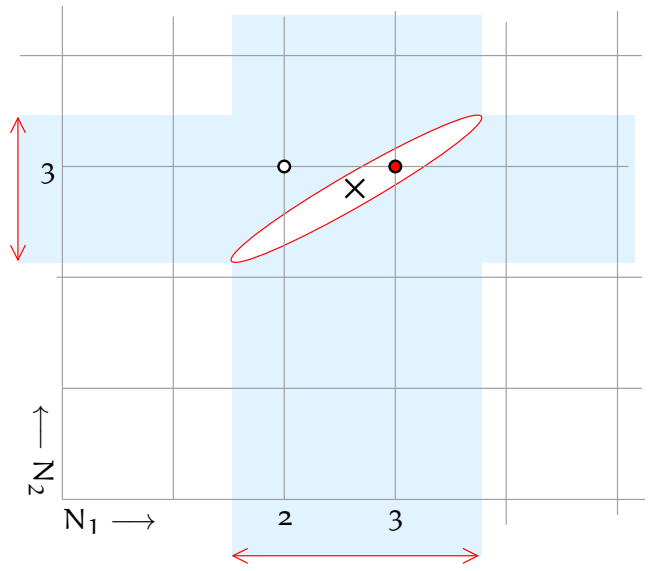
$$\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v_{AC}^{1,2} & v_{AC}^{1,3} & \cdots & v_{AC}^{1,n} \end{bmatrix}^T, \quad v_{AC}^{ST} = \widehat{N}_{AC}^{ST} - N_{AC}^{ST},$$

riippumattomien erojen vektori reaaliarvoisten estimaattoreiden

$$\widehat{\mathbf{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \widehat{N}_{AC}^{1,2} & \widehat{N}_{AC}^{1,3} & \cdots & \widehat{N}_{AC}^{1,n} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n-1}$$

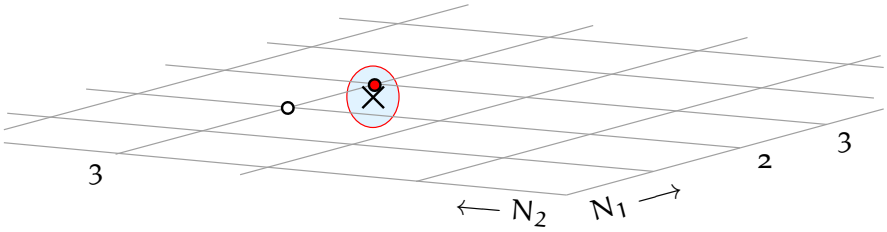
ja kokonaislukuehdokkaiden

$$\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} N_{AC}^{1,2} & N_{AC}^{1,3} & \cdots & N_{AC}^{1,n} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{Z}^{n-1}$$



(a)

Kokonaislukutuntemattomien ratkaisu yksitellen ei pysty ratkaisemaan N_1 arvoon 3



(b)

Useiden kokonaislukutuntemattomien tilavarianssiellipsoidit ovat usein hyvin pitkänomaisia ”sikareita”. LAMBDA-menetelmä ratkaisee (N_1, N_2) arvopariksi $(3, 3)$

KUVA 9.2. Kokonaislukutuntemattomien fiksu ratkaiseminen. LAMBDA-menetelmässä kokonaislukutuntemattomat muunnetaan kokonaisarvoisiksi lineaariyhdistelmiksi tavalla, joka muuttaa virhe-ellipsin muodon (melkein) ympyräksi. Alemmassa kuvassa oikea ratkaisu on mitä ilmeisimmin hilapiste, joka on lähimpänä reaaliarvoista ratkaisua (rasti).

välillä. Silloin ”etäisyyden” neliön roolissa oleva suure on

$$\underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}} \left(\mathrm{Var}\{\underline{\mathbf{v}}\} \right)^{-1} \underline{\mathbf{v}}.$$

Tämä suure on jakautunut khii-toiseen-jakauman mukaan niin, että vapausasteiden lukumäärä on $n - 1$, eli jakauma on χ^2_{n-1}.

khii χX

Tilavarianssimatriisi toimii siis metrisenä tensorina mitattaessa kokonaislukutuntemattomien ratkaisun tarkkuutta.

Sen sijaan, että käytettäisiin satelliittia 1 vertaussatelliittina, voidaan käyttää myös muita $n-1$ riippumatonta kaksinkertaista erotusta tai niiden lineaarisia yhdistelmiä. Silloin $\underline{\mathbf{v}}$ ja $\mathrm{Var}\{\underline{\mathbf{v}}\}$ muuttuvat, mutta $\underline{\widetilde{\varepsilon}}$ on invariantti.

Ratkaisun tulee olla riittävän hyvä, mutta sen lisäksi myös riittävän yksiselitteinen: tarvitaan selkeä *kontrasti* toiseksi parhaaseen ratkaisuun. Eräs menetelmä tämän testaamiseksi on Fisherin F-testi.

Yleensä tämä kaikkien kokonaislukutuntemattomien yhteisratkaisu onnistuu jo paljon ennen kuin yksittäiset kokonaislukutuntemattomat saadaan ratkaistuksi erikseen. Tähän on kehitetty hienoja algoritmeja, joista LAMBDA-menetelmä (TU Delft, LAMBDA) on hyvä esimerkki.

9.3 RTK-mittauksen geometrinen analyysi

Tosiaikaista kinemaattista menetelmää voidaan käyttää kahdella eri tavalla eli geometrialla:

1) käyttämällä yhtä tukiasemaa
2) käyttämällä tukiasemien verkkoa.

Seuraavassa merkintätapa $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ merkitsee ortogonaalista yksikkövektorikolmikkoa eli kolmiulotteisen avaruuden *ortonormaalia kantaa*. Jokainen vektori avaruudessa voidaan kirjoittaa näiden kantavektorien lineaariyhdistelmänä.

Ensin katsotaan, miten GNSS-satelliittien ratavirheet ja kellopoikkeamat kulkeutuvat paikannusratkaisuun yhden tukiaseman tapauksessa, ja sen jälkeen esitetään kolmen tukiaseman tapaus.

9.3.1 Yksi tukiasema

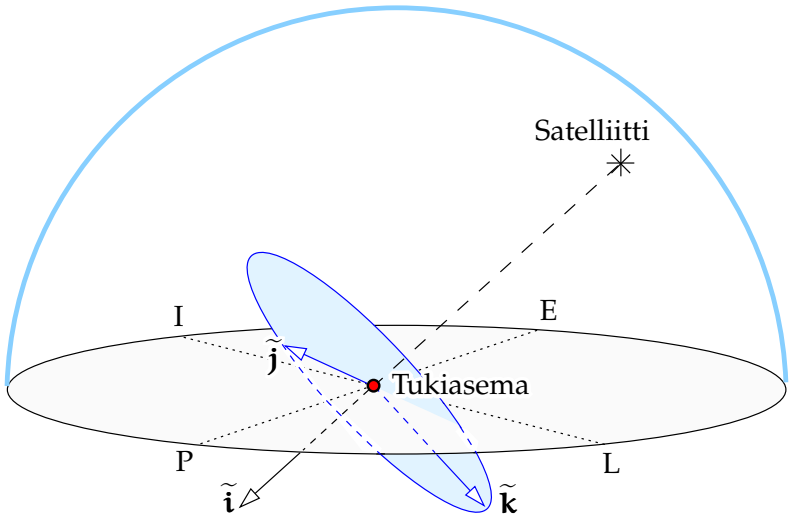
Yhden tukiaseman tapauksessa kirjoitetaan havaintosuure seuraavasti niin, että unohdetaan hetkeksi kokonaislukutuntemattomat, ilmakehä ja muut mutkistavat tekijät:

$$\overline{P} = \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2} + c\,(\Delta T - \Delta t)\,.$$

Tässä $\mathbf{x} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ on satelliitin, $\mathbf{X} = X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}$ vastaanottimen paikkavektori, kun $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ on ortonormaali kanta, oletettu geosentriseksi. Suure

$$\rho = \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}$$

on geometrinen etäisyys satelliitin ja vastaanottimen välillä.



KUVA 9.3. Satelliitin näkölinjaan sidottu ortonormaali kanta $\left\{\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}\right\}$.

Nyt valitaan *vaihtoehtoinen* "näkölinjan" ortonormaali kanta, jossa $\tilde{\mathbf{i}}$ osoittaa satelliitilta tukiasemalle ja $\tilde{\mathbf{j}}$ ja $\tilde{\mathbf{k}}$ ovat keskenään sekä $\tilde{\mathbf{i}}$:ta kohti kohtisuoria. Kantavektorit voidaan muodostaa seuraavasti:

$$\tilde{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{X}_0 - \mathbf{x}}{\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{x}\|}, \quad \tilde{\mathbf{j}} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{i}} \times \mathbf{X}_0 \rangle}{\left\| \langle \tilde{\mathbf{i}} \times \mathbf{X}_0 \rangle \right\|}, \quad \tilde{\mathbf{k}} = \left\langle \tilde{\mathbf{i}} \times \tilde{\mathbf{j}} \right\rangle,$$

jossa $\mathbf{X}_0$ on tukiaseman geosentrinen sijainti: vektori, joka osoittaa aseman zeniitin suuntaan. Huomaa, että koordinaattien $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ ja $\tilde{Z}$ origo on edelleen Maan keskipiste:

$$\mathbf{X}_0 = X_0\mathbf{i} + Y_0\mathbf{j} + Z_0\mathbf{k} = \tilde{X}_0\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{Y}_0\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{Z}_0\tilde{\mathbf{k}},$$

ja

$$\|\mathbf{X}_0\| = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} = \sqrt{\tilde{X}_0^2 + \tilde{Y}_0^2 + \tilde{Z}_0^2} = R,$$

Maan säde.

Olkoon ratavirheiden vaikutus satelliitin hetkelliseen sijaintiin avaruudessa $\Delta\mathbf{x} = \Delta\tilde{x}\,\tilde{\mathbf{i}} + \Delta\tilde{y}\,\tilde{\mathbf{j}} + \Delta\tilde{z}\,\tilde{\mathbf{k}}$ ja satelliitin kellopoikkeama Δt, jo oletetusti pieni. Niiden vaikutus pseudoetäisyyteen on

$$\Delta\overline{P} = \frac{\partial\overline{P}}{\partial\tilde{x}}\Delta\tilde{x} + \frac{\partial\overline{P}}{\partial\tilde{y}}\Delta\tilde{y} + \frac{\partial\overline{P}}{\partial\tilde{z}}\Delta\tilde{z} - c\Delta t. \tag{9.7}$$

Olkoon

$$\rho_0 = \|\mathbf{X}_0 - \mathbf{x}\| = \sqrt{(X_0 - x)^2 + (Y_0 - y)^2 + (Z_0 - z)^2} = \\ = \sqrt{(\tilde{X}_0 - \tilde{x})^2 + (\tilde{Y}_0 - \tilde{y})^2 + (\tilde{Z}_0 - \tilde{z})^2}$$

satelliitin

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \tilde{x}\,\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{y}\,\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{z}\,\tilde{\mathbf{k}}$$

ja tukiaseman $\mathbf{X}_0$ välinen etäisyys. Olkoon lisäksi liikkuvan vastaanottimen eli *"roverin"* paikka

$$\mathbf{X} = \tilde{X}\,\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{Y}\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{Z}\,\tilde{\mathbf{k}} = \left(\tilde{X}_0 + \xi\right)\tilde{\mathbf{i}} + \left(\tilde{Y}_0 + \eta\right)\tilde{\mathbf{j}} + \left(\tilde{Z}_0 + \chi\right)\tilde{\mathbf{k}}.$$

Tässä ξ, η ja χ ovat nyt *roverin* koordinaatit tukiaseman suhteen yllä sovitussa koordinaatistossa. Tukiaseman ja *roverin* välinen etäisyys on

ksii ξΞ
eeta ηH

$$s = \|\mathbf{s}\| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \chi^2}, \quad \mathbf{s} = \xi\tilde{\mathbf{i}} + \eta\tilde{\mathbf{j}} + \chi\tilde{\mathbf{k}}.$$

Kirjoitetaan yhtälö 9.7 auki erikseen tukiasemalle ja *roverille*:

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{P}_0 &= \frac{\tilde{x} - \tilde{X}_0}{\rho_0}\Delta\tilde{x} + \frac{\tilde{y} - \tilde{Y}_0}{\rho_0}\Delta\tilde{y} + \frac{\tilde{z} - \tilde{Z}_0}{\rho_0}\Delta\tilde{z} - c\,\Delta t,\\
\Delta\overline{P} &= \frac{\tilde{x} - \tilde{X}}{\rho}\Delta\tilde{x} + \frac{\tilde{y} - \tilde{Y}}{\rho}\Delta\tilde{y} + \frac{\tilde{z} - \tilde{Z}}{\rho}\Delta\tilde{z} - c\,\Delta t,
\end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned}
\rho = \|\mathbf{X} - \mathbf{x}\| &= \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2} = \\
&= \sqrt{\left(\tilde{X} - \tilde{x}\right)^2 + \left(\tilde{Y} - \tilde{y}\right)^2 + \left(\tilde{Z} - \tilde{z}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Ero niiden välillä on *roverin* paikannuksen virhe, joka johtuu sen etäisyydestä tukiasemalta:

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{P} - \Delta\overline{P}_0 = &\left(\frac{\tilde{x} - \tilde{X}}{\rho} - \frac{\tilde{x} - \tilde{X}_0}{\rho_0}\right)\Delta\tilde{x} + \\
&+ \left(\frac{\tilde{y} - \tilde{Y}}{\rho} - \frac{\tilde{y} - \tilde{Y}_0}{\rho_0}\right)\Delta\tilde{y} + \left(\frac{\tilde{z} - \tilde{Z}}{\rho} - \frac{\tilde{z} - \tilde{Z}_0}{\rho_0}\right)\Delta\tilde{z}.
\end{aligned}$$

Tästä on hävinnyt satelliitin kellopoikkeama.

Tutkitaan kerrointa

$$\left(\frac{\tilde{x} - \tilde{X}}{\rho} - \frac{\tilde{x} - \tilde{X}_0}{\rho_0}\right)$$

lähemmin. Jos määritellään funktio

$$f\left(\tilde{X}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{x} - \tilde{X}}{\rho\left(\tilde{x}, \tilde{X}, \tilde{y}, \tilde{Y}, \tilde{z}, \tilde{Z}\right)},$$

tämä kerroin on

$$f(\widetilde{X}) - f(\widetilde{X}_0) \approx \left.\frac{\partial f}{\partial \widetilde{X}}\right|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} (\widetilde{X} - \widetilde{X}_0) + \tfrac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{X}^2}\right|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} (\widetilde{X} - \widetilde{X}_0)^2 + \cdots = \\ = \left.\frac{\partial f}{\partial \widetilde{X}}\right|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} \xi + \tfrac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{X}^2}\right|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} \xi^2 + \cdots,$$

Taylorin kehitelmä. Jos otetaan tästä vain ensimmäinen termi, saadaan Leibnizin tulosäännön avulla

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \widetilde{X}}\right|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} = -\frac{1}{\rho_0} + \frac{(\widetilde{x} - \widetilde{X}_0)^2}{\rho_0^3}, \tag{9.8}$$

ja samalla tavalla funktioille $f(\widetilde{Y})$ ja $f(\widetilde{Z})$. Saadaan

$$\Delta\overline{P} - \Delta\overline{P}_0 = \left(\frac{(\widetilde{x} - \widetilde{X}_0)^2}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho_0}\right) \xi\, \Delta\widetilde{x} + \\ + \left(\frac{(\widetilde{y} - \widetilde{Y}_0)^2}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho_0}\right) \eta\, \Delta\widetilde{y} + \left(\frac{(\widetilde{z} - \widetilde{Z}_0)^2}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho_0}\right) \chi\, \Delta\widetilde{z}.$$

Kun koordinaattiakselit on määritelty yllä kuvatulla tavalla, on

$$\widetilde{x} - \widetilde{X}_0 = -\rho_0, \quad \widetilde{y} - \widetilde{Y}_0 = 0, \quad \widetilde{z} - \widetilde{Z}_0 = 0 \tag{9.9}$$

ja saamme

$$\Delta\overline{P} - \Delta\overline{P}_0 = -\frac{1}{\rho_0} (\eta\, \Delta\widetilde{y} + \chi\, \Delta\widetilde{z}). \tag{9.10}$$

Näkyy, että virhe on lineaarisesti verrannollinen etäisyyteen tukiasemalta ja vaikutusta on *vain etäisyydellä sivusuunnassa satelliitin näkölinjasta*.

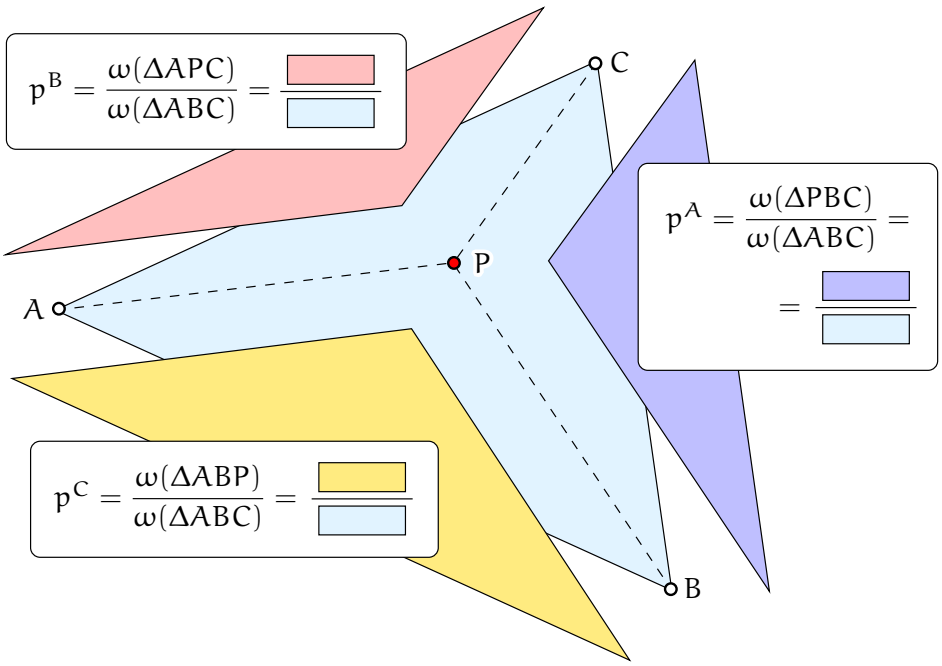
Pannaan merkille, että yhtälön johtamistapa on *symmetrinen* vektoreiden $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}_0$ suhteen kannan $\left\{\widetilde{\mathbf{i}}, \widetilde{\mathbf{j}}, \widetilde{\mathbf{k}}\right\}$ määrittelyssä: olisimme voineet suunnata vektori $\widetilde{\mathbf{i}}$ myös satelliitin näkölinjaa pitkin *roverin* sijaintiin.

Todellisuudessa pseudoetäisyyden korjaus ei ole tarkasti lineaarinen: tutkitaan kvadraattista yhtälöä

$$f(\widetilde{X}) - f(\widetilde{X}_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial \widetilde{X}}\right|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} \xi + \tfrac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{X}^2}\right|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} \xi^2 + \cdots$$

Johdettiin jo yhtälön 9.8 yhteydessä

$$\frac{\partial f}{\partial \widetilde{X}} = -\frac{1}{\rho} + \frac{(\widetilde{x} - \widetilde{X})^2}{\rho^3}.$$



KUVA 9.4. Barysentriset koordinaatit. Suureet ω ovat kolmioiden pinta-alat, ja ne voidaan laskea determinantteina, yhtälö 9.12.

Differentioidaan vielä kerran:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{X}^2}\right|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} = \left(-\frac{\widetilde{x}-\widetilde{X}}{\rho^3} - 2\frac{\widetilde{x}-\widetilde{X}}{\rho^3} + 3\frac{(\widetilde{x}-\widetilde{X})^3}{\rho^5}\right)\Bigg|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} = \\ = 3\left(\frac{(\widetilde{x}-\widetilde{X}_0)^3}{\rho_0^5} - \frac{\widetilde{x}-\widetilde{X}_0}{\rho_0^3}\right),$$

ja samalla tavalla funktioille $f(\widetilde{Y})$ ja $f(\widetilde{Z})$. Taas

$$\widetilde{x}-\widetilde{X}_0 = -\rho_0, \quad \widetilde{y}-\widetilde{Y}_0 = 0, \quad \widetilde{z}-\widetilde{Z}_0 = 0 \tag{9.9}$$

ja

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{X}^2}\right|_{\widetilde{X}=\widetilde{X}_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{Y}^2}\right|_{\widetilde{Y}=\widetilde{Y}_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \widetilde{Z}^2}\right|_{\widetilde{Z}=\widetilde{Z}_0} = 0.$$

Tämä on hieman yllättävä, mutta mielyttävä tulos. Sen takana on havaintoyhtälön 9.7 linearisointi eli oletus, että satelliitin ratavirhe $\Delta\mathbf{x}$ on pieni. Se onkin nykyisin vain metrien suuruusluokkaa, kun *roverin* etäisyys s tukiasemalta voi olla monta kilometriä.

9.3.2 Kolmen tukiaseman tapaus

Koska tukiasemien verkon tapaus voidaan yleensä redukoida kolmen tukiaseman tapaukseen, tutkimme vain tätä tapausta.

Lähdetään yllä johdetuista yhtälöistä. Yhtälö 9.10 on *lineaarinen* parametreissa η ja χ, jotka voimme tulkita tason koordinaateiksi kahdessa eri suunnassa, jotka ovat keskenään kohtisuorassa. $\Delta\tilde{y}$ on satelliitin paikkavirhe "vasen-oikea"-suunnassa ja $\Delta\tilde{z}$ "ylöspäin" taivaan kannella zeniitin suuntaan myös kohtisuorassa satelliitin näkölinjaan nähden.

Koska yhtälö 9.10 on bilineaarinen koordinaateissa η ja χ, voidaan korjaus interpoloida lineaarisesti, kun se on määritetty kolmella tukiasemalla. Jos annettuna on tukiasemat A, B ja C sekä mitatut korjaukset $\Delta\overline{P}_A$, $\Delta\overline{P}_B$ ja $\Delta\overline{P}_C$, mielivaltaisen pisteen korjaus voidaan laskea seuraavasti:

$$\Delta\overline{P} = p^A\Delta\overline{P}_A + p^B\Delta\overline{P}_B + p^C\Delta\overline{P}_C. \tag{9.11}$$

Tässä yhtälössä p^A, p^B ja p^C ovat laskentapisteen *barysentriset koordinaatit* kolmion sisällä, katso kuva 9.4:

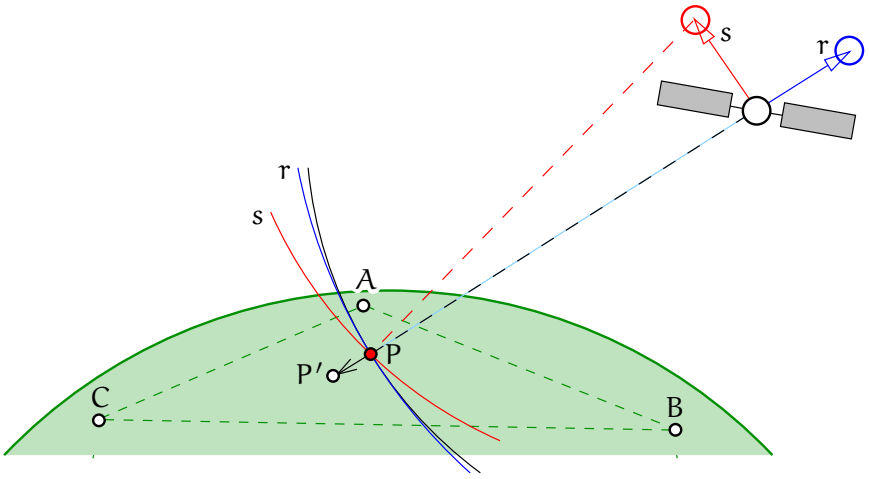
$$p^A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta_B & \eta_C & \eta \\ \chi_B & \chi_C & \chi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta_A & \eta_B & \eta_C \\ \chi_A & \chi_B & \chi_C \end{vmatrix}}, \quad p^B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta_C & \eta_A & \eta \\ \chi_C & \chi_A & \chi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta_A & \eta_B & \eta_C \\ \chi_A & \chi_B & \chi_C \end{vmatrix}}, \quad p^C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta_A & \eta_B & \eta \\ \chi_A & \chi_B & \chi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta_A & \eta_B & \eta_C \\ \chi_A & \chi_B & \chi_C \end{vmatrix}}. \tag{9.12}$$

Tässä käytettiin koordinaatteja η ja χ. Barysentrisille koordinaateille pätee[2] $p^A + p^B + p^C = 1$, ja ne ovat kaikki kolme *lineaarisia* sekä η- että χ-koordinaatissa. Yksinkertaisesti sijoittamalla voidaan varmistaa, että kolmion kärjissä, esimerkiksi pisteessä A, $p^A = 1$ ja $p^B = p^C = 0$ — *toisto-ominaisuus*.

Yhtälössä 9.10 esiintyy vain η ja χ ja vain lineaarisesti. Yhtälö on voimassa kolmiulotteisessa avaruudessa, jossa paikkaerovektori tukiaseman ja *roverin* välillä on $\mathbf{s} = \xi\tilde{\mathbf{i}} + \eta\tilde{\mathbf{j}} + \chi\tilde{\mathbf{k}}$.

Interpoloinnissa kolmen tukiaseman välillä tulisi ottaa huomioon Maan pinnan kaarevuus: kaikkien neljän pisteen on oltava samassa tasossa. Tasoyhtälöt, kuten 9.11, sovellettuina karttatasossa ovat periaatteessa vääriä. Tehty virhe on kuitenkin häviävän pieni silloinkin, kun kolmio on kymmenien kilometrien kokoinen. Teoreettisesti oikea laskentatapa on projisoida *roverin* paikka tasoon, joka menee kolmen tukiaseman läpi, kuten on esitetty kuvassa 9.5.

[2] Barysentriset koordinaatit ovat *painoja*, ja yhtälö 9.11 antaa kärkien arvojen painotetun keskiarvon.



KUVA 9.5. Differentiaali-GNSS:n geometria. Satelliitin säteittäinen ratavirhe r ei vaikuta vahvasti eri maa-asemien välisiin erotushavaintoihin, mutta sivuttainen ratavirhe s sen sijaan vaikuttaa suhteessa asemien väliseen etäisyyteen.
Kuvattu on myös differentiaalikorjauksen laskentatapa: *roverin* paikka avaruudessa P on projisoitava satelliitin näkölinjaa pitkin tukiasemien kautta menevään tasoon ABC, mikä tuottaa projektiopisteen P′. Sen jälkeen korjaus on interpoloitava bilineaarisesti.

9.4 Tukiasemaverkot

Verkkomaisen RTK-ratkaisun toteuttamiseksi käytetään useita tukiasemia ja asemien antamat korjaukset *interpoloidaan* jollain tavalla niiden välillä käyttäjän sijaintiin.

Voidaan käyttää kahta eri tietoliikenteen perusmenetelmää:

1) Yleislähetys (”*broadcast*”): korjaukset lähetetään monelle käyttäjälle yhtä aikaa. Lähetys voi käyttää esimerkiksi radiolähetyksen ULA-sivukaistaa (RDS, *Radio Data System*). Menetelmä skaalautuu hyvin suurelle käyttäjäjoukolle. Yleislähetyksen haasteena on, että viestiä ei voida räätälöidä niin, että käyttäjän sijainti otettaisiin huomioon. Ehkä tästä syystä se on ollut suosittu käytettäväksi vähemmän tarkan koodipohjaisen GNSS-differentiaalipaikannuksen kanssa.

2) Täsmälähetys (”*singlecast*”): korjaukset lasketaan yhtä käyttäjää varten ja lähetetään hänelle esimerkiksi mobiilin Internetin välityksellä. Jokaisen käyttäjän korjausviestin sisältö voi olla erilainen.
Eräs täsmälähetysmenetelmän variantti on *virtuaalitukiasema*-menetelmä (VRS, *virtual reference station*), jossa tukiasemien

> korjaukset interpoloidaan ”virtuaalitukiaseman” korjauksiksi havaitsijan välittömässä läheisyydessä. Tämän lähestymistavan etuna on, että vastaanotin ei tiedä, että korjaukset eivät tule todelliselta, fyysiseltä RTCM-tukiasemalta, jota kaikki tunnetut vastaanotinmerkit osaavat käsitellä.

Ilmeisin interpolointitekniikka on raa'an voiman interpolointi. Oletetaan, että korjaus on jatkuva ja hitaasti muuttuva paikan funktio Maan pinnalla. Bilineaariselle funktiolle riittää kolme tukiasemaa mittausalueen ympärillä.

Eräs tähän lähestymistapaan perustuva tekniikka on nimeltään FKP, *Flächenkorrekturparameter* eli aluekorjausparametrit (Janssen, 2009). Se perustuu bilineaarimallien estimointiin tukiasemien ympärillä erikseen troposfäärin ja ionosfäärin etenemisviiveille. Korjausparametrit lähetetään kaikille alueen vastaanottimille: tämä on *yleislähetysmenetelmä*. Liikkuva vastaanotin suorittaa interpolointilaskelman omalle sijainnilleen. Korjausten lähettämiseksi on käytetty RTCM 2.x -standardin viestityyppiä 59, ”proprietary message”, taulu 8.1.

Muita samanlaisia interpolointimenetelmiä ovat MAC (Master-Auxiliary Concept) ja MAX (Master-Auxiliary Corrections), Leica Geosystems (2005). Näissä menetelmissä lähetetään ”mahdollisimman raakoja” kantoaallon vaihemittausten korjauksia useilta tukiasemilta kentällä oleville käyttäjille (Janssen, 2009). Verkon yhdestä asemasta tehdään pääasema eli ”*master*”, ja vain sen differentiaalikorjaukset lähetetään sellaisinaan, ionosfäärin (”dispersiivinen”) osa ja jäljelle jäävä osa (troposfääri, kiertoradat) erikseen. Myös pääaseman raa'at kantoaallon vaihemittaukset lähetetään. Muilta verkon asemilta lähetetään vain differentiaalikorjausten *erot* pääasemaan nähden. Nämä erot ovat numeerisesti pienempiä ja muuttuvat ajassa hitaammin.

Tässä lähestymistavassa *rover* suorittaa täydellisen interpolointityön kaikkien tukiasemien välillä. *Roverin* laskentatyön rajoittamiseksi verkon palvelimen on ensin ratkaistava tukiasemaverkon kokonaislukutuntemattomat niin, että *roverin* vastaanottamat eri tukiasemien korjaukset ovat ainakin keskenään ”kokonaislukuyhteensopivia”. Tätä kokonaislukutuntemattomien ratkaisemista helpottaa se seikka, että asemat ovat tunnetuissa kiinteissä paikoissa.

Sen jälkeen *roverin* tarvitsee ratkaista vain omat kokonaislukutuntemattomat *masterin* kanssa, ja saadut arvot pätevät minkä tahansa verkon muun tukiaseman kanssa. Lisäksi kun käyttää vain kolmea lähintä tu-

kiasemaa, viereiseen kolmioon siirtyvä *rover* voi vaihtaa saumattomasti tukiasemia.

RTCM-standardi 3.x mahdollistaa MAXin monitukiasemaviestien kompaktin muodon lähettämisen.

Interpolointi on toimiva ratkaisu ainakin satelliittien ratavirheiden ja kellopoikkeamien vaikutusten korjaamiseksi, koska vaikutus on luonteeltaan *deterministinen*: se voidaan laskea tarkasti liikkuvan vastaanottimen paikkaan, jos annettuna on kolmen tukiaseman havaintoja eli pseudoetäisyyden korjauksia ja tukiasemat ovat kauniissa kolmiossa mittauspaikan ympärillä.

Ilmakehän etenemisviiveille raaka interpolointi jättää kuitenkin parantamisen varaa, elleivät asemien väliset etäisyydet ole alle noin 80 km: silloin tarvitaan myös ilmakehän mallinnusta. Monimutkaisempi ilmakehän mallinnus tehdään mieluummin palvelinpuolella.

9.5 Ilmakehän mallinnus

Ilmakehän vaikutus ei ole deterministinen vaan *stokastinen.* Siksi tarkka interpolointi *roverin* paikkaan ei onnistu: epätarkkuus kasvaa, kun etäisyys tukiasemilta kasvaa. Kasvutapa riippuu ilmakehän tilastollisista ominaisuuksista. Tähän tarvitaan ilmakehän mallinnusta.

Ilmakehän — sekä ionosfäärin että troposfäärin — aiheuttama GNSS-signaalin etenemisviive redukoituna zeniitin suuntaiseksi standardikonaisviiveeksi, *zenith total delay* eli ZTD, muodostaa *stokastisen prosessin* $\underline{d}^{\perp}(\varphi,\lambda)$. Prosessi on määritelty maantieteellisen paikan (φ,λ) määrittelyjoukolla.

Prosessilla $\underline{d}^{\perp}(\varphi,\lambda)$ on kahden paikan välillä *signaalikovarianssifunktio*, jota voidaan kuvata esimerkiksi Gaussin ja Markovin kaltaisella kovarianssikaavalla:

$$\mathrm{Cov}\{\underline{d}^{\perp}(\varphi_1,\lambda_1),\underline{d}^{\perp}(\varphi_2,\lambda_2)\} = C_0 \exp(-\psi/\psi_0), \tag{9.13}$$

jossa ψ on pisteiden (φ_1,λ_1) ja (φ_2,λ_2) välinen kulmaetäisyys Maan keskipisteestä katsottuna. Vakiota C_0 kutsutaan *signaalivarianssiksi* ja vakiota ψ_0 *korrelaatiopituudeksi*. Vakiot voidaan valita sopiviksi eli realistisiksi tietyn ajan ja paikan tropo- ja ionosfäärille. psii ψΨ

Toinen lähestymistapa on mallintaa ilmakehä deterministisesti joukolla tuntemattomia parametreja[3]. Esimerkiksi globaali ionosfääri voidaan [3]

hyvin esittää pallofunktiokehitelmänä. Myös polynomi- tai Fourier'n kehitelmä tulee kysymykseen. Tuntemattomat parametrit estimoidaan tukiasemien havainnoista.

Etenemispolun *sijainnin* (φ, λ) määritelmä on mielenkiintoinen ongelma: se voisi olla polun pisteiden keskimääräinen sijainti painotettuna taiteaineen tiheydellä. Ionosfäärille tämä ilmaistaan usein edustavan "lävistyskohdan" sijaintina ionosfäärin keskikorkeudella.

Estimoitava suure voidaan siis esittää maantieteellisen sijainnin yleisenä funktiona $d^{\perp}(\varphi, \lambda)$, jonka ratkaiseminen vaatii vastaanottimien verkon mittauksia. Tästä on pieni askel lisätä ongelmaan myös kolmas ulottuvuus ja estimoida $d(\varphi, \lambda, h)$ kaikkialla ilmakehässä — tai vastaavasti elektronitiheys N_e, yhtälö 8.13, tai taitekerroin N, yhtälö 8.14. Tätä tekniikkaa kutsutaan *ilmakehän* GNSS*-tomografiaksi*.

Jos käytettävissä on hyvä numeerinen säämalli, GNSS-tukiasemaverkon operaattori voi käyttää sitä esimerkiksi troposfäärin etenemisviiveiden interpoloinnin parantamiseksi.

Kääntäen voidaan tukiasemaverkon havainnoista saatuja vesihöyryn etenemisviivearvoja *assimiloida* numeeriseen sääennustemalliin sen tosiaikaisen suorituskyvyn parantamiseksi. Numeeriset sääennustemallit kuvaavat ilmakehän käyttäytymistä fysikaalisilla malliyhtälöillä kolmiulotteisella hilalla ajan funktiona. Ongelmakenttä on aktiivisen tutkimuksen kohteena.

Tekniikan kehityksen nykytaso on, että tukiasemaverkon avulla tapahtuva RTK-paikannus on yhtä tarkka kuin yhden tukiaseman avulla tapahtuva RTK-paikannus tukiaseman lähellä, edellyttäen, että tukiasemien väliset etäisyydet ovat korkeintaan noin 80 km. Paikannuksen laatu säilyy myös jonkin matkaa verkon peittoalueen ulkopuolella. Rajoittava tekijä on ilmakehä.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä on kokonaislukutuntemattomien ongelma? Kuvaile lähestymistapoja sen ratkaisemiseksi.
2) Mitä hyötyä on kaksoiserotusten käytöstä kokonaislukutuntemattomien ratkaisemisessa?

[3] GPS-järjestelmän navigointiviesti sisältää sellaisen mallin, Klobucharin ionosfäärimallin, kahdeksalla parametrilla.

3) Mitä etua tarjoaa RTK-tukiasemaverkkojen käyttö, niin sanottu verkko-RTK?
4) Mitä menetelmiä on olemassa tukiasemaverkon korjausten interpoloimiseksi käyttäjän sijaintiin?
5) Miksi tukiasemien välinen korjausten lineaarinen interpolointi toimii hyvin satelliittien ratavirheiden tapauksessa, mutta heikommin ilmakehän etenemisviiveiden suhteen?
6) Mikä on virtuaalitukiasema?
7) Mitä hyötyä *käyttäjälle* on VRS-menetelmän käytöstä?
8) Kuinka MAX-interpolointimenetelmässä minimoidaan liikkuvaan vastaanottimeen siirrettävän tietomäärän koko?
9) Kuvaile LAMBDA-menetelmän käyttöä kokonaislukutuntemattomien ratkaisemiseksi.
10) Miksi numeeristen sääennustemallien (NWP) käytöstä olisi hyötyä ilmakehän vesihöyrypitoisuuden seurannan yhteydessä GNSS:llä?

    Vihje Mallit kuvaavat ilmakehän suureet kolmiulotteisen paikan _____ *ja ajan* funktioina.

Harjoitus 9−1: Zeniitin etenemisviiveiden eron varianssifunktio

Jos zeniitin etenemisviiveen kovarianssifunktio $\underline{d}^{\perp}$ kahden paikan 1 ja 2 välillä on annettu yhtälöllä 9.13:

$$\mathrm{Cov}\{\underline{d}^{\perp}(\varphi_1,\lambda_1),\underline{d}^{\perp}(\varphi_2,\lambda_2)\} = C_0 \exp\left(-\psi/\psi_0\right),$$

johda kahden paikan 1 ja 2 välisen zeniitin etenemisviiveiden erotussuureen

$$\Delta_{12}\underline{d}^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \underline{d}_2^{\perp} - \underline{d}_1^{\perp} = \underline{d}^{\perp}(\varphi_2,\lambda_2) - \underline{d}^{\perp}(\varphi_1,\lambda_1)$$

varianssifunktio. Funktio on muotoa

$$f(\psi) = \mathrm{Var}\{\Delta_{12}\underline{d}^{\perp}(\psi)\}.$$

Piirrä sen kuvaaja olettaen, että $C_0 = \psi_0 = 1$.

Satelliittipohjaiset parannusjärjestelmät

10

Etenkin ilmailussa ei ole hyväksyttävää käyttää GPS-järjestelmää navigointitarkoituksiin ainoana menetelmänä, koska se ei takaa saatavuutta tai oikeellisuutta. Tämä seikka tunnetaan *eheysongelmana*.

Ongelman ratkaisussa käytetään satelliittipohjaisia parannusjärjestelmiä (SBAS). Toimivia SBAS-järjestelmiä on Pohjois-Amerikassa (WAAS), Euroopassa (EGNOS), Japanissa (MSAS ja QZSS, jälkimmäinen on hybridi parannus- ja paikannusjärjestelmä) ja Intiassa (GAGAN). Myös Venäjä (SDCM), Kiina (BDSBAS) ja Korean tasavalta (KASS) harkitsevat tai jo ottavat käyttöön kansainvälisen ilmailustandardin mukaisia järjestelmä.

SBAS ei vain tarjoa eheyden takeita GPS-järjestelmän käyttäjille, vaan säästää myös rahaa korvaamalla perinteisen radionavigoinnin ja mittarilaskun lentokenttäalueen tukilaitteistot, jotka ovat massiivisia[1]. SBASin ansiosta pienemmilläkin lentokentillä voi olla säännöllistä lentoliikennettä. Lisäksi säästetään polttoainetta, koska GPS:n ja SBAS:n avulla voidaan lentää suoraan eli geodeettista viivaa pitkin kentältä kentälle, ei monikulmiojonon kautta radiomajakoiden yli.

10.1 Vastaanottimen itsenäinen eheyden seuranta

Eräs vaatimattomampi lähestymistapa eheyden turvaamiseksi ilmailussa on vastaanottimen itsenäinen eheyden valvonta eli *receiver autonomous integrity monitoring* (RAIM). Siinä hyödynnetään GPS-järjestelmän redundanssia yhden tai usemman GPS-satelliitin signaalin mahdollisen epäluotettavuuden havaitsemiseksi (Wikipedia, Receiver autonomous integrity monitoring). Tekniikka on samanlainen kuin geodeettisten

[1] Esimerkiksi VOR-majakka (VHF *Omnidirectional Range*, VHF-monisuuntamajakka) on läpimitaltaan 13 m!

verkkojen kestävyyden arvioiminen sen suhteen, kuinka helposti karkeat virheet ovat havaittavissa. Käsite tunnetaan *luotettavuutena* (Baarda, 1968).

Kahteen kysymykseen on vastattava hetkellä millä hyvänsä:

1) Lähettääkö jokin käyttämistäni satelliiteista epäluotettavan signaalin?
2) Jos lähettäisi, voisinko edes tunnistaa sen?

Vastaus ensimmäiseen kysymykseen saadaan tilastollisesta testauksesta ja vastauksen toiseen luotettavuuden arvioinnilla.

Käytettävä havaintoyhtälö on se, jota käytetään aseman paikan määrittämiseen pseudoetäisyyshavainnoista, yhtälö 8.10:

$$\Delta\underline{p} = H\underline{\mathbf{x}} + \underline{m},$$

mutta kirjoitettu estimaatioyhtälönä (alaosio 2.4.1):

$$\Delta\underline{p} + \underline{v} = H\widehat{\mathbf{x}},$$

jossa $\underline{v}$ on jäännösvirhe.

Kaikille näkyville satelliiteille yhdessä tämä on

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} + \underline{\mathbf{v}} = A\widehat{\mathbf{x}},$$

jossa

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta\underline{p}^1 \\ \Delta\underline{p}^2 \\ \vdots \\ \Delta\underline{p}^n \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \underline{v}^1 \\ \underline{v}^2 \\ \vdots \\ \underline{v}^n \end{bmatrix}, \quad A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} H^1 \\ H^2 \\ \vdots \\ H^n \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \Delta T \end{bmatrix}.$$

Tämän tavallisen pienimmän neliösumman ratkaisu on

$$\widehat{\mathbf{x}} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \underline{\boldsymbol{\ell}},$$

ja jäännösvirheet ovat

$$\underline{\mathbf{v}} = A\widehat{\mathbf{x}} - \underline{\boldsymbol{\ell}}.$$

Ilmailun RAIMin tapauksessa käytettävä testisuure on pienimmän neliösumman ratkaisun jäännösten neliöiden summa:

$$\underline{\mathcal{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{v}^i\right)^2 = \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{v}}, \tag{10.1}$$

jossa $\underline{\nu}^i$ ovat jäännösvirheet ja n on satelliittien lukumäärä.

Tavallisessa pienimmän neliösumman menetelmässä oletetaan, että havaitut pseudoetäisyydet ovat normaalisti jakautuneita ja korreloimattomia ja että kaikilla on sama epävarmuus eli keskivirhe σ. Tätä kutsutaan *i.i.d.*-ominaisuudeksi. Silloin suure $\widetilde{\underline{\varepsilon}} \overset{\text{def}}{=} \underline{\varepsilon}/\sigma^2$ on jakautunut jakauman χ^2_{n-4} (khii-toiseen) mukaan. Tässä $n-4$ on vapausasteiden lukumäärä, kun tuntemattomia on neljä: vastaanottimen kolme koordinaattia X, Y ja Z ja sen kellotuntematon ΔT. sigma $\sigma\Sigma$ khii χX

Ensimmäinen sääntö on, että "väärän hälytyksen" todennäköisyys, *probability of false alarm* (PFA), kun satelliittien toimintahäiriöitä ei ole, toisin sanoen ensimmäisen lajin virhe, ei saa olla suurempi kuin $1/15\,000$[2], mikä antaa testin merkitsevyystasoksi arvon $\alpha = 1 - 1/15\,000 = 99{,}9933\ldots\,\%$. χ^2-jakauma nollahypoteesin tapauksessa antaa kynnysarvon, joka riippuu vapausasteiden lukumäärästä. Katso taulukko 10.1. [2] alfa αA

Toinen testauksessa asetettava parametri on todennäköisyys sille, että karkea virhe yhdessä pseudoetäisyydessä havaitaan. Tätä arvoa kutsutaan testin *erotuskyvyksi* β. Valitaan $\beta = 99{,}9\,\%$. Tämä merkitsee, että toisen lajin virheen eli oikeasti tapahtuvan toimintahäiriön huomaamatta jäämisen todennäköisyys eli "*probability of missed detection*" (PMD) on $1 - \beta = 0{,}1\,\%$. beeta βB

RAIMia ei saa käyttää, jos satelliittien geometria on sellainen, että asetetulla arvolla α ja todennäköisyydellä β havaittavissa oleva karkea virhe yhdessä pseudoetäisyydessä aiheuttaisi esimerkiksi vaakasijainnissa virheen, joka ylittää asetetun "hälytysrajan". Vaatimus tunnetaan nimellä *ulkoinen luotettavuus*, tässä tapauksessa vaakasijainnin ulkoinen luotettavuus.

Huomaa, että luotettavuus on *satelliittigeometrian* ominaisuus ilman yhteyttä mihinkään oikeasti tehtyihin mittauksiin! Luotettavuus voidaan laskea ennen lentoa. Tämä ominaisuus on yhteinen DOPin, tarkkuuden laimennuksen, kanssa, joka on tunnettu GNSS-paikannuksen laatua luonnehtiva suure. DOP liittyy kuitenkin GNSS-sijaintiratkaisun *tarkkuuteen*. Sekin on suunnittelutyökalu.

Lennon eri vaiheille on olemassa eri hälytysrajat: tietyssä tilanteessa RAIM voi olla käyttökelpoinen risteilylennossa, muttei lähestymisessä.

On selvää, että redundanssin on oltava riittävä, jotta tämä toimisi.

---

[2] Syy siihen, miksi luku on näin alhainen, on psykologinen: liian monet väärät hälytykset voivat johtaa siihen, että asianmukaisia hälytyksiä ei oteta vakavasti.

TAULUKKO 10.1. χ^2-testirajat arvolle $\alpha = 1 - 1/15\,000$ ja eri vapausasteiden määrille. Nämä ovat raja-arvot, joita vastaan suure $\widetilde{\underline{\varepsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\varepsilon}/\sigma^2$ laskettuna yhtälöllä 10.1 pienimmän neliösumman ratkaisun jäännösvirheistä *lennon aikana* testataan.

Satelliittien lukumäärä	Vapausasteet	χ^2-raja suureelle $\widetilde{\underline{\varepsilon}}$
5	1	15,90
6	2	19,23
7	3	21,95
8	4	24,39
9	5	26,65
10	6	28,79
11	7	30,83
12	8	32,81

Neljä satelliittia on minimi, jotta paikannus onnistuisi koodipohjaisilla pseudoetäisyyksillä, mutta se ei vielä tarjoa redundanssia. Geodesian nyrkkisäännön mukaan redundanssin tulisi olla vähintään 50 %, mikä merkitsisi kahdeksan satelliittia lentokoneen taivaalla. Tämä saavutetaan suurimmassa osassa ajasta jo minimaalisen 24 satelliitin GPS-konstellaation avulla.

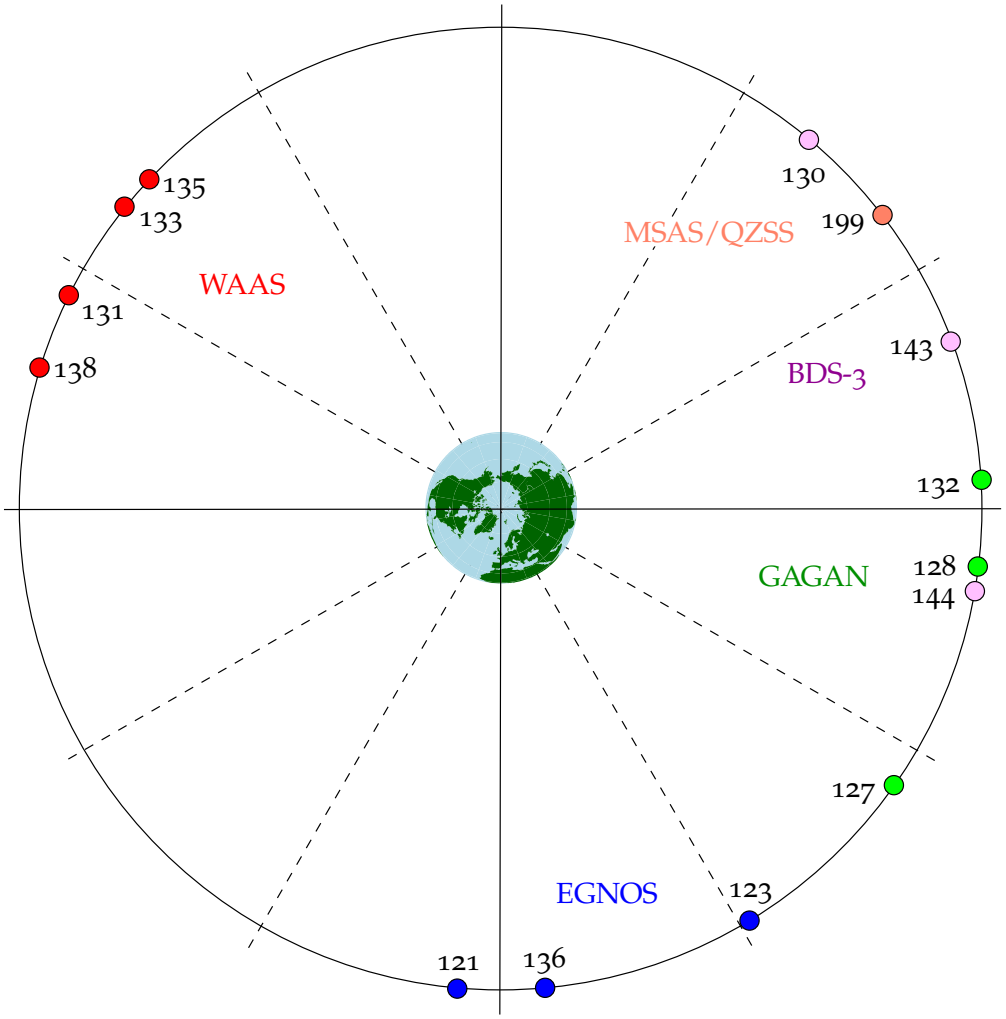
Mutta kyse ei ole pelkästään satelliittien lukumäärästä. Niiden on oltava taivaalla hyvin jaettuina, jotta tavoiteluotettavuustaso oikeasti saavutetaan. Internetissä on interaktiivisia suunnittelutyökaluja, joiden avulla voi ennustaa, missä ja milloin RAIM on oikeasti käyttökelpoinen.

Nykyinen suurempi GPS-konstellaatio ja kaikki muut toimivat GNSS-järjestelmät auttavat tekemään tästä houkuttelevan vaihtoehdon. Aihe on aktiivisen tutkimuksen kohteena: mainittakoon ARAIM, edistynyt RAIM, joka perustuu esimerkiksi Galileon ja GPS:n yhteiskäyttöön kaksitaajuusvastaanottimessa (L1 ja L5) (GLAD).

10.2 SBAS-teknologian kuvaus

Jokainen SBAS-järjestelmä rakennetaan tiettyä kohdealuetta varten — esimerkiksi WAAS rakennettiin Pohjois-Amerikalle. Kohdealueella pitää olla toimiva tukiasemien verkko, joka varmistaa tosiajassa, että jokainen alueella näkyvä GPS-satelliitti toimii oikein. Käyttäjät vastaanottavat palvelun tietoja geostationaarisella satelliitilla olevan transponderin kautta.

Palvelu antaa eheystiedon lisäksi differentiaalikorjauksia GPS-



KUVA 10.1. SBAS-transpondereiden geometria. Tilanne vuonna 2020. Luvut viittaavat L1-taajuuden näennäissatunnaiskoodeihin (PRN). Taajuudella L5 käytetään vastaavia koodeja.

satelliittien pseudoetäisyysmittauksiin. Nämä korjaukset pätevät kohdealueen sisällä.

Periaatteessa differentiaalikorjausten määrittämiseksi alueella riittäisi kolme asemaa alueen nurkissa, jos ainoat epätarkkojen pseudoetäisyyksien syyt olisivat satelliittikellot ja satelliittien lähettämät ratatiedot eli *broadcast ephemeris*. Käytännössä ilmakehän vaikutuksen sisällyttäminen korjauksiin edellyttää, että alue peitetään tiheämmin. Ja tietysti ylimääräisyys on aina hyväksi.

SBAS-satelliitti tai pikemminkin yleiskäyttöisen geostationaarisen satelliitin SBAS-transponderi lähettää signaalin, joka on samanlainen kuin GPS:n L1-signaali. Kantoaallon taajuus on 1575,42 MHz, ja se on binaa-

risesti vaihemoduloitu näennäissatunnaisella koodilla eli 1023-bittisellä Goldin koodilla bittitaajuudella 1,023 MHz, aivan kuten GPS:n C/A-koodi. Tämä merkitsee, että vain hieman modifioitu GPS-vastaanotin osaa käyttää signaalia.

Toisin kuin GPS:n navigointiviesti, joka lähetetään bittinopeudella 50 Hz, SBAS-viesti lähetetään nopeudella 250 Hz. Yhden viestin pituus on 250 bittiä, ja sen lähettäminen vie sekunnin. Kaikkien tarvittavien tietojen lähettäminen jakautuu useille viesteille. Tiedot luokitellaan ”nopeiksi” tai ”hitaiksi” sallitusta vasteajasta riippuen. Esimerkiksi osa kellokorjauksista on ”nopea”, kun taas ionosfäärin korjaus on kookas, mutta vain hitaasti muuttuva.

SBAS-signaali tarjoaa seuraavat tiedot:

- Näennäissatunnainen koodi, jonka avulla transponderi tunnistautuu käyttäen SBASin käyttöön varattua Goldin koodia[3]. Koodeja voitaisiin käyttää pseudoetäisyyden mittaukseen, mutta ne tarjoavat GPS:ään verrattuna vain vähän lisäarvoa.
- Differentiaalikorjauksia. SBAS-kykyinen GNSS-vastaanotin vastaanottaa satelliittien kiertoratojen ja kellojen korjauksia sekä ionosfäärin vaikutuksen korjauksia. Koska monet SBAS-vastaanottimet ovat yksitaajuisia (vain L1), on ionosfäärin aiheuttama etenemisviive hyvin merkittävä — metreistä kymmeniin metreihin. Korjauksen on oltava tarkka ja sen spatiaalisen erotuskyvyn riittävä.
- Eheystietoa.

Ratakorjaukset ovat pitkäaikaisia ja hitaasti muuttuvia, ja ne lähetetään korjauksina *broadcast ephemeris* -ratatiedoista laskettuihin satelliittien suorakulmaisiin geosentrisiin paikkoihin ja nopeuksiin. Korjauskaava on

$$\mathbf{x}_{\text{korj}}(t) = \mathbf{x}_{\text{be}}(t) + \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} (t - t_0),$$

jossa t_0 on sekä *broadcast ephemerisin* että korjausviestin *issue of data* (IOD) -aika.

GPS-satelliittien kellokorjaukset koostuvat kahdesta osasta:

- hidas osa, joka lähetetään alhaisella nopeudella kellon poikkeaman ja käynnin korjauksina

[3] Yhdysvaltojen ilmavoimat on maailmanlaajuinen koodilukujen osoittamisen koordinaattori. SBAS-järjestelmien koodiluvut ovat taajuuksille L1 (C/A) ja L5.

TAULUKKO 10.2. Eri lähestymiskategoriat ICAO:n mukaan. Kategoria kuvaa, kuinka hyvin lentokone ja kenttä on varustettu mittarilaskua varten. SBAS-lähestyminen on mahdollista vain osalle kategorioista.

Kategoria	Ratkaisukorkeus (DH)	Näkyvyys	Näkyvyys kiitoradalla (RVR)
Cat I	200 ft = 60 m	⩾ 2600 ft = 800 m, tai	⩾ 1800 ft = 550 m
Cat II	100–200 ft = 30–60 m	-	⩾ 1200 ft = 350 m
Cat III A	< 100 ft = 30 m / ei ole	-	⩾ 700 ft = 200 m
Cat III B	< 50 ft = 15 m / ei ole	-	150–700 ft = 50–200 m
Cat III C	ei ole	-	ei ole

- nopea osa, joka muuttuu nopeasti ajassa.

Ionosfäärin etenemisviive, joka muuttuu hitaasti ajassa, on samassa ionosfäärin paikassa sama kaikille GPS-satelliiteille. Viiveen arvot lähetetään hilan muodossa, joka peittää sen voimassaoloalueen eli laskennassa käytettyjen tukiasemien alueen. Lähetetyt arvot antavat vaikutuksen suuruuden zeniitissä olevan satelliitin tapauksessa. Korjaus riippuu käyttäjän sijainnista: käyttäjä interpoloi vaikutuksen hilasta kunkin satelliittisignaalin ionosfääriseen lävistyskohtaan ja ottaa huomioon lävistyskulman.

SBASin viestin sisällön laaja esitys on Sánchez ja Berges (2006).

10.3 Eheys ja *safety of life*

Integriteetin eli *eheyden seuranta* merkitsee, että käyttäjiä varoitetaan asetetun aikarajan — esimerkiksi kuuden sekunnin — sisällä, jos GPS-satelliitin paikannussignaali ylittää asetetun toleranssiarvon. *Safety-of-life* -sovelluksissa tämä on pakollista. *Safety of life* (SoL) tarkoittaa, että jos järjestelmä ei toimi oikein, ihmisiä voi kuolla.

Hyvä esimerkki tästä on lähestyminen ja laskeutuminen lentokentälle. Jos laskeudutaan sumussa GPS-navigoinnin avulla ja korkeusarvo on monta metriä pielessä, ilman varoitusta tapahtuu onnettomuus. Jos GPS-korkeuteen ei ole luottamista sumussa tai pilvessä ja lentäjä saa tästä varoituksen, laskua ei yritetä. Jos taas eheysjärjestelmän takaama tarkkuus on muutaman metrin sisällä eikä sumua ole, lentäjä voi suorittaa matalan pilvipeitteen läpi näkölaskun, vaikkapa 200 jalasta alaspäin.

Eheys mahdollistaa ilmailussa operaatiot, jotka olisivat yksin GPS:n avulla liian riskialttiita. GPS on ollut sellaisenaan jo käytössä RAIM-

TAULUKKO 10.3. Satelliitit, joilla on WAAS-transponderi, tilanne 2020. PRN on näennäissatunnaiskoodi, samanlainen kuin GPS-satelliiteilla.

Satelliitti	PRN	Pituusaste	Laukaisu	Loppu
Inmarsat-3 F3	134	178° E	17. joulukuuta 1996	Syyskuu 2007
Inmarsat-3 F4	122	142° W	3. kesäkuuta 1997	Syyskuu 2008
Telesat Anik F1R	138	107,3 W	21. marraskuuta 2000	-
Intelsat Galaxy 15	135	133° W	13. lokakuuta 2005	-
Inmarsat-4 F3	133	117° W	18. elokuuta 2008	Marraskuu 2017
Eutelsat 117 WB	131	117° W	14. kesäkuuta 2016[a]	-
SES-15	133	129° W	18. toukokuuta 2017	-

[a] Toimiva maaliskuusta 2018 lähtien.

moodissa (vastaanottimen itsenäinen eheyden valvonta eli *receiver autonomous integrity monitoring*), mutta vain reittilentojen suorissa osissa, ei laskuvaiheessa. Vaatimuksena on, että jos GPS-satelliitin signaali menee epäluotettavaksi, lentäjää hälytetään asetetun aikarajan sisällä.

10.4 WAAS

WAAS (Wide Area Augmentation System) julistettiin toimivaksi vuonna 2003. Järjestelmä seuraa GPS-järjestelmän lähetyksiä, laskee differentiaalikorjauksia käyttäjille ja antaa todennetun *eheystason*. Tarkkuus differentiaalikorjausten jälkeen on luokkaa ±2 m. Toiset lähteet antavat 1–2 m vaakatasossa ja 2–3 m pystysuunnassa palvelualueen sisällä. Ilman WAASia GPS-paikannuksen tarkkuus olisi keskimäärin vain ±15 m yhden taajuuden GPS-vastaanottimen avulla, lähinnä ionosfäärin takia.

Vuodesta 2007 lähtien WAAS on hyväksytty ohjaamaan lentokoneen laskeutumista turvallisesti 200 jalan korkeuteen kiitoradan yläpuolella: ICAO Category I, taulukko 10.2.

Vuonna 2014 Pohjois-Amerikassa jo 73 000 lentokonetta oli varustettu WAAS-vastaanottimella (NASA Spinoff).

WAAS on käytössä myös ilmailun ulkopuolella, esimerkiksi merenkulussa.

10.4.1 WAASin avaruuslohko

WAAS-transpondereita kantavista satelliiteista ja niiden historiasta kertoo taulukko 10.3, joka perustuu julkisiin lähteisiin.

TAULUKKO 10.4. Satelliitit, joilla on EGNOS-transponderi, tilanne 2020. PRN on L1-lähetyksen näennäissatunnaiskoodin koodiluku. Tällä hetkellä toimivat EGNOS-satelliitit lähettävät myös taajuudella L5.

Satelliitti	PRN	Pituusaste	Laukaisu	Loppu
Inmarsat-3 F1	131	64°,5 E	3. huhtikuuta 1996	Loppunut
Inmarsat-3 F2	120	15°,5 W	6. syyskuuta 1996	1. tammikuuta 2019
Artemis	124	21°,5 E	12. heinäkuuta 2001	2015
Inmarsat 4-F2	126	64°,0 E	8. marraskuuta 2005	Loppunut
Astra SES-5	136	5°,0 E	9. heinäkuuta 2012	-
Astra 5B	123	31°,5 E	23. maaliskuuta 2014	-
Eutelsat 5WB	121	5°,0 W	9. lokakuuta 2019	-

Geostationaarisen satelliitin signaali on koodattu samalla tavalla käyttäen näennäissatunnaiskoodeja (PRN) kuin GPS-satelliittien signaalit. WAAS-satelliitteilla on omat koodit, jotka eroavat toisistaan ja GPS-satelliittien koodeista, ja vastaanottimen korrelaattori erottaa satelliitit toisistaan niiden avulla.

10.4.2 WAASin maalohko

WAAS-järjestelmä käyttää seuraavia tukiasemia Yhdysvalloissa ja naapurimaissa:

1) WRS (Wide Area Reference Stations): 38 Pohjois-Amerikassa, mukaan lukien 7 Alaskassa, 1 Havajilla ja 1 Puerto Ricossa. Tämä on myös alue, jonka sisällä annetut korjaukset ovat tarkkoja.
2) Kolme WMS-tukiasemaa (Wide Area Master Stations). Näissä lasketaan korjaukset ja eheystieto. Differentiaalikorjaukset lasketaan alueen peittävän hilan solmupisteille.
3) Neljä GUS-tukiasemaa (Ground Uplink Stations). Näissä korjausviesti kootaan ja lähetetään geostationaarisen satelliitin transponderiin, joka välittää viestin käyttäjille samoilla taajuuksilla, joita myös GPS-satelliitit käyttävät: L1 ja uudemmissa satelliiteissa L5. Transponderit käyttävät samanlaisia yksilöitäviä näennäissatunnaiskoodeja kuin GPS-satelliitit.

   GUS-asemilla on isot paraabeliantennit lähettämistä varten. Asemia on kaksi jokaista kohdealuetta palvelevaa transponderia kohti.

Tietoliikenneyhteydet asemien välillä ovat varta vasten rakennettuja.

KUVA 10.2. WAASin maalohko, tilanne vuonna 2017. Punainen: WRS, **keltainen: WMS**, *sininen*: *GUS*. Huomaa asemat Kanadassa ja Meksikossa.

Avointa Internetiä ei ole hyväksytty luotettavasti tosiaikaiseksi.

10.5 EGNOS

EGNOS, European Geostationary Navigation Overlay Service, on Euroopan komission, ESAn ja yhteiseurooppalaisen ilmailuturvallisuuden laitoksen Eurocontrolin yhteinen hanke.

EGNOS on yhteensopiva ja yhteentoimiva WAASin kanssa. EGNOS aloitti toimintansa heinäkuussa 2005.

EGNOS koostuu neljästä toiminnallisesta lohkosta eli segmentistä: maalohko, tukilohko, avaruuslohko ja käyttäjälohko.

EGNOSin maalohko koostuu seuraavista komponenteista:

1) RIMS (Ranging and Integrity Monitoring Stations): 40. Ne vastaanottavat signaalin ja välittävät tiedot MCC-keskuksiin.
2) MCC (Master Control Centres): 2, josta toinen Ciampinossa Italiassa ja toinen Torrejonissa Espanjassa. Ne vastaanottavat tiedot RIMSeiltä ja laskevat niistä korjauksia ja eheystietoja, jotka lähetetään eteenpäin.
3) NLES (Navigation Land Earth Stations): 6. Ne lähettävät tiedot eteenpäin eri geostationaarisiin transpondereihin.

WAASin tapaan myös EGNOSin maa-asemien väliset tietoliikenneyhteydet ovat varta vasten rakennettuja.

10.6 Japanin SBAS-järjestelmät

10.6.1 MSAS

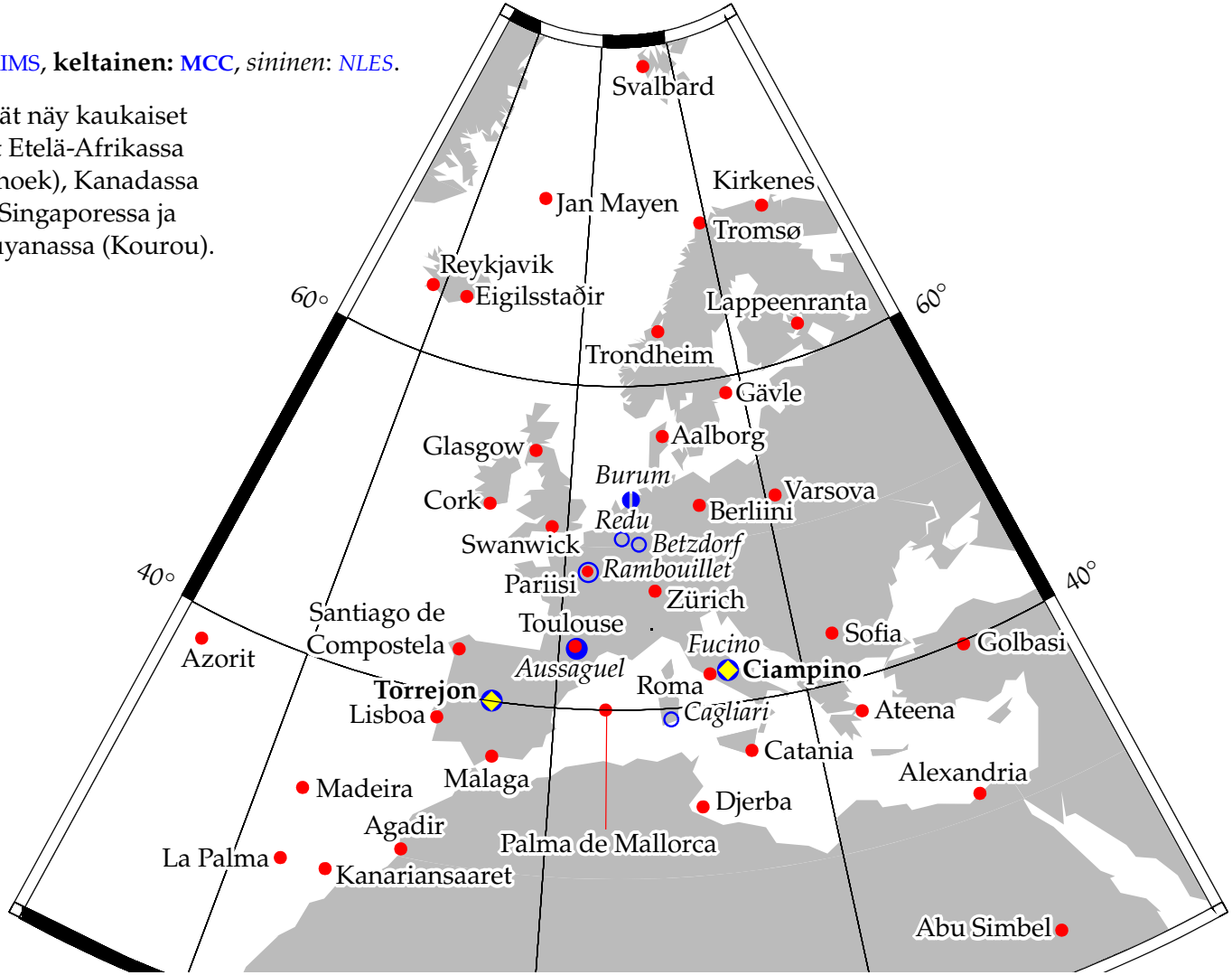
MSAS (MTSAT Satellite-based Augmentation System) oli ensimmäinen Japanilainen SBAS. Se suunniteltiin yhteensopivaksi WAASin ja EGNOSin kanssa. Järjestelmä aloitti toimintansa syyskuussa 2007. Taulukko 10.5 kuvaa avaruuslohkon.

MTSAT-1R-satelliitin käytöstä poiston jälkeen vuonna 2015 MTSAT-2, joka oli siihen saakka lähettänyt vain PRN-luvun 137 mukaista signaalia, jatkoi PRN-lukujen sekä 129 että 137 lähettämistä. Huhtikuussa 2020 geostationaarinen satelliitti QZSS-3 alkoi lähettää PRN-luvun 199 mukaista signaalia.

MSAS:llä on kuusi seuranta-asemaa. Katso Office of Aeronautical Satellite Systems, ATS Engineering Division, Japan Civil Aviation Bureau

Punainen: RIMS, **keltainen: MCC**, *sininen*: *NLES*.

Kuvassa eivät näy kaukaiset maa-asemat Etelä-Afrikassa (Hartebeesthoek), Kanadassa (Montreal), Singaporessa ja Ranskan Guyanassa (Kourou).



KUVA 10.3. EGNOSin maalohko, tilanne 2019.

TAULUKKO 10.5. Japanin satelliitit, joilla on MSAS-transponderi. MTSAT-satelliitit olivat sääsatelliitteja, joissa SBAS-transponderi oli vain pieni osa hyötykuormasta. PRN on lähetyksen näennäissatunnaiskoodin koodiluku.

Satelliitti	PRN	Pituusaste	Laukaisu	Loppu
MTSAT-1R (Himawari 6)	129	140°E	26. helmikuuta 2005	Joulukuu 2015
MTSAT-2 (Himawari 7)	137, 129	145°E	18. helmikuuta 2006	Toukokuu 2020
QSZZ-3	199	127°E	19. elokuuta 2017[a]	-

[a] Toimiva huhtikuusta 2020 lähtien.

(2008) ja kuva 10.4.

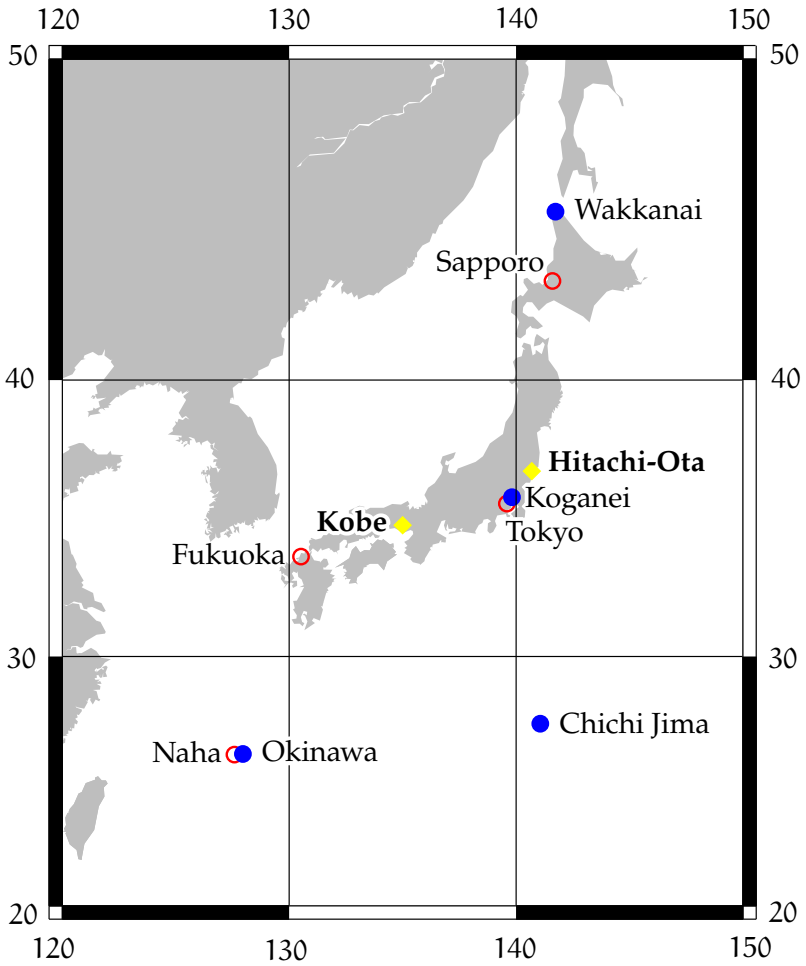
MSAS-järjestelmää kutsutaan myös nimellä MSAS V1. Vuonna 2020 sen korvaa MSAS V2 eli QZSS.

10.6.2 QZSS

Japanin avaruusjärjestö JAXA (Japanese Aerospace Exploration Agency) on rakentanut järjestelmän nimeltä QZSS, Quasi-Zenith Satellite System, kutsumanimi *Michibiki* — ”opastus”. Se toimii GPS:ää tukevana järjestelmänä, joka käyttää signaalirakennetta, joka on yhteensopiva ja yhteentoimiva GPS:n kanssa. Toisin kuin muut SBAS-järjestelmät, se ei tarjoa vain GPS-paikannuksen parannuspalvelua, vaan myös omia paikannussignaaleja, jotka on tarkoitettu käytettäväksi yhdessä GPS:n vastaavien kanssa.

Satelliittiradat ovat geosynkroonisia eli yhden tähtivuorokauden ratoja. Ratatasojen kaltevuus- eli inklinaatiokulma on korkea, noin 45°–53°, ja radat ovat melko pyöreitä: radan eksentrisyys on noin 0,07. Tarkoitus on, että millä hetkellä tahansa ainakin yksi satelliitti on roikkumassa Japanin taivaalla kohtuullisen korkealla elevaatiokulmalla. Satelliitti näkyy jopa Japanin suurkaupunkien ”kaupunkikanjoneista”. Tästä nimitys *”quasi-zenith”* on peräisin.

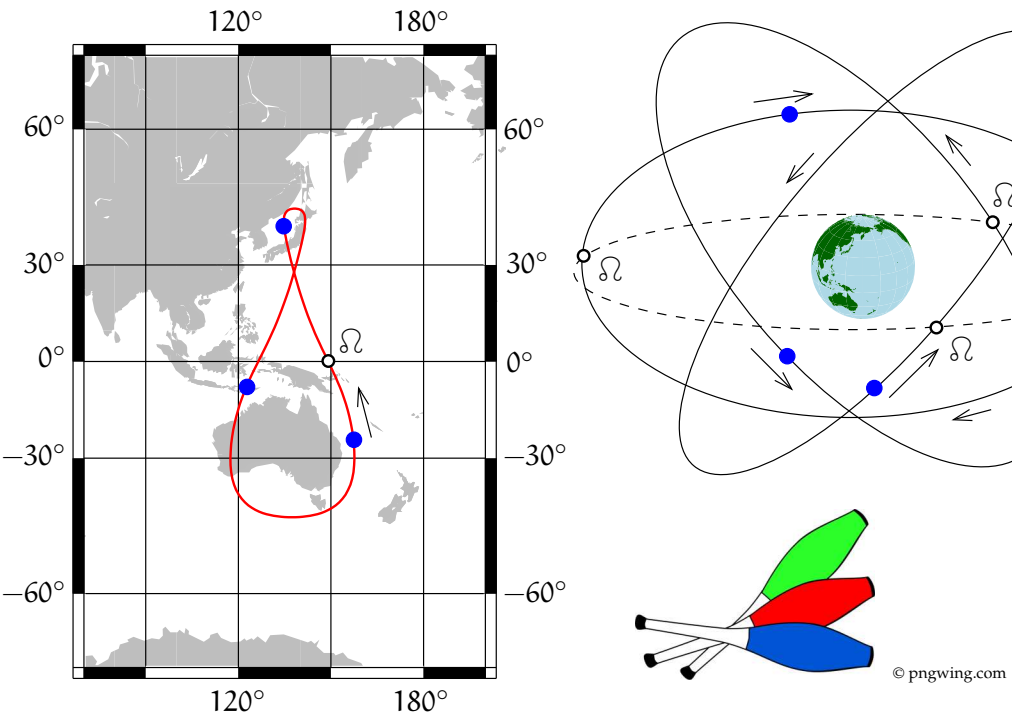
Se, että Japanissa on aina yksi satelliitti lähellä zeniittiä, vaatii kolme satelliittia radoilla, joiden nousevat solmut ovat samalla maantieteellisellä pituusasteella ja joiden rektaskensiot ovat 120° toisistaan. Satelliitit kulkevat solmujen läpi rataperiodinsa kolmasosan aikavälein, kuten jonglöörin keilat. Satelliitit kelpaavat myös, ja varsinkin, tietoliikennesa-



KUVA 10.4. MSASin ja QZSSin maalohko, tilanne noin vuonna 2016. **Keltainen**: Master Control Station (MCS). Ground Monitor Station (GMS), punainen: MSAS, sininen: QZSS.
QZSS: Useita seuranta- ja ohjausasemia sekä Japanin ulkopuolella olevia valvonta-asemia ei ole piirretty.

telliiteiksi.

Tämän tyyppiselle kiertoradalle viitataan usein nimellä ”Tundran kiertorata”. Se muistuttaa jonkin verran ”Molnijan kiertorataa”, jota Neuvostoliiton Molnija-viestintäsatelliitit käyttivät ja jolla oli samanlainen ”apogeumin roikunta” -toimintaidea korkeiden pohjoisten leveysasteiden palvelemiseksi. Molnijan kiertoradat ovat kuitenkin erittäin eksentrisiä, ja niiden rataperiodi on vain puoli tähtivuorokautta. Niiden ratatason kaltevuuskulma on $i = 63°,4$, joka täyttää ehdon $5 \sin^2 i - 4 = 0$, jolloin rataellipsin prekessioliike ratatason sisällä — ”apsidiprekessio” — häviää. Tämä merkitsee, että jos apogeum on kerran laitettu pohjoiseen oomega $\omega\Omega$ — perigeumin argumentti $\omega = 270°$ — se pysyy siellä.



KUVA 10.5. QZSS-radan toimintaidea. Vasemmalla Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa, oikealla inertiaalisessa koordinaatistossa.

Toisin kuin muut — geostationaariset — SBAS-järjestelmät, tarjoaa tämä järjestelmä *käyttökelpoisia* havaintosuureita, kuten pseudoetäisyys ja kantoaallon vaihe. Se lähettää samoilla taajuuskaistoilla kuin GNSS-järjestelmät ja käyttää koodijakokanavointia (CDMA) omilla PRN-koodeilla, mikä minimoi mahdollisen häiriön.

QZSS-järjestelmän ensimmäinen satelliitti laukaistiin 11. syyskuuta 2010. Kolme lisää laukaistiin vuonna 2017, ja 1. marraskuuta 2018 järjestelmä julistettiin virallisesti käyttöön otetuksi. Laajentamista seitsemään satelliittiin suunnitellaan.

Kunnianhimoinen QZSS-järjestelmä kuvataan laajasti Euroopan avaruusjärjestön ESAn Navipedia-verkkosivulla (GMV, 2011). Järjestelmän suorituskykystandardi ja käyttöliittymän määrittely löytyvät täältä: QZSS PS/IS.

10.7 Intian GAGAN-järjestelmä

GAGAN, GPS-Aided Geo Augmented Navigation, on Intian SBAS-järjestelmä, joka on tarkoitettu käytettäväksi ilmailussa Intian ilmatilassa. Tällä hetkellä on käytössä kolme transponderia, katso taulukko 10.6.

INRES-asemia (Indian Reference Stations) on 15, ja ne kaikki sijaitsevat

TAULUKKO 10.6. GAGAN-satelliitit.

Satellite	PRN	Pituusaste	Laukaisu
GSAT-8	127	55° E	21. toukokuuta 2011
GSAT-10	128	83° E	29. syyskuuta 2012
GSAT-15	132	93°,5 E	10. marraskuuta 2015

Intiassa. INMCC-asemia (Indian Mission Control Centres) on kaksi, Bangaloressa ja Delhissä, ja INLUS-asemia (Indian Navigation Link Upload Stations) on kolme, kaksi Bangaloressa ja yksi New Delhissä.

Intian ilmatilassa vaihteleva ionosfäärin viive on erityinen ongelma, kun geomagneettinen ekvaattori kulkee maan läpi ja ekvatoriaalinen virtatihentymä ionosfäärissä sen yli. Ongelmaa käsitellään intialaisessa tutkimushankkeessa, jonka puitteissa on rakennettu 18 elektronien kokonaispitoisuuden (TEC:n) seuranta-asemaa kaikkialle Intiassa. Se on myös yksi syy, miksi GAGAN-satelliitit lähettävät sekä L1- että L5-taajuudella.

10.8 Maapohjaiset parannusjärjestelmät

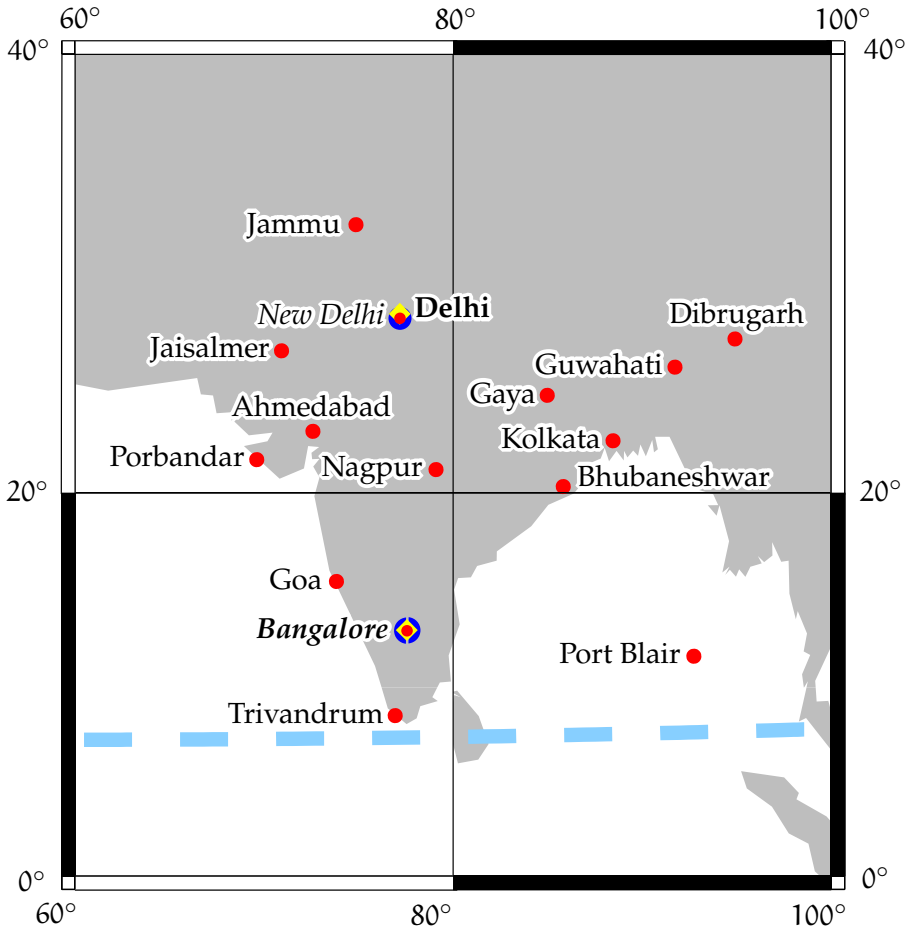
GBAS, *ground-based augmentation systems* eli maapohjaiset parannusjärjestelmät, käyttävät paikallista GPS-tukiasemaa kolmen mailin etäisyyden sisällä lentokentältä. Ne tuottavat differentiaalikorjauksia ja eheystietoja aivan samalla tavalla kuin SBAS. Tämä tukee navigointia, lähestymistä ja laskeutumista lentoasemaa ympäröivässä 20 mailin ilmatilassa.

Alkuperäinen amerikkalainen toteutus on nimeltään LAAS, *local-area augmentation systems* eli paikalliset parannusjärjestelmät.

GBAS on tarkoitettu käytettäväksi mittarilaskuihin vilkkailla lentokentillä. Sen käyttö on hyväksytty ICAO CAT I -lähestymisille. Kategorioiden II ja III hyväksyntää on valmisteltu kauan.

Lentokentän GPS-tukiasema seuraa GPS-satelliitteja ja laskee differentiaalikorjauksia paikallisesti. GPS-paikannus onnistuu korjausten avulla tarkkuustasolla ± 1 m. Korjaukset lähetetään lentokoneille radioteitse (VHF). Toisin kuin SBAS se siis vaatii lentokentältä erikoislaitteistoa. Yksi sellainen laitteisto korvaisi monia perinteisiä laitteistoja, kuten VOR-majakat jokaisella kiitoradalla.

GBASia voidaan käyttää myös ohjaamaan lentokentällä liikkuvia maakulkuneuvoja. Sen merkitys turvallisuudelle on ilmeinen: se estää lento-



KUVA 10.6. GAGANin maalohko, tilanne vuonna 2017. Punainen: INRES, **keltainen: INMCC**, *sininen: INLUS*. Ekvatoriaalinen virtatihentymä on merkitty vaaleansinisellä katkoviivalla.

koneita ja maakulkuneuvoja olemasta samassa paikassa samaan aikaan.

GBAS on toiminnassa monilla kansainvälisillä lentokentillä. Kuten SBASilla, sillä voidaan korvata mittarilaskun maalaitteistoja, joita tarvitaan kaksi jokaista kiitorataa kohti. GBAS mahdollistaa joustavammat lähestymiset, jotka säästävät polttoainetta.

10.9 Internetpohjaiset parannusjärjestelmät

GDGPS, Global Differential GPS -järjestelmä (Jet Propulsion Laboratory, The Global Differential GPS System), on Jet Propulsion Laboratory JPL:n keksimä ja toteuttama. Järjestelmä perustuu maailmanlaajuiseen JPL:n omistamien asemien verkkoon ja tuottaa globaalisti käyttökelpoisia differentiaalikorjauksia. Osa asemista käyttää atomikelloja.

Korjaukset lähetetään Internetin kautta käyttäjälle TCP-protokollalla.

Korjausten kokonaisvasteaika voi olla alle viisi sekuntia.

GDGPS-järjestelmälle on tarjolla yksinkertainen käyttöliittymä nimeltä APPS, Automatic Precise Positioning Service (GDGPS APPS). Käyttäjä lataa RINEX-tiedostoja verkkosivulle, ja tulokset esitetään myös verkkosivuna.

Järjestelmä esitetään tässä, koska se muistuttaa satelliittipohjaista parannusjärjestelmää. Sitä voitaisiin kutsua Internetpohjaiseksi parannusjärjestelmäksi. Se oli aikanaan myös eräänlainen WAASin prototyyppi (NASA Spinoff).

EGNOSille on kehitetty hieman samankaltainen ratkaisu, SISNeT, joka lähettää samaa avaruussignaalia kuin geostationaariset transponderit lähettävät, suoraan käyttäjille Internetin välityksellä (Chen ym., 2003). Tämä on hyödyllistä etenkin korkeilla leveysasteilla sijaitsevissa kaupungeissa tai metsäalueilla, joilla maanpinnalla liikkuvan mobiilikäyttäjän voi olla haastavaa vastaanottaa keskeytymätön signaali geostationaarisesta satelliitista.

SISNeT on nykyään osa laajempaa palvelua EDAS, EGNOS Data Access Service, joka lähettää EGNOSin maalohkon havaintoja käyttäjälle käyttäen protokollia RTCM ja NTRIP (EDAS; EDAS Service Definition Document).

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Kuinka satelliittipohjainen parannusjärjestelmä (SBAS) toimii? Mitkä kaikki järjestelmät ovat maailmassa tällä hetkellä toiminnassa?
2) Mikä on GPS-signaalin *eheys*?
3) Mikä on RAIM, vastaanottimen itsenäinen eheyden valvonta, ja miten se toimii?
4) Kuinka tiedonsiirto geostationaarisesta SBAS-satelliitista käyttäjille on optimoitu sekä tietomäärän että vasteajan suhteen?
5) Millä tavoin SBASin käyttö GPS:n kanssa säästää rahaa ja polttoainetta?
6) Kuinka QZSS-järjestelmä toimii? Kuvaile erityisesti kiertoratojen valinta.
7) Mitä erityistä ongelmaa Maan magneettikenttä aiheuttaa SBASille Intian ilmatilassa?
8) Millä tavalla maapohjaiset parannusjärjestelmät (GBAS) eroavat satelliittipohjaisista (SBAS)?

Satelliittinavigoinnin uusi aikakausi

11

Uusia GNSS-järjestelmiä (*global navigation satellite systems*) on tulossa tai niitä on jo otettu käyttöön vakiintuneen GPS-järjestelmän (*Global Position System*) lisäksi. Koska nämä järjestelmät ovat saatavilla ja soveltuvat teknologiseen navigointiin, esitellään ne tässä luvussa. Nykytilan yhteenveto löytyy taulusta 11.1.

11.1 GPS-järjestelmän modernisointi

Elektroniikka-alan nopea kehitys on tehnyt mahdolliseksi ja jopa helpoksi asiat, jotka olivat GPS:n alkuaikoina mahdottomia. Hyvän esimerkin tästä antavat monitaajuusvastaanottimet, jotka olivat muinoin kalliita erikoislaitteita. Ja GPS:n monopoli on murtunut. Miljoonien käyttäjien nykytarpeet ymmärretään nyt paremmin ja otetaan vakavasti. Näistä syistä GPS-järjestelmän modernisointi katsottiin tarpeelliseksi.

Modernisoinnista on vastannut Global Positioning Systems Directorate. Tavoitteena on lisätä GPS-järjestelmään uusia ominaisuuksia, kuten uusia siviili- ja sotilassignaaleja, ja parantaa järjestelmän suorituskykyä.

11.1.1 Satelliittien sukupolvet

GPS-satelliittien peräkkäisiä teknologiasukupolvia kutsutaan *blokeiksi*.

Block I GPS:n perusajatuksen toimivuutta kokeiltiin 11 koesatelliitin sarjalla. Kymmenen satelliittia pääsi onnistuneesti kiertoradalle, ensimmäinen vuonna 1978.

Block II Ensimmäinen operatiivinen GPS-satelliittimalli oli Block II. Vuosina 1989–1990 laukaistiin yhdeksän satelliittia. Niistä yksikään ei ole enää toiminnassa: viimeinen poistettiin käytöstä vuonna 2007.

TAULU 11.1. Uusia globaaleja navigointisatelliittijärjestelmiä.

	GPS	GLONASS	Galileo	BeiDou
Ratatasoja	6	3	3	3
Tasojen välinen kulma	60°	120°	120°	120°
Satelliitteja tasossa	4	8	8	8
Satelliittien välinen kulma	90° [a]	45°	45°	45°
Satelliitteja yhteensä (virallisesti)	$24+6$	$24+3$	$24+6$	$24+3$ [b]
Radan korkeus (km)	20 200	19 140	23 222	21 528
Periodi	11^h58^m	11^h16^m	14^h05^m	12^h53^m
"Resonanssi" (kierroksia/tähtivuorokausia)	2/1	17/8	17/10	13/7
Ratatason kaltevuus	55°	64°,8	56°	55°

Kantoaallon taajuus (MHz)	GPS	GLONASS [c]	Galileo	BeiDou [d]
1600,995		L1		
1575,420	L1		E1	B1C
1561,098				B1I
1278,750			E6	
1268,520				B3I
1248,060		L2		
1227,600	L2			
1207,140			E5b	B2b
1202,025		L3		
1176,450	L5		E5a	B2a

[a] Vuodesta 2011 lähtien satelliitit ovat jakautuneet radoillaan epätasaisesti. Uutta geometriaa kutsutaan nimellä *"expandable constellation"* (SPS performance standard, 2020).

[b] Kaltevilla geosynkroonisilla radoilla (IGSO) on kolme lisäsatelliittia ja oikeilla geostationaarisilla radoilla kolme.

[c] Uudet CDMA-lähetykset.

[d] BeiDou-3.

Block IIA Kirjain A merkitsee *advanced*. Tämän mallin 19 satelliittia laukaistiin vuosina 1990–1997. Vuonna 2019 sarjan viimeinen satelliitti ei enää toiminut kunnolla ja se kytkettiin pois päältä.

Block IIR Kirjain R merkitsee *replenishment*. Yhteensä 12 satelliittia laukaistiin vuosina 1997–2004.

Block IIR-M Kirjain M merkitsee *military*. Kahdeksan satelliittia lau-

kaistiin vuosina 2005–2009.

Block IIF Kirjain F merkitsee *follow-on*. Yhteensä 12 satelliittia laukaistiin vuosina 2010–2016.

Block III Tämän mallin satelliitteja tullaan rakentamaan kymmenen. Ensimmäinen niistä laukaistiin vuonna 2018.

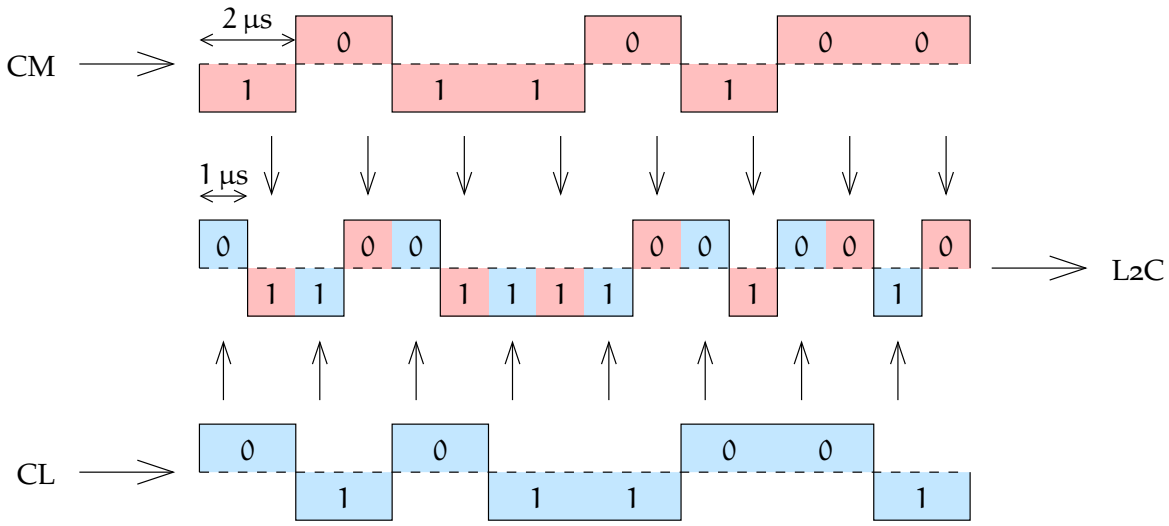
Block IIIF Suunnitteilla on satelliittien laukaisuja vuosille 2026–2034.

11.1.2 Uudet koodit ja taajuudet

Ensimmäinen Block IIR-M -satelliitti laukaistiin 25. syyskuuta 2005. Se oli ensimmäinen, joka lähetti uutta sotilaskoodia M. Se oli myös ensimmäinen, joka lähetti uutta siviilikoodia L2C moduloituna kantoaaltoon L2. L2C sisältää uudet näennäissatunnaiskoodit CM (*Civil Moderate*) ja CL (*Civil Long*), joiden toistojaksojen pituudet ovat 10 230 ja 767 250 bittiä. Molemmat koodit luodaan modulaatiotaajuudella (”*chip rate*”) 511 500 bittiä sekunnissa. Koodit yhdistetään tekniikalla, jota kutsutaan *aikajakomultipleksoinniksi*: jonoon otetaan bittejä vuorotellen CM:n ja CL:n bittijonoilta, mikä muistuttaa moottoritien risteyksessä yhdistyviä autovirtoja. Uudessa jonossa jokaisen bitin pituus on vain puolet alkuperäisestä ja modulaatiotaajuus on 1 023 000 bittiä sekunnissa eli 1,023 MHz. Katso kuva 11.1. L2C sisältää myös parannetun navigointiviestin, jossa on muun muassa GPS-järjestelmän ja muiden GNSS-järjestelmien väliset aikaskaalojen siirtymät. Tämä on tärkeää yhteiskäytössä GLONASSin ja Galileon kanssa.

Uusi taajuus L5, 1176,45 MHz, on tarkoitettu *safety-of-life* (SoL) -tyyppiseen käyttöön etenkin ilmailussa, katso osio 10.3. Taajuusalue on varattu kansainvälisesti ilmailun käyttöön. Block IIF -satelliitit kantavat tätä taajuutta ensimmäisinä. Myös SBAS-järjestelmät käyttävät L5-taajuutta. Yhdessä L1-taajuuden kanssa L5-taajuutta voidaan käyttää poistamaan ionosfäärin etenemisviive mittauksista.

Tarjolla on myös uusi siviilikoodi L1C, joka on houkutteleva vaihtoehto L1-taajuuden vanhalle C/A-koodille. Koodia on lähettänyt tammikuusta 2020 lähtien ensimmäinen Block III -satelliitti, joka laukaistiin joulukuussa 2018. Koodilla on monimutkainen rakenne, johon kuuluu data- ja pilottikomponentti, katso kuva 7.3. Molemmat ovat BOC-moduloituja. Pilotti käyttää niin sanottua TMBOC-modulaatiota, eli aikamultipleksoitua binaarista offset kantoaalto -modulaatiota. BOC-moduloinnin ansiosta koodi erottuu paremmin BPSK-moduloidusta



KUVA 11.1. L2C ja aikajakomultipleksointi. L2C sisältää myös modernisoidun navigointiviestin nimeltä CNAV nopeudella 50 bittiä sekunnissa.

C/A-koodista. Pilotti on myös moduloitu *overlay*-koodilla, joka yksilöi satelliitin. ICD:n (GPS ICD) mukaan sekä data että pilotti ovat samassa vaiheessa kuin L1:n P(Y)-koodin kantoaalto.

Näin ollen käytössä on nyt *neljä* siviili-GPS-signaalia: C/A, L2C, L5 ja L1C.

11.2 Venäläinen GLONASS-järjestelmä

GLONASS-järjestelmän kehitys alkoi Neuvostoliitossa jo vuonna 1976. Virallinen lähde on GLONASS news, joka näyttää myös konstellaation tilannekuvan.

Huhtikuussa 2020 kiertoradalla oli 27 satelliittia, joista 24 oli käyttökelpoisia. Satelliittien määrä on kasvanut hitaasti. Pitkän alennustilan jälkeen 1990-luvulla järjestelmä on nyt taas täysin toiminnassa.

11.2.1 Alkuperäisjärjestelmän taajuudet ja signaalit

Alkuperäistä GLONASS-järjestelmää kuvaa Interface Control Document (ICD) vuodelta 2008. Se sisältää 65 sivua englanniksi, GLONASS ICD.

Alkuperäinen GLONASS-järjestelmä eroaa sekä GPS:stä että Galileosta siinä, että *jokaisella satelliitilla on oma kantoaaltotaajuus*. Ratkaisu on nimeltään FDMA, *"frequency-division multiple access"*, eli taajuusjakokanavointi. Silti "antipodit" eli samassa ratatasossa vastakkain maapallon eri puolella olevat satelliitit voivat käyttää samoja taajuuksia. Alkuperäiset

taajuudet L1 ja L2 ovat

$$f_{L1} = f_{01} + K\Delta f_1,$$
$$f_{L2} = f_{02} + K\Delta f_2,$$

jossa $K \in \{-7, -6, \ldots, +5, +6\}$ on satelliitin kanavanumero, joka löytyy almanakasta, ja

$$f_{01} = 9 \cdot 178\,\text{MHz} = 1602\,\text{MHz}, \quad \Delta f_1 = \tfrac{9}{16}\,\text{MHz} = 562{,}5\,\text{kHz},$$
$$f_{02} = 7 \cdot 178\,\text{MHz} = 1246\,\text{MHz}, \quad \Delta f_2 = \tfrac{7}{16}\,\text{MHz} = 437{,}5\,\text{kHz}.$$

Siviilikoodilla — C/A:ta vastaava — on bittitaajuus 0,511 MHz[1] ja salatulla sotilaskoodilla 5,11 MHz. Samaa modulaatiotekniikkaa käyttää myös GPS: vaihemodulaatio vaihesiirtymällä $\pi = 180°$ — *"binary phase-shift keying"* eli binaarinen vaiheavainnus. Navigointiviestin bittitaajuus on 50 Hz. [1]

Satelliittien lähettämä säteily on ympyräpolarisoitu myötäpäivään, aivan kuten GPS:n säteily.

11.2.2 *Aika, vertausjärjestelmä ja konstellaatio*

GLONASSin aikaskaala on sama kuin UTC(SU) eli UTC:n Venäjän Federaation kansallinen toteutuma. Tämä merkitsee, että UTC:n karkaussekunnit joulukuun ja kesäkuun lopussa kulkeutuvat GLONASSin aikaskaalaan. Tämä on erilainen kuin GPS:n käytäntö: GPS-ajassa ei huomioida karkauksia.

Navigointiviesti sisältää aikaskaalojen UTC ja UTC(SU) väliset erotukset sekä ilmoitukset tulevista karkaussekunneista.

GLONASSin käyttämä koordinaattien vertauskehys on PZ-90 ("Maan parametrit 1990"), joka on geosentrinen ja Maan mukana pyörivä, mutta eroaa hieman WGS84:stä. Satelliittien lähettämä rataennuste ilmoittaa satelliitin paikan ja nopeuden avaruudessa suorakulmaisina koordinaatteina tässä kehyksessä 30 minuutin aikavälein[2]. PZ-90:n viimeisin [2]

[1] Siviilikoodin pituus on 511 bittiä, generoituna yhdellä yhdeksän bitin lineaarisen palautteen siirtorekisterillä ($2^9 - 1 = 511$). Näin toistojaksoksi saadaan tarkasti yksi millisekunti.

[2] Ratkaisu rajoittaa vastaanottimessa tehtävää laskentatyötä. Maan painovoimakenttä mallinnetaan yksinkertaisen pyörähdysellipsoidin kenttänä. Auringon ja Kuun aiheuttama kiihtyvyys annetaan erikseen vakiovektorina. Navigointiviesti sisältää myös almanakan, jossa kaikkien satelliittien perinteiset laajennetut Keplerin rata-alkiot.

toteutuma, PZ-90.11, eroaa vain muutaman millimetrin vertauskehyksestä ITRF2008, Subirana ym. (2011).

GLONASS-satelliittien nimellinen lukumäärä täydellisessä konstellaatiossa on 24 kolmessa ratatasossa plus kolme varasatelliittia. Ratojen kaltevuuskulma päiväntasaajaan nähden eli inklinaatio on $64^\circ,8$. Korkea arvo palvelee paremmin entisen Neuvostoliiton aluetta. Kuten GPS:n tapauksessa myös GLONASSin satelliittien geometria toistuu joka tähtivuorokausi. Toisin kuin GPS:llä on silloin *samassa* paikassa *toinen* satelliitti. Radan korkeus on 19 140 km ja rataperiodi 11^h16^m, eli lyhyempi kuin puoli tähtivuorokautta. Sama geometria toistuu yksittäisten satelliittien kannalta vasta 8 vuorokauden ja 17 kierroksen jälkeen. Ratkaisu vähentää resonantteja ratahäiriöitä, joiden korjaaminen GPS-järjestelmässä kuluttaa melko paljon rakettimoottorien ajoainetta.

11.2.3 Modernisointi

GLONASS on siirtymässä koodijakokanavointiin eli CDMA:han, *"code-division multiple access"*, jota muut GNSS-järjestelmät jo käyttävät. Muutos tekee järjestelmästä yhteensopivamman muiden kanssa, mikä helpottaa monen järjestelmän vastaanottimien suunnittelua. Siirto tapahtuu asteittain uusien laukaisujen mukaan.

Koodijakokanavointiratkaisua kuvaavat *Interface Control Documents* (ICD) löytyvät täältä: GLONASS ICD CDMA (2016a,b,c,d). Käyttöön otetaan myös kolmas taajuus L3,

$$f_{L3} = 235 \cdot 5{,}115\,\text{MHz} = 1202{,}025\,\text{MHz},$$

GLONASS ICD CDMA (2016d). Vanhat taajuudet L1 ja L2 korvataan uusilla:

$$f_{L1} = 313 \cdot 5{,}115\,\text{MHz} = 1600{,}995\,\text{MHz},$$
$$f_{L2} = 244 \cdot 5{,}115\,\text{MHz} = 1248{,}06\,\text{MHz},$$

mikä on lähellä vanhoja keskitaajuuksia. Kaikilla kolmella taajuudella on sekä avoimia että salattuja signaaleja.

C/A-koodia vastaavan L1-siviilikoodien bittitaajuus pysyy *melkein* muuttumattomana 0,5115 MHz:ssä, mikä on *tarkasti* puolet GPS:n vastaavasta. Koodin pituus on nyt 1023 bittiä (data) ja 4092 bittiä (pilotti), ja sen lähettäminen kestää tarkalleen 2 ms ja 8 ms. Myös L2:n siviilikoodien (palvelutietojen kanavan ja pilotin) bittitaajuus on 0,5115 MHz. L3:n koodien bittitaajuus on 10,23 MHz.

TAULUKKO 11.2. GLONASSin näennäissatunnaiskoodit. Nykyinen CDMA-toteutus.

	Taajuus (MHz)	Tyyppi	Modulaatio	Toisto-jakso (ms)	Vaihe
L1	1600,995	Tietoa[a]	BPSK(1)	2	Q, TDM[b]
		Pilotti	BOC(1, 1)	8	Q, TDM[b]
		Salattu	BOC(5, $\frac{5}{2}$)		I
L2	1248,06	CSI[c]	BPSK(1)	-	Q, TDM[b]
		Pilotti	BOC(1, 1)	20	Q, TDM[b]
		Salattu	BOC(5, $\frac{5}{2}$)		I
L3	1202,025	Tietoa[a]	BPSK(10)	1	I
		Pilotti	BPSK(10)	1	Q

[a] Kantaa navigointiviestiä.

[b] Aikajakomultipleksointi.

[c] Palvelutietojen kanava.

Navigointiviesti lähetetään taajuuksilla L1 ja L3. Bittitaajuus L1:llä on 125 Hz ja L3:lla 100 Hz.

Suunnitteilla on avaruuslohkon laajeneminen 30 satelliittiin 6 ratatasossa. Pidemmällä aikavälillä kantoaaltotaajuuksien yhdenmukaistaminen GPS-taajuuksiin L1 ja L5, joita myös Galileo ja BeiDou käyttävät, ja Galileon taajuuteen E5b, jota myös BeiDou käyttää, on suunniteltu yhteensopivilla modulaatioilla. Se tekisi monen järjestelmän vastaanottimien ja ohjelmistojen suunnittelusta entistä helpompaa.

11.3 Eurooppalainen Galileo-järjestelmä

Galileo-järjestelmä on Euroopan komission ja Euroopan avaruusjärjestön (ESA) yhteishanke. Sen hallinnollinen historia on ollut monivaiheinen. Kesäkuussa 2003 Euroopan komissio ja ESA muodostivat yhteistyöelimen nimeltä ”Galileo Joint Undertaking” (GJU), joka valitsi ”*concessionairen*”, yksityisyrityksen nimeltä ”Galileo Operating Company”. Se vastasi Galileon päivittäisistä toiminnoista ja etenkin sen kaupallistamisesta. Vuonna 2006 GJU lopetettiin ja perustettiin ”European GNSS Supervisory Authority” (GSA). Vuonna 2010 sitä uudelleenjärjesteltiin ja uudeksi nimeksi valittiin ”European GNSS Agency (GSA)”.

Tärkeä motivaatio Galileolle oli ja on edelleen teknologinen riippu-

mattomuus Yhdysvalloista. Asian merkitystä korosti Yhdysvaltojen yksipuolinen hyökkäys Irakiin maaliskuussa 2003. Galileo on virallisesti siviilijärjestelmä ja siviiliviranomaisten hallinnoima, mutta se on olennainen osa myös monien maiden puolustussuunnittelua.

11.3.1 Satelliitit ja niiden radat

Galileo-satelliittejä on suunnitteilla kolmekymmentä. Kolmella ratatasolla on kullakin kahdeksan satelliittia ja kaksi varasatelliittia. Satelliittien välimatka ratatasossa on 45°. Ratatasojen kaltevuuskulma päiväntasaajaan nähden eli inklinaatio on 56°.

Galileo-satelliittien ratojen korkeus on 23 222 km eli selvästi korkeampi kuin GPS-radat. Radan periodi on $14^{h}05^{m}$.

Kymmenen päivän eli 17 ratakierroksen jälkeen samat satelliitit ovat taas samoissa paikoissa havaintopaikan taivaalla.

Ensimmäinen kokeellinen Galileo-satelliitti oli GIOVE-A, joka laukaistiin joulukuun 28. päivänä 2005. Vuonna 2020 kiertoradalla on 22 toimivaa satelliittia, ja lisää on tulossa. Konstellaation tosiaikaista tietoa antaa European GNSS Service Centre.

11.3.2 Järjestelmän kuvaus ja komponentit

Galileo-järjestelmä on suunniteltu yhteensopivaksi GPS-järjestelmän kanssa. Se on myös tarkoitettu toimimaan saumattomasti SBAS-järjestelmien kanssa, kuten Euroopassa EGNOSin.

Galileon signaali- ja taajuusrakenne on monimutkainen, katso ESA, Galileo Navigation Signals and Frequencies. Kantoaallot ovat

E1 1575,42 MHz (sama kuin GPS L1)

E5a 1176,45 MHz (sama kuin GPS L5)

E5b 1207,14 MHz

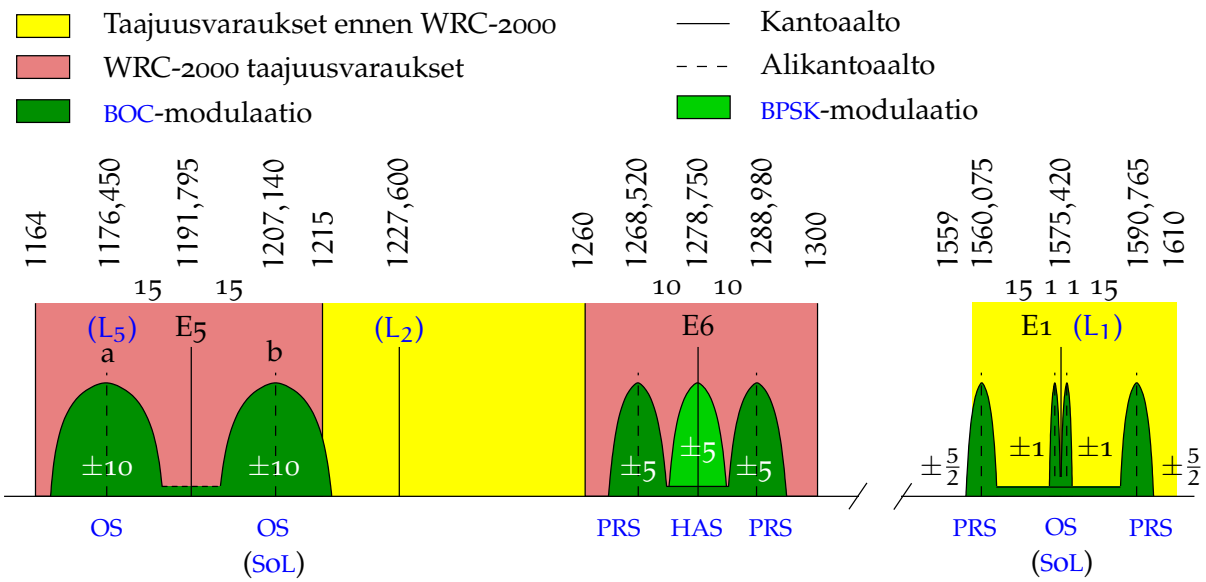
E6 1278,75 MHz.

Katso taulu 11.1 ja Galileo OS SiS ICD.

11.3.3 Palvelut

Galileon tarjoamat palvelut ovat seuraavat:

- Avoin palvelu (OS), joka on kaikkien käytettävissä. [E1, E5]



KUVA 11.2. Galileon taajuudet ja modulaatiot, yksikkö MHz. WRC-2000 oli World Radiocommunications Conference Istanbulissa vuonna 2000. Kuvassa on tyylitelty kuvio, jossa vihreiden alueiden (päähuippujen) puolileveydet edustavat koodien bittinopeuksia. Taajuserot ja -hajonnat ovat "GPS-megahertseinä", jotka ovat 1,023 MHz:n kokoisia.

- *Safety-of-life*-palvelu (SoL). Galileo itsessään ei tarjoa *safety-of-life*-palveluita, mutta EGNOS (osio 10.5) tarjoaa. Suunnitteilla on myös ARAIMin eli edistyneen RAIMin käyttö eheyden seurannassa. [E1, E5b]
- Tarkkuuspalvelu (HAS). Palvelun vanhempi nimi oli "kaupallinen palvelu". [E6]
- Viranomaispalvelu (PRS). Tämä palvelu on suojattu muita palveluja paremmin häirintää vastaan. Käyttäjäkuntaan kuuluu muun muassa poliisi, rajavartiolaitos, puolustusvoimat ja rauhanturvaajat. Se, että Galileoa kutsutaan "siviilijärjestelmäksi, toisin kuin GPS", ei liene aivan oikein. . . . [E1, E6]

Galileo-satelliitit kantavat myös etsintä- ja pelastuspalvelun (SAR) transpondereita, jotka kuuluvat Cospas-Sarsat-järjestelmään.

Katso Ávila Rodríguez (2011) ja kuva 11.2.

11.4 Kiinalainen BeiDou-järjestelmä

Järjestelmän nimi BeiDou tarkoittaa Otava-tähdistöä (*Ursa Major*), jota käytetään Pohjantähden (Polaris, α UMi) löytämiseksi. Nimi onkin navigoinnin vertauskuva. Kansainvälisesti on käytetty myös nimeä "*Compass*". Virallinen englanninkielinen nimi on "*BeiDou Navigation Satellite System*", ja virallinen verkkosivu on BeiDou Navigation Satellite System.

11.4.1 BeiDou-1

Vanhempi BeiDou-1-järjestelmä, joka palveli Kiinan aluetta, koostui kolmesta satelliitista geostationaarisilla radoilla. Se poistui käytöstä vuonna 2012.

Tähän päivään mennessä on saatu selville, että ensimmäinen järjestelmä toimi itsenäisesti. Maa-asema lähetti signaalin kahden satelliitin kautta tuntemattomalla paikalla olevalle vastaanottimelle, joka vastasi satelliittien kautta. Kyseessä oli siis *aktiivinen* järjestelmä. Lisäehtona käytettiin Kiinan alueen tarkkaa maastomallia. Laskettu paikka lähetettiin takaisin vastaanottimelle. Ilmoitetut paikannustarkkuudet olivat välillä $\pm$20–100 m.

11.4.2 BeiDou-2 ja -3

BeiDou-2 ja -3-järjestelmiä kutsutaan englanniksi nimellä "*Compass*".

BeiDou-2-sarja koostuu (2020) kymmenestä satelliitista, joista viisi on geostationaarisilla radoilla. Sarja tarjoaa paikannuspalveluita Aasiassa ja Tyynellä valtamerellä. Laukaisutoiminta oli tiivistä vuosina 2010–2012 (BeiDou Constellation Status).

Marraskuussa 2017 alkoi tiivis BeiDou-3-satelliittien laukaisujen sarja. 27. joulukuuta 2018 palvelu julistettiin (Xinhua, 2018) globaalisti toimivaksi. Täysi konstellaatio — 35 satelliittia, joista 5 geostationaarisia — saavutettaneen 2020.

Sekä BeiDou-2 että BeiDou-3 lähettävät kolmella taajuuskaistalla B1, B2 ja B3. BeiDou-3-järjestelmän dokumentoidut julkisen palvelun signaalit ovat B1C, B1I, B3I ja B2a, katso *interface control documents* BeiDou ICD (2017, 2018a,b, 2019). Tällä hetkellä ei ole B2b:n ICD:tä[3].

[3] Sellainen ICD tuli julki tämän kirjoittamisen jälkeen, julkaisupäivämääränä heinäkuu 2020: BeiDou ICD (2020).

Taulukko 11.3. BeiDou-3:n näennäissatunnaiskoodit.

Signaali	Taajuus (MHz)	Tyyppi	Modulaatio	Toistojakso (ms)	Vaihe
B2a[a]	1176,45	Tietoa[b]	BPSK(10)	1	I
		Pilotti	BPSK(10)	1	Q
B2b	1207,14	Tietoa[b]	BPSK(10)	1	
B3I	1268,52	Tietoa[b]	BPSK(10)	1	
B1I[c]	1561,098	Tietoa[b]	BPSK(2)	1	
B1C[d]	1575,42	Tietoa[b]	BOC(1,1)	10	I
		Pilotti	BOC(1,1) QMBOC[e]	10	Q
			BOC(6,1) QMBOC[e]	10	I

[a] Identtinen GPS:n L5 kanssa.

[b] Kantaa navigointiviestiä.

[c] B2a tulee korvaamaan tämän.

[d] Muistuttaa GPS:n L1C:tä.

[e] Kvadratuurimultipleksoitu BOC.

- B1C toimii kantoaallon taajuudella 1575,42 MHz, joka on sama kuin GPS:n taajuus L1. B1C myös muistuttaa GPS-signaalia L1C ja Galileon E1 OS (avoimen palvelun) -signaalia, paitsi kvadratuurin käyttöä.
- B2a toimii taajuudella 1176,45 MHz, joka on sama kuin GPS:n taajuus L5 ja Galileon taajuus E5a. Myös modulaatio näyttää identtiseltä GPS:n ja Galileon kanssa.

Katso taulu 11.1 ja taulukko 11.3.

BeiDoun julkisen palvelun signaali ei ole salattu, vaan vapaasti kaikkien käytettävissä. Tarkkuus on ±10 m BeiDou-2:lle, ja BeiDou-3-järjestelmän tarkkuustavoite on ±0,5 m. BeiDou-3-järjestelmän signaali sisältää myös eheystietoja, katso osio 10.3.

Radat ovat hieman korkeampia kuin GPS-satelliittien radat: 21 528 km. Ratatasojen kaltevuuskulma on 55°.

BeiDou-3-järjestelmä sisältää kolme satelliittia radoilla nimeltä *inclined geosynchronous orbits* (IGSO) korkeudella 35 786 km. Oikeasti geostationaarisilla kiertoradoilla on myös kolme satelliittia.

Relevantit dokumentit ja ajantasalla oleva tieto konstellaation tilasta ja satelliittien terveydestä löytyy lähteestä BeiDou Introduction.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Miten aikajakomultipleksointi toimii?
2) Selitä ero koodijakokanavoinnin (CDMA) ja taajuusjakokanavoinnin (FDMA) välillä.
3) Miksi GLONASS-satelliittien ratojen kaltevuuskulma eli inklinaatio on niin paljon suurempi kuin muiden järjestelmien satelliittiratojen inklinaatiokulmat?
4) Mitä palveluita Galileo tarjoaa?
5) SBAS-vastaanottimet toimivat kahdella taajuudella: GPS L1 ja L5. Tämä pätee kaikille SBAS-järjestelmille: WAAS, EGNOS, MSAS, QZSS ja GAGAN. Selitä, miksi tämä standardi oli välttämätön ilmailun kaltaisella alalla.
6) SBAS-vastaanottimet toimivat kahdella taajuudella: GPS L1 ja L5. Ne ovat identtisiä Galileon taajuuksien E1 ja E5a sekä BeiDoun taajuuksien B1C ja B2A kanssa. Miksi arvelet, että Galileon ja BeiDoun suunnittelijat ovat tehneet tämän valinnan?

Painovoiman mittaus lennossa

12

Sanonta on tuttu:

> ”Toisen kohina on toisen signaali.”

Inertianavigointi perustuu oletukseen, että Maan painovoimakenttä tunnetaan. Silloin voidaan alkusijainnista $\mathbf{x}(t_0)$ ja alkunopeudesta $\boldsymbol{v}(t_0)$ laskea sijainti ja nopeus eteenpäin ajassa, askel askeleelta, jotta saadaan sijainti ja nopeus $\mathbf{x}(t), \boldsymbol{v}(t)$ milloin tahansa myöhempänä ajankohtana t.

Käänteisesti, jos on olemassa *riippumaton* tietolähde, kuten GNSS-vastaanotin, joka antaa sijainnin ja nopeuden kehityksen ajassa riittävän tarkasti, voidaan inertiateknologia valjastaa Maan painovoimakentän kartoittamiseen.

Hyvin toimivien navigointisatelliittijärjestelmien ansiosta on nykyään mahdollista suorittaa gravimetrisia mittauksia ilmasta. Ja satelliitin tarkan kolmiulotteisen liikkeen jatkuva seuranta GNSS-järjestelmän avulla on yksi Maan painovoimakentän kartoittamisen tekniikka.

Olkoon lentokoneen tai satelliitin sijainti inertiaalisessa koordinaatistossa ajan funktiona $\mathbf{x}^*(t)$ ja sen diskreetti mittausaikasarja $\mathbf{x}_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}^*(t_i)$. Silloin geometrinen kiihtyvyys voidaan laskea likimäärin seuraavasti:

$$\mathbf{a}^*(t_i) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}^*\bigg|_{t_i} \approx \frac{\mathbf{x}^*_{i+1} + \mathbf{x}^*_{i-1} - 2\mathbf{x}^*_i}{\Delta t^2},$$

jossa $\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} t_{i+1} - t_i$ on peräkkäisten epookkien aikaväli.

Oletetaan, että samanaikaisesti ”painovoima” $\widetilde{\mathbf{g}}$, joka *tuntuu* lentokoneessa, mitataan vektorikiihtyvyysmittarilla. Tässä vaiheessa oletamme yksinkertaisuuden vuoksi myös, että $\mathbf{x}^*$ ja $\widetilde{\mathbf{g}}$ on annettu samalla akselistolla eli kiihtyvyyden mittausakseleiden suunnat ovat samat kuin paikkakoordinaattiakseleiden suunnat.

Silloin Maan inertiaalisessa koordinaatistossa pätee yhtälön 5.14 mukaan

$$\mathbf{g}^* = \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{a}^*, \tag{12.1}$$

jossa $\tilde{\mathbf{g}} = -\tilde{\mathbf{a}}$. Nyt yhtälön 5.15 mukaan painovoima Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa on

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^* - \Big\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \big\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{x} \big\rangle \Big\rangle. \tag{12.2}$$

Sijoita yhtälö 5.13 yhtälöön 12.1:

$$\mathbf{g}^* = \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{a} + 2\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{v} \rangle + \Big\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \big\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{x} \big\rangle \Big\rangle.$$

Tämän sijoitus yhtälöön 12.2 antaa

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{a} + 2\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{v} \rangle. \tag{12.3}$$

12.1 Vektori-ilmagravimetria

Jos lentokoneessa on sekä inertiamittausyksikkö että GNSS-vastaanotin, voidaan määrittää $\mathbf{x}(t_i)$, $\mathbf{v}(t_i)$, $\mathbf{a}(t_i)$ ja $\tilde{\mathbf{g}}(t_i)$, ja yhtälön 12.3 avulla voidaan laskea $\mathbf{g}(t_i)$. Tällä menetelmällä kartoitetaan siis painovoimakenttä ilmasta.

Käytännössä sekä GNSS-laitteen että inertialaitteen tuottamat tietovirrat syötetään Kalmanin suotimeen, joka tulostaa koneen tarkan reitin ja painovoimaprofiilin. Vektori-ilmagravimetriassa painovoima mitataan kolmiulotteisena vektorina. Tiedonsiirtonopeus on tyypillisesti korkea: useita havaintoepookkeja sekunnissa. Lentokoneen liikkeiden takia sekä geometrisen kiihtyvyyden $\mathbf{a}$ että koneessa tuntuvan painovoiman $\tilde{\mathbf{g}}$ ajalliset vaihtelut ovat suuria, tuhansia milligalleja, mutta suureen $\mathbf{g}$ lopullinen määritystarkkuus voi olla jopa vain muutaman milligalin.

Vektori-ilmagravimetria ei ole tarkkuudeltaan aivan samaa tasoa kuin seuraavana esitettävä tekniikka: skalaari-ilmagravimetria. Tämä johtuu siitä, että inertialaitteen sisältämät tarkat kiihtyvyysmittarit eivät ole parhaiden gravimetrien tasolla.

12.2 Skalaari-ilmagravimetria

Tässä tekniikassa käytetään perinteistä *gravimetria* eli painovoiman mittauskojetta. Gravimetri on modifioitu siten, että sen avulla on mahdollista tehdä mittauksia ympäristössä, jossa vaikuttavat painovoiman lisäksi voimakkaat, vaihtelevat geometriset kiihtyvyydet. Modifikaatio,

vaimennus, on sama kuin se, joka tehdään, jotta mittaukset merellä olisivat mahdollisia. Gravimetri asennetaan *vakautetulle alustalle*. Alustan vakautus tapahtuu gyroskooppien avulla, osio 5.5.

Gravimetri mittaa kulkuneuvon sisällä ”tuntuvan” vapaan putoamisen kiihtyvyyden, mutta vain paikallisen luotiviivan suuntaan. Jos paikallisen luotiviivan suunta on yksikkövektori $\mathbf{n}$ (*alaspäin*), on mittasuure $\widetilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{n} \cdot \widetilde{\mathbf{g}} \rangle$.

Lähdetään yhtälöstä 12.3:

$$\mathbf{g} = \widetilde{\mathbf{g}} + \mathbf{a} + 2\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v} \rangle. \tag{12.3}$$

Lasketaan skalaaritulo vektorin $\mathbf{n}$ kanssa:

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{n} \cdot \widetilde{\mathbf{g}} \rangle + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \rangle + 2\Big\langle \mathbf{n} \cdot \langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v} \rangle \Big\rangle = \|\mathbf{g}\| \stackrel{\text{def}}{=} g,$$

koska luotiviiva on painovoiman suuntainen. Siis

$$g = \widetilde{g} + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \rangle + 2\Big\langle \mathbf{n} \cdot \langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v} \rangle \Big\rangle.$$

Jos lentokone seisoo maassa, $\mathbf{a} = \boldsymbol{v} = 0$, siis $g = \widetilde{g}$. Jos lentokone on ilmassa, termi

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \rangle = -\frac{d}{dt} v_{\text{ylös}} + \frac{v_{\text{itä}}^2}{N + h} + \frac{v_{\text{pohj}}^2}{M + h}$$

edustaa pystysuuntaista kiihtyvyyttä. Tässä $v_{\text{ylös}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} h$, jossa h on korkeus vertausellipsoidista. Vertausellipsoidin käyttö tällä tavalla tuo kaksi termiä maanpinnan kaareutumisesta alaspäin: pystysuuntainen kiihtyvyys on sama kuin korkeuden toinen derivaatta vain, jos vaakaliikettä ei ole. $M(\varphi)$ ja $N(\varphi)$ ovat Maan vertausellipsoidin kaarevuussäteet meridiaanisuunnassa (etelä-pohjoinen) ja poikittaissuunnassa (länsi-itä): meridiaani- ja poikittaiskaarevuussäteet.

Termi

$$2\Big\langle \mathbf{n} \cdot \langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v} \rangle \Big\rangle = 2\omega_\oplus \cos\varphi \cdot v_{\text{itä}}$$

edustaa lentokoneen länsi-itäsuuntaisen nopeuden aiheuttamaa corioliskiihtyvyyttä, jolla on pystysuuntainen komponentti: lentokone on hieman kevyempi lentäessään Maan pyörähdysliikkeen mukana ja hieman painavampi lentäessään sitä vastaan.

Ilmaistuna geodeettisiin koordinaatteihin (φ, λ, h) saadaan lambda λΛ

$$g = \widetilde{g} - \frac{d}{dt} v_{\text{ylös}} +$$

$$+\overbrace{(N+h)\left(\left(\omega_\oplus\cos\varphi+\frac{v_{\text{itä}}}{N+h}\right)^2-(\omega_\oplus\cos\varphi)^2\right)}^{\text{länsi-itä, erotus}}+\overbrace{\frac{v_{\text{pohj}}^2}{M+h}}^{\text{etelä-pohjoinen}}=$$

$$=\tilde{g}-\frac{d}{dt}v_{\text{ylös}}+\left(\frac{v_{\text{itä}}}{N+h}+2\omega_\oplus\cos\varphi\right)v_{\text{itä}}+\frac{v_{\text{pohj}}^2}{M+h}.$$

oomega ωΩ

Tässä $v_{\text{itä}}$ ja v_{pohj} ovat nopeuden itä- ja pohjoiskomponentit, ja $\omega_\oplus$ on Maan pyörähdysliikkeen kulmanopeus. Suure h on korkeus vertausellipsoidista ja φ maantieteellinen leveysaste.

Painovoima g sisältää jo Maan pyörähdysliikkeen aiheuttaman keskipakoiskiihtyvyyden pystyosuuden $-(N+h)(\omega_\oplus\cos\varphi)^2$, aivan kuten painovoimavektori $\mathbf{g}$ sisältää Maan pyörimisliikkeen keskipakoiskiihtyvyyden, $-\left\langle\boldsymbol{\omega}_\oplus\times\left\langle\boldsymbol{\omega}_\oplus\times\mathbf{x}\right\rangle\right\rangle$, vektorina, yhtälö 12.2.

1 Yllä olevan yhtälön kahta viimeistä termiä kutsutaan Eötvösin[1] korjaukseksi, katso Wei ja Schwarz (1996).

12.3 Kalmanin suotimen käyttö ilmagravimetriassa

Kirjoitetaan yhtälö 12.3,

$$\mathbf{g}=\tilde{\mathbf{g}}+\mathbf{a}+2\left\langle\boldsymbol{\omega}_\oplus\times\boldsymbol{v}\right\rangle, \tag{12.3}$$

stokastisesti ”dynaamisen kohinan” $\underline{\mathbf{n}}_a$ kanssa:

$$\underline{\mathbf{a}}=\frac{d^2}{dt^2}\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{g}}-\underline{\tilde{\mathbf{g}}}-2\left\langle\boldsymbol{\omega}_\oplus\times\underline{\boldsymbol{v}}\right\rangle+\underline{\mathbf{n}}_a.$$

Geosentrisissä koordinaateissa voidaan kirjoittaa määritelmällä 5.10:

$$\left\langle\boldsymbol{\omega}_\oplus\times\boldsymbol{v}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix}0\\0\\\omega_\oplus\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}\right\rangle=\omega_\oplus\begin{bmatrix}-v_y\\v_x\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\omega_\oplus\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=}\omega_\oplus\Omega\boldsymbol{v}.$$

Muodosta ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{x}}\\\underline{\boldsymbol{v}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{\boldsymbol{v}}\\\underline{\mathbf{g}}-\underline{\tilde{\mathbf{g}}}-2\omega_\oplus\Omega\underline{\boldsymbol{v}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\underline{\mathbf{n}}_a\end{bmatrix}.$$

[1] Paroni Loránd Eötvös de Vásárosnamény (1848–1919) oli unkarilainen fyysikko ja gravitaation tutkija.

Tässä $\widetilde{\mathbf{g}} = \widetilde{\mathbf{g}}(t)$ on mitattu suure, mutta $\mathbf{g} = \mathbf{g}(t)$ ei ole.

Kirjoita

$$\mathbf{g} = \boldsymbol{\gamma} + \delta\mathbf{g},$$

jossa $\boldsymbol{\gamma}$ on sopiva vertausarvo, esimerkiksi normaalipainovoimakentästä laskettuna, ja $\delta\mathbf{g}$ on *painovoimahäiriö*. Mallinnetaan $\delta\mathbf{g}$ empiirisesti Gaussin ja Markovin prosessina, yhtälö 2.28: gamma $\gamma\Gamma$

$$\frac{d}{dt}\underline{\delta\mathbf{g}} = -\frac{\underline{\delta\mathbf{g}}}{\tau} + \underline{\mathbf{n}}_g,$$

jossa τ on sopivasti valittu empiirinen aikavakio. Sen valinta riippuu paikallisen painovoimakentän käyttäytymisestä (korrelaatiopituus) sekä lentonopeudesta ja -korkeudesta. tau τT

Nyt Kalmanin suotimen dynaaminen malli on

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{x}}\\ \underline{\mathbf{v}}\\ \underline{\delta\mathbf{g}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & I & 0\\ 0 & -2\omega_\oplus\Omega & I\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{x}}\\ \underline{\mathbf{v}}\\ \underline{\delta\mathbf{g}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\gamma}-\widetilde{\mathbf{g}}\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \underline{\mathbf{n}}_a\\ \underline{\mathbf{n}}_g\end{bmatrix}.$$

Tilavektorin pituus on näin ollen 9. Kerroinmatriisi on 3×3 -kokoinen ja koostuu 3×3 -kokoisista alimatriiseista eli kokonaiskoko on 9×9 alkiota.

Hienostuneempi käsittelytapa ottaa huomioon, että painovoima on tuntemattoman sijainnin $\mathbf{x}$ funktio:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) \approx \boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) + \mathcal{M}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\Delta\mathbf{x},$$

jossa $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)}(t)$ on sijainnin *likiarvo*, jota käytetään linearisoinnissa, katso alla. Tässä pulpahtaa esiin *gravitaatiogradienttitensori* $\mathcal{M}$, yhtälö 3.9.

Silloin myös $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{v}$ on linearisoitava, ja on käytettävä linearisoituja tila-alkioita $\Delta\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}$ ja $\Delta\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v} - \mathbf{v}^{(0)}$ tilavektorissa. Likiarvoja määrittelevä yhtälö on

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{(0)}\\ \mathbf{v}^{(0)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{(0)}\\ \mathbf{v}^{(0)}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}^{(0)}) - \widetilde{\mathbf{g}}\end{bmatrix}.$$

Lopputulos saadaan vähentämällä:

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}\\ \Delta\underline{\mathbf{v}}\\ \underline{\delta\mathbf{g}}\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{x}}} = \overbrace{\begin{bmatrix}0 & I & 0\\ \mathcal{M} & -2\omega_\oplus\Omega & I\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau}I\end{bmatrix}^{(0)}}^{F}\overbrace{\begin{bmatrix}\Delta\underline{\mathbf{x}}\\ \Delta\underline{\mathbf{v}}\\ \underline{\delta\mathbf{g}}\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{x}}} + \overbrace{\begin{bmatrix}0\\ \underline{\mathbf{n}}_a\\ \underline{\mathbf{n}}_g\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{n}}}.$$

Päivitysaskeleen GNSS-havaintoyhtälö on

$$\boldsymbol{\ell}_k = \underline{\mathbf{x}}(t_k) + \underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{x}}^{(0)}(t_k) + \Delta\underline{\mathbf{x}}(t_k) + \underline{\mathbf{m}},$$

jossa "kohinavektori" $\underline{\mathbf{m}}$ kuvaa GNSS-navigoinnin tilastollista epävarmuutta.

Sekä dynaamisille kohinatermeille $\underline{\mathbf{n}}_a$ ja $\underline{\mathbf{n}}_g$ että GNSS:n havaintokohinalle $\underline{\mathbf{m}}$ on muodostettava sopivia tilastollisia malleja (varianssit $Q_n(t)$ ja R) mittalaitteiden ja painovoimakentän ominaisuuksien perusteella. Vektorit $\underline{\mathbf{n}}_a$ ja $\underline{\mathbf{n}}_g$ edustavat lentokoneessa tehtyjen painovoimamittausten $\widetilde{\mathbf{g}}$ epävarmuutta ja painovoimakentän $\delta\underline{\mathbf{g}}$ vaihtelevuutta.

On hyvä pitää mielessä Kalmanin suotimen integroiva luonne. Mittaukset $\widetilde{\mathbf{g}}$ sisältävät vahvoja korkeataajuisia eli alle sekunnin vaihteluita, jotka syntyvät koneen liikkeistä. Nämä vaihtelut imeytyvät helposti koneen nopeuden $\boldsymbol{v}$ ja sijainnin $\boldsymbol{x}$ estimaatteihin, kuten pitääkin, eivätkä vaikuta suureeseen $\delta\mathbf{g}$, jonka korrelaatioaika τ on pitkä. Jotta spatiaalinen erotuskyky lentorataa pitkin olisi hyvä, lentonopeuden tulisi olla mahdollisimman alhainen. Potkurikoneet, kuten suosittu kanadalainen DHC-6 Twin Otter®[2], ovat sopivia tähän.

12.4 Antureiden välinen kalibrointi

Yllä olevassa teoriassa oletetaan, että GNSS-paikannusmittaukset ja gravimetriset mittaukset viittaavat samaan kohtaan lentokoneen sisällä. Niin ne eivät kuitenkaan tee: GNSS-antennit on asennettava katolle (mikä on muuten painajaismainen paikka monitieheijastusten kannalta) ja gravimetri puolestaan sijaitsee alempana lentokoneen sisällä. Kojeiden integrointi edellyttää niiden välisten siirtymävektorien määrittämistä kalibroimalla.

Hyvä tapa on *in-flight*-kalibrointi: lentokoneen runko on taipuisa, joten vektorit ovat erilaisia, kun kone seisoo maassa ja kun se on ilmassa. Vektorit riippuvat myös polttoainelastista. Siirtymävektorit on sisällytettävä tuntemattomina mittausten käsittelyyn, tavallisesti Kalmanin suotimen avulla, osio 12.3.

12.5 Ilmagravimetrian nykytila

Ensimmäisiä menestyksekkäitä ilmagravimetriaprojekteja oli Brozena (1992), eli Grönlannin painovoimakartoitus *Greenland Aerogeophysics*

[2] Twin Otter on Viking Air Ltd:n rekisteröity tavaramerkki.

Kuva 12.1. Lockheed Hercules C-130[a] nousee — suksilla! — Grönlannin NorthGRIP-jääkairausasemalta, joka sijaitsee kolme kilometriä merenpinnan yläpuolella. Huomaa JATO-raketit (*jet-assisted take-off*), jotka avustavat lentoon lähtöä kiitoradalta, joka on myös kolme kilometriä pitkä. Nielsen (2005).

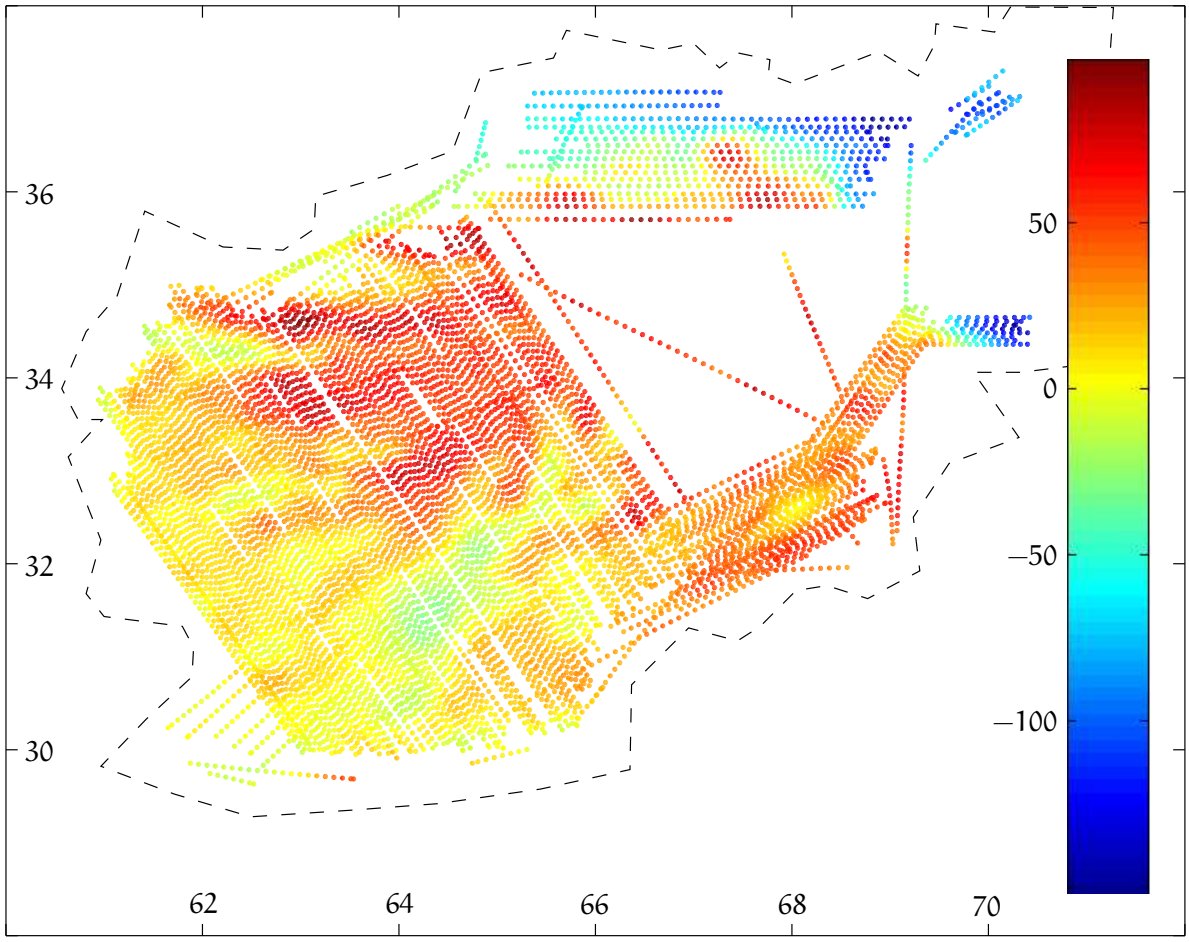
[a] C-130 on The Lockheed Martin Corporationin rekisteröity tavaramerkki.

Projectin puitteissa.

On mainittava myös monia myöhempia mittauksia, jotka on usein tehty arktisilla alueilla tai Etelämantereella. Lue lisää Forsberg ym. (1996, 2011). Näiden työmaiden logistiset edellytykset ovat yleensä ”haastavia”, katso kuva 12.1.

Ilmagravimetria on sopiva tekniikka, jos kartoitettava alue on laaja- ja eikä aikaisempia maanpinnalla tehtyjä painovoimakartoituksia ole saatavilla. Ilma- ja avaruusgravimetrian etuihin kuuluu *homogeenisuus*: mittauksen laatu on sama laajoilla alueilla ja pitkän kantaman systemaattiset virheet ovat pieniä. Tämä on erityisen tärkeää, jos painovoima-aineisto on tarkoitettu geoidimallin määrittämiseen.

Ilmagravimetriakartoituksia on suoritettu esimerkiksi Etiopiassa (Bedada, 2010), Mongoliassa (Munkhtsetseg, 2009) ja useissa muissakin maissa.



KUVA 12.2. Afganistanin ilmagravimetriakartoitus. Värit esittävät ilma-anomalioita lentokorkeudella. Yksikkö on milligal (USGS Open-File Report 2008-1089). Alkuperäisaineistoa on harvennettu 50×.

12.6 Maan painovoimakentän tutkimus avaruudesta

Yhtälössä 12.3 suure $\tilde{\mathbf{g}}$ on noin Maan pinnan painovoiman suuruinen (noin $10\,\mathrm{m/s^2}$), kun geometrinen kiihtyvyys $\mathbf{a}$ on huomattavasti pienempi. Ihannetapauksessa geometrinen kiihtyvyys olisi nolla, mikä vastaa mittauksia kiinteän Maan pinnalla. Sekä meri- että ilmagravimetriassa geometrinen kiihtyvyys eroaa kuitenkin selvästi nollasta, mikä hankaloittaa painovoiman tarkkaa mittausta. Kulkuneuvon liikkeet ovat mittauksen kannalta häiriöitä.

Avaruudesta tapahtuvassa painovoimakentän mittauksessa tilanne on päinvastainen. Yhtälössä 12.1 satelliitissa tuntuva paikallinen painovoima $\tilde{\mathbf{g}}$ on nolla tai hyvin lähellä nollaa, eli vallitsee *painottomuus*. Geometrinen kiihtyvyys $\mathbf{a}^*$ on melkein Maan pinnan painovoiman suuruinen, koska satelliitti *putoaa* vapaasti lentäessään kiertoradalla.

Geometrinen kiihtyvyys mitataan GNSS:n avulla: *"high-low satellite-to-satellite tracking"*. Myös satelliitin oma ei-inertiaalinen liike eli kiihtyvyys $\tilde{\mathbf{a}} = -\tilde{\mathbf{g}}$ mitataan kiihtyvyysmittareiden avulla. Ei-inertiaalisen kiihtyvyyden suurin aiheuttaja on ilmakehän vastus, koska painovoimakenttää tutkivan satelliitin rata valitaan mahdollisimman alhaiseksi: radan korkeus on tyypillisesti 250–400 km.

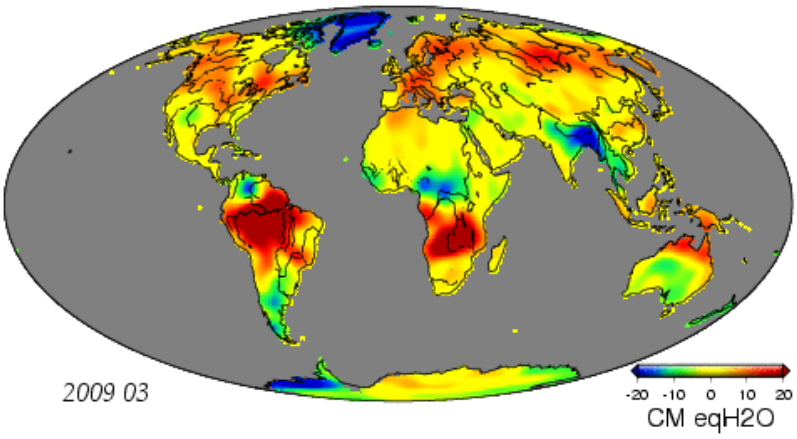
Viime vuosikymmenien aikana on lentänyt kolme eri painovoimamissiota: CHAMP, GRACE ja GOCE.

- CHAMP (GFZ, CHAMP — Challenging Minisatellite Payload). Saksalainen satelliitti lensi vuosina 2000–2010 ja tuotti kohtalaisen suuren määrän dataa.
- GRACE (University of Texas, GRACE — Gravity Recovery and Climate Experiment). Amerikkalais-saksalainen satelliittipari mittasi erikoislaitteensa avulla tarkan etäisyyden peräkanaa lentävän satelliittiparin ("Tom" ja "Jerry") välillä: *"low-low satellite-to-satellite tracking"*. Mittausten tavoitteena oli Maan painovoimakentän ajallisten muutosten seuraaminen. Lento, vuodesta 2003 vuoteen 2018, oli suuri menestys. Animaatio sen tuloksista löytyy kuvasta 12.3. Tällä hetkellä toiminnassa on sen seuraaja, GRACE-FO ("GRACE Follow-On").
- GOCE (Gravity Field and Ocean Circulation Explorer). Satelliitti kartoitti vuosina 2009–2013 Maan painovoimakentän hyvin yksityiskohtaisesti *gravitaatiogradiometrin* avulla, katso ESA, Introducing GOCE. GOCE-satelliitilla oli *ionimoottori* ilmakehän vastuksen kompensoimiseksi. Se mahdollisti myös matalan radan. Suunnittelijoille oli haaste erottaa gravitaatiogradientti ilmakehän ja Maata kiertävän satelliitin oman hitaan pyörimisen vaikutuksista.

Kaikissa satelliiteissa oli mukana GNSS-vastaanotin ja kiihtyvyysmittareita, GOCEn tapauksessa jopa kokonainen gradiometri. Se sisälsi kuusi äärimmäisen herkkää kiihtyvyysmittaria.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä teknologian kehitysaskel teki gravimetriset mittaukset ilmasta yhtäkkiä mahdollisiksi?
2) Mitkä ovat erot vektori- ja skalaari-ilmagravimetrian välillä?
3) Mikä on ero lentokoneessa tapahtuvan painovoimamittauksen $\tilde{\mathbf{g}}$



KUVA 12.3. GRACE-mission tulokset massan pintakerroksena ilmaistuna vastaavina vesisenttimetreinä. Hiirennapsautus antaa animaation (e-kirja).

ja kiihtyvyysmittauksen $\tilde{\mathbf{a}}$ välillä?

4) Mikä on Eötvösin korjaus?
5) Katso kuvaa 12.1 ja lue kuvateksti. Miksi Hercules tarvitsisi JATO-raketteja lentoon lähtönsä avuksi (kaksi syytä)? Millä tavalla rakennetaan kiitorata mannerjäätikön päälle?
6) Miksi mittalaitteiden välisten siirtymävektorien kalibrointimenetelmänä *in-flight*-kalibrointi on suositeltavaa?
7) Miksi GOCE-satelliitilla oli ionimoottori?
8) Mikä on *high-low* ja *low-low satellite-to-satellite tracking*?

Anturifuusio ja sattuman anturit

13

Teknologisen navigoinnin taito syntyi merenkulussa kauan sitten. Kun ala kehittyi, vastaavat menetelmät otettiin käyttöön myös ilmailussa ja avaruusmatkailussa. Teknologinen navigointi leviää parhaillaan miljoonien tavallisten ihmisten elämään auto- ja jalankulkijanavigoinnin muodossa.

Antureita on tarjolla laaja kirjo. Toiset on tarkoitettu navigointiin, kuten satelliittipaikannus ja inertiamittausanturit. Toiset on tarkoitettu muuhun käytöön, mutta esimerkiksi mobiilitukiasemaverkkoja ja sisätilan langattomia lähiverkkoja (WLAN) voidaan soveltaa myös navigointiin. Siksi hyvä kysymys on, mikä on paras tapa käyttää näitä antureita yhdessä integroidulla tavalla.

Anturifuusio on monianturiratkaisu, jonka tarkoitus on vähentää epävarmuutta esimerkiksi paikan määrityksessä navigoinnin aikana (Wikipedia, Datafuusio). Anturit voivat olla samanlaisia tai erilaisia, jolloin puhutaan homogeenisesta tai heterogeenisesta anturifuusiosta.

Anturifuusio toteutetaan usein käyttämällä eri antureiden ulostuloja Kalmanin tai vastaavan suotimen syöttötietona. Jos käytetään raakoja havaintoja ja anturit mallinnetaan suotimen sisällä, puhutaan ”tiiviisti integroidusta” anturifuusiosta. Jos anturit käsittelevät tietoja itse ennen niiden lähettämistä suotimen ohjelmistoon, puhutaan ”löysästi integroidusta” anturifuusiosta.

Sattuman anturit ovat antureita, jotka palvelevat jotakin muuta tarkoitusta, mutta joita voidaan valjastaa paikannukseen tai navigointiin. Esimerkkejä:

- Matkapuhelimen kiihtyvyysmittari. Sen päätarkoituksena on suunnata näyttö ylöspäin (potretti tai maisema) riippuen siitä, miten päin käyttäjä pitää puhelinta kädessään. Kiihtyvyysmitta-

ria voidaan käyttää myös antamaan navigaattorille paikallisen painovoiman suunta.

- Nopeusmittari autossa. Sen päätarkoitus on tiedottaa kuljettajalle auton nopeudesta turvallisuuden ja nopeusrajoitusten takia.
- Ilmanpaineanturi lentokoneessa. Ilmanpainetta käytetään korkeuden mittana, joka pitää lentokoneet turvallisesti erillään toisistaan pystysuunnassa. Kuitenkin ilmanpaine on myös koneen yläpuolella olevan ilmakehän ainemäärän mitta, joka vaikuttaa GNSS-satelliittien signaalin etenemiseen.

Anturifuusio voi sisältää myös *taustatietoa*, joka ei ole varsinaista anturin mittausta. Hyviä esimerkkejä:

- Perinteinen tekniikka on käyttää tunnettuja maamerkkejä.
- Kulkuneuvo voi pysähtyä ja kertoa suotimen ohjelmistolle, että nopeus on nolla: *nollanopeuspäivitys*.
- Matkapuhelin, joka on kävelijän tai autoilijan käytössä voi olettaa, että sen näytön yläreuna osoittaa liikkumisen suuntaan.
- Auton sivuttaisen nopeuden oletetaan aina olevan nolla.
- Auton oletetaan aina seuraavan tietä, kuten tunnelissa GNSS-yhteyden ulkopuolella.
- Kiihtyvyyksille eri suuntiin voidaan olettaa ylärajat. Jos kulkuneuvossa on ihmisiä, ihmiskehon sietokyky asettaa raja-arvot.

Seuraavassa esitetään joitakin anturifuusion ja sattuman antureiden teknologioita. Kyseessä on laaja ja alati kasvava ala, joka perustuu nopeasti kehittyviin teknologioihin. Raapaisemme tässä vain sen pintaa.

13.1 Case: Sky Map

Matkapuhelimen antureiden luovan käytön esimerkkitapaus on avoimen lähdekoodin sovellus *Sky Map*, joka on saatavissa Android™[1]-käyttöjärjestelmälle (Google Play, Sky Map). Kalibroinnin jälkeen Sky Map näyttää tähdet oikeissa paikoissa, kun puhelinta pidetään taivasta vasten. Se näyttää jopa tähdet ja muut kohteet, jotka ovat horisontin alapuolella!

Kalibrointi tapahtuu valmistajan suosittelemalla kahdeksikkoliikkeellä eli pyörittämällä laitetta käsin kolmen eri akselin ympärillä.

[1] Android on Google Inc:n tavaramerkki.

Ilmeisesti sovellus käyttää kolmen akselin kiihtyvyysmittaria, mikä on yleistä matkapuhelimissa. Lisäksi sovellus hyödyntää magnetometria kompassipohjoisen löytämiseksi.

Tilannetta voidaan analysoida seuraavasti. Olkoon kiertomatriisi puhelimen koordinaatiston ja Maahan kiinnitetyn koordinaatiston välillä R. Olkoon painovoiman kiihtyvyysvektori $\mathbf{g}$ ja magneettikentän vektori $\mathbf{m}$. Oletetaan, että molemmat vektorit voidaan laskea Maahan kiinnitetyssä koordinaatistossa ja mitata puhelimen rungon koordinaatistossa.

Näiden kahden vektorin perusteella voidaan konstruoida *ortonormaali kanta* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ soveltamalla Gramin ja Schmidtin ortonormalisointia seuraavasti:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{m} - \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{m} \rangle}{\|\mathbf{m} - \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{m} \rangle\|}, \quad \mathbf{w} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle. \tag{13.1}$$

Näillä vektoreilla on kunkin koordinaatiston kannalla seuraavat komponentit:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k} = b_{11}\mathbf{i}' + b_{12}\mathbf{j}' + b_{13}\mathbf{k}', \\ \mathbf{v} &= a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k} = b_{21}\mathbf{i}' + b_{22}\mathbf{j}' + b_{23}\mathbf{k}', \\ \mathbf{w} &= a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k} = b_{31}\mathbf{i}' + b_{32}\mathbf{j}' + b_{33}\mathbf{k}', \end{aligned} \tag{13.2}$$

jossa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ja $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ ovat vastaavasti Maahan kiinnitetyn ja puhelimen rungon koordinaatistojen ortonormaalit kannat.

Näillä määritelmillä nähdään, että matriisit

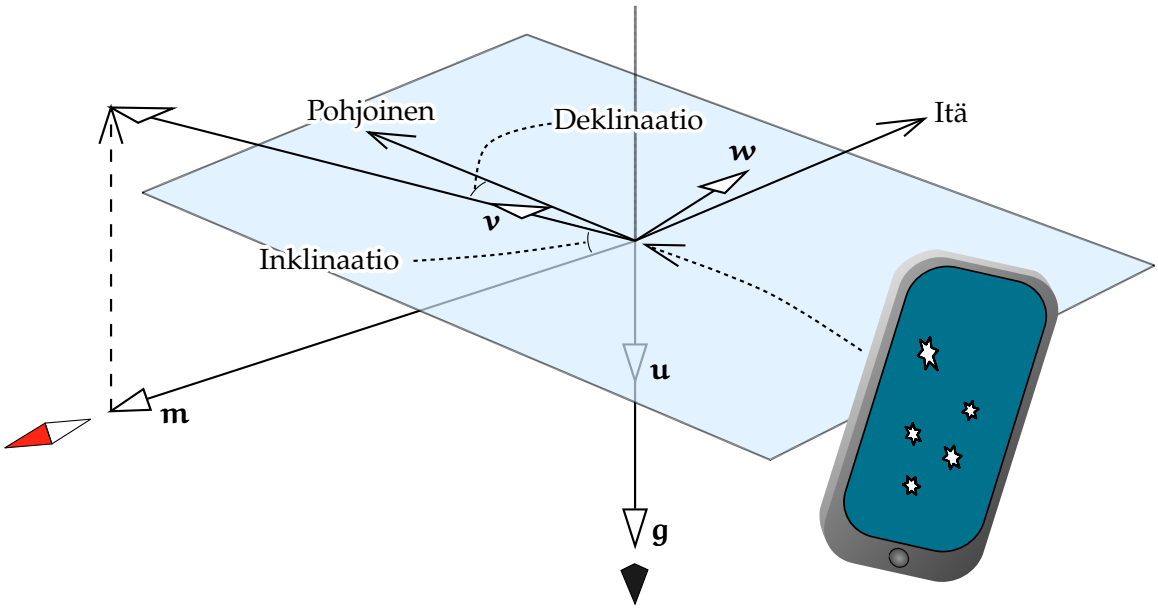
$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

ovat molemmat ortogonaalisia. Kirjoitetaan yhtälö 13.2 muotoon

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} = B^{-1}A \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}.$$

Tässä kiertomatriisi $R \stackrel{\text{def}}{=} B^{-1}A = B^{T}A$ on yksiselitteinen ja laskettavissa.

Yhtälöiden 13.1 toimivuuden ehto on tietenkin, että magneettinen kenttävektori ja painovoimavektori eivät ole yhdensuuntaisia: $\mathbf{m} \nparallel \mathbf{g}$, mikä pitää paikkansa kaikkialla paitsi magneettisilla navoilla. Tämä käy järkeen, koska näissä kahdessa paikassa ei magneettinen kompassikaan toimi!



KUVA 13.1. Matkapuhelimen suuntaus kiihtyvyysmittarin ja magnetometrin avulla.

Yleisemmin kahden riippumattoman vektorin määrittäminen kahdessa eri koordinaatistossa mahdollistaa koordinaatistojen välisen kiertomatriisin määrittämisen. Tulemme näkemään sen myös osiossa 13.4 kahdelle vektorille, jotka määritetään kolmella GNSS-antennilla, jotka eivät ole samalla suoralla.

Kolmen akselin vektoriantureiden kalibrointi on laaja aihe. Tässä tutkitaan kahta tapausta: akseleiden mittakaavojen, suuntien ja ortogonaalisuuden kalibrointia ja mitattavassa vektorissa olevan vakiosiirtymän poiskalibrointia.

13.1.1 *Akseleiden mittakaavojen ja suuntien kalibrointi*

Kolmiakselisen kiihtyvyysmittarin akselien mittakaavat ja suunnat voidaan kalibroida laboratoriossa. Käytetään paikallisen painovoiman tunnettua vahvuutta ja suuntaa $\mathbf{g}$. Puhelin asennetaan alustalle ja käännetään siten, että puhelimen kolmesta akselista jokainen osoittaa vuorollaan $\mathbf{g}$:n suuntaan. Kalibrointiyhtälö on

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_i = G\,\mathbf{g}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

jossa g_x, g_y ja g_z ovat anturin akseleiden raa'at lukemat ja $\mathbf{g}_i$ painovoimavektori puhelinrungon kannalla kussakin kolmesta mittausasennos-

TAULU 13.1. Sky Mapin koodi, joka suorittaa tekstissä kuvatun Gramin ja Schmidtin menetelmän matkapuhelimen asennon määrittämiseksi. GitHubin koodivarannosta, Sky Map Devs, Stardroid.

```
/**
 * Calculates local North and Up vectors in terms of the phone's coordinate
 * frame from the magnetic field and accelerometer sensors.
 */
private void calculateLocalNorthAndUpInPhoneCoordsFromSensors() {
  Vector3 magneticNorthPhone;
  Vector3 magneticEastPhone;
  if (useRotationVector) {
    float[] rotationMatrix = new float[9];
    SensorManager.getRotationMatrixFromVector(rotationMatrix, rotationVector);
    // The up and north vectors are the 2nd and 3rd rows of this matrix.
    magneticNorthPhone = new Vector3(rotationMatrix[3], rotationMatrix[4],
          rotationMatrix[5]);
    upPhone = new Vector3(rotationMatrix[6], rotationMatrix[7],
          rotationMatrix[8]);
    magneticEastPhone = new Vector3(rotationMatrix[0], rotationMatrix[1],
          rotationMatrix[2]);
  } else {
    // TODO(johntaylor): we can reduce the number of vector copies done in here.
g   Vector3 down = acceleration.copy();
u   down.normalize();
    // Magnetic field goes *from* North to South, so reverse it.
    Vector3 magneticFieldToNorth = magneticField.copy();
m   magneticFieldToNorth.scale(-1);
    magneticFieldToNorth.normalize();
    // This is the vector to magnetic North *along the ground*.
    magneticNorthPhone = addVectors(magneticFieldToNorth,
    scaleVector(down, -scalarProduct(magneticFieldToNorth, down)));
v   magneticNorthPhone.normalize();
    upPhone = scaleVector(down, -1);
w   magneticEastPhone = vectorProduct(magneticNorthPhone, upPhone);
  }
  // The matrix is orthogonal, so transpose it to find its inverse.
  // Easiest way to do that is to construct it from row vectors instead
  // of column vectors.
  axesPhoneInverseMatrix = new Matrix33(magneticNorthPhone, upPhone,
          magneticEastPhone, false);
}
```

ta.

Saadaan kolme yhtälöä,

$$\begin{bmatrix} g_{x,1} \\ g_{y,1} \\ g_{z,1} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{x,2} \\ g_{y,2} \\ g_{z,2} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{x,3} \\ g_{y,3} \\ g_{z,3} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix},$$

jossa g on todellinen painovoiman kiihtyvyysarvo eli vertausarvo puhelimen sijainnilla.

Kalibrointimatriisin G ratkaisu on

$$G = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{x,1} & g_{x,2} & g_{x,3} \\ g_{y,1} & g_{y,2} & g_{y,3} \\ g_{z,1} & g_{z,2} & g_{z,3} \end{bmatrix}.$$

Kun kalibrointi on tehty, saadaan kalibroituna mittauksena

$$\mathbf{g}_{\text{kal}} = G^{-1} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}.$$

Kalliimmilla puhelimilla tämä kalibrointi tehdään valmistuksen jälkeen ja kalibrointimatriisi kirjoitetaan laiteohjelmiston lukumuistiin (Zhang ym., 2019).

13.1.2 *Vakio vektorisiirtymän kalibrointi*

Magneettikentän mittauksessa on ongelmana, että paikallisten häiriöiden takia paikallinen kenttä voi poiketa merkittävästi globaalista mallista. Vielä vakavampi ongelma on *puhelimen generoima magneettikenttä*. Puhelin sisältää magneettisten materiaalien lisäksi sähkövirtoja, jotka tuottavat magneettikenttiä. Ja ne ovat hyvin lähellä[2]!

Itsegeneroitu kenttä kiertää puhelimen mukana, ulkoinen kenttä ei. Tämä mahdollistaa kenttien erottamisen toisistaan. Koska ohjelmisto ei voi tietää, millaiseen laitekokoonpanoon se on tullut asennetuksi, erottaminen on tehtävä ainakin kerran ja aina silloin, kun epäillään, että itsegeneroitu kenttä on muuttunut.

Olkoon m magneettikentän vahvuus, lukuun ottamatta itse puhelimen tuottamaa osaa, ja anturin kolmen akselin raa'at mittausarvot m_x, m_y ja m_z. Olkoon itsegeneroidun kentän komponentit μ_x, μ_y ja μ_z,

myy μM

[2] Vihje: tarkista, onko suojakotelon kannessa magneetti, joka pitää sen kiinni!

jotka tulee estimoida. Silloin

$$m^2 = (m_x - \mu_x)^2 + (m_y - \mu_y)^2 + (m_z - \mu_z)^2 + \nu,$$

mikä kertoo, että anturin lukemat $\begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \end{bmatrix}^T$ sijaitsevat pallon pinnalla, jonka säde on m ja keskipiste $\begin{bmatrix} \mu_x & \mu_y & \mu_z \end{bmatrix}^T$.

Kirjoitetaan tämä havaintoyhtälön muotoon:

$$\overbrace{\underline{m}_x^2 + \underline{m}_y^2 + \underline{m}_z^2}^{\underline{\ell}} + \underline{\nu} = \overbrace{m^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2 - \mu_z^2}^{\widehat{M}} + 2m_x\widehat{\mu}_x + 2m_y\widehat{\mu}_y + 2m_z\widehat{\mu}_z.$$

Jokaisen anturimittauksen jäännösvirhe $\underline{\nu}$ edustaa, paljonko etäisyys pallon keskipisteestä toiseen potenssiin eroaa pallon säteestä toiseen potenssiin eli m^2.

Jos on n havaintoa, ovat havaintojen vektori ja rakennematriisi

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} = \begin{bmatrix} \underline{m}_{x,1}^2 + \underline{m}_{y,1}^2 + \underline{m}_{z,1}^2 \\ \underline{m}_{x,2}^2 + \underline{m}_{y,2}^2 + \underline{m}_{z,2}^2 \\ \vdots \\ \underline{m}_{x,n}^2 + \underline{m}_{y,n}^2 + \underline{m}_{z,n}^2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2m_{x,1} & 2m_{y,1} & 2m_{z,1} \\ 1 & 2m_{x,2} & 2m_{y,2} & 2m_{z,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2m_{x,n} & 2m_{y,n} & 2m_{z,n} \end{bmatrix}.$$

Tuntemattomien vektori on

$$\widehat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \widehat{M} & \widehat{\mu}_x & \widehat{\mu}_y & \widehat{\mu}_z \end{bmatrix}^T.$$

Ratkaisu on

$$\widehat{\mathbf{x}} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \underline{\boldsymbol{\ell}},$$

jonka jälkeen

$$\widehat{m^2} = \widehat{M} + \widehat{\mu}_x^2 + \widehat{\mu}_y^2 + \widehat{\mu}_z^2.$$

Havaintoja tarvitaan mahdollisimman monesta kolmiulotteisesta asennosta, kuten puhelimen valmistajan suosittelema kahdeksikkoliike antaa. Kalibroitu magneettikentän mittaustulos on nyt

$$\mathbf{m}_{\text{kal}} = \begin{bmatrix} m_x - \widehat{\mu}_x \\ m_y - \widehat{\mu}_y \\ m_z - \widehat{\mu}_z \end{bmatrix}.$$

13.1.3 Kiihtyvyysmittarin ja magnetometrin mittausten yhdistäminen

Painovoimavektori $\mathbf{g}$ on laskettavissa leveys- ja pituusasteesta käyttäen esimerkiksi GRS80:n vertausellipsoidin painovoimakaavaa ainakin neljän desimaalin tarkkuudella.

Magneettikentän vektorille $\mathbf{m}$ tilanne ei ole yhtä hyvä. Varsinkin magneettikentän paikallisen suunnan epävarmuus on ongelma. Jos hyväksytään, että mitatun ja kalibroidun painovoimavektorin $\mathbf{g}_{\text{kal}}$ suunta on oikea, ainoa mielenkiintoinen lisätieto, jonka mitattu ja kalibroitu magneettikentän vektori $\mathbf{m}_{\text{kal}}$ voisi antaa, on atsimuuttikulma pystyakselin ympäri.

Katso yhtälö 13.1: vektorin $\mathbf{m}$ epävarmuus aiheuttaa vain epävarmuutta vektoreissa $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w}$. Koska molemmat ovat tasossa, joka on kohtisuorassa vektoriin $\mathbf{g}$, seuraa, että myös epävarmuus rajoittuu tähän tasoon. Ja koska $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ ja $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{w}\| = 1$, virhe voidaan yksinkertaisesti ilmaista yhtenä kiertokulmana tässä tasossa.

Kahden vektorin $\mathbf{g}_{\text{kal}}$ ja $\mathbf{m}_{\text{kal}}$ välillä oleva kulma, joka vastaa magneettiseen inklinaatioon, ei ole kiinnostava puhelimen asennonmäärityksen kannalta. Se kertoo vain magneettikentän paikallisista poikkeamista mallikentästä esimerkiksi paikallisten magneettisten materiaalien takia.

Saman ilmiön takia magnetometrin antama atsimuutti on todennäköisesti väärä jopa yllä kuvatun sisäisen kalibroinnin jälkeen. Eräs tapa
3 korjata tämä atsimuuttivirhe on sama, jota sovellus *SkyView*®[3] käyttää ja joka hyödyntää tähtitaivasta. *SkyView* tukee kameran käyttöä, ja käyttäjä näkee samanaikaisesti sekä *SkyView*'n esittämän taivaan että kameran välittämän todellisen taivaan. Yksinkertaisen vasen-oikea -liukusäätimen avulla näkymät saadaan päällekkäin.

Magnetometrin sijasta atsimuutin suuntaamista varten voidaan käyttää kolmiakselista gyroskooppia. Koska gyroskooppi ei käytä ulkoista vertaussuuntaa, oikean atsimuutin asettaminen todelliselle taivaalle on tehtävä joka kerta uudestaan. Asetus pysyy voimassa jonkin aikaa gyroskoopin laadusta riippuen.

[3] *SkyView* on Terminal Eleven LLC:n rekisteröity tavaramerkki.

13.2 Nollanopeuspäivitys

Inertiamittausyksikön sijainnin ja nopeuden tarkkuus huononee aikaa myöten, koska havainnot integroidaan ajassa kahdesti. Eräs tapa pitää sijainnin tarkkuus aisoissa on tehdä säännöllisiä pysähdyksiä ja ilmoittaa yksikön ohjelmistolle, että nopeus on nyt nolla. Näin nopeuden integrointi alkaa taas tyhjästä, mikä keskeyttää virheiden kasautumisen. Tekniikkaa kutsutaan nollanopeuspäivitykseksi eli ZUPT.

13.2.1 Kiihtyvyyden epävarmuuden kasautuminen

Kiihtyvyysmittareilla on sekä satunnaisia että systemaattisia virheitä. *Systemaattiset virheet* voidaan eliminoida järjestelmäkalibroinnin avulla, jolloin määritetään mittakaava- ja suuntausvirheet sekä mahdollisesti niiden epälinearisuudet. Myös gyroskoopeilla on sekä satunnaisia että systemaattisia virheitä, kuten suuntauksen ryömintä eli käynti.

Vaihtoehtoinen lähestymistapa systemaattisten vaikutusten — kuten antureiden mittakaava- ja suuntausvirheiden sekä gyroskooppien ryöminnän — poistamiseksi on niiden *mallinnus*: virheparametrien malliyhtälöt sisällytetään Kalmanin suotimeen.

Kiihtyvyyden satunnaiset virheet tuottavat integroinnin kautta satunnaisia mutta keskenään korreloituja nopeusvirheitä, jotka kasvavat ajan neliöjuuren mukaan:

$$\sigma_v \sim \sigma_a \sqrt{t} \tag{13.3}$$

jossa σ_a on kiihtyvyyden satunnainen epävarmuus, jonka oletetaan olevan valkoista kohinaa. Toisen integroinnin jälkeen sijainnin satunnainen epävarmuus kasvaa ajan potenssin $\frac{3}{2}$ mukaan: sigma $\sigma\Sigma$

$$\sigma_x \sim \sigma_v t \sim \sigma_a t\sqrt{t}. \tag{13.4}$$

13.2.2 Gyroskoopin epävarmuuden kasautuminen

Gyroskoopin suunnan epävarmuuden kasautumista on hankala analysoida. Oletetaan, että suuntavirhe käyttäytyy satunnaiskulun tavoin:

$$\sigma_\theta \sim \sigma_\omega \sqrt{t},$$

jossa σ_ω on kulmanopeuden eli pyörähdysakselin suunnan kääntämisnopeuden $\omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$ satunnainen epävarmuus. Kulmanopeuden oletetaan olevan valkoista kohinaa, jolloin akselin suuntakulma $\theta(t)$ on oomega $\omega\Omega$ theeta $\vartheta\theta\Theta$

satunnaiskulku.

Gyroskoopin suunnan epävarmuuden vaikutus nopeuden ja paikan epävarmuuteen ei ole suoraviivaista: se riippuu matkan skenaariosta. Yksinkertainen skenaario on tasainen kiihtyminen pysähdyksestä risteilynopeuteen v_c, joka saavutetaan ajan t_c kuluttua.

Kiihtymisvaiheessa vaikutus kiihtyvyysvektoriin on

$$\sigma_{a,\theta} \sim a\,\sigma_\theta \sim a\,\sigma_\omega \sqrt{t},$$

ja vaikutus nopeusvektoriin integroinnin kautta

$$\sigma_{v,\theta} \sim \sigma_{a,\theta} t \sim a\,\sigma_\omega t\sqrt{t} \sim v\,\sigma_\omega \sqrt{t}.$$

Tämä vaikutus toimii poikittaissuunnassa sekä kiihtyvyys- että nopeusvektorin tapauksessa. Alkukiihtyvyys on matkan suunnassa, kuten myös matkan aikainen risteilynopeus. Siis myös sijainnille saadaan

$$\sigma_{x,\theta} \sim \sigma_{v,\theta} t \sim v\,\sigma_\omega t\sqrt{t} \sim a\,\sigma_\omega t^2\sqrt{t}.$$

Nähdään, että riippuvuus ajasta on peräti potenssin $\frac{5}{2}$ mukainen.

Kiihtymisvaiheen kesto on kuitenkin rajallinen. Jos kiihtymisen jälkeen tulee risteilyvaihe, risteilynopeuden epävarmuus vaikuttaa ajassa lineaarisesti:

$$\sigma_{v,\theta} \sim v_c \sigma_\omega \sqrt{t_c} \sim a\,\sigma_\omega t_c \sqrt{t_c} \implies \sigma_{x,\theta} \sim v_c \sigma_\omega t\sqrt{t_c} \sim a\,\sigma_\omega t\,t_c\sqrt{t_c}.$$

Huomaa, että kiihtyvyyden puuttuminen aiheuttaa sijainnin epävarmuuden kasvun lineaarisesti ajassa. Yleisessä skenaariossa, jossa ajoneuvo kiihtyy koko matkan ajan, esimerkiksi muuttaa kulkusuuntaa, epävarmuus kasvaa nopeammin.

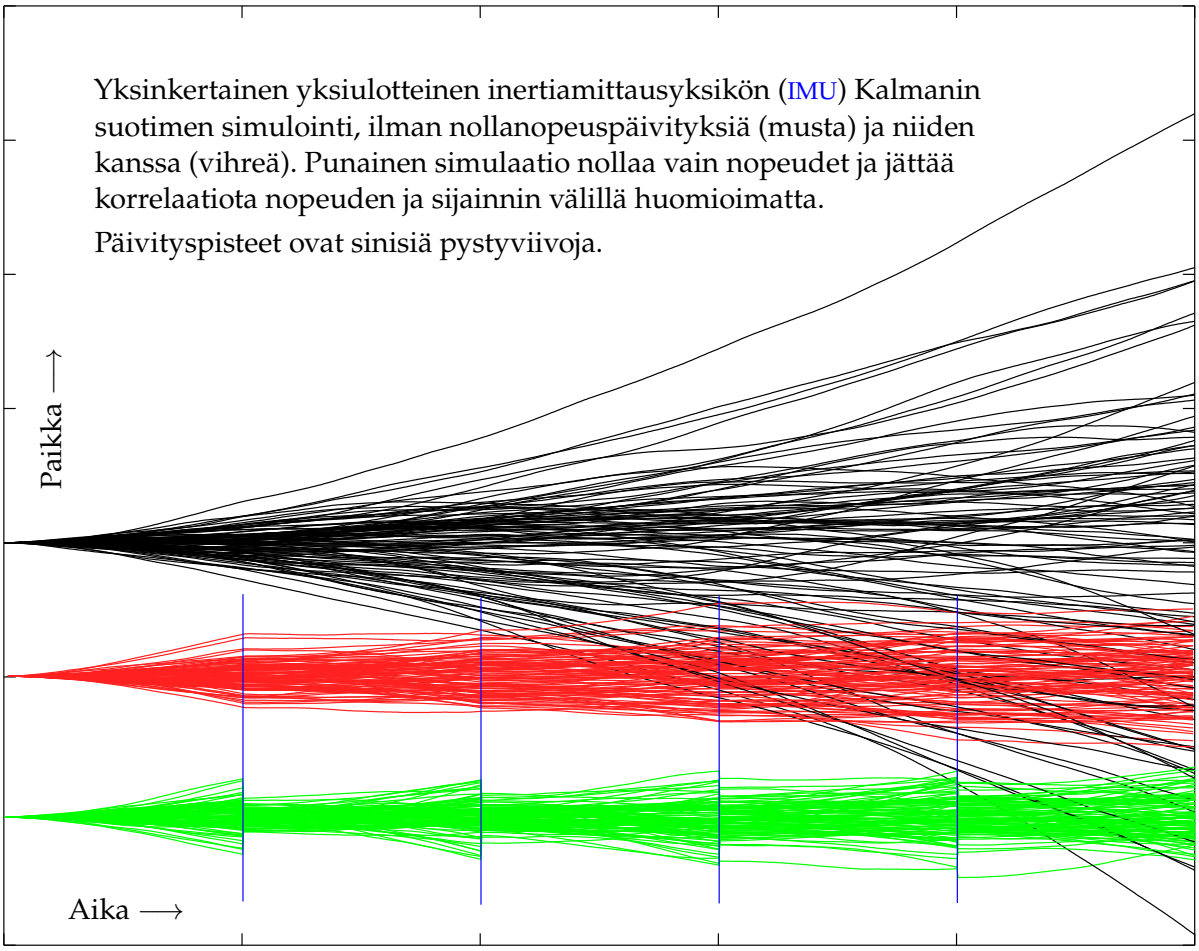
13.2.3 *Nollanopeuspäivitysten suoritus*

Nollanopeuspäivitysten suorittaminen aikavälillä Δt olettaen, että eri päivitysvälien nopeusvirheet ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan, antaa (yhtälöt 13.3 ja 13.4):

$$\sigma_v \sim \sigma_a \sqrt{\Delta t} \implies \sigma_x \sim \left(\sigma_a\,\Delta t\sqrt{\Delta t}\right)\sqrt{n} = \sigma_a\,\Delta t\sqrt{t},$$

jossa n on nollanopeuspäivitysten lukumäärä: $t = n\,\Delta t$.

Nähdään, että sijainnin epävarmuuden kasvu, joka aiemmin tapahtui kuluneen ajan potenssin $\frac{3}{2}$ mukaan, on nyt laskenut ajan potenssiin $\frac{1}{2}$!



KUVA 13.2. Yksinkertainen Kalmanin suodin ilman nollanopeuspäivityksiä ja niiden kanssa.

Kuvassa 13.2 nähdään yksinkertaisen yksiulotteisen malli-inertiamittausyksikon simulaatiolasku, jossa tämä peruskäyttäytyminen on nähtävissä. Malli on[4] [4]

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}_{k+1}\\ \underline{v}_{k+1}\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{x}}_{k+1}} = \overbrace{\begin{bmatrix}1 & \Delta t\\ 0 & 1\end{bmatrix}}^{\Phi_k^{k+1}} \overbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}_k\\ \underline{v}_k\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{x}}_k} + \overbrace{\begin{bmatrix}0\\ \underline{n}_a\,\Delta t\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{w}}_k^{k+1}},$$

jossa $\underline{n}_a$ on satunnainen ei-korreloitu virhe (valkoinen kohina), joka edustaa kiihtyvyysmittarin mittausepävarmuutta. Piirretty suure on $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$, yksiulotteinen sijainti. $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ on aika-askel.

Nollanopeuspäivitys nollaa ajoneuvon nopeuden epävarmuuden. Se ei paranna muiden tilavektorin alkioiden, kuten sijainnin tai gyroskoopin suunnan, epävarmuutta — ei ainakaan suoraan. Huomaa kuitenkin, että kaikki tilavektorin alkiot on kytketty toisiinsa Kalmanin

suotimessa ja niiden estimaattorit korreloivat keskenään. Täydellinen nollanopeuspäivitys on oikeasti Kalmanin päivitysaskel.

Jos gyroskooppi on muuttanut akselinsa suuntaa, muutos ilmenee sulkuvirheenä suotimen ylläpitämän nopeusvektorin estimaatin $\boldsymbol{v}^-(t)$ ja päivitysaskeleen eli nollanopeuspäivityksen antaman saman vektorin "nollahavainnon" välillä. Päivitysaskeleessa siis nollataan nopeus ja lisäksi päivitetään sekä sijainnin $\boldsymbol{x}^-(t)$ että gyroskoopin akselin suunnan $\theta^-(t)$ estimaatit, mikä pienentää niiden epävarmuuden. Kuvassa 13.2 näkyy tämän vaikutus sijaintiin, kun verrataan vihreitä käyriä punaisten kanssa.

13.3 GNSS:n ja IMU:n integrointi

Tämä on *heterogeenisen* anturifuusion esimerkki.

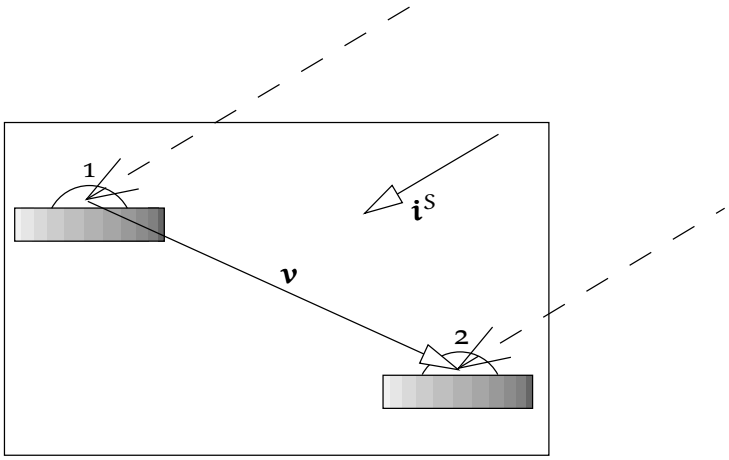
Osiossa 5.2 esitetty inertiamittausyksikkö (IMU) sisältää kolme kiihtyvyysmittaria ja kolme gyroskooppia. Niiden avulla mittausyksikkö voi seurata omia lineaarisia liikkeitä ja kiertoja. Paikannusratkaisu saadaan integroimalla mitattu kiihtyvyys kahdesti peräkkäin, mikä tuottaa ensin nopeuden ja sitten sijainnin. Ajan myötä ratkaisu huononee vähitellen.

Huononemista voidaan hallita, jos säännöllisin välein tehdään "oikea" paikannus, esimerkiksi GNSS:n avulla. Näin voidaan rakentaa järjestelmä, joka säilyttää paikannuksen tarkkuuden, vaikka GNSS-signaali on katkonainen. Tämä on tilanne esimerkiksi tunneleissa, siltojen alla, korkeiden rakenteiden lähellä tai sisätiloissa.

Samalla saatavilla on myös laitteiston tarkka asento. GNSS ei pysty siihen yksin. Toisaalta GNSS voi kiihtyvyyksien läsnäollessa havaita ja poistaa inertialaitteen pitkäaikaisen suuntauksen ryöminnän. Mainio esimerkki tästä on IMU:n ja GNSS:n integroitu käyttö ilmakuvauksessa tai ilmalaserkeilauksessa: jokainen 180 asteen käännös lentoratojen välillä tarjoaa kiihtyvyysvektorin, jonka sekä inertiamittausyksikkö että GNSS-vastaanotin "näkevät" ja joka kytkee molempien kojeiden akselikehykset yhteen. Tämä tekee asennolle sen, minkä nollanopeuspäivitykset tekevät sijainnille, osio 13.2.

[4] Vastaava differentiaali- eli jatkuvan ajan malli on

$$\frac{d}{dt}\overbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{v}\end{bmatrix}}^{\underline{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}^{F}\overbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{v}\end{bmatrix}}^{\underline{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix}0\\ \underline{n}_a\end{bmatrix}}^{\underline{n}}.$$



KUVA 13.3. Asennonmittaus GNSS:llä.

Esimerkki integroidusta laitteistosta on NovAtel SPAN®[5], Synchronized Position Attitude Navigation, (Hexagon, SPAN GNSS Inertial Navigation Systems). [5]

13.4 Asennonmittaus GNSS:llä

GNSS:n moniantennivastaanottimen käyttö asennon määrityksessä on *homogeenisen* anturifuusion esimerkki.

GNSS-vastaanottimella voidaan määrittää kulkuneuvon asento käyttämällä useita — vähintään kolmea — antenneja. Käytetty menetelmä on tosiaikainen kinemaattinen paikannus hyvin lyhyellä vektorilla. Kulkuneuvon suunta voidaan määrittää kahdella antennilla, jotka on asennettu vaakasuoraan. Kolmiulotteinen asennonmääritys vaatii kolmannen antennin, joka ei saa olla samalla linjalla.

Kuten kuvasta 13.3 näkyy, sama satelliitti havaitaan yhtä aikaa kahdesta eri antennista. Mittasuure on erotus kahden kantoaallon vaihemittauksen välillä. Yhtälön 8.3 perusteella raakamittaus metreissä on

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \frac{\phi}{2\pi},$$

ja erotusmittaus antennien 1 ja 2 välillä satelliittiin S on

$$\Delta P^S = P_2^S - P_1^S = \langle \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}^S \rangle - N^S \lambda,$$

jossa $\boldsymbol{\nu}$ on antennien välinen vektori ja $\mathbf{i}^S$ on suuntavektori käytetystä satelliitista, yksikkövektori eli $\|\mathbf{i}^S\| = 1$. Luku N^S on kokonaisluku, joka

[5] SPAN on NovAtel Inc:n rekisteröity tavaramerkki.

edustaa havaintosuureen moniselitteisyyttä eli kokonaislukutuntematonta.

lambda λΛ

Kirjoitetaan tämä uudelleen redukoimalla havaintosuure väliin $[0, \lambda)$:

$$\Delta P^s \bmod \lambda = \langle \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}^s \rangle - \overline{N}^s \lambda.$$

Tästä on ratkaistava yhtä aikaa vektori $\boldsymbol{\nu}$ ja kokonaislukutuntematon $\overline{N}^s$. Vektorin ratkaiseminen vaatii vähintään kolmen eri satelliitin havaintoja. Silloin arvot $\overline{N}$ jäävät vielä auki:

$$\begin{aligned}
\Delta P^1 \bmod \lambda &= \langle \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}^1 \rangle - \overline{N}^1 \lambda, \\
\Delta P^2 \bmod \lambda &= \langle \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}^2 \rangle - \overline{N}^2 \lambda, \\
\Delta P^3 \bmod \lambda &= \langle \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}^3 \rangle - \overline{N}^3 \lambda.
\end{aligned}$$

Arvoista $\overline{N}^1, \overline{N}^2, \overline{N}^3$ tiedämme ainakin, että ne eivät voi olla kovin suuria, jos vektori $\boldsymbol{\nu}$ on lyhyt: kun $\Delta P^s \bmod \lambda$ on välillä $[0, \lambda)$ ja $\langle \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}^s \rangle$ välillä $[-\|\boldsymbol{\nu}\|, \|\boldsymbol{\nu}\|]$, voi $\overline{N}^s$ olla vain välillä $(-\|\boldsymbol{\nu}\|/\lambda - 1, \|\boldsymbol{\nu}\|/\lambda]$. Jos vektori on esimerkiksi 2 m pitkä ja aallonpituus on 24 cm, ovat ainoat mahdolliset $\overline{N}^s$:n arvot $-9, -8, \ldots, +7, +8$.

Näin saadaan ratkaisu:

1) Jos näkyy yli kolme satelliittia, valitaan niistä kolme, jotka yhdessä tuottavat mahdollisimman hyvän geometrian. Tämä on helppoa: käy vain läpi kaikki kolmikot ja laske niiden determinanttiarvot $\left\langle \mathbf{i}^1 \cdot \langle \mathbf{i}^2 \times \mathbf{i}^3 \rangle \right\rangle$. Suurin itseisarvo voittaa. Jos näkyvissä on esimerkiksi kymmenen satelliittia, on laskettava

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

determinanttia.

2) Kokeile kaikki mahdolliset $\overline{N}^s$-arvot kolmelle satelliitille 1, 2 ja 3. Laske jokaiselle yhdistelmälle vektoriratkaisu $\boldsymbol{\nu}$. Laskettavien ratkaisujen kokonaislukumäärä on esimerkkitapauksessa $18^3 = 5832$.

3) Jos vektori on esimerkiksi 20 m pitkä, on laskettavien ratkaisujen kokonaismäärä jo $168^3 = 4{,}7$ miljoona. Se vaatisi merkittävästi laskentaresursseja. Toisaalta jos käytettävissä on kahden taajuuden koje, tarjolla on leveäkujamittaus eli *widelaning*, jonka tehollinen aallonpituus on 86 cm. Silloin tarvitaan ainoastaan $48^3 = 110\,592$ eri ratkaisua.

4) Seuraavaksi lasketaan jokaisesta näin löytyneestä alustavasta ratkaisusta $\widehat{\boldsymbol{v}}\left(\overline{N}^1, \overline{N}^2, \overline{N}^3\right)$ antennien välinen etäisyys $\|\widehat{\boldsymbol{v}}\|$ ja tutkitaan, onko se riittävän lähellä tunnettua antennien välistä etäisyyttä. Ratkaisut, jotka eivät täytä tätä ehtoa, voidaan hylätä heti.

5) Tämän jälkeen lasketaan muiden satelliittien havaintosuureet:

$$\begin{aligned}
\Delta P^4 \bmod \lambda &= \left\langle \widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{i}^4 \right\rangle - \overline{N}^4 \lambda, \\
\Delta P^5 \bmod \lambda &= \left\langle \widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{i}^5 \right\rangle - \overline{N}^5 \lambda, \\
&\dots \\
\Delta P^n \bmod \lambda &= \left\langle \widehat{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{i}^n \right\rangle - \overline{N}^n \lambda.
\end{aligned}$$

Jokainen vasemman puolen havaintoarvo pitää täsmentää havaintoepävarmuuden rajoissa vastaavan oikean puolen kanssa yhdelle arvolle $\overline{N}$. Tämä onnistuu yleensä *kaikille* satelliiteille $S = 4, \dots, n$ vain yhden alustavan ratkaisun kohdalla.

6) Näin löytyneen arvojoukon $\overline{N}^S$, $S = 1, \dots, n$ avulla suoritetaan *lopullinen tasoitus* optimaalisen vektorin $\widehat{\boldsymbol{v}}$ laskemiseksi *kaikista* havainnoista.

7) Kun kojeen kulkuneuvo liikkuu, niin kauan kuin ei tule vaihekatkoja, arvot $\overline{N}^S$ pysyvät ennallaan. Silloin voidaan ratkaista $\widehat{\boldsymbol{v}}$ jatkuvasti tosiajassa kerätyistä havainnoista.

13.5 Moderni radionavigointi

Tukiasemien verkkojen, kuten mobiiliverkkojen ja langattomien lähiverkkojen (WLAN) leviäminen on tehnyt radionavigoinnista kahdessa ulottuvuudessa Maan pinnalla uudelleen käytännöllisen menetelmän. Käytetyt tekniikat ovat

Solutunnus Tässä sijainti rajataan sen tiedon avulla, mitkä tukiasemat ovat navigaattorin ulottuvilla. Tämä perustuu siihen, että jokainen tukiasema, ja joskus jokainen suuntasektori aseman ympärillä, lähettää tunnistetietoja. Menetelmä on epätarkka kaupunkien ulkopuolella ja hieman tarkempi niiden sisällä.

Signaalin vahvuus Tarvitaan vähintään kaksi tukiasemaa. Tarkkuus on tavallisesti heikko.

Matkojen erotus Kyseessä on samantyyppinen menetelmä kuin mennyt Decca ja vastaavia vanhoja merenkulun radionavigointijärjestelmiä. Tätä kutsutaan myös saapumisaikaeron eli *time-difference-*

of-arrival (TDOA) -menetelmäksi, multilateraatioksi tai hyperbeliseksi navigoinniksi. Sijainnin määritys tällä menetelmällä edellyttää kolmen tukiaseman käyttöä.

Matka Tätä kutsutaan saapumisajan eli *time-of-arrival* (TOA) -menetelmäksi. Se edellyttää signaalin kulkua navigaattorista jokaiseen tukiasemaan ja takaisin. Koska mobiiliverkot käyttävät aikajakokanavointia (TDMA, *time-division multiple access*), verkon sisäänrakennettu menetelmä on ajastusennakko eli *timing advance*. Sitä tarvitaan eri etäisyyksillä tukiasemalta olevien mobiilikäyttäjien aikaikkunoiden synkronointiin.

Lisäksi kun paikannetaan matkapuhelimia GNSS-menetelmällä, tukiasemaverkko voi olla avuksi tarjoamalla satelliittien ratatiedot nopeammin kuin satelliitit itse lähettävät niitä. Satelliittien lähettämän navigointiviestin bittinopeus on GPS:n tapauksessa vain 50 bittiä sekunnissa. Mobiiliverkon käyttöä tähän kutsutaan nimellä avustettu GNSS eli A-GNSS.

13.6 Mikroelektroniset liikeanturit (MEMS)

Mikroelektroniset liikeanturit (MEMS) ovat pieniä ja edullisia kiihtyvyysmittareita ja gyroskooppeja. Valmistusprosessiin kuuluu tietokoneen mikropiirien valmistuksesta tunnettu optinen litografia sekä mikrotyöstö.

MEMS-antureiden lukeminen tapahtuu usein kapasitiivisesti. Sekä kiihtyvyysmittareissa että gyroskoopeissa pienet kiinteät rakenteet deformoituvat elastisesti. Kaksi johdinta, joiden välillä on ilma- tai tyhjiörako, muodostavat kondensaattorin, jonka kapasitanssi vaihtelee raon leveyden mukaan. Yhdistämällä ne induktanssin (käämin) kanssa piiriksi, muodostetaan oskillaattori, jonka taajuus voidaan mitata tarkasti. Katso Wikipedia, Värähtelypiiri.

6 MEMS-magnetometri perustuu yleensä Hallin[6] ilmiöön: magneettikentässä oleva johdin, jossa kulkee sähkövirta, tuottaa sivuttaisen potentiaalieron. Jos magneettikentän suunta on x ja virran suunta y, potentiaalieron suunta on z. Katso Wikipedia, Hallin ilmiö.

[6] Edwin Herbert Hall (1855–1938) oli amerikkalainen fyysikko.

13.6.1 Kiihtyvyysmittarit

Nämä piirit mittaavat kiihtyvyyttä mittaamalla esimerkiksi kapasitiivisesti pienen koemassan liikkeen kiihtyvyyden aiheuttaman pseudovoiman vaikutuksesta. Eräs malli, Analog Devicesin ADXL103, pystyy mittaamaan kiihtyvyyksiä alle 1,7 g ($17\,\mathrm{m/s^2}$) erotuskyvyllä 1 mg eli 1000 mGal.

Käsityksen siitä, mitä tämä tarkoittaa, saa miettimällä, että 1000 milligalin kiihtyvyys minuutin aikana tuottaa 18 metrin siirtymän. Kallistusmittarina käytettynä se vastaa 3,4 kaariminuutin kallistusta.

Itse laitteen *herkkyys* voi olla kalibroinnin jälkeen vieläkin parempi.

Laite myös kestää pudottamisen vaikkapa betonilattiaan, jolloin hetkellinen kiihtyvyys on 3500 g! Mikropiirin koko on $5 \times 5 \times 2$ mm (Analog Devices). Samanlaisia laitteita on myös ammuttu tykistä, ja niitä käytetään ”älyammuksissa”.

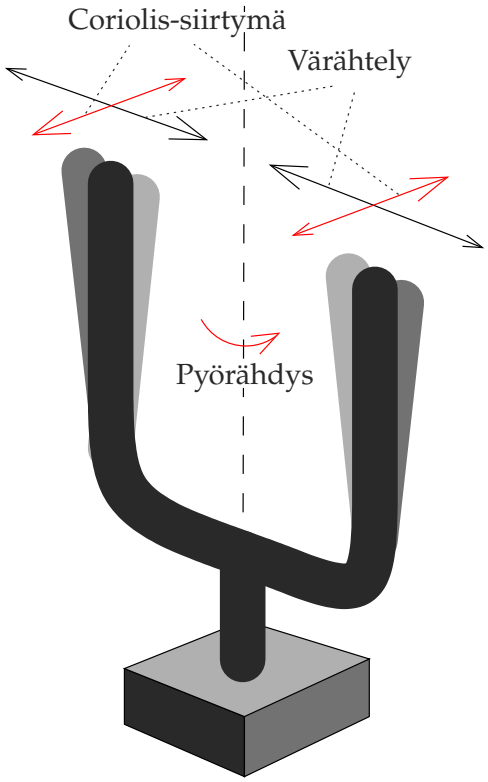
Hinnat ovat nykyisin (2020) noin euron kappale jopa kolmiakselisille antureille. Kooltaan ne ovat muutaman millimetrin. Sovellusalueita ovat esimerkiksi auton turvatyynyn laukaisuanturit ja kannettavan mikrotietokoneen kovalevyn putoamissuojan laukaisuanturit, joiden laaja käyttö on pudottanut hintoja.

13.6.2 Pyörähdysanturit

Mikroelektroniset gyroskoopit eli pyörähdysanturit perustuvat tavallisesti ääniraudan tapaisen rakenteen värähtelyyn. Katso Wikipedia, Vibrating structure gyroscope. Kuten pyörivä kappale, myös värähtelevä kappale yrittää pysyä samassa tasossa. Siksi koko laitteen pyörähdysliike aiheuttaa vääntöä, niin sanottua *coriolisvoimaa*, joka mitataan esimerkiksi kapasitiivisesti. Mittausarvo on verrannollinen pyörähdysliikkeen kulmanopeuteen. Katso kuva 13.4. Kolmen akselin eli kolmen vapausasteen laite sisältää kolme yhden akselin komponenttia.

Nämä laitteet pystyvät $\pm 0{,}1\,^\circ/\mathrm{s}$ tarkkuuteen, mikä on neljästä kuuteen suuruusluokkaa heikompi kuin pyörivän roottorin gyroskooppi tai lasergyroskooppi, katso alaosiot 5.2.1 ja 5.3.1.

Sovellusalueet ovat videokameroiden kuvan vakauttaminen, autojen ohjausvasteen parantaminen, robotiikka, droonit (UAV:t eli *unmanned aerial vehicles*) ja monet muut.



KUVA 13.4. MEMS-pyörähdysanturin periaate. Jos alusta pyörii, aiheuttaa ääniraudan värähtely (kuvassa vasen-oikea) coriolisvoiman kautta jaksollisen siirtymän, joka mitataan kapasitiivisesti.

13.7 Jalankulkijanavigointi

Kun jalankulkija käyttää matkapuhelinta navigointiin, puhelimessa oleva sovellus olettaa, että näytön yläreuna osoittaa kävelyn suuntaan. Tähän intuitiiviseen vaatimukseen tottuu nopeasti: jos pitää puhelinta tällä tavalla, puhelimen näytössä näkyvä kartta suuntautuu ympäröivän maiseman mukaan.

Tämä edellyttää kuitenkin käyttäjän liikkumista vähintään muutaman metrin verran: GNSS:n havaitsema maaston liikevektori sijoitetaan karttaan, ja sitä käytetään karttakuvan kääntämiseen oikein[7].

Sovellettaessa inertianavigointiteknologiaa henkilökohtaiseen navigointiin, *nollanopeuspäivityksen* periaatetta on käytetty henkilökohtaisen navigoinnin ratkaisuissa, joissa inertiamittausyksikkö (IMU) on asen-

[7] Sama pätee autonavigointiin: auton täytyy liikkua, ennen kuin karttakuva suuntautuu oikein. Tämä voi hyvinkin aiheuttaa sen, että ensimmäinen ohje kuljettajalle on suorittaa 180 asteen käännös. Tässä oletetaan, että sovellus ei käytä sisäänrakennettua kompassia eli magnetometria suuntaamiseen, jos sellainen on.

nettu saappaisiin. Aina kun saapas astuu maahan, Kalmanin suotimen sisältämä nopeusarvo nollataan ja muut tilavektorin alkiot päivitetään.

Mielenkiintoinen sovellus on palomiesten, tarkemmin savusukeltajien, ohjaaminen savun täyttämässä talossa. Tässä yhtydessä inertianavigoinnin itsenäinen luonne ja riippumattomuus ulkoisista signaaleista ovat tärkeitä ominaisuuksia. Esimerkiksi Godha ym. (2006).

13.8 Sisätilanavigointi

Sisätilanavigointi on laaja ja nopeasti kehittyvä ala (Wikipedia, Indoor positioning system), ja siksi tämä osio on vain kevyt aiheen pinnan raapaisu.

Sisätiloissa GNSS:n saatavuutta ei voida olettaa ja yleensä se puuttuu. Muita tukiasematyyppejä on kuitenkin joko käytettävissä (WLAN, langaton lähiverkko) tai ne voidaan asentaa. Käytettävissä olevat paikannuksen lähestymistavat ovat samanlaisia kuin ne, jotka käyttävät matkapuhelinverkon tukiasemia, osio 13.5.

Pseudoliitit ovat laitteita, jotka lähettävät radiotaajuuksia ja -signaaleja GNSS-satelliittien tavoin, mutta jotka on asennettu Maan päälle. Ne lähettävät kantoaaltoa, joka on moduloitu samanlaisella näennäissatunnaiskoodilla (PRN) kuin se, mitä GNSS-satelliitit lähettävät. Esimerkiksi Zhao ym. (2018).

Akustista paikannusta on tutkittu kokouksissa, joissa puhujat voidaan paikantaa ja sitä kautta ohjata esimerkiksi kameroita ja suuntamikrofoneja. Tämä on erityisen arvokasta, jos kokouksia suoratoistetaan Internetin välityksellä tai osa osallistujista käyttää Internetin kokousalustoja, kuten Adobe®[8] Connect™[9] tai Microsoft Teams®[10]. Kuvaus ja lisäviitteet antaa Parviainen (2016).

Paikannukseen voidaan käyttää magneettikentän, langattoman lähiverkon (WLAN) tai Bluetooth®[11]-signaalin vahvuutta. Talon sisällä magneettikenttä vaihtelee epäsäännöllisesti rakennusmateriaalien magneettisten ominaisuuksien takia. Sama pätee langattoman lähiverkon signaalien tehoarvoihin. Magneettikenttää ja lähiverkon signaaleja voidaan

[8] Adobe on Adobe Systems Incorporatedin rekisteröity tavaramerkki.

[9] Connect on Adobe Systems Incorporatedin tavaramerkki.

[10] Microsoft Teams on Microsoft Corporationin rekisteröity tavaramerkki.

[11] Bluetooth on The Bluetooth Special Interest Groupin rekisteröity tavaramerkki.

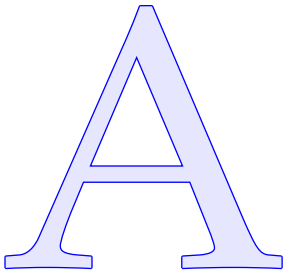
käyttää paikannukseen edellyttäen, että niistä on ensin tehty koko taloa kattava ”sormenjälkikartta”. Katso esimerkiksi Chen ym. (2013); Liu ym. (2017); Mazlan ym. (2017). Haittapuolena on, että kartoitus on toistettava säännöllisesti, varsinkin jos talon sisustukseen tehdään muutoksia.

Inertiamittausanturit ovat hyödyllisiä sisätilanavigoinnissa joko yksin tai anturifuusion yhteydessä. Suurin etu on riippumattomuus ulkoisista signaaleista. Koska sisätilanavigointi on useimmiten myös jalankulkijanavigointia, nollanopeuspäivitystekniikkaa voidaan hyödyntää.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Miten MEMS-pyörähdysanturi toimii?
2) Kuinka MEMS-magnetometri toimii? Miksi se on kalibroitava, jos sitä käytetään matkapuhelimessa? Miten kalibrointi tehdään?
3) Kuinka *Sky Map* -sovelluksessa matkapuhelin määrittää asentonsa tähtitaivaaseen nähden?
4) Miksi (teoreettinen) matkapuhelimen hyrräkompassi ei toimisi kovin hyvin, kun puhelinta pidetään kädessä?
5) Miten asennonmääritys GNSS:llä toimii?
6) Mitkä ovat mobiilitukiasemia käyttävän nykyradionavigoinnin neljä eri toimintaperiaatetta?
7) Miksi inertianavigoinnin ja GNSS-navigoinnin integrointi on houkuttelevaa?
8) Miksi nollanopeuspäivityksistä on hyötyä?
9) Saapumisajan (TOA) menetelmässä tarvitaan vähintään kaksi tukiasemaa. Onko *yksiselitteinen* paikannus mahdollista vain kahdella tukiasemalla?
10) Mitä sisätilanavigointimenetelmiä on olemassa?
11) Miten *matkamittari* voidaan integroida maa-ajoneuvojen navigointijärjestelmään? Mitä etuja se tarjoaa?
12) Miten lähteessä Fox (2018) kuvattua *päivänvalotallenninta* voidaan käyttää leveys- ja pituusasteen määrittämiseksi ajan funktiona? Milloin tämä epäonnistuu?

Tehon spektraalitiheys on ei-negatiivinen



Väitteen näyttäminen toteen perustuu havaintoon, että autokovarianssifunktion voidaan katsoa edustavan varianssimatriisia, joka on aina symmetrinen ja positiivisesti definiitti.

Olkoon $A_x(t,t') = A_x(\Delta t)$, $\Delta t = t' - t$, jaksollisen signaalin $\underline{x}(t)$ autokovarianssifunktio, jonka jakso on T. Valitaan signaalin otospisteet väliajoin δt, kun $T = N\,\delta t$ ja N on otospisteiden lukumäärä. Nyt funktio $A_x(t_j, t_k)$, $j,\ k = 0, \ldots, N-1$ täyttää kaikkien pisteiden yhteisen varianssimatriisin:

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix}
A_x(t_0,t_0) & A_x(t_0,t_1) & A_x(t_0,t_2) & & \\
A_x(t_1,t_0) & A_x(t_1,t_1) & A_x(t_1,t_2) & & \\
A_x(t_2,t_0) & A_x(t_2,t_1) & A_x(t_2,t_2) & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & A_x(t_{N-1},t_{N-1})
\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}
A_x(0) & A_x(\delta t) & A_x(2\,\delta t) & & \\
A_x(-\delta t) & A_x(0) & A_x(\delta t) & & \\
A_x(-2\,\delta t) & A_x(-\delta t) & A_x(0) & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & A_x(0) & A_x(\delta t) \\
 & & & A_x(-\delta t) & A_x(0)
\end{bmatrix} = \\
&= \Big[A_x\big((k-j)\,\delta t\big)\Big]_{jk}, \qquad j,k = 0,\ldots,N-1,
\end{aligned}
$$

jossa on oletettu stationaarisuutta. Nähdään, että tässä tapauksessa matriisi Σ on Toeplitz-sirkulantti[1], mikä tarkoittaa, että kaikki rivit ja

sigma σΣ
1

[1] Otto Toeplitz (1881–1940) oli juutalaissaksalainen matemaatikko sekä matematiikan historioitsija ja popularisoija.

sarakkeet ovat sirkulaarisesti siirrettyjä kopioita toisistaan. Myös

$$\begin{aligned} A_x(\Delta t) &= A_x(\Delta t + nT), \\ A_x\big((k-j)\,\delta t\big) &= A_x\big((k-j+nN)\,\delta t\big), \end{aligned} \qquad n \in \mathbb{Z},$$

eli autokovarianssifunktio $A_x(\Delta t)$ on sirkulaarinen jaksolla $T = N\,\delta t$.

Seuraavaksi rakennetaan vektori $\mathbf{c}$, joka on tämän näköinen:

$$\mathbf{c}(f) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & e^{2\pi i f\cdot \delta t} & e^{2\pi i f\cdot 2\,\delta t} & e^{2\pi i f\cdot 3\,\delta t} & \dots & e^{2\pi i f\cdot (N-1)\,\delta t} \end{bmatrix},$$

jossa f on lausekkeen $1/T$ kokonaislukumonikko, siis $fT \in \mathbb{Z}$.

Lasketaan neliöllinen muoto

$$\frac{\delta t}{N}\,\mathbf{c}(f)\,\Sigma\,\mathbf{c}^\dagger(f) = \frac{\delta t}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i f\cdot j\,\delta t} A_x\big((k-j)\,\delta t\big)\, e^{-2\pi i f\cdot k\,\delta t} =$$

$$= \frac{\delta t}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i f\,(k-j)\,\delta t} A_x\big((k-j)\,\delta t\big).$$

Muista, että $fN\,\delta t = fT \in \mathbb{Z}$, siis myös eksponenttilauseke $e^{-2\pi i f\,(k-j)\,\delta t}$ on sirkulaarinen jaksolla $T = N\,\delta t$: $e^{-2\pi i f N\,\delta t} = e^{-2\pi i f T} = 1$. Nyt tehdään sijoitus $m = k - j$ ja järjestetään summaukset uudelleen:

$$\frac{\delta t}{N}\,\mathbf{c}(f)\,\Sigma\,\mathbf{c}^\dagger(f) = \frac{\delta t}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} e^{-2\pi i f\cdot m\,\delta t} A_x\big(m\,\delta t\big) =$$

$$= \delta t\cdot\sum_{m=0}^{N-1} e^{-2\pi i f\cdot m\,\delta t} A_x(m\,\delta t) = \sum_{m=-\frac{1}{2}N}^{\frac{1}{2}N-1} A_x(\Delta t)\, e^{-2\pi i f\,\Delta t}\cdot \delta t, \quad \text{(A.1)}$$

jossa $\Delta t = m\,\delta t$. N oletetaan parilliseksi.

Sekä eksponenttifunktioiden että funktion A_x jaksollisuus merkitsee, että $m = k - j$ voidaan tulkita modulolausekkeeksi $m \bmod N = (k-j) \bmod N$.

Koska neliöllinen muoto yhtälön A.1 vasemmalla puolella on hermiittinen ja sisältää positiivisesti definiitin hermiittisen matriisin Σ (siis $\Sigma = \Sigma^\dagger$), seuraa, että sen on oltava ei-negatiivinen kaikille argumentin f arvoille.

Yhtälön A.1 oikea puoli sisältää funktion $A_x(\Delta t) = A_x(t)$ diskreetin Fourier'n ympyrämuunnoksen. Limiitissä $T \to \infty$, $N \to \infty$, $\delta t \to 0$ oikea puoli approksimoi integraalia 2.34,

$$\mathcal{A}_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt,$$

johon siis pätee sama: se on ei-negatiivinen kaikille arvoille f, jolle nyt kaikki reaaliarvot ovat sallittuja.

M-jonot ja Goldin koodit

B

Maksimipituuden bittijono eli *m-jono* voidaan määritellä sen generointimekanismin avulla, katso kuva 7.9:

$$\begin{aligned} b_1(i) &= b_3(i-1) \oplus b_4(i-1), \\ b_2(i) &= b_1(i-1), \\ b_3(i) &= b_2(i-1), \\ b_4(i) &= b_3(i-1). \end{aligned}$$

Nämä siirtorekisterin bitit voidaan samaistaa jonon bittien kanssa seuraavasti:

$$\begin{aligned} x(i) &= b_4(i), \\ x(i+1) &= b_3(i), \\ x(i+2) &= b_2(i), \\ x(i+3) &= b_1(i). \end{aligned}$$

Sijoitus antaa

$$x(i+3) = b_1(i) = b_3(i-1) \oplus b_4(i-1) = x(i) \oplus x(i-1)$$
$$\implies x(i+4) = x(i+1) \oplus x(i), \quad \text{(B.1)}$$

mikä generoi suoraan jonon x.

Tämä pätee rekisterin 7.9 geometrialle. Yleisessä tapauksessa kirjoitetaan

$$x(i+n) = \bigoplus_{\substack{k=0 \\ a(k)=1}}^{n-1} x(i+k), \quad \text{(B.2)}$$

jossa $a(k) \in \{0,1\}$, $k = 0, \ldots, n-1$ ovat bittiarvoja, jotka kertovat, mitkä takaisinkytkennät eli ”hanat” rekisteri sisältää.

Tässä XOR-operaattori $\oplus$ voidaan ymmärtää hyödyllisesti *modulo-2-yhteenlaskuna*: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ ja $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Sillä on kaikki yhteenlaskun kauniit ominaisuudet, kuten vaihdannaisuus $x \oplus y = y \oplus x$ ja liitännäisyys $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

Yhtälö B.1 on *lineaarinen*. Tämä merkitsee, että jos yhtälö pätee jonolle x ja jonolle y, se pätee myös niiden summalle $z = x \oplus y$:

$$\overbrace{x(i+4) \oplus y(i+4)}^{z(i+4)} = \big(x(i+1) \oplus x(i)\big) \oplus \big(y(i+1) \oplus y(i)\big) = \\ = \overbrace{\big(x(i+1) \oplus y(i+1)\big)}^{z(i+1)} \oplus \overbrace{\big(x(i) \oplus y(i)\big)}^{z(i)},$$

$\oplus$-operaattorin liitännäisyyden ja vaihdannaisuuden ansiosta. Jotta voit arvostaa tätä intuitiivisesti, korvaa symboli $\oplus$ — ”syklinen plussa” — tavallisella plus-merkillä $+$.

Tämä yleistyy suoraviivaisesti yhtälöön B.2, koska on selvää, että

$$\overbrace{x(i+n) \oplus y(i+n)}^{z(i+n)} = \left(\bigoplus_{\substack{k=0 \\ a(k)=1}}^{n-1} x(i+k) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{k=0 \\ a(k)=1}}^{n-1} y(i+k) \right) = \\ = \bigoplus_{\substack{k=0 \\ a(k)=1}}^{n-1} \overbrace{\big(x(i+k) \oplus y(i+k)\big)}^{z(i+k)}.$$

alfa αA beeta βB

Tämä on käyttökelpoinen tulos: jos $x^\alpha \neq x$ on jonon x mielivaltaisesti syklisesti siirretty versio, ja siis saman siirtorekisterin geometrian lailli-nen m-jono, silloin $x^\beta \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus x^\alpha$ on itse saman geometrian m-jono, joka on syklisesti siirretty jonon x versio. Kaikki tämän geometrian m-jonot ovat syklisesti siirrettyjä versioita toisistaan.

$2^n - 1$ -pituisen m-jonon tunnettu ominaisuus on, että se sisältää 2^{n-1} ykköstä ja $2^{n-1} - 1$ nollaa. Tämä johtuu siitä, että sen jokainen bitti on siirtorekisterin sisällön oikeanpuoleisin bitti. Siirtorekisteri kiertää kaikkien n-bittisten lukujen läpi, paitsi luvun nolla. Jos nolla olisi mukana, ykkösbittien ja nollabittien määrä olisi sama.

Tämän ominaisuuden ansiosta $x^\beta = x \oplus x^\alpha$ sisältää yhden bittiarvon 1 enemmän kuin bittiarvojen 0 lukumäärä. Syklinen autokorrelaatio saadaan yhtälöstä 7.2:

$$\mathrm{Corr}\{\bar{x}, \bar{x}^\alpha\} = \frac{1}{2^n - 1} \big(C_0(x \oplus x^\alpha) - C_1(x \oplus x^\alpha)\big) = \\ = \frac{1}{2^n - 1} \big(C_0(x^\beta) - C_1(x^\beta)\big) = -\frac{1}{2^n - 1},$$

kaikille syklisille siirroille α paitsi nollalle. Nollalle tietenkin pätee identtisesti $x \oplus x = 0$, siis

$$\mathrm{Corr}\{\overline{x}, \overline{x}\} = \frac{1}{2^n - 1} C_0(x \oplus x) = \frac{2^n - 1}{2^n - 1} = 1.$$

Katso kuva taulukossa 7.3.

Robert Gold näytti vuonna 1967, että jos käyttää kahta eri samanpituista siirtorekisteriä x ja y, joiden geometriat ovat *erilaisia*, kaikki yhdistelmät eli *Goldin koodit*

$$g_0 \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus y, \quad g_1 \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus y^{\alpha}, \quad g_2 \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus y^{\alpha'}, \quad g_3 \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus y^{\alpha''}, \quad \ldots$$

eri *suhteellisilla* syklisillä siirroilla 0, α, α', α'', ... x:n ja y:n välillä ovat käyttökelpoisia erottamaan signaalit toisistaan, kun niiden absoluuttiset aikasiirtymät ovat tuntemattomia.

Tutkitaan ensin autokorrelaatio. Huomaa, että g_1 *ei* ole syklisesti siirretty g_0. Jono g_0 syklisesti siirrettynä määrällä α on[1]

$$g_0^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (x \oplus y)^{\alpha} = x^{\alpha} \oplus y^{\alpha}.$$

Jonon g_0 syklinen autokorrelaatiofunktio on[2] ($\alpha \neq 0$):

$$\begin{aligned} g_0 \oplus g_0^{\alpha} &= (x \oplus y) \oplus (x^{\alpha} \oplus y^{\alpha}) = (x \oplus x^{\alpha}) \oplus (y \oplus y^{\alpha}) = x^{\beta} \oplus y^{\gamma} \\ \Longrightarrow \mathrm{Corr}\{\overline{g}_0, \overline{g}_0^{\alpha}\} &= \frac{1}{2^n - 1}\Big(C_0\big(g_0 \oplus g_0^{\alpha}\big) - C_1\big(g_0 \oplus g_0^{\alpha}\big)\Big) = \\ &= \frac{1}{2^n - 1}\Big(C_0\big(x^{\beta} \oplus y^{\gamma}\big) - C_1\big(x^{\beta} \oplus y^{\gamma}\big)\Big). \end{aligned}$$

Tämä tekee selväksi, että x ja y on valittava siten, että kaikki jonot $x^{\beta} \oplus y^{\gamma}$ ovat *tasapainoisia* eli sisältävät suunnilleen yhtä monta nollaa kuin ykköstä. Käytännössä tämä merkitsee kaikki jonot, jotka saadaan, kun x ja y siirretään syklisesti suhteessa *toisiinsa* kaikilla $N = 2^n - 1$ mahdollisella tavalla. Pätee

gamma $\gamma\Gamma$

$$\big(x^{\beta} \oplus y^{\gamma}\big)^{N-\beta} = x^{\beta+(N-\beta)} \oplus y^{\gamma+(N-\beta)} = x^N \oplus y^{\delta} = x \oplus y^{\delta},$$

siis

$$C_0\big(x^{\beta} \oplus y^{\gamma}\big) = C_0\big(x \oplus y^{\delta}\big), \qquad C_1\big(x^{\beta} \oplus y^{\gamma}\big) = C_1\big(x \oplus y^{\delta}\big),$$

ja näiden tulee olla lähellä toisiaan kaikille $\delta = 0, 1, \ldots, N-1$.

delta $\delta\Delta$

[1] Tämä merkitsee fysikaalisesti, että molemmat rekisterit x ja y liipaistaan samanaikaisesti α kertaa, ja lähdöt yhdistetään XOR-portin kautta. Katso kuva B.1.

[2] Ei saa olettaa $\beta = \gamma$!

Onneksi sellaisia siirtorekisterien x ja y valintoja löytyy. Silloin g_0:n — ja kaikkien g_i:n — autokorrelaatiofunktioilla on yksiselitteinen huippu origolla: $\mathrm{Corr}\{\overline{g}_0, \overline{g}_0\} = \mathrm{Corr}\{\overline{g}_0^\alpha, \overline{g}_0^\alpha\} = 1$, ja pienehköjä arvoja $\mathrm{Corr}\{\overline{g}_0, \overline{g}_0^\alpha\}$ muualla. Tämä on onnistuneen ajassa korreloinnin edellytys satelliitin signaalin ja vastaanottimen jäljennöksen välillä.

Kaikki huipun ulkopuoliset arvot eivät kuitenkaan tule koskaan olemaan aivan niin pieniä kuin m-jonojen arvo $-1/(2^n - 1)$.

Seuraavaksi tutkitaan ristikorrelaatio. Jos $i \neq j \iff \alpha \neq \alpha'$:

$$g_i \oplus g_j^\delta = (x \oplus y^\alpha) \oplus \left(x \oplus y^{\alpha'}\right)^\delta =$$

$$= \left(x \oplus x^\delta\right) \oplus \left(y^\alpha \oplus y^{\alpha'+\delta}\right) = \begin{cases} y^\gamma & \delta = 0, \\ x^\beta & \alpha = (\alpha' + \delta) \bmod N, \\ x^\beta \oplus y^\gamma & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tämä on samanlainen kuin autokorrelaation tulos, ja myös johtopäätös on sama. Tämä on hyvä uutinen, jos jonoja käytetään eri satelliittien signaalien erottamiseksi toisistaan.

Sitäkään ei ole vaikea todistaa, että jonot $g_0 = x \oplus y$ ja $g_1 = x \oplus y^\alpha$ ovat *olennaisesti* erilaisia — eli niitä ei voida muuntaa toisilleen syklisellä siirrolla. Ristiriitatodistus on: mikäli olisi totta, että g_1 voitaisiin tuottaa syklisesti siirtämällä g_0, silloin olisi

$$g_0^\beta = g_1,$$

jossa β merkitsee tätä hypoteettistä siirtoa, joka ei ole nollasiirto. Tämän kirjoittaminen auki antaa

$$(x \oplus y)^\beta = x \oplus y^\alpha \implies x^\beta \oplus y^\beta = x \oplus y^\alpha.$$

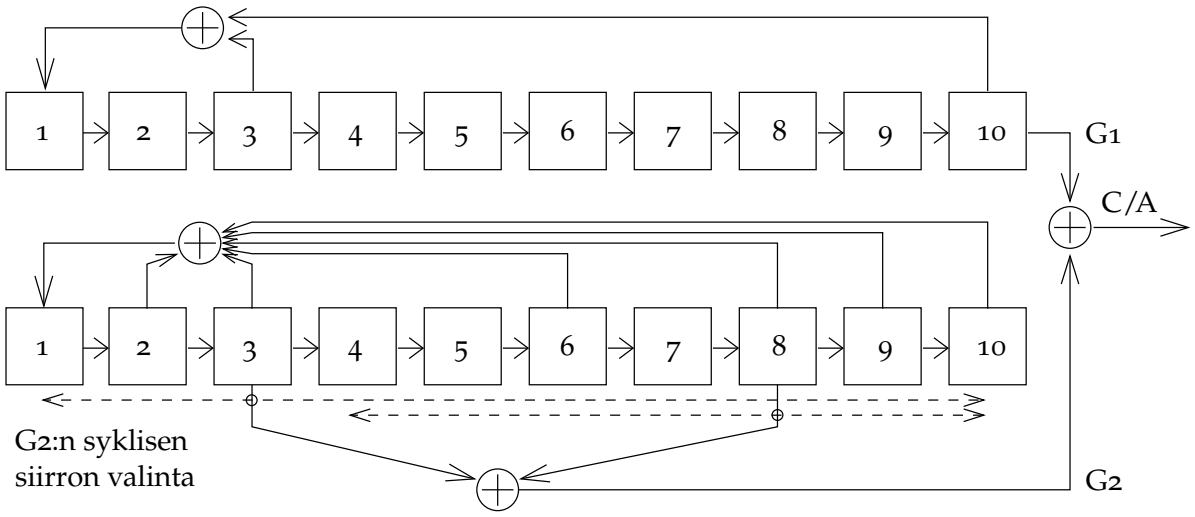
Operaatio $\oplus\, y^\alpha$ oikealta antaa

$$x^\beta \oplus y^\beta \oplus y^\alpha = x \oplus \overbrace{y^\alpha \oplus y^\alpha}^{0} \implies x^\beta \oplus y^\beta \oplus y^\alpha = x,$$

ja nyt operaatio $x^\beta \oplus$ vasemmalta antaa

$$\overbrace{x^\beta \oplus x^\beta}^{0} \oplus \overbrace{y^\beta \oplus y^\alpha}^{Y} = \overbrace{x^\beta \oplus x}^{x^\gamma} \implies \begin{cases} \beta = \alpha: & Y = 0 = x^\gamma, \\ \beta \neq \alpha: & Y = y^\delta = x^\gamma, \end{cases}$$

joka kertoo, että syklisesti siirretty x on joko yhtä kuin nolla tai syklisesti siirretty y, mikä merkitsisi sitä, että x ja y tulevat samasta siirtorekisterin geometriasta. Tässä on ristiriita.



KUVA B.1. C/A-koodin muodostaminen käyttämällä kahta kymmenen solun lineaarisen palautteen siirtorekisteriä G1 ja G2, joiden palautehanojen geometriat ovat erilaisia. Rekisterin G2 syklinen siirto rekisterin G1 suhteen, joka on erilainen jokaiselle satelliitille, asetetaan ennen laukaisua valitsemalla ja sekoittamalla kaksi solulähtöä: $y^{\alpha} \oplus y^{\alpha'} \to y^{\beta}$. Paikkojen 3 ja 8 valitseminen, kuten kuvassa, tuottaa PRN-koodin 31.

Yllä oleva todistus pätee parille g_0 ja g_1. Syklisyyden vuoksi todistus pätee kaikille g_i:lle g_0:n sijaan: "siemenen" y poimiminen sen $N = 2^n - 1$ eri syklisesti siirretyn version joukosta ja näin ollen mikä g_i valetaan g_0:n rooliin, on mielivaltaista. Jos kutsutaan $\widetilde{y} \stackrel{\text{def}}{=} y^{\alpha}, \widetilde{x} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\alpha}$:

$$\widetilde{g}_0 \stackrel{\text{def}}{=} g_0^{\alpha} = (x \oplus y)^{\alpha} = x^{\alpha} \oplus y^{\alpha} = \widetilde{x} \oplus \widetilde{y}$$

ja

$$y^{\alpha'} = (y^{\alpha})^{\alpha' + (N-\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{y}^{\beta}, \quad y^{\alpha''} = (y^{\alpha})^{\alpha'' + (N-\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{y}^{\beta'}, \quad \ldots$$

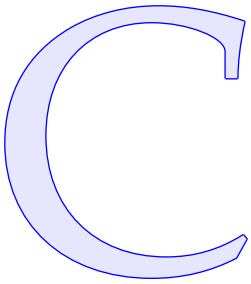
ja muut g:t ovat

$$\widetilde{g}_1 = \widetilde{x} \oplus \widetilde{y}^{\beta}, \quad \widetilde{g}_2 = \widetilde{x} \oplus \widetilde{y}^{\beta'}, \quad \widetilde{g}_3 = \widetilde{x} \oplus \widetilde{y}^{\beta''}, \quad \ldots \tag{B.3}$$

Voidaan myös vapaasti valita, mitä joukon B.3 jäsenistä kutsutaan nimellä g_1.

Kuva B.1 näyttää laitteistotason toteutuksen.

Woodburyn matriisiyhtälö



Lähdetään näistä kahdesta matriisiyhtälöstä:

$$AX + UY = I, \tag{C.1}$$
$$VX - C^{-1}Y = 0. \tag{C.2}$$

Lisätään yhtälö C.2 kerrottuna vasemmalta ilmaisun UC kanssa yhtälöön C.1:

$$(A + UCV)\,X = I \implies X = (A + UCV)^{-1}. \tag{C.3}$$

Vähennetään yhtälö C.1 kerrottuna vasemmalta ilmaisun VA^{-1} kanssa yhtälöstä C.2:

$$\left(-C^{-1} - VA^{-1}U\right)Y = -VA^{-1} \implies Y = \left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1} VA^{-1}.$$

Sijoitetaan takaisin yhtälöön C.1:

$$AX + U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1} VA^{-1} = I$$
$$\implies X = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1} VA^{-1}. \tag{C.4}$$

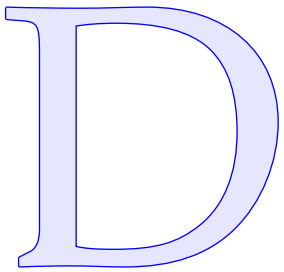
Näin saatiin matriisille X kaksi eri lauseketta C.3 ja C.4, joiden on oltava *identtisiä*. Saadaan

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1} VA^{-1}, \tag{C.5}$$

Woodburyn[1] *matriisiyhtälö* (Keijo Inkilä, henkilökohtainen tiedotus); Wikipedia, Woodbury matrix identity. [1]

[1] Max Atkin Woodbury (1917–2010) oli amerikkalainen matemaatikko.

Tosiaikaiset järjestelmät ja verkot



Teknologisen navigoinnin yleisiä edellytyksiä ovat mahdollisuus vastaanottaa ulkoista tietoa tosiajassa tietoliikenneverkon kautta ja tosiaikaiseen käyttöön soveltuva ja suorituskyvyltään riittävä laitteisto ohjelmistoineen. Näitä vaatimuksia tutkitaan seuraavaksi.

Tosiaikaisuuden määritelmä on

> Taattu vasteaika (latenssi).

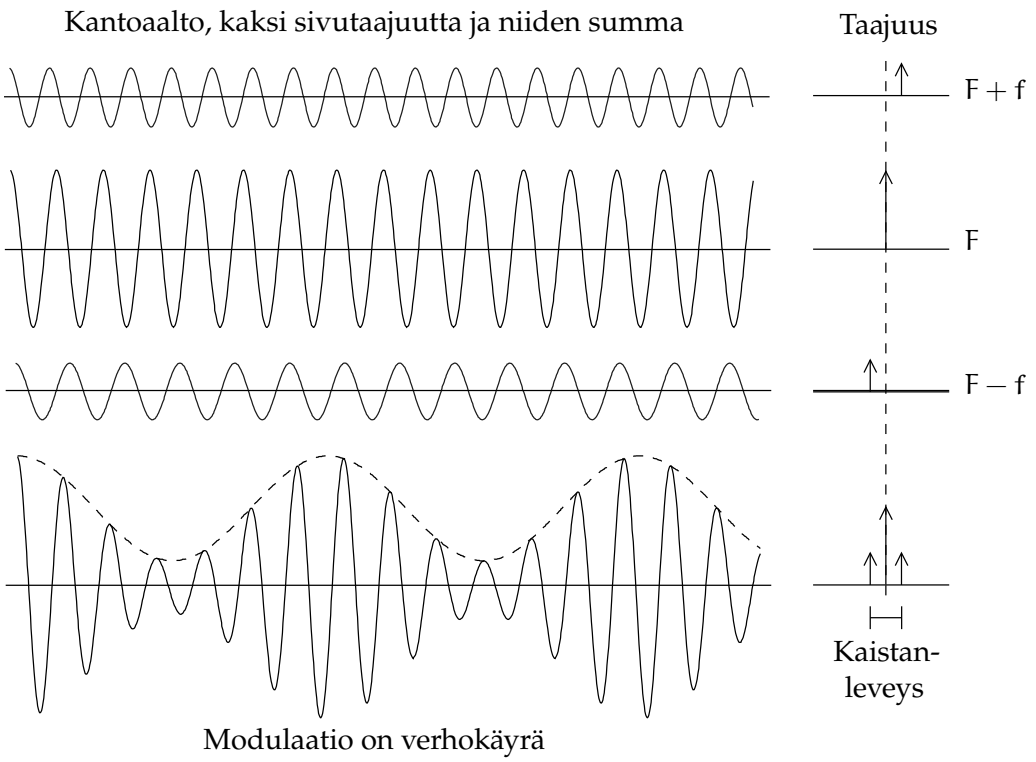
Prosessi, jonka vasteaika on kuukausi, voi olla tosiaikainen, jos kuukausi on *taattu*. Toinen prosessi, jonka vasteaika on millisekunti, ei ole tosiaikainen, jos vasteaika on yleensä alle millisekunnin, muttei aina: joskus se voi olla kaksikin millisekuntia, kymmenen tai jopa enemmän.

D.1 Tietoliikenneverkot

D.1.1 Lähetysverkot

Lähetysverkot eli yhdestä moneen -tyyppiset viestintäverkot ovat lähes yhtä vanhoja kuin radioaaltojen löytäminen. Radioaaltoja — kantoaaltoja — voidaan käyttää digitaalisten tai analogisten signaalien välittämiseen. Esimerkki ensimmäisestä on morsekoodin käyttö radiosähkötyksessä. Analogisten signaalien esimerkkejä ovat radioääni ja radiopuhelinviestintä sekä televisiokuva. Mittaus- eli telemetriatiedot ovat lähes aina digitaalisia.

Tiedot *moduloidaan* ja kuljetetaan radioaalloilla. Usein käytetyt modulaatiotekniikat ovat amplitudimodulaatio, taajuusmodulaatio ja vaihemodulaatio.



KUVA D.1. Amplitudimodulaatio ja kaistanleveys.

D.1.1.1 Esimerkki: amplitudimodulaatio

Kuvassa D.1 nähdään, miten amplitudimodulaatio laittaa signaalin eli katkokäyrän, esimerkiksi ääniaallon, kantoaallon päälle[1]. Oikealla nähdään, millainen on moduloidun aallon spektri.

Jos kantoaallon taajuus on F ja moduloivan signaalin (äänen) taajuus f, voidaan kirjoittaa moduloitu signaali muodossa

$$A(t) = \cos(2\pi Ft) \cdot \left(\tfrac{3}{2} + \cos 2\pi ft\right) = \\ = \tfrac{3}{2}\cos 2\pi Ft + \tfrac{1}{2}\Big(\cos\big(2\pi\,(F+f)\,t\big) + \cos\big(2\pi\,(F-f)\,t\big)\Big).$$

Tästä näkyy, että modulaation vaikutus voidaan esittää kahden sivutaajuuden, $F+f$ ja $F-f$, puolisummana.

Jos moduloiva aalto sisältää monia eri taajuuksia f, $0 < f < f_{max}$, sisältää tuloksena oleva spektri signaalia eli tehoa kaikkialla kaistassa $(F - f_{max}, F + f_{max})$. Sanotaan, että *kaistanleveyden kulutus* on $2f_{max}$.

[1] Esimerkissä oletetaan, että kantoaalto on vahvempi kuin modulaatiot, kuten on asian laita perinteisessä amplitudimodulaatiossa. Tämä kantoaalto sisältää kuitenkin paljon tehoa, ja siksi kantoaalto poistetaan joskus signaalista. Myös sivukaistoista yksi voidaan poistaa, jolloin ratkaisua kutsutaan sivunauhamodulaatioksi (SSB), joka säästää puolet kaistanleveydestä.

Lähetysverkoille kaistanleveys on rajallinen ja arvokas resurssi, joka tulee kohdentaa harkiten.

D.1.1.2 Nyquistin lause

Tavallinen ongelma on ajan funktion esitys erillisillä otospisteillä eli vastaavasti stokastisen prosessin esittäminen aikasarjalla. Voidaan osoittaa, että otospisteiden aikaväli Δt ei saa olla pidempi kuin *puolet lyhimmästä funktiossa esiintyvästä jaksosta.* Tätä kutsutaan Nyquistin[2] lauseeksi. Funktion diskreetti esitys voidaan muuntaa diskreetin Fourier'n muunnoksen avulla ajan funktion muodosta $A(t)$ taajuuden funktion muotoon $\mathcal{A}(f)$, ja takaisin. Jos Nyquistin ehto täyttyy, molemmat muodot sisältävät alkuperäisfunktion koko tietosisällön. Numeerisesti tähän laskentaan käytetään nopeaa Fourier'n muunnosta (FFT).

Jos moduloivana signaalina on annettu ajan funktio, jonka korkein taajuus on f_{max}, sen sisältämä lyhin jakso on $1/f_{max}$. Sekunnissa välitetty otosten lukumäärän on silloin oltava $2f_{max}$ eli juuri amplitudimoduloidun signaalin varaama kaistanleveys.

D.1.2 Piirikytkentäiset verkot

D.1.2.1 Historia

Ensimmäinen kytkentäinen eli monesta moneen -tyyppinen verkko oli puhelinverkko. Se on yhä olemassa, olihan se historiallinen jymymenestys. Puhelinverkko on itse asiassa piirikytkentäinen verkko, eli se luo väliaikaisen mutta kestävän yhteyden puhujien välille.

Puhelimen keksimisestä kiitetään tavallisesti Alexander Graham Belliä. Todellisuudessa aika oli keksintöön kypsä, aivan kuten höyrykoneen, kaukoputken ja monen muun käytännöllisen keksinnön tapauksessa. Monet, kuten Elisha Gray, joka jätti patenttihakemuksensa vain pari tuntia Bellin jälkeen, Antonio Meucci (Carroll, 2002) ja Thomas Edison, tarjosivat hyödyllisiä ideoita jo ennen kuin toimiva toteutus mahdollisti ensimmäisen puhelinverkon rakentamisen.

Monta vuotta American Telephone & Telegraph oli puhelinteknologian monopolin haltija. Ajoittain syntyi kilpailulainsäädännön oikeusjuttuja yritystä vastaan, joka oli vastuussa myös ensimmäisen puhelinkaapelin laskemisesta Atlantin yli. Yhtiö rakensi myös ensimmäisen

[2] Harry Nyquist (1889–1976) oli ruotsalaissyntyinen amerikkalainen sähköinsinööri.

aktiivisen eli vahvistinpohjaisen tietoliikennesatelliitin *Telstarin* ja keksi
3 UNIX®[3]-käyttöjärjestelmän. . . .

Puhelin perustuu äänen lähettämiseen sähköisessä muodossa kuparilankaa pitkin. Näin tapahtuu lankapuhelimen tapauksessa edelleen muutaman metrin matkalla tilaajan lähellä. Kaikki muu verkon laitteisto on nykyisin täysin digitaalista. Yhteyden muodostaminen oli aluksi manuaalinen tehtävä. Jo ennen vuotta 1900 rakennettiin ensimmäisiä mekaanisesti automatisoituja puhelinkeskuksia. Numero valittiin pyörivän rei'itetyn kiekon avulla, joka lähetti yhtä monta pulssia kuin valitun sormenreiän alla kirjoitettu numeromerkki. Tätä kutsutaan "pulssivalinnaksi". Vuoden 1963 jälkeen nopeampi äänivalinta korvasi sen suurelta osin, vaikkakaan ei täysin.

Puhelinnumeroiden järjestelmä on kolmen kerroksen hierarkkinen järjestelmä, jota ei hallita yhdestä pisteestä. Kyseessä on siis merkittävä keksintö, joka on kestänyt hyvin aikaa, vaikka se on ainutlaatuisen käyttäjäepäystävällinen. Perinteisesti numerot haettiin käsin paksuista paperikirjoista, puhelinluetteloista. Maailma on jaettu kansallisiin alueisiin, joilla on omat maakoodit. Yhdysvalloilla on maakoodi 1 ja useimmilla suurilla mailla kaksinumeroinen koodi, esimerkiksi Saksalla 49. Suomen kaltaiset pienet ja köyhät maat ovat hyväksyneet kolminumeroiset koodit (358). Kansallisten alueiden alla ovat suuntanumerot, tyypillisesti kaupungeille, joskaan ei aina, ja niiden sisällä tilaajien omat numerot.

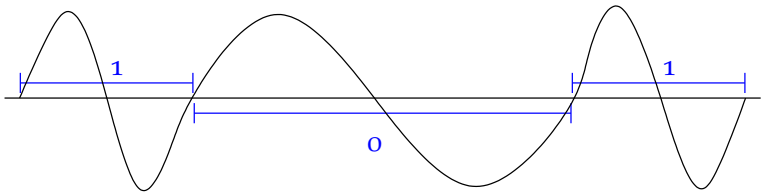
Puhelinnumeroita on yritetty tehdä helpommin muistettaviksi, mutta kaikki yritykset ovat epäonnistuneet. Uudet puhelimen kaltaiset ideat, kuten Internetin puhelinpalvelut, saattavat pitemmällä tähtäimellä muuttaa tilanteen. On merkille pantavaa, että jotkut sovellukset,
4 kuten Signal®[4] ja WhatsApp®[5], käyttävät käyttäjätunnuksena sen mat-
5 kapuhelimen numeroa, johon ne on asennettu! Vanhoja tapoja on vaikea muuttaa.

Puhelinverkon digitalisointi on mahdollistanut *"always-on"* eli aina päällä olevat tietoyhteydet jopa viimeisten jäljellä olevien kuparilankametrien yli taajuuksilla, jotka ovat kuultavan äänen taajuuksien yläpuolella. Alipäästösuotimen avulla ääntä ja tietoja voidaan käyttää jopa samanaikaisesti ja samalla linjalla: digitaalinen tilaajayhteys, *digital*

[3]UNIX on The Open Groupin rekisteröity tavaramerkki.

[4]Signal on Signal Messenger LLC:n rekisteröity tavaramerkki.

[5]WhatsApp on WhatsApp Inc:n rekisteröity tavaramerkki.



KUVA D.2. Binaarinen taajuusavainnusmodulaatio eli *"binary frequency-shift keying"* (BFSK).

subscriber line, DSL.

D.1.2.2 Modeemit

Koska puhelinverkko on suunniteltu äänen siirtämistä varten, tietojen siirto onnistuu vain, jos tiedot voidaan muuntaa ääniksi, eli anologisiksi ääniaalloiksi, ja ääni takaisin tiedoiksi. Se tehdään laitteella nimeltä *modeemi*, modulaattori-demodulaattori.

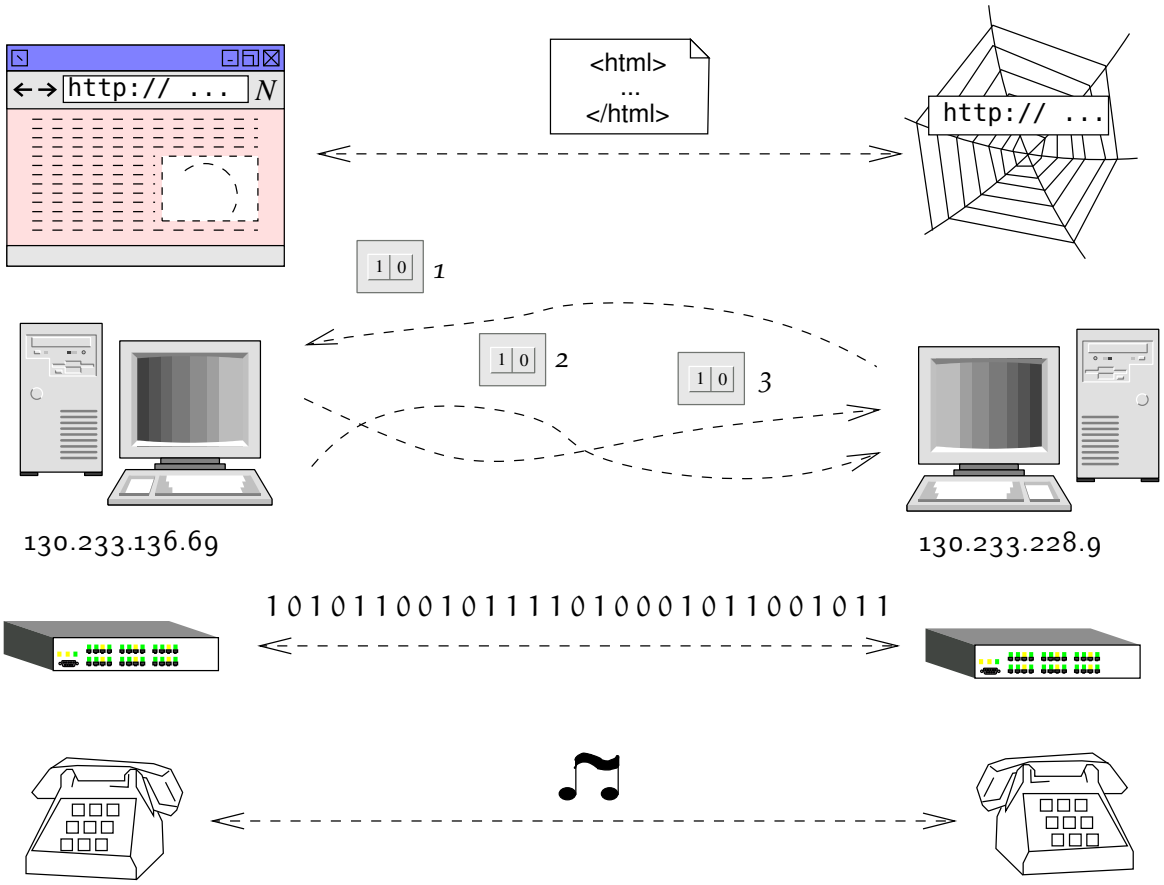
Kuva D.2 esittää yhden tekniikan, binaarisen taajuusavainnuksen, BFSK, jolla modulaatio usein toteutetaan. Looginen 1 koodataan lyhyeksi eli korkean taajuuden aalloksi ja looginen 0 pitkäksi eli matalan taajuuden aalloksi. Tämä on yksinkertainen ja hieman tuhlaileva, mutta tehokas ja vankka modulaatiotekniikka[6]. Lisäksi lähetetään tarkistussummia, mikä varmistaa, että vastaanotettu tieto on sama kuin se, mikä lähetettiin myös kohisevia linjoja pitkin. Käytetyt menetelmät ovat pariteettitarkistus ja syklinen redundanssitarkistus[7] (CRC) . Tietojen pakkausta käytetään aina kun mahdollista, koska se nopeuttaa erityisesti tekstityyppisen tiedon siirtoa.

Modeemeille löytyy useita standardeja, joista suurin osa on Kansainvälisen televiestintäliiton (ITU) käsialaa. Laadukkaalla analogisella linjalla 56k bittiä sekunnissa on parasta, mihin voidaan päästä perinteisen soittomodeemin äänitaajuuksilla.

Modeemin käyttö tietojen siirtämiseksi pitkin verkkoa, joka oli suunniteltu vain äänen siirtämistä varten, on *protokollapinon* esimerkki. Alin kerros on äänensiirto, jolle kerrostetaan digitaalinen tiedonsiirto bittivirran muodossa. Lisää kerroksia voidaan asettaa tämän päälle. Käytössä on esimerkiksi Internet Protocol (IP) ja Transmission Control Protocol

[6] Samaa tekniikkaa käytettiin myös Commodore 64:n kaltaisten kotimikrojen kasettinauhuripohjaisissa tallennusratkaisuissa.

[7] Sekä pariteetti- että CRC-tarkistus muistuttavat desimaalilukujen käsilaskennasta tuttua yhdeksänmenetelmää.



KUVA D.3. Protokollapinon esimerkki.

(TCP), joista lisää myöhemmin, ja edistyneet protokollat, kuten web-bipalvelu HTTP. Kun muodostetaan sellainen yhteys, pinon jokainen kerros tulee muodostaa vuorollaan, alimmasta ylöspäin.

Protokollapinossa korkeammat kerrokset ovat tavallisesti ohjelmistopohjaisia ja alimmat kerrokset on toteutettu laitteistossa. Esimerkiksi puhelinääni siirtyy perinteisesti jännitteen vaihteluina kuparilangassa. Digitaalisen teknologian kehittyessä ohjelmisto kuitenkin leviää pinossa alaspäin: viimeistä muutamaa metriä lukuun ottamatta puhelinääni siirtyy nykyisin digitaalisina bittikuvioina ja usein valokuitukaapeleita pitkin.

Tämän ohjelmiston alaspäin leviämisen myötä laitteet, jotka aiemmin olivat hyvin erilaisia, muuttuvat laitteistotasolla hyvin samanlaiseksi. Esimerkiksi puhelin ja televisio — ja GNSS-vastaanotin — muistuttavat yhä enemmän yleistietokoneita, jotka on vain ohjelmoitu eri tavalla ja jotka käyttävät eri oheislaitteita. Tätä ilmiötä kutsutaan *teknologiseksi lähentymiseksi* eli konvergenssiksi.

D.1.2.3 Mobiililaitteet

Matkapuhelimia, jotka perustuvat GSM-järjestelmään (Global System for Mobile Communications) voidaan käyttää myös datansiirtoon. Alkuperäisellä GSM-protokollalla saavutettavat siirtonopeudet olivat 9600–14 400 bittiä sekunnissa.

Käytössä on nykyisin myös edistyneempiä protokollia, kuten GPRS (General Packet Radio Services) ja EDGE (Enhanced Data Rates for GSM Evolution), jotka mahdollistavat aina päällä olevat digitaaliset yhteydet, joissa tiedonsiirtonopeus on paljon suurempi. Usein näistä teknologioista puhutaan vertauskuvallisesti sukupolvina: 2G, 3G ja 4G.

Tästä siirrytään luontevasti seuraavaan aiheeseen: pakettikytkentäisiin verkkoihin.

D.1.3 Pakettikytkentäiset verkot

Klassinen pakettikytkentäinen verkko on Internet. Se on myös monesta moneen -tyyppinen tietoliikenneverkko, mutta siihen yhtäläisyys puhelinverkon kanssa loppuu. Internet perustuu *pakettien* siirtoon. Paketit koostuvat tietotavuista ja oheisinformaatiosta. Ei ole mahdollista sanoa, miten tietty paketti kulkee määränpäähänsä, vai saapuuko se lainkaan ja jos saapuu, kuinka nopeasti.

Pakettikytkentäisten verkkojen idea vaihtoehtona piirikytkentäisille verkoille sai alkunsa sotilaallisesta tutkimuksesta: onhan pakettikytkentäinen verkkosiirto vähemmän altis verkon paikallisille vaurioille, eli tiedonsiirtoa on vaikeampi keskeyttää. Sama pätee yrityksiin estää verkko: ”Internet tulkitsee sensuurin vahingoksi ja reitittää sen ohitse.”

Internetin toiminta, IP-osoitteet ja nimipalvelut (DNS) selitetään monessa paikassa[8] emmekä toista selityksiä tässä. Internetin protokollan (IP) päälle on rakennettu useita protokollia, joista tärkeimmät ovat

- ICMP (Internet Control Message Protocol), esimerkiksi tunnettu komento `ping`[9] verkkoyhteyksien tarkistamiseksi.
- UDP (User Datagram Protocol) on yhteydetön protokolla: lähettäjä lähettää paketteja ja vastaanottaja ottaa ne vastaan — useimmiten. Protokollaan ei kuulu onnistuneen vastaanoton varmistusta eikä

[8] Esimerkiksi Wikipedia, Domain Name System.

[9] Nimi on onomatopoeettinen ja matkii kaikuluotaimen ääntä, Muuss (ilman päivämäärää).

myöskään varmistusta siitä, että paketit vastaanotetaan oikeassa järjestyksessä ja vain kerran. UDP:n hallintokustannukset ovat alhaisia, mikä on tavallisin syy siihen, miksi sitä käytetään. Esimerkiksi Internetin ajanpitoprotokolla NTP (*Network Time Protocol*) käyttää UDP:ta. Aikapalvelin vain lähettää paketteja asiakkaille, jotka voivat vastaanottaa ne ja joiden avulla asiakas voi synkronoida kellonsa.

- TCP (Transmission Control Protocol) on *yhteyspohjainen* protokolla. Se muodostaa yhteyden kahden isäntäkoneen välille Internetissä ja siirtää paketteja molempiin suuntiin, kunnes yhteys suljetaan. Kyseessä on siis *kaksisuuntainen* protokolla, mutta se aloitetaan aina yhdeltä puolelta, tavallisesti asiakaspuolelta.

  Paketit voivat matkustaa isäntäkoneesta toiseen monen eri polun kautta. Vastaanottaja laittaa ne oikeaan järjestykseen jokaisen paketin *järjestysnumeron* perusteella. Jos paketti puuttuu ja sen aikakatkaisu on umpeutunut, lähetetään uudelleenlähetyspyyntö. Näin ollen TCP on *luotettava*.

  Yhteyden turvallisuus parannetaan siten, että molemmat isäntäkoneet valitsevat yhteyden pakettilaskurin alkuarvon satunnaisesti — tai ainakin tavalla, joka ei ole helposti ennustettavissa. Se tekee yhteyden kaappaamisen — niin sanottu ”mies välissä -hyökkäys” — vaikeammaksi, joskaan ei mahdottomaksi.

UDP:ssä ja TCP:ssä jokainen paketti sisältää kaksi tietokenttää, joita kutsutaan *lähde-* ja *kohdeportiksi*. Nämä ovat 16-bittisiä lukuja välillä 0 ja 65 535, joilla erotetaan eri palvelutyypit toisistaan. Esimerkiksi HTTP käyttää tavallisesti porttia 80[10]. Nämä ”portit” ovat kuitenkin puhtaasti ohjelmallisia: käyttöjärjestelmän verkkoyhteyksiä hoitava ohjelmistokerros erottaa porttinumerot toisistaan ja ohjaa paketit sopiville palvelin- tai asiakasprosesseille. Tätä ei voi verrata *laitteiston* sarja-, rinnakkais- tai USB-porttiin!

Yksikään niistä Internet-protokollista ei ole oikeasti tosiaikainen — koska Internet ei ole tosiaikainen. Usein niitä käytetään tosiaikaisella tavalla, olettaen että lähetyksen vasteaika ei koskaan kasva ylen suureksi, mutta se on *onnenpeliä*. Aika viaton esimerkki on musiikin suoratoisto. Mutta jo kohtalainen ruuhka paikallisesti tai kauempana tekee siirtoajoista ennalta arvaamattomia.

[10] Kaikkien palveluiden lista on tiedostossa `/etc/services`.

D.2 Tosiaikaiset järjestelmät

D.2.1 Laitteisto

Navigoinnissa käytössä olevissa tosiaikaisissa järjestelmissä digitaalisen laitteiston laskentateho on tavallisesti vaatimaton. Esimerkiksi matkapuhelimen alhaisen käyttötehon ja pienen koon vaatimukset rajoittavat, minkä tyyppistä ja paljonko ”rautaa” voidaan käyttää.

Toinen rajoite saattaa olla, ettei laitteiston kanssa voida käyttää täysikokoista näppäimistöä ja että on tyydyttävä hiiren sijasta pieneen kosketusnäyttöön. Myös antennin koko saattaa olla rajallinen. Navigoinnin käyttöympäristöstä riippuen vaatimuksena voi olla myös fyysinen kestävyys.

D.2.2 Käyttöjärjestelmät

Mainitut laitteistorajoitukset rajoittavat myös sitä, minkälaista järjestelmäohjelmistoa voidaan käyttää. Tavallisesti käytetään esimerkiksi UAV:ssä ”sulautettuja” käyttöjärjestelmiä, kuten Android™[11], Windows®[12] ja Linux®[13] sulautettuina versioina.

Korkean luotettavuuden operaatioissa, esimerkiksi avaruusaluksilla, käytetään myös tosiaikaisia sulautettuja järjestelmiä, kuten QNX®[14] ja Wind River Systems. Mars-mönkijät Spirit, Opportunity ja Curiosity sekä Mars-laskeutuja InSight käyttivät ja käyttävät Wind River Systemsin VxWorks®[15]-ohjelmistoa.

”Kovissa” tosiaikaisissa sovelluksissa eli sovelluksissa, joissa tosiaikaisuuden vaatimus on ehdoton, käyttöjärjestelmä saisi mieluiten olla kaatumatta. Spiritin järjestelmä kuitenkin kaatui kerran, kun sen muisti täyttyi *flash*-tallennustilan tiedostokahvoilla. Siivouksen jälkeen se nousi taas kauniisti pystyyn (Weiss, 2004).

Lienee selvää, että jos haluaa liittää järjestelmään eri laitteita, kuten GPS ja muut anturit, laiteajureiden saatavuus tai niiden kehittämisen helppous ovat kriittisiä asioita.

---

[11] Android on Google Inc:n tavaramerkki.

[12] Windows on Microsoft Corporationin rekisteröity tavaramerkki.

[13] Linux on The Linux Foundationin rekisteröity tavaramerkki.

[14] QNX on QNX Software Systems Ltd:n rekisteröity tavaramerkki.

[15] VxWorks on Wind River Systems Inc:n rekisteröity tavaramerkki.

Kun laitteistoteho kasvaa ja koko ja sähkökulutus laskee teknologian kehityksen myötä, kuluttajatason yleiskäyttöjärjestelmät löytävät hieman viritettyinä yhä useammin tiensä myös näihin rajoitettuihin mobiilialustoihin.

Peruskäyttöjärjestelmä toimii seuraavalla tavalla: kun se käynnistetään, itse käyttöjärjestelmän, tiedostojärjestelmän ja eri laiteajureiden aktivoinnin jälkeen alkuprosessi käynnistää kaikki tähän järjestelmään tarvittavat taustapalveluprosessit eli daemonit lapsiprosesseina ja siirtyy monen käyttäjän tilaan. Käyttöjärjestelmä lataa *login*-prosessin, joka keskustelee käyttäjän kanssa yhdellä tai useammalla päätelaitteella. Kun käyttäjä kirjautuu, hänelle annetaan käytettäväksi *shell* eli komentotulkki, jonka avulla hän voi käynnistää omia prosessejaan.

Kuluttajatason käyttöjärjestelmä käynnistää tässä vaiheessa myös ikkunoivan GUI:n eli graafisen käyttöliittymän, jonka avulla myös kevyesti koulutetut käyttäjät voivat käyttää järjestelmää. Tämä vaatii kuitenkin lisäresursseja. Myös graafiselta käyttöliittymältä voidaan käynnistää käyttäjän prosesseja, jotka vuorovaikuttavat käyttäjän kanssa graafisen käyttöliittymän välityksellä.

Käyttöjärjestelmän määritelmän mukaan se hallinnoi järjestelmän eri resursseja tavalla, joka on käyttäjälle läpinäkyvä ja peittää tekniset yksityiskohdat. Laiteajurit ovat tästä yksi esimerkki. Ja esimerkiksi prosessoriresursseja hallinnoidaan *vuorontajan* avulla.

D.2.3 Prosessin kulku

Yksittäisen prosessin kannalta[16] suorituspolku on *lineaarinen*. Tämä merkitsee, että lauseen suorituksen jälkeen prosessi jatkuu joko ohjelman seuraavalla lauseella tai sillä lauseella, johon haarautumislause (`if`, `switch`, ...) osoittaa. Näin voidaan helposti seurata hetkellistä prosessin tilaa: vain suoritetut lauseet voivat sitä muuttaa.

Proseduuri, myös aliohjelma tai funktio tai metodi, suoritetaan vain, koska jokin muu proseduuri, ja viime kädessä pääohjelma, kutsuu sitä *sen* lineaarisen suorituksen aikana. Proseduuri suoritetaan seuraavasti: kun sitä kutsutaan, se laittaa *paluuosoitteen* eli ohjelmalaskurissa olevan arvon *suorituspinolle*. Pino on LIFO eli *last in, first out* eli viimeiseksi sisään, ensimmäiseksi ulos -tietorakenne. Sitä käytetään proseduurikutsujen yhteydessä.

[16] ... ja unohdetaan säikeet!

Seuraavaksi pinolle laitetaan myös proseduurikutsun mahdollisesti sisältämät parametriarvot tai osoittimet globaaleihin muuttujiin, jolloin pino kasvaa. On kaksi tapaa kutsua parametreja eli argumentteja proseduurikutsun yhteydessä: *nimivälitteisyys* ja *arvovälitteisyys*.

- *Nimivälitteisyys*: proseduurikutsun parametrina eli argumenttina käytetään muuttujan nimeä. Pinolle laitetaan osoitin kutsuvan ohjelman muuttujalle varaamaan muistipaikkaan.
- *Arvovälitteisyys*: proseduurikutsun parametrinä käytetään joko lauseketta tai vakiota. Lauseke evaluoidaan ohjelman suorituksen aikana, kun proseduuria kutsutaan, ja saatu arvo laitetaan pinolle.

Jos halutaan, että proseduurin sisäisten laskentojen tulos palautetaan kutsuvaan proseduuriin, on käytettävä nimivälitteisyyttä. Silloin proseduurin sisällä tehdään sijoitus muuttujaan, siis sen osoittamaan muistipaikkaan, josta kutsuva proseduuri, joka itse varasi muistipaikan, löytää sen.

Myös proseduurin sisällä esitellyille paikallisille muuttujille varataan tilaa pinolle. Näiden muuttujien *näkyvyysalue* — niiden voimassaolon alue — rajoittuu suoritettavaan proseduuriin.

Kun ohjelman kulku pääsee proseduurin loppuun, poistetaan pinolta ensin nämä paikalliset muuttujat. Sen jälkeen poistetaan proseduurin omat pinolle laitetut parametrit (vakiot, lausekkeet ja osoittimet), ja lopuksi pinon päällimmäinen alkio siirretään takaisin prosessorin ohjelmalaskuriin. Näin ohjelman kulku on palannut kutsuvaan proseduuriin, joka jatkuu proseduurikutsua seuraavasta lauseesta eteenpäin.

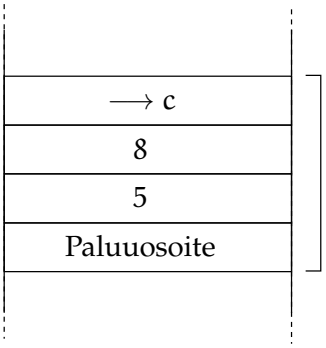
Suorituspinon käytön edut ovat:

- Proseduurien sisällä esitellyt muuttujat vapautetaan, kun palataan proseduurista takaisin päin.
- Proseduureja voidaan *kutsua rekursiivisesti*: jokaisella proseduurin ilmentymällä on oma pinokehys omalla kutsuparametrien ja paikallisten muuttujien versiolla eli ilmentymällä. Tämä tietenkin edellyttää, että rekursio loppuu joskus johonkin sopivaan ehtoon. Ellei näin käy, seuraa pinon ylivuotovirhe.

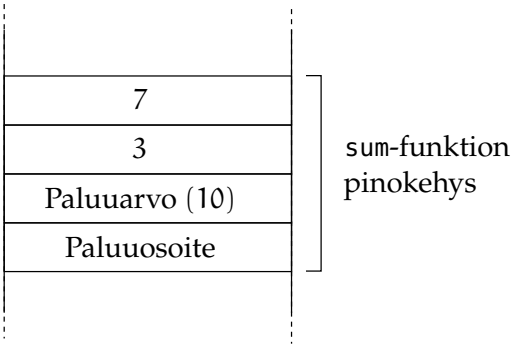
D.2.4 Muistin varaus

Pinon tapauksessa muistin varaus tapahtuu lineaarisesti pino-osoittimen avulla. Muistin vapautus tapahtuu käänteisessä järjestyksessä. Pino-

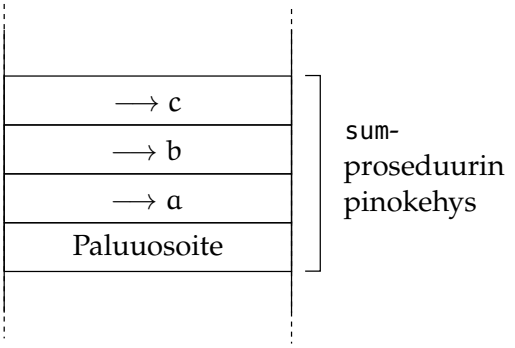
```
procedure sum(a, b, c)
c = a + b
return
...
declare c
# Nimivälitteinen c
call sum(5, 8, c)
print c
>> 13
```




```
function sum(a, b)
sum = a + b
return
...
declare c
c = sum(3, 7)
print c
>> 10
```




```
procedure sum(a, b, c)
c = a + b
return
...
declare a, b, c
a = 6
b = 5
# Nimivälitteiset a, b, c
call sum(a, b, c)
print c
>> 11
```



KUVA D.4. Proseduurikutsu ja pinon käyttö.

osoitin osoittaa aina pinon päällimmäiseen alkioon eli viimeiseen, joka varattiin, ja ensimmäiseen, joka vapautetaan. LIFO — *last in, first out.*

Kasan tapauksessa muistin varaus tapahtuu myös lineaarisesti, mutta vapautus epäsynkroonisesti. Kasa on sopiva muistiratkaisu kun tallennetaan muuttujia, jotka ovat vaihtelevan kokoisia, esimerkiksi merkkijonoja. Merkkijono tallennetaan pinolle osoittimena, joka osoittaa jonon sisältöön kasalla. Kun ketjutetaan esimerkiksi kaksi merkkijonoa uudeksi merkkijonoksi, laitetaan uusi jono kasalle ja vanhojen jonojen osoittimet siirretään pinolta vapautetun muistin listalle. Sama tapahtuu merkkijonolle, joka on esitelty paikallisesti proseduurin sisällä, kun ohjelman kulku palaa proseduurista.

Kun kasan muisti on käytetty loppuun, käynnistetään tiivistämis-

operaatio nimeltä *roskankeruu*, joka poistaa muistin varauksen reiät, poistetut vanhat merkkijonot eli ”raadot”, oikeasti.

D.2.5 Keskeytykset ja estäminen

Keskeytykset ovat sekä samankaltaisia että erilaisia kuin proseduurikutsut. Olennainen ero on, että keskeytys voi tapahtua hetkellä millä hyvänsä laitteistoon liittyvän ulkoisen tapahtuman seurauksena. Tavallisesti aiheuttaja on oheislaite, jolla on joko tarjolla luettavissa olevia tietoja tai joka odottaa tietojen kirjoittamista. Pääsyy keskeytysten käyttöön on, että ilman niitä, oheislaitteisiin tulisi lähettää riittävän usein *kiertokysely* (engl. *poll*), jotta siirrettäviä tietoja ei menetettäisi. Kiertokysely kuluttaa suorittimen aikaa.

Tietokonelaitteisto tarjoaa erityyppisiä keskeytyksiä. Kun keskeytykset laukaistaan, ne ovat vastuussa siitä, että ne eivät tee mitään, joka voisi häiritä vuoronnettuja prosesseja. Keskeytyksiä käytetään esimerkiksi syöttö- ja tulostuslaitteiden palvelemiseksi, koska ne eivät voi odottaa. Jokaiseen keskeytykseen kuuluu oma *keskeytysvektori*, ohjelmalaskuriin ladattava *keskeytyskäsittelijän* muistiosoite. Keskeytyskäsittelijä on rutiini, joka suoritetaan, kun keskeytys laukaistaan.

Esimerkkinä mainittakoon kellokeskeytysrutiini. Se laukaistaan tyypillisesti 50 kertaa sekunnissa, ja sen nimi kertoo, mitä se tekee: askelluttaa käyttöjärjestelmän ylläpitämää aikarekisteriä. Tavallisesti se on vastuussa myös *vuoronvaihdosta*, mikä sallii monien tehtävien ajon näennäisesti samanaikaisesti.

Jokaisessa vuoronvaihdossa sillä hetkellä käynnissä olevan prosessin *konteksti* — tietojoukko, mukaan lukien suorittimen rekisterit ja erityisesti ohjelmalaskuri, jota prosessi tarvitsee ajon jatkamiseksi keskeytyksen jälkeen — laitetaan talteen. Toisen prosessin annetaan ajaa seuraavan ”aikaviipaleen”, 0,02 s, aikana *sen* kontekstitietojen lataamisen jälkeen.

Päätös, mikä prosessi pitää seuraavasti *vuorontaa*, on aihe, josta on kirjoitettu paksuja kirjoja. Sen on oltava prosessi, joka on ”ajokelpoinen”, eikä se saa esimerkiksi odottaa käyttäjän datansyöttöä. Sen *prioriteetin* on oltava riittävän korkea. Interaktiivisille prosesseille annetaan korkea prioriteetti, kun taas eräajot suoritetaan matalalla prioriteetilla. Monen käyttäjän ympäristössä tulisi olla mekanismi valvomattomien eräajojen prioriteetin alentamiseksi vapaaehtoisesti: `nice`-komento.

Jokaisella prosessilla — erityisesti ytimen eli järjestelmätason prosesseilla — on koodissaan pätkiä, joiden aikana keskeytyminen olisi väärin

tai tuhoisaa. Esimerkki tästä on tiedon siirtäminen muistiin kiintolevysektorilta, kun tieto kiitää lukupään ohitse. Ihmisinä tiedämme surullisen hyvin, että jotkut tehtävät ovat sen luonteisia, ettei niitä yksinkertaisesti voi suorittaa ilman työrauhaa. Jos meidät keskeytetään, on aloitettava jälleen alusta, ellei pahempaa. Tietokoneet eivät ole poikkeus tästä.

Siksi on mahdollista *estää* keskeytyksiä. Kriittiset ydinrutiinit estävät kello- ja muut keskeytykset, eli kytkevät ne pois päältä. Kun ydinrutiini on saatu suoritetuksi, keskeytykset kytketään taas päälle eli *sallitaan* ne.

D.2.6 Tosiaikaiskäytön vaatimukset

Tosiaikaiskäytön edellytykset ovat seuraavat.

1) On tiedettävä etukäteen, mitkä prosessit ovat käynnissä järjestelmässä. Siksi esimerkiksi monen käyttäjän palvelimen kaltainen ympäristö, johon ihmiset voivat kirjautua ja jossa he voivat käynnistää mielivaltaisia prosesseja, ei ole hyväksyttävä.
2) On tiedettävä etukäteen, mitkä ovat suoritusajan suhteen *pisimmät* koodipätkät ajokelpoisten prosessien sisällä, *joiden aikana niitä ei saa keskeyttää*. Niiden kestojen on oltava hyväksyttävän lyhyitä.
3) Tosiaikaisuuskriittisille prosesseille tulee antaa korkein prioriteetti, kaikille muille matalampi prioriteetti.
4) Vuoronvaihdon aikavälin on oltava sopivan lyhyt, 0,02 s voi olla liian pitkä. Tämä riippuu tehtävän luonteesta.
5) Järjestelmän kokonaiskäsittelytehon on oltava riittävä
   (a) keskimäärin kaikille prosesseille
   (b) *kaikkina ajankohtina* ja *kaikille* tosiaikaisille prosesseille yhdessä.

”Kovan” tosiaikaisuuden vaatimuksen täyttäminen on haastavaa, ja se vaatii laajaa kuormitustestausta ja huomattavaa suorituskyvyn ylivarausta. Usein on viisasta kysyä, tarvitaanko oikeasti kovaa tosiaikaisuutta ja hyväksyä jotakin vaatimattomampaa. Esimerkiksi audiolähetysten tai videoiden Internetin suoratoisto-ohjelmistot ottavat Internetin eitosiaikaisen luonteen huomioon *puskuroimalla*, siis keräämällä sisään tulevat datapaketit puskuriin, jonka avulla voidaan luoda jatkuva ääni- ja videokokemus, vaikka osa paketeista saapuisi melko myöhään. Kompromissin hintana on muutaman sekunnin viive. Tämä on hyvinkin huomattavissa, jos sama suora lähetys nähdään myös analogisena, mutta tallenteita toistettaessa asialla ei ole merkitystä.

Kirjallisuutta

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXZ

A

David W. Allan. Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of the IEEE*, 54(2):221–230, 1966. URL https://doi.org/10.1109/PROC.1966.4634. 189

Allan's Time. The Allan Variance. URL http://www.allanstime.com/AllanVariance/. Avattu 6. toukokuuta 2019. 188

Analog Devices. Data Sheet ADXL103/ADXL203 Rev. F. URL https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/adxl103_203.pdf. Avattu 11. heinäkuuta 2020. 293

Neil Ashby. Relativity in the Global Positioning System. *Living Reviews in Relativity*, 55, tammikuu 2003. URL https://doi.org/10.12942/lrr-2003-1. 168, 169

Jose Ángel Ávila Rodríguez. Galileo Signal Plan. *ESA Navipedia*, 2011. URL https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Galileo_Signal_Plan. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 263

B

Willem Baarda. *A testing procedure for use in geodetic networks*, nide 2 numero 5 sarjassa *Publications on geodesy, new series*. Netherlands Geodetic Commission, Delft, 1968. URL https://www.ncgeo.nl/downloads/09Baarda.pdf. Avattu 14. toukokuuta 2019. 238

Tulu Besha Bedada. *Absolute geopotential height system for Ethiopia*. Väitöskirja, University of Edinburgh, 2010. URL https://era.ed.ac.uk/handle/1842/4726. Avattu 22. syyskuuta 2021. 273

BeiDou Constellation Status. Test and Assessment Research Center of China Satellite Navigation Office. URL

http://www.csno-tarc.cn/en/system/constellation. Avattu 17. syyskuuta 2021. 264

BeiDou ICD. BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document, Open Service Signal B2a (Version 1.0). PDF, China Satellite Navigation Office, 2017. URL http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/201806/P020180608518432765621.pdf. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 264

BeiDou ICD. BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document, Open Service Signal B1C (Version 1.0). PDF, China Satellite Navigation Office, 2018a. URL http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/201806/P020180608519640359959.pdf. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 264

BeiDou ICD. BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document, Open Service Signal B3I (Version 1.0). PDF, China Satellite Navigation Office, 2018b. URL http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/201806/P020180608516798097666.pdf. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 264

BeiDou ICD. BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document, Open Service Signal B1I (Version 3.0). PDF, China Satellite Navigation Office, 2019. URL http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/201902/P020190227702348791891.pdf. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 264

BeiDou ICD. BeiDou Navigation Satellite System Signal In Space Interface Control Document, Open Service Signal B2b (Version 1.0). PDF, China Satellite Navigation Office, 2020. URL http://en.beidou.gov.cn/SYSTEMS/ICD/202008/P020200803539206360377.pdf. Avattu 21. helmikuuta 2022. 264

BeiDou Introduction. CSNO-TARC, Test and Assessment Research Center of China Satellite Navigation Office. URL http://www.csno-tarc.cn/en/system/introduction. Avattu 17. huhtikuuta 2020. 266

BeiDou Navigation Satellite System. Serve the World and Benefit Mankind. URL http://en.beidou.gov.cn/. Avattu 29. toukokuuta 2020. 264

BKG, Ntrip and RTCM version 3. Ntrip - Networked Transport of RTCM via Internet Protocol. URL https://igs.bkg.bund.de/ntrip. Avattu 17. syyskuuta 2021. 212

BKG, NTRIP v. 1.0. Networked Transport of RTCM via Internet Protocol (NTRIP) — Version 1.0. URL https://igs.bkg.bund.de/root_ftp/NTRIP/documentation/NtripDocumentation.pdf. Avattu 5. toukokuuta 2019. 214

John M. Brozena. The Greenland Aerogeophysics Project: Airborne gravity, topographic and magnetic mapping of an entire continent. International Association of Geodesy Symposia 110, sivut 203–214, Wien, Itävalta, 20. elokuuta 1992. Springer, New York, New York. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9255-2. 272

C

Rory Carroll. Bell did not invent telephone, US rules. *Guardian*, 17. kesäkuuta 2002. URL https://www.theguardian.com/world/2002/jun/17/humanities.internationaleducationnews. Avattu 30. huhtikuuta 2020. 309

Liang Chen, Ling Pei, Heidi Kuusniemi, Yuwei Chen, Tuomo Kröger ja Ruizhi Chen. Bayesian fusion for indoor positioning using Bluetooth fingerprints. *Wireless Personal Communications*, 70(4):1735–1745, 2013. URL https://doi.org/10.1007/s11277-012-0777-1. Avattu 18. toukokuuta 2019. 296

Ruizhi Chen, Felix Toran-Marti ja Javier Ventura-Traveset. Access to the EGNOS signal in space over mobile-IP. *GPS Solutions*, 7:16–22, 2003. URL https://doi.org/10.1007/s10291-003-0050-x. 254

William H. Clohessy ja R. S. Wiltshire. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, 27(9), 1960. URL https://doi.org/10.2514/8.8704. 135, 155

Control Segment. GPS Interface Control Documents, 2018. URL https://www.gps.gov/systems/gps/control/. Avattu 5. elokuuta 2020. 162

Michael Alan Ralph Cooper. *Control Surveys in Civil Engineering*. Collins, Department of Civil Engineering, The City University, London, 1987. 115

John Peter Costas. Synchronous communications. *Proceedings of the IRE*, 44(12): 1713–1718, 1956. URL https://doi.org/10.1109/JRPROC.1956.275063. 185

D

Michael W. Davidson ja Kirill I. Tchourioukanov. Newton's prism experiments. URL https://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/newton/. Avattu 1. huhtikuuta 2020. 36

TU Delft, LAMBDA. Download LAMBDA and Ps-LAMBDA source code. URL https://www.tudelft.nl/citg/over-faculteit/afdelingen/geoscience-remote-sensing/research/lambda/lambda/. Avattu 6. toukokuuta 2019. 225

Jared Diamond. *Guns, Germs, and Steel: The Fates of Human Societies*. Norton, New York, New York, 1999. 3

David Dickinson. Remembering John Houbolt: the man who gave us lunar orbit rendezvous. *Universe Today*, 2014. URL https://www.universetoday.com/111424/remembering-john-houbolt-the-man-who-gave-us-lunar-orbit-rendezvous/. Avattu 4. toukokuuta 2019. 51

Edgar Durbin. Wikimedia Commons, Teterboro, ST-124 uncovered, 2004. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ST-124_uncovered_(IMGP3445).JPG. © 2004 Edgar Durbin (GFDL). Avattu 4. toukokuuta 2019. 113

E

EDAS. EGNOS User Support. URL https://egnos-user-support.essp-sas.eu/new_egnos_ops/services/about-edas. Avattu 17. syyskuuta 2021. 254

EDAS Service Definition Document. EGNOS User Support, 2019. URL https://egnos-user-support.essp-sas.eu/new_egnos_ops/sites/default/files/documents/egnos_edas_sdd_in_force.pdf. Avattu 17. syyskuuta 2021. 254

Carsten Egevang, Iain J. Stenhouse, Richard A. Phillips, Ævar Petersen, James W. Fox ja Janet R. D. Silk. Tracking of Arctic terns *Sterna paradisaea* reveals longest animal migration. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2010. URL https://doi.org/10.1073/pnas.0909493107. i

ESA, Galileo Navigation Signals and Frequencies. URL https://www.esa.int/Applications/Navigation/Galileo/Galileo_navigation_signals_and_frequencies. Avattu 22. syyskuuta 2021. 262

ESA, Introducing GOCE. URL https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/GOCE/Introducing_GOCE. Avattu 5. toukokuuta 2019. 275

European GNSS Service Centre. Constellation Information. URL https://www.gsc-europa.eu/system-service-status/constellation-information. Avattu 16. huhtikuuta 2020. 262

Exploratorium, Never Lost. URL https://www.exploratorium.edu/video/collections/never-lost-polynesian-navigation. Avattu 17. syyskuuta 2021. 3

F

René Forsberg, Klaus Hehl, Luísa Bastos, Arne Gidskehaug ja Uwe Mayer. Development of an airborne geoid mapping system for coastal oceanography (AGMASCO). Kokoelmassa Segawa ym. (1996), sivut 163–170. URL https://rd.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-03482-8_24. Avattu 17. syyskuuta 2021. 273

René Forsberg, Arne V. Olesen, Hasan Yildiz ja Carl Christian Tscherning. Polar gravity fields from GOCE and airborne gravity. Julkaisussa *4th International GOCE User Workshop*, TU München, Saksa, 2011. URL https://earth.esa.int/eogateway/documents/20142/37627/Polar_Gravity_Fields_GOCE_Airborne_Gravity_R.Forsberg.pdf. Avattu 17. syyskuuta 2021. 273

James W. Fox. Intigeo® series geolocator, 2018. URL http://www.migratetech.co.uk/IntigeoSummary.pdf. Avattu 19. kesäkuuta 2020. 296

G

Galileo OS SiS ICD. Galileo Open Service Signal-in-Space Interface Control Document. PDF, European Union, 2016. URL https://www.gsc-europa.eu/sites/default/files/sites/all/files/Galileo-OS-SIS-ICD.pdf. Avattu 9. elokuuta 2020. 262

Miguel García-Fernández, Markus Markgraf ja Oliver Montenbruck. Spin rate estimation of sounding rockets using GPS wind-up. *GPS Solutions*, 12: 155–161, 2008. URL https://doi.org/10.1007/s10291-007-0074-8. 173

GDGPS APPS. Automatic Precise Positioning Service of the Global Differential GPS System. URL https://apps.gdgps.net/apps_file_upload.php. Avattu 10. toukokuuta 2019. 254

GFZ, CHAMP — Challenging Minisatellite Payload. URL https://www.gfz-potsdam.de/champ/. Avattu 5. toukokuuta 2019. 275

GLAD. Global ARAIM for Dual-Constellation webinar. European Global Navigation Satellite Systems Agency (GSA), 2020. URL https://www.euspa.europa.eu/newsroom/european-space-expo/global-araim-dual-constellation-webinar. Avattu 27. heinäkuuta 2020. 240

Global Positioning Systems Directorate. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_Systems_Directorate. Avattu 17. syyskuuta 2021. 255

GLONASS ICD. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, Navigational Radiosignal in Bands L1, L2. PDF, Russian Institute of Space Device Engineering, Moskova, 2008. URL https://kb.unavco.org/kb/file.php?id=607. Painos 5.1. Avattu 6. maaliskuuta 2022. 258

GLONASS ICD CDMA. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, General Description of Code Division Multiple Access Signal System. PDF, Russian Space Systems, JSC, Moskova, 2016a. URL http://web.archive.org/web/20220121130328/https:

//russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD-GLONASS-CDMA-General.-Edition-1.0-2016.pdf. Painos 1.0. Avattu 21. toukokuuta 2022. 260

GLONASS ICD CDMA. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, Code Division Multiple Access Open Service Navigation Signal in L1 Frequency Band. PDF, Russian Space Systems, JSC, Moskova, 2016b. URL http://web.archive.org/web/20220126001255/http://russianspacesystems.ru:80/wp-content/uploads/2016/08/ICD-GLONASS-CDMA-L1.-Edition-1.0-2016.pdf. Painos 1.0. Avattu 21. toukokuuta 2022. 260

GLONASS ICD CDMA. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, Code Division Multiple Access Open Service Navigation Signal in L2 Frequency Band. PDF, Russian Space Systems, JSC, Moskova, 2016c. URL http://web.archive.org/web/20220126001258/https://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD-GLONASS-CDMA-L2.-Edition-1.0-2016.pdf. Painos 1.0. Avattu 21. toukokuuta 2022. 260

GLONASS ICD CDMA. Global Navigation Satellite System GLONASS Interface Control Document, Code Division Multiple Access Open Service Navigation Signal in L3 Frequency Band. PDF, Russian Space Systems, JSC, Moskova, 2016d. URL http://web.archive.org/web/20220126040633/https://russianspacesystems.ru/wp-content/uploads/2016/08/ICD-GLONASS-CDMA-L3.-Edition-1.0-2016.pdf. Painos 1.0. Avattu 21. toukokuuta 2022. 260

GLONASS news. GLONASS Information and Analysis Center for Positioning, Navigation and Timing. URL https://www.glonass-iac.ru/en/about_glonass/. Avattu 7. toukokuuta 2019. 258

GMV. QZSS. *ESA Navipedia*, 2011. URL https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/QZSS. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 251

Saurabh Godha, Gérard Lachapelle ja Elizabeth Cannon. Integrated GPS/INS system for pedestrian navigation in a signal degraded environment. Julkaisussa *ION GNSS 2006, 26-29 September*, Fort Worth, Texas, 2006. URL https://schulich.ucalgary.ca/labs/position-location-and-navigation/files/position-location-and-navigation/godha2006_conference.pdf. Avattu 12. elokuuta 2020. 295

Robert Gold. Optimal binary sequences for spread spectrum multiplexing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 13(4):619–621, 1967. URL https://doi.org/10.1109/TIT.1967.1054048. 175, 301

Google Play, Sky Map. URL https://play.google.com/store/apps/details?id=com.google.android.stardroid&hl=en. Avattu 7. toukokuuta 2019. 278

GPS ICD. GPS Interface Control Documents, 2019. URL https://www.gps.gov/technical/icwg/. Avattu 5. kesäkuuta 2020. 162, 258

H

Weikko A. Heiskanen ja Helmut Moritz. *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, Lontoo, 1967. 47

Hexagon, SPAN GNSS Inertial Navigation Systems. URL https://novatel.com/products/gnss-inertial-navigation-systems. Avattu 22. syyskuuta 2021. 289

George William Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, 8: 1–36, 1886. URL https://doi.org/10.1007/BF02417081. 135

Bernhard Hofmann-Wellenhof, Herbert Lichtenegger ja James Collins. *GPS Theory and Practice*. Springer-Verlag, neljäs, tarkistettu painos, 1997. 135

Walter Hohmann. The attainability of heavenly bodies. Technical translation F44, NASA, 1925. URL https://archive.org/details/nasa_techdoc_19980230631. Avattu 12. elokuuta 2020. 158

I

International GNSS Service. IGS Products. URL https://igs.org/products. Avattu 17. syyskuuta 2021. 208

J

Volker Janssen. A comparison of the VRS and MAC principles for network RTK. Julkaisussa *International Global Navigation Satellite Systems Society Symposium*, 2009. URL https://www.spatial.nsw.gov.au/__data/assets/pdf_file/0003/129414/2009_Janssen_IGNSS2009_VRS_vs_MAC.pdf. Avattu 8. elokuuta 2020. 232

Christopher Jekeli. *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*. Walter de Gruyter, Berliini – New York, 2001. 45, 99, 114

Jet Propulsion Laboratory, The Global Differential GPS System. URL https://www.gdgps.net. Avattu 22. syyskuuta 2021. 253

K

Ulla Kallio. *Tasoituslasku*. TKY 587. Otatieto, kolmas painos, 1998. ISBN 978-9-5167-2267-5. 86

Rudolf E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35–45, 1. maaliskuuta 1960. URL https://doi.org/10.1115/1.3662552. 51

Rudolf E. Kalman ja Richard S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83(1):95–108, 1. maaliskuuta 1961. URL https://doi.org/10.1115/1.3658902. 51

Dennis Kawaharada. The Settlement of Polynesia, Part 1. URL https://paulwaters.com/learning-hawaiian-culture/the-settlement-of-polynesia-part-1/. Avattu 3. toukokuuta 2019. 3

A. D. King. Inertial navigation – forty years of evolution. *GEC Review*, 13(3): 140–149, 1998. URL http://www.imar-navigation.de/downloads/papers/inertial_navigation_introduction.pdf. Avattu 18. toukokuuta 2019. 111

Brian Koberlein. Galileo's discovery of Jupiter's moons, and how it changed the world. *Forbes*, 2016. URL https://www.forbes.com/sites/briankoberlein/2016/01/07/galileos-discovery-of-jupiters-moons-and-how-it-changed-the-world/. Avattu 2. toukokuuta 2020. 5

L

Leica Geosystems. Take it to the MAX! White paper, 2005. URL https://www.smartnetna.com/documents/Leica_GPS_SpiderNET-Take_it_to_the_MAX_June2005_en.pdf. Avattu 16. elokuuta 2020. 232

Dennis P. Lettenmaier. Detection of trends in water quality data from records with dependent observations. *Water Resources Research*, 12(5):1037–1046, 1976. URL https://doi.org/10.1029/WR012i005p01037. 32

Bethany Lindsay. The compasses of birds. *The Science Creative Quarterly*, 2006. URL http://www.scq.ubc.ca/the-compasses-of-birds/. Avattu 3. toukokuuta 2019. 3

Tao Liu, Xing Zhang, Qingquan Li ja Zhixiang Fang. A visual-based approach for indoor radio map construction using smartphones. *Sensors*, 17(8), 2017. URL https://doi.org/10.3390/s17081790. 296

M

Jiangang Ma, Yikang Yang, Hengnian Li ja Jisheng Li. Expressions for the autocorrelation function and power spectral density of BOC modulation based on convolution operation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020 (2063563), 2020. URL https://doi.org/10.1155/2020/2063563. 183

MathPages, The Sagnac Effect. URL https://www.mathpages.com/rr/s2-07/2-07.htm. Avattu 3. elokuuta 2020. 112

Muhammad Al Amin Amali Mazlan, M. H. Md Khir, Naufal M. Saad ja S. C. Dass. WiFi fingerprinting indoor positioning with multiple access points in a single base station using probabilistic method. *International Journal of Applied Engineering Research*, 12(6):1102–1113, 2017. URL https://www.ripublication.com/ijaer17/ijaerv12n6_45.pdf. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 296

Dalkhaa Munkhtsetseg. Geodetic network and geoid model of Mongolia. Julkaisussa *Proceedings, GSEM (Geospatial Solutions for Emergency Management) 2009*, Beijing, Kiina, 2009. ISPRM. URL https://www.isprs.org/PROCEEDINGS/XXXVIII/7-C4/121_GSEM2009.pdf. Avattu 22. syyskuuta 2021. 273

Michael John Muuss. The Story of the PING Program, ilman päivämäärää. URL https://web.archive.org/web/20010107114600/https://ftp.arl.army.mil/~mike/ping.html. Avattu 17. syyskuuta 2021. 313

N

NASA Spinoff. NASA Brings Accuracy to World's Global Positioning Systems. URL https://spinoff.nasa.gov/Spinoff2019/ps_1.html. Avattu 12. kesäkuuta 2020. 244, 254

Søren Vedel Nielsen. Wikimedia Commons, LC-130 take-off, Greenland, 2005. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LC130-Takeoff-Greenland.swn.jpg. © 2005 Søren Vedel Nielsen (GFDL, CC BY SA 2.5). Avattu 26. heinäkuuta 2019. 273

James Robert Nockson. Wikimedia Commons, Ring laser gyroscope produced by Ukrainian "Arsenal" factory on display at MAKS-2011 airshow, 2011. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ring_laser_gyroscope_at_MAKS-2011_airshow.jpg. © 2011 James Robert Nockson (CC BY-SA 3.0). Avattu 4. toukokuuta 2019. 102

O

Office of Aeronautical Satellite Systems, ATS Engineering Division, Japan Civil Aviation Bureau. Overview of MSAS, 2008. URL https://web.archive.org/web/20151106015542/http://www.unoosa.org/pdf/icg/2008/icg3/08-1.pdf. Avattu 28. toukokuuta 2020. 247

P

Mikko Parviainen. *Self-localization in Ad Hoc Indoor Acoustic Networks*. Väitöskirja, Tampere University of Technology, 7. lokakuuta 2016. URL https://researchportal.tuni.fi/en/publications/self-localization-in-ad-hoc-indoor-acoustic-networks. Avattu 9. syyskuuta 2021. 295

Physics Classroom, Kepler's Three Laws. URL https://www.physicsclassroom.com/class/circles/Lesson-4/Kepler-s-Three-Laws. Avattu 3. elokuuta 2020. 135

Markku Poutanen. *Satelliittipaikannus*. Ursa, Helsinki, 2017. ISBN 978-9-5259-8541-2. 135, 162, 168

Q

QZSS PS/IS. Performance Standard (PS-QZSS) and Interface Specification (IS-QZSS). Verkkosivu, Cabinet Office, National Space Policy Secretariat, 2020. URL https://qzss.go.jp/en/technical/ps-is-qzss/ps-is-qzss.html. Avattu 25. heinäkuuta 2020. 251

R

Jean M. Rüeger. Refractive indices of light, infrared and radio waves in the atmosphere. *UNISURV report* S 68, School of Surveying and Spatial Information Systems, University of New South Wales, 2002. URL https://www.sage.unsw.edu.au/sites/sage/files/SAGE_collection/SpecialSeries/s68.pdf. 200

S

Daniel Porras Sánchez ja César Pisonero Berges. The EGNOS SBAS message format explained. *ESA Navipedia*, 2006. URL https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/The_EGNOS_SBAS_Message_Format_Explained. Avattu 18. kesäkuuta 2020. 243

Jiri Segawa, Hiromi Fujimoto ja Shuhei Okubo, toim. *Proceedings, IAG International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy (GraGeoMar96)*, International Association of Geodesy Symposia 117, Tokio, Japani, 30. syys–5. lokakuuta 1996. Springer-Verlag. 324, 332

Nagaraj C. Shivaramaiah ja Andrew G. Dempster. The Galileo E5 AltBOC: understanding the signal structure. Julkaisussa *International Global Navigation Satellite Systems Society Symposium*, 2009. URL https://www.researchgate.net/publication/242169981_The_Galileo_E5_AltBOC_Understanding_the_Signal_Structure. Avattu 13. kesäkuuta 2020. 182

Lina Sinjab. Replica Phoenician ship ends round-Africa journey. *BBC.com*, 2010. URL https://www.bbc.com/news/av/world-africa-11615613. Avattu 3. toukokuuta 2019. 3

Sky Map Devs, Stardroid. URL https://github.com/sky-map-team/stardroid/blob/55b83c2aa46b071f62f3eb72996a5e7b6640ef7a/app/src/main/java/com/google/android/stardroid/control/AstronomerModelImpl.java. Avattu 22. toukokuuta 2020. 281

Dava Sobel. *Longitude. The True Story of a Lone Genius who Solved the Greatest Scientific Problem of his Time*. Penguin, New York, 1995. 5

Joël Sommeria. Foucault and the rotation of the Earth. *Comptes Rendus Physique*, 18:520–525, 2017. URL https://doi.org/10.1016/j.crhy.2017.11.003. 101

SPS performance standard. Global Positioning System Standard Positioning Service Performance Standard, 2020. URL https://www.gps.gov/technical/ps/2020-SPS-performance-standard.pdf. Avattu 26. kesäkuuta 2020. 256

Gilbert Strang ja Kai Borre. *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley — Cambridge Press, 1997. 15, 52, 161

Jaume Sanz Subirana, José Miguel Juan Zornoza ja Manuel Hernández-Pajares. Reference frames in GNSS. *ESA Navipedia*, 2011. URL https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Reference_Frames_in_GNSS. Avattu 16. kesäkuuta 2020. 260

T

Byron D. Tapley ja Bob E. Schutz. Estimation of unmodeled forces on a lunar satellite. *Celestial Mechanics*, 12:409–424, joulukuu 1975. URL https://doi.org/10.1007/BF01595388. 85

Peter J. G. Teunissen, Paul J. de Jonge ja Christiaan C. J. M. Tiberius. Performance of the LAMBDA method for fast GPS ambiguity resolution. *Navigation*, 44(3):373–383, 1997. URL https://doi.org/10.1002/j.2161-4296.1997.tb02355.x. 222

University of Texas, GRACE — Gravity Recovery and Climate Experiment. URL http://www2.csr.utexas.edu/grace/. Avattu 5. toukokuuta 2019. 275

U

USGS Open-File Report 2008-1089. Airborne Gravity Survey and Ground Gravity in Afghanistan: A Website for Distribution of Data. URL https://pubs.usgs.gov/of/2008/1089/Afghan_dataproc.html. Avattu 25. kesäkuuta 2020. 274

VW

Ming Wei ja Klaus-Peter Schwarz. Comparison of different approaches to airborne gravimetry by strapdown INS/GPS. Kokoelmassa Segawa ym. (1996), sivut 155–162. URL https://rd.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-03482-8_23. Avattu 18. toukokuuta 2019. 270

Todd R. Weiss. Out-of-memory problem caused Mars rover's glitch. *Computerworld*, 2004. URL https://www.computerworld.com/article/2574759/out-of-memory-problem-caused-mars-rover-s-glitch.html. Avattu 30. huhtikuuta 2020. 315

Greg Welch ja Gary Bishop. The Kalman Filter. URL https://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/. Avattu 4. toukokuuta 2019. 52

Greg Welch ja Gary Bishop. Course 8: An introduction to the Kalman Filter. Julkaisussa *SIGGRAPH 2001, Los Angeles, August 12-17*. 2001. URL https://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_Slides_08.pdf. Avattu 4. toukokuuta 2019. 52

Paul Wessel, W. H. F. Smith, Remco Scharroo, J. Luis ja F. Wobbe. Generic Mapping Tools: improved version released. *EOS Trans. AGU*, 94(45): 409–410, 2013. URL http://dx.doi.org/10.1002/2013EO450001. ii

Wikimedia Commons, Gyroskooppi. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3D_Gyroscope-no_text.png. © 2006 User:LucasVB (PD). Avattu 3. toukokuuta 2019. 102

Wikimedia Commons, Harrisonin kronometri H5. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Harrison%27s_Chronometer_H5.JPG. © 2007 User:Racklever (GFDL). Avattu 3. toukokuuta 2019. 4

Wikimedia Commons, Polynesian muuttoreitit. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polynesian_Migration.svg. © 2008 David Eccles (CC BY 4.0). Avattu 14. heinäkuuta 2019. 3

Wikimedia Commons, Valkoposkihanhet. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MigrationFlock.jpg. © 2006 User:Thermos (CC BY-SA 2.5). Avattu 3. toukokuuta 2019. 4

Wikimedia Commons, Votiivilaiva. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Votivskepp.JPG. © 2009 User:Svenboatbuilder (CC BY-SA 3.0 Unported). Avattu 21. elokuuta 2020. 2

Wikipedia, Brownian bridge. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_bridge. Avattu 10. toukokuuta 2020. 93

Wikipedia, Cochrane-Orcutt estimation. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Cochrane%E2%80%93Orcutt_estimation. Avattu 30. kesäkuuta 2020. 31

Wikipedia, Damping ratio. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Damping_ratio. Avattu 4. toukokuuta 2019. 122

Wikipedia, Dandelin spheres. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres. Avattu 27. kesäkuuta 2020. 136

Wikipedia, Datafuusio. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Datafuusio. Avattu 7. toukokuuta 2019. 277

Wikipedia, Dead reckoning. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Dead_reckoning. Avattu 3. toukokuuta 2019. 2

Wikipedia, Domain Name System. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/DNS. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 313

Wikipedia, Hallin ilmiö. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Hall-ilmi%C3%B6. Avattu 29. toukokuuta 2020. 292

Wikipedia, Indoor positioning system. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Indoor_positioning_system. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 295

Wikipedia, Magnus expansion. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Magnus_expansion. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 65

Wikipedia, Orbital elements. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_elements. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 136

Wikipedia, PIGA accelerometer. URL https://en.wikipedia.org/wiki/PIGA_accelerometer. Avattu 4. heinäkuuta 2020. 110

Wikipedia, Polynesian navigation. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Polynesian_navigation. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 3

Wikipedia, Receiver autonomous integrity monitoring. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Receiver_autonomous_integrity_monitoring. Avattu 8. toukokuuta 2020. 237

Wikipedia, Max Schuler. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Schuler. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 123

Wikipedia, Superluminal motion. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Superluminal_motion. Avattu 16. elokuuta 2020. 199

Wikipedia, V-2 rocket. URL https://en.wikipedia.org/wiki/V2_rocket. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 6

Wikipedia, Värähtelypiiri. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/V%C3%A4r%C3%A4htelypiiri. Avattu 29. toukokuuta 2020. 292

Wikipedia, Vibrating structure gyroscope. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrating_structure_gyroscope. Avattu 2. toukokuuta 2019. 293

Wikipedia, Woodbury matrix identity. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Woodbury_matrix_identity. Avattu 31. heinäkuuta 2020. 305

Wolfram Functions, $\int e^{bx} \cos cx \, dx$. URL https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Cos/21/01/02/04/01/01/0002/. Avattu 3. huhtikuuta 2020. 45

Wolfram Functions, $\int \exp bx^2 \cos cx \, dx$. URL https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Cos/21/01/02/04/01/05/0002/. Avattu 14. toukokuuta 2020. 47

Wolfram MathWorld, Statistical Correlation. URL https://mathworld.wolfram.com/StatisticalCorrelation.html. Avattu 4. toukokuuta 2019. 22

Jiuntsong Wu, Sienchong Wu, George A. Hajj, Willy I. Bertiger ja Stephen M. Lichten. Effects of antenna orientation on GPS carrier phase. *manuscripta geodaetica*, 18:91–98, 1993. 172

X

Xinhua. China's BeiDou officially goes global. *Silk Road News*, 2018. URL https://en.imsilkroad.com/p/125586.html. Avattu 22. syyskuuta 2021. 264

Z

Jiexin Zhang, Alastair R. Beresford ja Ian Sheret. SensorID: Sensor calibration fingerprinting for smartphones. *IEEE Symposium on Security and Privacy (SP)*, 2019. URL https://doi.org/10.1109/SP.2019.00072. 282

Yinzhi Zhao, Peng Zhang, Jiming Guo, Xin Li, Jinling Wang, Fei Yang ja Xinzhe Wang. A new method of high-precision positioning for an indoor pseudolite without using the known point initialization. *Sensors*, 18(6), 2018. URL https://doi.org/10.3390/s18061977. 295

Hakemisto

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZÄ

A
Afganistan, ilmagravimetria, 274
Afrikka, ympäripurjehdus, 3
aikajakomultipleksointi (TDM), 257, 258
aikamultipleksoitua binaarista offset kantoaalto (TMBOC), 166, 257
aikasarja, 17
aikaviipale, 319
Air Force Satellite Control Network (AFSCN), 162
akustinen paikannus, 295
alikantoaalto, 181
aliohjelma, 316
Allan, David W., 188
Allanin keskihajonta, 188
Allanin varianssi, 188
AltBOC, 182
American Telephone & Telegraph (AT&T), 309
amplitudimodulaatio, 308
  kaistanleveys, 308
  kuva, 308
anomalia
  eksentrinen, 137
  keski-, 136, 137
  luonnollinen, 137
antennin suuntaus
  ja vastaanotettu vaihe, 169
  tarkassa absoluuttisessa paikannuksessa (PPP), 173
  verkkotasoituksessa, 172
anturifuusio, 277
  heterogeeninen, 277
  homogeeninen, 277
  löysästi integroitu, 277
  tiivisti integroitu, 277
apogeum, 136, 138
Apollo (kuuohjelma), 51
AR(1)-prosessi, 41
arvojoukko, 18
arvovälitteisyys, 317
asento, kulkuneuvon
  akselien nimet, 8
  kiertomatriisi, 100
  kuva, 9
atomikello
  mallinnus, 187
  relativistinen aikavenymä, 10
  vertailu, 169
autokorrelaatio
  määritelmä, 34
  ajassa, 33
  syklinen, 175, 176
autokovarianssi, 33
Automatic Precise Positioning Service (APPS), 254
avaruusgravimetria, 274
  ilmakehän vastus, 275
  painottomuustila, 274
avoin palvelu (Galileo), 262

B
barysentriset koordinaatit, 230
  kuva, 229
  toisto-ominaisuus, 230
BeiDou
  BeiDou-1, 264
  BeiDou-2, 264
  BeiDou-3, 264
  eheys, 265
  inclined geosynchronous orbit (IGSO), 265
  Interface Control Document (ICD), 264
  kiertoradat, 265
  nimi, 264
  näennäissatunnaiskoodit, 265
Bell, Alexander Graham, 309

binaarinen offset kantoaalto (BOC), 181
binaarinen taajuusavainnus (BFSK), 311
    kuva, 311
binaarinen vaiheavainnus (BPSK), 165, 180
bittinopeus, *katso* kooditaajuus
Brahe, Tycho, 135
Brennschluss, 6, 110
broadcast ephemeris (lähetetyt ratatiedot)
    parannus, 198
    tarkkuus, 208
Brownin silta, 93
Bucy, Richard, 51
Bundesamt für Kartographie und Geodäsie (BKG), 212, 214

C
C/A-koodin muodostaminen, 303
HMS Carlskrona (laiva), 2
Cauchyn ja Lorentzin jakauma, 45
CHAMP (satelliitti), 275
Chandlerin huojunta, 133
chip rate, *katso* kooditaajuus
Clohessyn ja Wiltshiren malli, 155
Cochranen ja Orcuttin menetelmä, 31
Colorado Springs, 162
Commodore 64 (kasettinauhuritallennus), 311
corioliskiihtyvyys, 117
Cospas-Sarsat, 263
Costas, John Peter, 185
Costasin diskriminaattori, 185, 195
    kuva, 185

D
data-assimilointi, 234
Decca, 5
deltafunktio, 37
    kuva, 37
    toisto-ominaisuus, 37
differentiaalipaikannus, 208
    tarkkuus, 208, 209
digitaalinen tilaajayhteys (DSL), 311
Dirac, Paul, 37
dispersio, 199
distribuutio (matematiikka), 37
dopplersiirtymä, vaihtelu, 187
dynaaminen kohina, 55
dynaaminen malli, 55
    geodeettinen paikannus, 206
    ilmagravimetria, 271
    Jacobin matriisi, 56
    kerroinmatriisi, 55
    kulkuneuvon liike, 207
    linearisoitu, 60
    satelliittin rataliike, 205
    täydellinen, 205
dynamic model compensation, 85

E
luku *e*, 62
Edison, Thomas Alva, 309
edistynyt RAIM (ARAIM), 263
EGNOS, 247
    lohkot, 247
    maalohko, 247, 248
    safety-of-life-palvelu, 263
    transponderit, 245
EGNOS Data Access Service (EDAS), 254
eheys, 237, 243
eksentrisyys, radan, 137
elektronien kokonaispitoisuus (TEC), 199
Enhanced Data Rates for GSM Evolution (EDGE), 313
eranto, 4
ergodisuus, 18, 35
erittäin nopeat rataennusteet, 208
eräkäsittely, 87
esihavaintoyhtälö, 194
estimointi, tilastollinen, 18
etenemispolun sijainti, 234
Etiopia, ilmagravimetria, 273
ETRS-89, 10
Eulerin kulmat, 100
Eulerin vapaa nutaatio, 105
Eulerin yhtälöt, 104
EUREF-FIN, 10
European Geostationary Navigation Overlay Service, *katso* EGNOS
European GNSS Agency (GSA), 261
European Terrestrial Reference Frame (ETRF), 10
Eötvösin korjaus, 270

F
Fisherin F-testi, 225
Flächenkorrekturparameter (FKP), 232
foinikialaiset, 3
Foucault, Léon, 101
Foucault'n heiluri, 101
Fourier, Joseph, 43
Fourier'n käänteismuunnos, 44
Fourier'n muunnos, 43

G
GAGAN, 251
    maalohko, 253
    satelliitit, 252
Galilei, Galileo, 5
Galileo, 261
    concessionaire, 261
    Interface Control Document (ICD), 262

kantoaaltojen taajuudet, 262
kiertoradat, 262
signaalirakenne, 263
Galileo Joint Undertaking, 261
Galileo Operating Company, 261
Galileo-satelliittinavigointijärjestelmä, *katso* Galileo
Galois, Évariste, 177
Galois'n teoria, 177
Gauss, Carl Friedrich, 16
Gaussin ja Markovin prosessi, 39, 41
autokovarianssifunktio, 42, 45
ominaisuudet, 43
tehon spektraalitiheys, 46
Gaussin kellokäyrä, 17
General Packet Radio Services (GPRS), 313
Generic Mapping Tools (GMT), ii
geodeettinen paikannus
dynaaminen malli, 206
havaintoyhtälö, 206
geodynamiikka, 158
geoidi, 12
geomagneettinen ekvaattori, 252
geosentrisyys, 9
GIOVE-A, 262
globaali navigointisatelliittijärjestelmä, katso GNSS
Global Differential GPS (GDGPS), 212, 253
Global Positioning System, *katso* GPS
Global System for Mobile Communications (GSM), 313
GLONASS, 258
aikaskaala, 259
antipodit, 258
avaruuslohko, 261
Interface Control Document (ICD), 258, 260
kiertoradat, 260
koordinaattien vertauskehys, 259
modernisointi, 260
navigointiviesti, 259
näennäissatunnaiskoodit, 261
GNSS, 255
etenemisviive, 205
ionosfääri, 194, 199
kostea, 203
kuiva, 203
troposfääri, 194, 199
havaintoyhtälö, 193
kellon mallinnus, 205
korkeuden määritys, 11
kulkuneuvon asennon määritys, 289
taulu, 256
GNSS-antennin vaiheviivekuvio, 209
GNSS-signaali
kaistanpäästösuodin, 183
korrelaattori, 184
sekoittaminen, 183–185
välitaajuus, 183
ylikuuluminen, 184
GNSS-tomografia, ilmakehän, 234
GNSS-vastaanotin, monen järjestelmän, 261
GOCE (satelliitti), 275
gravitaatiogradiometri, 275
ionimoottori, 275
Gold, Robert, 175
Goldin koodi, 175
minimaalinen korrelaatio, 176
ominaisuudet, 301
tuottaminen, 177
GPS
almanakka, 163
avaruuslohko, 161
blokki, 161, 255
Civil Long -koodi, 257
Civil Moderate -koodi, 257
CNAV, 163
dopplersiirtymä, 163
expandable constellation, 256
geodesia, 10
Interface Control Document (ICD), 162
kantoaalto, 163, 164
kiertoradat, 161
L1C-koodi, 257
L2C-koodi, 257, 258
L5, 257
laskenta- ja ohjauskeskus (MCS), 162
leveäkuja, 190
lohkot, 161
modernisointi, 255
navigointi, 161
navigointiviesti, 162, 163
näennäissatunnaiskoodit, 166
perustason konstellaatio, 162
valvontalohko, 162
ympyräpolarisointi, 166, 167
GPS-Aided Geo Augmented Navigation, *katso* GAGAN
graafinen käyttöliittymä (GUI), 316
GRACE (satelliittipari), 275
tulokset, 276
GRACE Follow-On, 275
Gramin ja Schmidtin ortonormalisointi, 279
gravitaatiogradienttitensori, 59
Gray, Elisha, 309
Greenland Aerogeophysics Project, 273
Ground Uplink Station (GUS), 245

Grönlannin painovoimakartoitus, 272
gyroskooppi
kuvaus, 101
akselin atsimuutti, 121
kuva, 102
käynti, 285
lähtöakseli, 107, 120
MEMS, 293, 294
prekessio, 106, 107
rakentaminen, 105
syöttöakseli, 107, 120

H
H5 (kronometri), 4
Hallin ilmiö, 292
harha (prosessi), 84
harhaton estimaattori, 20
Harrison, John, 4
Hartebeesthoek (Etelä-Afrikka), 248
Havaiji, 3
havaintomalli, 68
Jacobin matriisi, 69
sulkuvirhe, 68, 71, 191
heijastusten hylkääminen, 166, 170
Helmertin muunnos, 11
Helsinki, 208
Hertz, Heinrich, 44
Hill, George W., 144
Hillin koordinaatisto, 144, 145
libraatio, 151, 152
liikeyhtälöt, 149
lineaarinen ajelehtiminen, 152, 153
tilansiirtomatriisi, 152
hitaustensori, 102
pääakseleilla, 103
Hohmann, Walter, 158
Hohmannin siirtorata, 158, 159
homoskedastisuus, 28
Hopfieldin malli, 200, 203
HxGN SmartNet (Leica), 212
hyperbelinen paikannus
Decca, 5
satelliittipaikannus, 5
Hypertext Transfer Protocol (HTTP), 214
hyrräkompassi
kuvaus, 120
harmoninen palautuskerroin, 122
kriittinen vaimennus, 122
kuva, 121
vaimennuskerroin, 122
häipyvän muistin suodin, 187

I
i.i.d., 29, 197
ilmagravimetria
edut, 273
geoidimääritys, 273
homogeenisuus, 273
in-flight-kalibrointi, 272
ja GNSS, 267
Kalmanin suotimen päivitysaskel, 272
lentokoneen liikkeet, 272
potkurilentokone, 272
skalaari-, 268
vektori-, 268
vektorikiihtyvyysmittari, 267
impulssi, 102
Indian Mission Control Centre (INMCC), 252
Indian Navigation Link Upload Station (INLUS), 252
Indian Reference Station (INRES), 251
inertialaite ST-124, 112, 113
inertialaki, 99
inertiamittausyksikkö (IMU)
alustus, 133
atsimuutti, 114
korkean dynamiikan tuki, 187
north-following, 114, 133
osat, 101
saappaissa, 294
strapdown, 111
tasaus ja suuntaus, 132
vapaa atsimuutti, 133
inertianavigointi, 99
dynaaminen malli, 129
Maan mukana pyörivässä koordinaatistossa, 115
Maan pinnalla, 129
perusyhtälö, 118
vertausarvojen integrointi, 131
inklinaatio, ratatason, 137
integriteetti (eheys), 237, 243
integrointi, GNSS ja IMU, 288
International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS), 9
International Terrestrial Reference Frame (ITRF), 9
Internet Control Message Protocol (ICMP), 313
Internet Protocol (IP), 313
Internetin finanssi- ja liiketoiminta, 173
ionosfäärivapaa havaintosuure, 200
Irakin sota, 262
isoakselin puolikas, radan, 137
issue of data (IOD), 242
itsekonvoluutio, 182

J
litistyneisyys, dynaaminen (J_2), 157

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 56
Japanese Aerospace Exploration Agency (JAXA), 249
Jeppesen, 133
Jet Propulsion Laboratory (JPL), 253
jet-assisted take-off (JATO), 273
Jupiterin kuut kellona, 5
jäljitelmäkoodi, 164, 177
jääkauden jälkeinen sopeutumisliike (GIA), 206
jäännösvirheiden neliöiden summa, 30

K
kahden blokin bittifunktio, 181
Kaisaniemi, Helsinki, 18
Kalman, Rudolf, 51
Kalmanin suodin, 51
  esimerkki
    laskuvarjohyppääjä, 82
    pyörivä pyörä, 79
    satunnaiskulku kahteen suuntaan, 91
    teollisuuskone, 79
    vakion estimointi, 92
    yksiulotteinen liike, 75
  eteen- ja taaksepäin, 87
    dynaaminen kohina, 91
    kuva, 90
  inertianavigoinnin simulointi, 287
  kokonaislukutuntematon, 223
  laajennettu, 55, 56
  linearisointi, 56
  optimaalisuus, 51, 70, 71
    kuva, 72
  perättäisenä tasoituksena, 85
  päivitysaskel, 69
  päivitysyhtälö, 71
  spektraalisuodatus, 85
  vertausarvojen valinta, 60
  yhtälöiden yhteenveto, 54
Kalmanin vahvistusmatriisi, 70
kaltevuuskulma, ratatason, 137
kampasuure, 20
kanavanvaihtosana, 164
Kansainvälinen avaruusasema (ISS), 51
Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio (IAG), 9
Kansainvälinen siviili-ilmailujärjestö (ICAO), 243
Kansainvälinen televiestintäliitto (ITU), 311
kantoaallon vaiheen havaintoyhtälö, 194
kappalekoordinaatisto, 6
kardaaninen rengasjärjestelmä, 105
Karlskrona (Ruotsi), 2
kasa, 318
kello
  aikapoikkeama, 187
  käynti, 187, 210
  mallinnus, 187
    kaksoislogaritminen kuvaaja, 189
  taajuuspoikkeama, 187
    normalisoitu, 187
  vaihepoikkeama, 187
kellokeskeytys, 319
kellopoikkeama
  satelliitti, 193
  vastaanotin, 194
Kepler, Johannes, 135
Keplerin kolmas laki, 146, 148, 157
Keplerin rata, 135
  rata-alkiot, 136
    kuva, 136, 138
    oskuloivat, 138
    taulu, 137
  sädevektori, 138
Keplerin toinen laki, 140
Keplerin yhtälö, 141
keskeisvoimakenttä, 148
keskeytys, 319
  estäminen ja salliminen, 320
keskeytyskäsittelijä, 319
keskeytysvektori, 319
keskianomalia, 136, 137
keskiarvo
  optimaalisuus, 20
  painotettu, 190
  painottamaton, 21
keskihajonta, 19
keskimerenpinnan geopotentiaali, 10
keskipakoiskiihtyvyys, 117
keskivirhe, 19
kevättasauspiste, 10, 137
Khinchin, Aleksandr, 44
kiertokysely, 319
kiihtyvyysmittari
  heiluri-, 109
    gyroskooppipohjainen, 109, 110
  ja gravimetri, 109, 268
  jousi-, 108
  käynti, 109
  lineaarisuus, 109
  MEMS, 293
    herkkyys, 293
    hinta, 293
kiikku, 174
KKJ (Kartastokoordinaattijärjestelmä), 11
Klobucharin ionosfäärimalli, 203, 234
kohdeportti, 314
kohina (määritelmä), 36
kokonaislukutuntematon, 210

kokonaislukutuntemattomien tilavarianssimatriisi, 223
kolmen kappaleen ongelma, 145
kolmiofunktio, 178
komentotulkki (*shell*), 316
kompassi, magneettinen, 4
koneoppiminen, 47
konteksti, prosessin, 319
konvoluutio, 35
koodijakokanavointi (CDMA), 165, 183
kooditaajuus, 164, 166
korkea dynamiikka, 187, 207
korkeusjärjestelmä (kuva), 12
korrelaatio, 22
  määritelmä, 22
  huomiotta jättämisen vaikutus, 25
korrelaatiopituus, 33
Kourou (Ranskan Guyana), 248
kovarianssi, 22
kriging, 47
kriittinen vaimennus, 122
Kronecker, Leopold, 59
Kroneckerin tensori, 59
kronometri, 4, 5
kulminaatio, 5
Kuuba, 2
kuvausfunktio, 201
kvadratuuri (modulaatio), 165, 166
käyttöjärjestelmä, 316

L
laattatektoniikka, 206
laiteajuri, 315, 316
LAMBDA-menetelmä, 222, 224, 225
liityntäkohta (NTRIP), 214
lineaarinen regressio, 27
  ei-korreloitu, 31
  funktiomalli, 28
  havaintoyhtälö, 27
  jäännösvirhe, 28
  normaaliyhtälö, 28
  rakennematriisi, 28
  tuntematon, 28
lineaarisen palautteen siirtorekisteri (LFSR), 174
litistyneisyys, dynaaminen (J_2), 157
Lockheed Hercules C-130, 273
Lockheed Martin, 161
lukuteoria, 173
Lunar Orbiter, 85
lähdeportti, 314
lähentyminen, teknologioiden, 312
lähestymiskategoria (ilmailu), 243
lähetetyt ratatiedot (*broadcast ephemeris*)
  parannus, 198
  tarkkuus, 208
lähetysverkko, 307
lävistyskohta, ionosfäärin, 234, 243

M
maakoodi, puhelinverkon, 310
maamerkkien kartoitus, 2
maamerkkinavigointi, 2, 278
Maan mukana pyörivä koordinaatisto (ECEF), 10
Maan suuntausparametrit (EOP), 204
maapohjainen parannusjärjestelmä (GBAS), 252
Markov, Andrei, 39
Markovin ketju, 30, 41
mascon, 85
Master Control Centre (MCC), 247
Master-Auxiliary Concept (MAC), 232
Master-Auxiliary Corrections (MAX), 232
matkapuhelin
  ajastusennakko, 292
  avustettu GNSS (A-GNSS), 292
  kiihtyvyysmittarin kalibrointi, 280
  kolmiakselinen kiihtyvyysmittari, 279
  magnetometri, 279
  oma magneettikenttä, 282
  saapumisaikaeron menetelmä (TDOA), 292
  saapumisajan menetelmä (TOA), 292
  signaalin vahvuus, 291
  solutunnus, 291
  suuntaus (kuva), 280
mekanisointi
  mikä on, 127
  simuloinnin koodi, 130
  simulointi, 128
merenkulku avomerellä, 3
merkintälasku, 2
Meucci, Antonio, 309
Michibiki, 249
mikroelektroninen kiihtyvyysanturi, 109
mikroelektroninen liikeanturi (MEMS), 111, 292
mittarilasku (ilmailu), 243
m-jono, 177, 299
modeemi, 311
Molnijan kiertorata, 250
Mongolia, ilmagravimetria, 273
monitie, 166
MSAS/QZSS maalohko, 250
MTSAT Satellite-based Augmentation System (MSAS), 247
  transponderit, 249
Multiple Signal Message (MSM), 212
muuttuja
  esittely, 317

näkyvyysalue, 317
sijoitus, 317

N

napaliike, 105
Navigation Land Earth Station (NLES), 247
navigointi
määritelmä, 1
historia, 2
jalankulkija, 294
savusukeltaja, 295
sisätila
Bluetooth, 295
inertia, 296
langaton lähiverkko (WLAN), 295
magneettikenttä, 295
uudet teknologiat, 277
neliöeksponentiaalinen autokovarianssi, 46
neliöinti, signaalin, 186
Network Time Protocol (NTP), 314
Networked Transport of RTCM via Internet Protocol (NTRIP), 214
Newton, Isaac, 99
Newtonin toinen liikelaki, 102
`nice` (komento), 319
nimipalvelu (DNS), 313
nimivälitteisyys, 317
nollanopeuspäivitys (ZUPT), 101, 285, 287
nopea Fourier'n muunnos (FFT), 36
normaalijakauma, 16, 17
keskihajonta, 17
keskivirhe, 17
odotusarvo, 17
NorthGRIP (Grönlanti), 273
numeerinen sääennustaminen (NWP), 234
Nyquist, Harry, 309
Nyqvistin lause, 309
näennäissatunnaiskoodi (PRN)
jäljitelmä, 184
koostuu blokeista, 177
muodostaminen, 173
sormenjälkenä, 165
näkyvyys kiitoradalla (RVR), 243

O

odotusarvo, 19
ohjaus, 6, 51
ohjelmalaskuri, 316, 317

P

paikallinen parannusjärjestelmä (LAAS), 252
painotus (regressio), 33
painoyksikön keskivirhe, 29, 197
pakettikytkentäinen verkko, 313
palloylijäämä, 172
pariteettitarkistus, 311
perigeum, 136–138
perigeumin argumentti, 137
pienimmän neliösumman kollokaatio, 47, 87
piirikytkentäinen verkko, 309
pikkuakselin puolikas, radan, 137
`ping` (komento), 313
pino, 317
pinokehys, 317
pinon ylivuoto, 317
pituuden määritys, 5
Pohjantähti (Polaris), 4
pohjoinen-itä-ylös (koordinaatit), 6
polarisointi, 259
myötäpäivään, 168
taivaan valon, 4
vastapäivään, 168, 170
ympyrä-, 171
vastaanotto antennissa, 169, 170
polttopiste, ellipsin, 136
Polynesia, 3
poolisuus, 200
prioriteetti (tietokoneen käyttö), 319
proseduuri (ohjelman komponentti), 316
ilmentymä, 317
kutsu, 316, 318
paluuosoite, 316
protokollapino, 311, 312
pseudoetäisyyden havaintoyhtälö, 193
ionosfäärivapaa, 202
jossa zeniittiviiveet, 201
käyttäen vertausmallia, 203
pseudoliitti, 295
puhelinluettelo, 310
puhelinverkko, 309
pulssivalinta, 310
pyörähdysmomentti, 102
säilyminen, 106, 140
pyörähdysnopeus, 102
päivänvalotallennin, 296
päähitausmomentti, 104
lieriön, 107, 108

Q

Quasi-Zenith Satellite System, *katso* QZSS
QZSS, 249
apogeumin roikunta, 250
Interface Control Document (ICD), 251
kaupunkikanjoni, 249
kiertoradat, 249, 251

R
Radio Data System (RDS), 231
Radio Technical Commission for Maritime Services (RTCM), 212
radiodatayhteys, 211
RAIM, 237
  edistynyt (ARAIM), 240
  hälytysraja, 239
  probability of false alarm (PFA), 239
  probability of missed detection (PMD), 239
  testisuure, 238
Ranging and Integrity Monitoring Station (RIMS), 247
ratatason prekessio, 157
ratkaisukorkeus (DH), 243
regressio, 24
Remondi, Benjamin, 210
rendezvous, 51, 158, 159
  Kuun kiertoradalla, 51
    valokuva, 52
rengaslasergyroskooppi, 111, 112
riippumaton ja identtisesti jakautunut (*i.i.d.*), 29, 197
risteilyohjus, 2
ristidipoliantenni, 168
ristikorrelaatio
  määritelmä, 34
  syklinen, 176
ristikovarianssi
  määritelmä, 34
  integraaliyhtälö, 34
  kompleksi, 36
roskankeruu, 319
RTCM SC-104 viestityypit, 213
RTCM Special Commission 104, 212
RTK, 11, 209
  fix-ratkaisu, 220
  float-ratkaisu, 220
  geometria, 225
    kuva, 231
  kaksoiserotukset, 219
  kokonaislukutuntemattomien ratkaisu, 222
    tilastollinen testaus, 224
  kokonaislukutuntemattomien yhteisratkaisu, 223, 224
  ko-lokaatio, 220
  kuva, 211
  nopea kokonaislukutuntemattomien ratkaisu, 221
  näkölinjaan sidottu kanta, 226
  yksinkertaiset erotukset, 217
ryhmäviive, 199

S
Saastamoisen malli, 200, 203
safety of life, 243, 263
Sagnac, Georges, 111
Sagnacin ilmiö, 111, 168
samanaikaisuus (suhteellisuusteoria), 168
satelliitin rataliike
  dynaaminen malli, 58
    linearisointi, 58
  tilansiirtomatriisi, 63
  tilavektori
    Keplerin alkiot, 138
    paikka ja nopeus, 136
satelliittipaikannus, 5
satelliittipohjainen parannusjärjestelmä, *katso* SBAS
satelliittirata, 135
  määritys, 203
    havaintoyhtälö, 204
  nopeusvektori, 144
  paikkavektori, 142
satellite-to-satellite tracking
  high-low, 275
  low-low, 275
sattuman anturi, 277
satunnaiskulku
  määritelmä, 38
  autokovarianssi, 38
  epästationaarisuus, 39
  ominaisuudet, 43
SBAS
  differentiaalikorjaus, 240, 242
  GPS:n kellokorjaus, 242
  ionosfäärin etenemisviive, 242, 243, 257
  käytön laajuus, 237
  navigointiviesti, 242
  signaalin modulaatio, 241
  transpondereiden geometria, 241
  transponderi, 240
    näennäissatunnaiskoodi, 245
Schuler, Maximilian, 123
Schulerin heiluri
  mikä on, 123
  määrittelevä ominaisuus, 125
  vaunulla, 124
Schulerin jakso, 123
Schulerin silmukka, 119
  kuva, 125
  toteutus, 125
Schulerin viritys, 114
sensuuri vahinkona, 313
siemen (LFSR), 303
signaali (prosessi), 84
Signal (sovellus), 310
SISNeT (sovellus), 254

Sky Map (Androidin sovellus), 278
    koodi, 281
SkyView (sovellus), 284
Sodänkylä, 208
solmu, nouseva, 136–138
spektri, stokastisen prosessin, 43
spoofing, 166
state vector, *katso* tilavektori
stationaarisuus, 17, 33
stokastinen muuttuja
    määritelmä, 15
    diskreetti, 15
    jatkuva, 16
    vektori, 16
stokastinen prosessi, 17
sukupolvi (matkapuhelinteknologia), 313
suora vaihe (modulaatio), 165, 166
suoratoisto, 214
suorituspino, 316
suuntanumero, 310
suurten lukujen laki, 19
syklinen redundanssitarkistus (CRC), 311
symbolinen laskenta, 45
Synchronized Position Attitude Navigation (SPAN), 289

T
taajuus, 44
taajuusjakokanavointi (FDMA), 258
tarkkuuden laimennus (DOP), 197
tarkkuuspalvelu (Galileo), 263
tasaaja, 186
taustapalveluprosessi (*daemon*), 316
tehollinen otoskoko, 26, 32
tehon spektraalitiheys (PSD), 44
    BOC, 182
    Gaussin ja Markovin prosessi, 46
    GPS-signaali, 179
tennismailalause, 134
terrestrinen koordinaatisto, 6
tiedostojärjestelmä, 316
tilakohinan eteneminen, 66
    transitiivisuus, 67
tilan estimaattori, 57
    a posteriori, 58
    a priori, 58
tilan eteneminen, 57, 63
    kohinan läsnä ollessa, 63
    kuva, 65
tilansiirtomatriisi
    määritelmä, 61
    etenemisyhtälö, 64
    transitiivisuus, 62
tilastollinen malli, 28
tilavarianssi
    määritelmä, 61
    eteneminen, 63
    etenemisyhtälö, 66
    päivitys, 70
tilavektori
    määritelmä, 53
    alkiot, 53
TMBOC, 166, 257
todennäköisyystiheys, 16, 18
    kumulatiivinen, 16, 18
Toeplitz, Otto, 297
Tom ja Jerry, 275
toposentrinen koordinaatisto, 6, 114
tosiaikainen kinemaattinen paikannus, *katso* RTK
tosiaikaisuus
    määritelmä, 307
    kova, 315, 320
    käytön edellytykset, 320
Transit/NNSS (satelliittipaikannus-järjestelmä), 5
Transmission Control Protocol (TCP), 314
Trimnet VRS (Geotrim), 212
tukiasema, 213
Tundran kiertorata, 250
Twin Otter, 272
Tyynenmeren saaristojen asuttaminen, 3
tähtiaika, Greenwichin, 115, 137

U
”ultraviolettikatastrofi”, 47
User Datagram Protocol (UDP), 313

VW
V-2
    gyroskooppialusta, 6
    ilma- ja suihkuperäsimet, 6
    kuva, 7
    ohjaus, 6
WAAS, 240, 244
    avaruuslohko, 244
    maalohko, 245, 246
    transponderit, 244
vahvistusmatriisi, Kalmanin, 70
vaihekatko, 11, 191, 210, 218
vaihekelaus, 171
    geodeettinen viiva, 171
    ilmagravimetriassa, 173
    kaksoiserotushavainnot, 172
    näkölinjan atsimuutti, 171
vaihekulman erotin, 186
vaihelukittu silmukka (PLL), 185
vaihemodulaatio, 164, 165
vaihetuettu koodimittaus, 189
    dynaaminen malli, 190
    havaintoyhtälö, 190
    päivitysyhtälö, 190

vaiheviive, 199
vaimennus, gravimetrin, 269
vakautettu alusta
kuvaus, 112
ilmagravimetri, 119, 269
kuva, 120
merigravimetri, 119
paikallinen horisontti, 119
tasaus, 120
valkoinen kohina, 28
määritelmä, 36
autokovarianssi, 38
ominaisuudet, 43
tehon spektraalitiheys (PSD), 47
valkoinen valo, 36
valkoposkihanhet, 4
Vandenberg (Kalifornia), 162
varianssi, 19
varianssifunktio, 33
vastaanottimen itsenäinen eheyden valvonta, *katso* RAIM
vasteaika, 314
Weisstein, Eric, 22
verkko-RTK, 231
ilmakehän mallinnus, 233
interpolointi tukiasemien välillä, 231
täsmälähetys, 231
yleislähetys, 231
vertauskehys, kulkuneuvon, 6
vesihöyry, 200
WGS84, 9
WhatsApp (sovellus), 310
Wide Area Augmentation System, *katso* WAAS
Wide Area Master Station (WMS), 245
Wide Area Reference Station (WRS), 245
Wiener, Norbert, 38
Wienerin prosessi, 38
Wienerin, Khinchinin ja Einsteinin lause, 44
viivelukittu silmukka (DLL), 184
Wind River Systems (ohjelmisto), 315
viranomaispalvelu (Galileo), 263
virhe-ellipsi, 22, 23
virtatihentymä, ekvatoriaalinen, 252, 253
virtuaalitukiasema (VRS), 231
Wolfram Research, 45
Woodbury, Max, 305
Woodburyn yhtälö, 86, 305
World Radiocommunications Conference, 263
votiivilaiva, 2
vuoronnus, 319
vuorontaja, 316
vuoronvaihto, 319, 320
väliakselilause, 134
värillinen kohina, 39, 41
malliprosessina, 84
tuottaminen, 43
värähtely-yhtälö, 123
vääntömomentti, 102
vääntötoimilaite, 109, 114

X
XOR-operaatio, 174
XOR-portti, 174

Y
ympyräkonvoluutio, 35

Z
zeniitin kokonaisviive (ZTD), 201, 233
signaalikovarianssifunktio, 233

Ä
äänirauta, 294
äänivalinta, 310