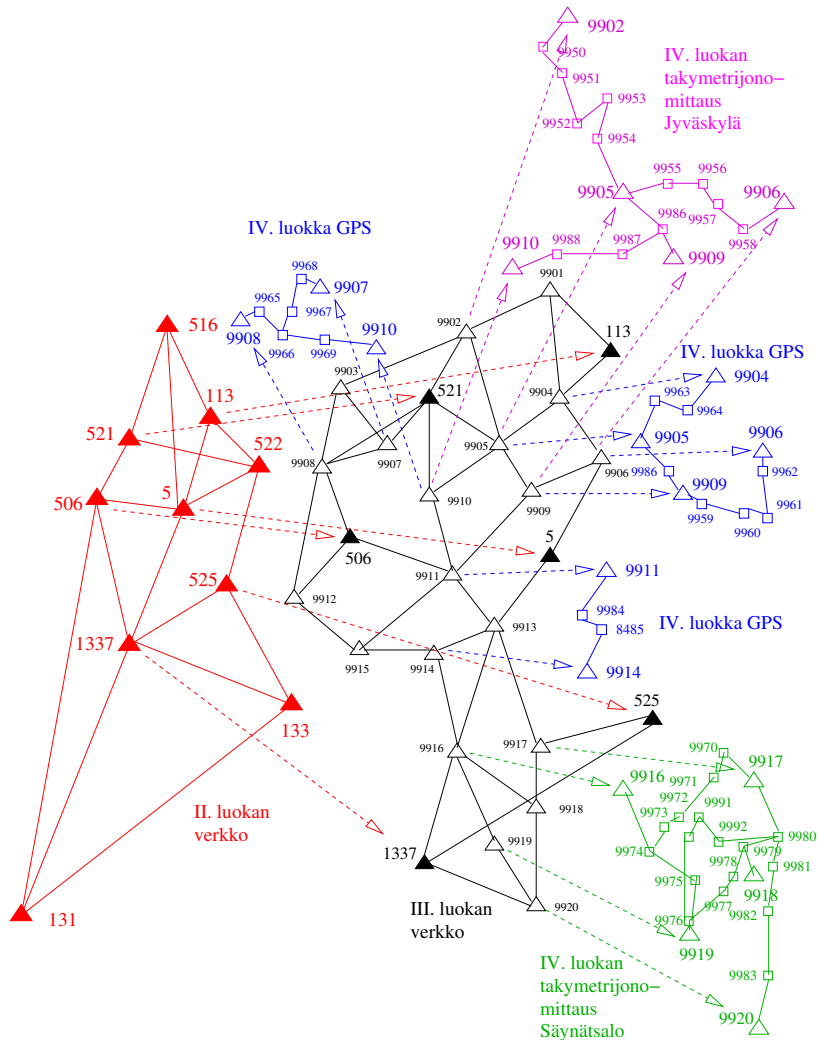


Käytännön geodesia Maa-6.2222



Jyväskylän kaupungin runkoverkon uudelleenmittauksen 1999 geometria (Maa-6.227 Geodesian maastoharjoitukset)

Martin Vermeer

12. helmikuuta 2015

Kurssiesite

Laajuus 3 op

Opetusjakso III

Osaamistavoitteet Kurssin suorittamisen jälkeen opiskelija

- o osaa käyttää GPS käytännön runkomittaustyössä esim. kuntien mittaustoimessa, sekä oivaltaa miten GPS:n antamat koordinaatit ja korkeudet eroavat perinteisistä koordinaateista ja korkeuksista.
- o Osaa suunnitella erityyppisiä mittauksia. Tuntee niiden havaintoyhtälöt, osaa linearisoida ne, osaa arvioida saavutettava tarkkuus.
- o Osaa muunnoskaavojen ja -parametrien laskenta; keskistysmittaukset, karttaprojektiot; ymmärtää rekognosoinnin ja pistekorttien merkitystä.
- o Osaa selittää monikulmio- ja korkeusjonojen ja jonoverkkojen tarkkuuskäyttäytyminen ja sen perusteella suunnitella niitä. Ymmärtää mittaustarkkuusluokat ja verkkohierarkia ja on tutustunut laajemmin pienimmän neliösumman menetelmän käyttöön verkkotasoituksessa.
- o Ymmärtää datumin ja datuminmuunnoksen käsite ja merkitys kaksi- ja kolmiulotteisesti; paikalliset ja geosentriset datumit ja koordinaattijärjestelmät.
- o On valmis osallistumaan käytännön maastotyöhön.

Sisältö Taso-, korkeus- ja avaruusrunkoverkkojen suunnittelu, mittaus ja laskenta. 2D+1D ja 3D -lähestymistapa. Havaintoyhtälöiden rakentaminen pienimmän neliösumman verkkotasoitusta varten. Mittausten tarkkuus ja tarkkuusluokittelu. Tilastollinen testaus. Koordinaatti- ja vertausjärjestelmät, vertausellipsoidi, datumit ja datum-muunnokset. GPS-verkkojen laskenta ja tarkkuus. Erityyppisten mittausten ja -verkkojen yhteiskäyttö ja integrointi. Kalibrointi.

Esitiedot Maa-6.211/214 tai Maa-6.1213.

Korvaavuudet Korvaa opintojakson Maa-6.222.

Kohderyhmä

Suoritustavat Tentti ja harjoitukset, josta yksi on Metsähovin retki

Työmäärä toteutustavoittain

- o Luennot $8 \times 2 \text{ t} = 16 \text{ t}$
- o Materiaalin itsenäinen opiskelu, tenttivalmistelu 24 t
- o Harjoitustyö, itsenäinen työskentely = 36 t
- o Metsähovi 4 t
- o Yhteensä 80 t

Arvostelu Tentin arvosana on kokonaissuorituksen arvosana, 1-5

Oppimateriaalit Luentomoniste. Taustamateriaalina BLACHUT, CHRZANOWSKI, SAASTAMOINEN: Urban Surveying and Mapping; COOPER: Control Surveys in Civil Engineering.

Opetuskieli Suomi

Kurssin henkilökunta ja yhteystiedot Martin Vermeer, huone M309 nimi@aalto.fi

Vastaanottoajat

CEFR-taso

Lisätietoja

Sisältö

1	Linearisointi ja virheiden kasautuminen	1
1.1	Linearisointi	1
1.1.1	Skalaaritapaus	1
1.1.2	Vektoritapaus	2
1.1.3	Havaintoyhtälöiden linearisointi	4
1.2	Varianssien kasautumislaki	5
1.3	Geodeettinen päätehtävä	6
2	Datumit	11
2.1	Yksiulotteiset datuminmuunnokset	11
2.2	Kaksiulotteiset datuminmuunnokset	13
2.3	Kompleksinen esitystapa	14
2.4	Kolmiulotteinen datuminmuunnos (1)	15
2.5	Kolmulotteinen datummuunnos (2)	17
3	Koordinaattijärjestelmät	19
3.1	Yleistä	19
3.2	Suorakulmaiset geosentriset koordinaatit	19
3.3	Vertausellipsoidi	21
3.4	WGS84-vertausjärjestelmä	21
3.5	Toposentrisen koordinaattijärjestelmä	22
3.6	Geodeettinen datum	23
3.7	Geodeettisten datumien välinen muunnos	25
3.8	Suuntakorjaus paikallisesta horisontista vertausellipsoidiin	29
3.8.1	Ellipsoidisten normaalien erisuuntaisuus	30
3.8.2	Pituuskorjaus	31
4	Keskistykset, asematasoitus	33
4.1	Vaakakeskistys	33
4.2	Korkeuskeskistys	34
4.3	GPS-keskistys	34
4.4	Vaakakulmien asematasoitus	35
4.4.1	Kulmamuuunnos	36
4.4.2	Jäännösvirheet ja vapausasteet	37
4.4.3	Asematasoituksen laskentataulukko	38
5	Vaaitus	41
5.1	Vaaitusrefraktio	41
5.2	Vaaituksen satunnaiset virheet	41
5.3	Vaaituksen systemaattiset virheet	42
5.4	Vaaituksen karkeat virheet	43
5.5	Yksittäisen vaaitusjonon laskeminen	45
6	Korkeuden mittaus ja käsittely	49
6.1	Refraktiokerroin	49

6.2	Pystykulma	50
6.3	Trigonometrinen korkeudenmittaus	51
6.3.1	Periaate, virhepropagaatio	51
6.3.2	Trigonometrinen vaaitus	52
6.3.3	Refraktion ja Maan kaarevuuden vaikutus	52
6.3.4	Vastakkaiset yht'aikaiset mittaukset	54
6.4	xyH -jonomittaus, "tarkka trigo"	56
6.4.1	Mittatanko	56
7	Monikulmiojonon laskenta	59
7.1	Suljettu monikulmiojono	59
7.2	Alku- ja loppuliitossuunnan laskeminen	60
7.3	Suuntien tasoitus	60
7.4	Koordinaattien tasoitus	61
7.5	Laskentakaavio	63
7.5.1	Huomautuksia	63
7.6	Avoim monikulmiojono	64
7.6.1	Lähtösuunta	64
7.6.2	Jonon laskenta	65
8	Ehtoyhtälöiden tasoitus	67
8.1	Teoria	67
8.2	Esimerkki: kolmioehto	68
8.3	Monikulmiojonotasoitustahtälötasoituksena	68
8.3.1	Ilman painotusta	68
8.3.2	Painotuksen kera	69
8.4	Jonon laskenta	70
8.4.1	Painokertoimien valinnasta	70
8.4.2	"Realistiset" painoluvut	71
8.4.3	Relatiivinen pistekeskivirhe, loppupistekeskivirhe	72
8.4.4	Karkeiden virheiden löytäminen	72
8.4.5	Sulkuvirheiden testaus	72
8.4.6	Tasoitettun pisteen keskivirhe	74
9	Kriteerivarianssit	77
9.1	Esimerkki: jono	77
9.2	Verkon varianssi-kovarianssimatriisi	78
9.3	Verkon kriteerimatriisi	80
9.4	Varianssi- ja kriteerimatriisin vertailu	80
10	Pienimmän neliösumman tasoitus	83
10.1	Teoreettinen tausta	83
10.1.1	Pienimmän neliösumman ratkaisu	83
10.1.2	Harhattomuus	84
10.1.3	Jäännösvirheiden varianssi	85
10.2	Vinoetäisyys avaruudessa	86
10.3	Atsimutimittaus	87
10.4	Zeniittikulmamittaus	88
10.5	Käytännön esimerkki	89
11	Tasoituskulun variantit ja sovellukset	91
11.1	Pakkoehtojen käyttö ratkaisun kiinnittämiseksi	91
11.2	Ehto- ja havaintoyhtälöiden välinen yhteys	92

11.2.1	Testaussuureen laskenta	93
11.3	Vaaitus ehtoyhtälöiden esimerkkinä	94
11.4	Esimerkki: vaaitusverkko	96
11.5	Helmert-muunnosparametrien estimointi	98
11.6	Vapaa asemapiste	99
11.7	Vapaan asemapisteen laskuesimerkki	99
11.8	Helmert-tasomuunnos kahdesta tunnetusta pisteestä	100
11.9	Helmert-parametrien virheiden kasautuminen	101
12	GPS-mittaus ja laskenta	105
12.1	Yleistä	105
12.2	Rekognosointi	105
12.3	Vektoreiden mittaus	105
12.4	Vektoreiden määrä	106
12.5	Verkon geometria	107
12.6	Mittausten kesto ja aikataulu	107
12.7	Ratatiedot	108
12.8	Antennit ja pystytys	108
12.9	Havaintogeometria, havainto-yhtälöt	109
12.10	Tuntemattomien varianssimatriisi ja varianssit	110
12.11	Esimerkki: atsimutisymmetrinen geometria	112
12.12	Erotushavaintojen havaintoyhtälöt	114
12.13	Vektorimittaukset	116
13	Geodeettiset mittaukset ja laskennat	119
13.1	Runkoverkkojen hierarkia ja tarkkuusluokitus	119
13.2	Valtakunnalliset runkoverkot	119
13.3	Alemman luokan runkoverkot	120
13.4	Perinteisiä ja satelliittimittauksia	120
13.4.1	<i>kkj</i> -järjestelmän määrittäminen	121
13.4.2	Korkeusjärjestelmät ja geoidin rooli	121
13.4.3	Muunnokset eri järjestelmien välillä	122
14	Maastomittaus käytännössä	127
14.1	Geodesian laboratorion maastomittaukset	127
14.2	Maastomittauksessa käytetyt tekniikat	127
14.2.1	Staattinen GPS-mittaus	128
14.2.2	Digitaalinen tarkkavaaitus	129
14.2.3	Trigonometrinen vaaitus: "tarkka trigo"	129
14.2.4	Monikulmiojononmittaus	129
14.3	Case: Jyväskylän maastomittaus	130

Luku 1

Linearisointi ja virheiden kasautuminen

1.1 Linearisointi

Geodesiassa, kuten monessa muussakin tieteissä, on usein olemassa kahden suuren väliset yhteydet jotka käyttäytyvät *epälineaarisesti*. Esimerkit tästä ovat havaintosuureiden ja tuntemattomien välinen yhteys, tai kahden eri koordinaattijärjestelmän koordinaattien välinen yhteys.

Kuitenkin monet teorat, kuten esim. pienimmän neliösumman (PNS) tasointumenetelmä, perustuvat *lineaarisiiin* kaavoihin, joiden matematiikka on huomattavasti yksinkertaisempaa. Myös virheiden (varianssien) kasautumislaki pätee vain lineaarisille riippuvuussuhteille suureiden välillä.

Käytännössä usein muodollisesti epälineaarinen yhteys, esim. pistekoordinaatin ja pisteeseen mitatun suunnan välillä, on *melkein* lineaarinen pisteen sijainnin epävarmuusalueen sisällä. Onhan mittaustarkkuus geodesiassa varsin suuri: pisteen sijainnin epävarmuus voi olla senttimetrien luokkaa kun pisteiden välinen etäisyys voi olla satoja metrejä tai kilometrejä. Silloin voidaan tutkia, alkuperäisten suureiden sijasta, yhteyttä niiden *pienen erotussuureiden* välillä – joka on lähestulkoon lineaarinen. Asia näytetään Taylor-sarjakehitelmän avulla.

1.1.1 Skalaaritapaus

Yleensä jos on kaksi suurta, jonka välinen on funktionaalinen yhteys:

$$y = f(x),$$

voidaan linearisoida valitsemalla *likiarvo* x_0 ja kehittämällä funktio *sarjakehitelmään* (Taylor-sarjaan) likiarvon lähistöllä. Saadaan:

$$y = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \dots$$

eli

$$y - y_0 \approx a(x - x_0), \tag{1.1}$$

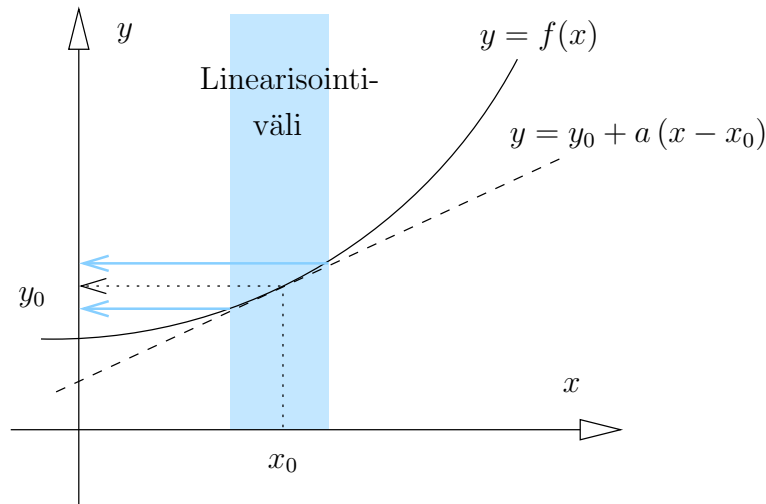
jossa $y_0 \equiv f(x_0)$ ja $a = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$. Tätä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Delta y = a \Delta x$$

mitä usein lyhennetään seuraavan muotoon

$$y = ax,$$

kun vain muistetaan että x, y ovat "linearisoidut (siis: x_0, y_0 suhteen lasketut erotus-)arvot".



Kuva 1.1: Yksiulotteinen kuvaus ja linearisointi

1.1.2 Vektoritapaus

Jos on kaksi vektorisuurta, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]^T \in \mathbb{R}^m$, jonka välillä on funktionaalinen yhteys

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

eli

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

tilanne mutkistuu. Tässäkin tapauksessa voidaan valita likiarvovektori $\mathbf{x}_0 = [x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \cdots \ x_n^{(0)}]^T$, ja vastaava likiarvovektori $\mathbf{y}_0 \equiv F(\mathbf{x}_0)$, jonka jälkeen taas

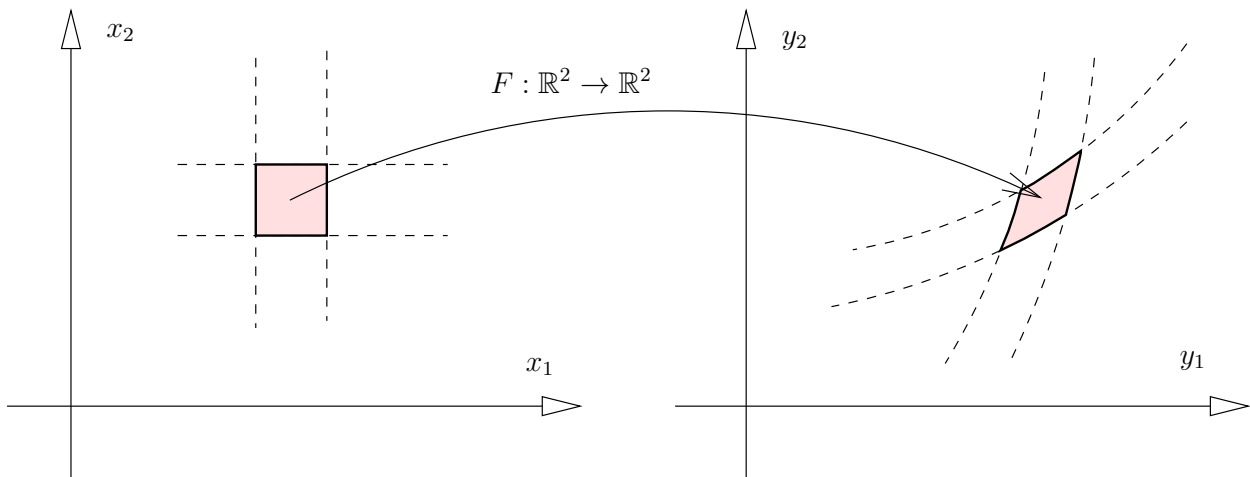
$$\begin{aligned} y = y_0 &+ \left. \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_1 - x_1^{(0)}) + \left. \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_2 - x_2^{(0)}) + \cdots \\ &\cdots + \left. \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_n - x_n^{(0)}), \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} y_i = y_i^{(0)} &+ \left. \frac{\partial F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_1 - x_1^{(0)}) + \left. \frac{\partial F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_2 - x_2^{(0)}) + \cdots \\ &\cdots + \left. \frac{\partial F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (x_n - x_n^{(0)}) + \dots, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Tässä kaavassa on m eri riviä, ja jokaisella rivillä on n eri (lineaarista) termiä. Tämä yhtälöryhmän yhteenvedoksi kirjoitetaan seuraava *matriisiyhtälö*:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots,$$



Kuva 1.2: Kaksiulotteinen kuvaus

jossa matriisi A on

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Tämä matriisi on kahden abstraktisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ välisen vektorikuvauksen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ns. JAKOBIN¹ matriisi. Matriisi kuvaa *paikallisesti*, siis pisteen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ lähistöllä, millä tavalla pienet ”häiriöt” $\mathbf{x}$ -vektorissa kulkevat $\mathbf{y}$ -vektoriin:

$$\Delta \mathbf{y} \equiv \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \approx A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = A\Delta \mathbf{x},$$

jos määritetään $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ja $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$. Siis erotussuureiden $\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}$ välillä kuvaus on paikallisesti lineaarinen. Tämä on ns. *linearisointi*.

Yleisessä tapauksessa $m \neq n$. Erikoisessa tapauksessa, että $m = n$, voidaan ajatella, että kuvauksella F olisi käänteiskuvaus $G = F^{-1}$, jolla

$$\mathbf{x} = G(\mathbf{y}).$$

Paikallisesti, likipisteen $\mathbf{x}_0$ ympäristössä, voidaan tästä sanoa: Jos matriisi A on *singulaarinen*, ts. sen determinantti $\det(A) = 0$, merkitsee tämä, että kuvauksella F ei ole olemassa paikallisesti (siis pisteessä $\mathbf{x}_0$, ja mahdollisesti ei myöskään sen sopivan pienellä lähialueella) käänteistä kuvausta. Tämä merkitsee taas, että voi olla useita (itse asiassa äärettömän useita) eri arvoja $\mathbf{x}$ joilla on kaikki sama kuva $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$. Toisaalta jos $\det A \neq 0$, sellainen käänteiskuvaus on (sopivan pienikokoisella likipisteen $\mathbf{x}_0$ lähistöllä) olemassa.

Tulkinta

$\det A$ kuvaa, miten *tilavuudet* kuvautuvat F -kuvauksen alla: esim. jos $n = m = 2$, se kuvaa, miten pikkuneliön pinta-ala $\mathbb{R}^n$ -avaruudessa kuvautuu parallelogrammin pinta-alaan $\mathbb{R}^m$ -avaruuteen, eli niiden kahden pinta-alan *suhde*. Jos $n = m = 3$, se kuvaa vastaavasti suhde

¹Carl Gustav Jacob JACOBI, 1804-51, juutalaissaksalainen matemaatikko, Königsbergin yliopisto 1827-42.

$\mathbb{R}^n$ -avaruuden kuution ja sen $\mathbb{R}^m$ -avaruuden parallelepipedin tilavuuksien välillä. Jos suhde on nolla, niin ilmeisesti neliö “litistyy” viivapätkäksi ja kuutio taso-parallelogrammiksi, ja kuvaus on ilmeisen singulaarinen.

1.1.3 Havaintoyhtälöiden linearisointi

Käsitellään esimerkkinä funktionaalinen yhteys tuntemattomien $\underline{x}$ ja havaintosuureiden $\underline{\ell}$ välillä, joka on todellisessa havaintogeometriassa harvoin lineaarinen. Joudutaan *linearisoidaan*: olkoon ei-lineaariset havaintoyhtälöt

$$\underline{\ell} + \underline{v} = F(\widehat{\underline{x}}), \quad (1.2)$$

missä $F(\cdot)$ on moniulotteinen, yleensä *ei-lineaarinen* “havaintofunktio”.

Mallit linearisoidaan kehittämällä ne taas Taylor-sarjaan karkeasti arvioitujen ratkaisukoordinaattien (“likiarvojen”) ympärillä, ja käyttämällä sarjasta vain ensimmäisen asteen termit. Mikäli käytetyt likikoordinaatit eivät ole riittävän hyviä, joudutaan laskemaan ratkaisu *iteratiivisesti*.

Valitaan *likiarvot* $\underline{x}_0$ ja yhteensopivasti ℓ_0 joille siis pätee:

$$\ell_0 = F(\underline{x}_0) \quad (1.3)$$

eli (huomaa, että tuntemattomien määrä on m ja havaintosuureiden määrä n):

$$\ell_i^{(0)} = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{m-1}^{(0)}, x_m^{(0)}), \quad i = 1 \dots n.$$

Tämä vähennetään kaavasta (1.2) ja tehdään *sarjakehitelmä*:

$$(\ell_i - \ell_i^{(0)}) + \underline{v}_i = F_i(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_m) - F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \approx \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \bigg|_{x_j=x_j^{(0)}} (\widehat{x}_j - x_j^{(0)}).$$

Kutsutaan

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \bigg|_{x_j=x_j^{(0)}}, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m, \quad (1.4)$$

ns. *second order design matrixin*² alkiot. Itse matriisi on silloin

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \bigg|_{x_1=x_1^{(0)}, x_2=x_2^{(0)}, \dots, x_m=x_m^{(0)}}$$

²*Suom.* (toisen kertaluvun) rakennematriisi.

Tässä n on havaintojen, m tuntemattomien määrä. Jos kutsutaan

$$\begin{aligned}(\underline{\ell} - F(\underline{x}_0)) &\equiv \underline{\Delta\ell} \\ (\widehat{\underline{x}} - \underline{x}_0) &\equiv \widehat{\underline{\Delta x}}\end{aligned}$$

(“korvaavat” eli “linearisoidut” havaintosuureet ja tuntemattomat), saadaan linearisoiduiksi havaintoyhtälöiksi:

$$\underline{\Delta\ell} + \underline{v} = A\widehat{\underline{\Delta x}}. \quad (1.5)$$

Tästä laskettava pienimmän neliösumman ratkaisu *minimoi* residuaalien neliöllinen summa $\underline{v}^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v}$, mistä syystä sitä kutsutaan pienimmän neliösumman menetelmäksi. Matriisi $Q_{\ell\ell}$, lyhyesti Q , on havaintojen tarkkuutta ja mahdollista keskinäistä tilastollista riippuvuutta (korrelaatiota) kuvaava havaintovektorin *varianssimatriisi*³, ks. luku 1.2.

Kaavassa (1.5) jätetään usein myös Δ pois yksinkertaisuuden vuoksi. Δ -suureet ovat tyypillisesti *paljon pienempiä* kuin “kokonaiset” suureet. Siksi numeriiikka onnistuu hyvin vaikka A -matriisin elementit eivät olisi eksakteja.

Kuitenkin kaava (1.3) on aina laskettava *eksaktisti*.

1.2 Varianssien kasautumislaki

Jos stokastinen suure y on stokastisen suureen x lineaarinen funktio, ts.

$$\underline{y} = L\underline{x},$$

voidaan kirjoittaa myös

$$\sigma_y = L\sigma_x,$$

missä σ_x, σ_y ovat suureiden x ja y *keskivirheet*. Samalla voidaan kirjoittaa

$$E\{\underline{y}\} = E\{L\underline{x}\} = LE\{\underline{x}\}$$

(“odotusarvojen kasautumislaki”), missä $E\{\cdot\}$ on odotusarvo-operaattori, *lineaarinen* operaattori.

Jos määritetään varianssi seuraavasti:

$$\text{Var}\{\underline{x}\} = \sigma_x^2 \equiv E\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})^2\},$$

seuraa, että

$$\sigma_y^2 = L^2 \sigma_x^2.$$

Tämä on *varianssien kasautumislaki* yksinkertaiselle stokastiselle suureelle.

Mikäli stokastisella suureella $\underline{x} = [\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \cdots \quad \underline{x}_n]^T$ ja $\underline{y} = [\underline{y}_1 \quad \underline{y}_2 \quad \cdots \quad \underline{y}_m]^T$ on useita komponentteja (abstrakti “vektorisuure”), pätee

$$\underline{y} = L\underline{x}, \quad (1.6)$$

$$E\{\underline{y}\} = LE\{\underline{x}\}$$

³Tarkemmin: havaintovektorin *painokerroinmatriisi*. Yleisesti kirjoitetaan $\Sigma_{\ell\ell} = \sigma_0^2 Q_{\ell\ell}$, jossa $\Sigma_{\ell\ell}$ on varianssimatriisi ja σ_0 ns. *painoyksikön keskivirhe*.

ja

$$\text{Var}(\underline{y}) = L \text{Var}(\underline{x}) L^T, \quad (1.7)$$

missä nyt L ja varianssit ovat *matriiseja*.

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ L_{m1} & \cdots & \cdots & L_{mn} \end{bmatrix},$$

$m \times n$ -kokoinen matriisi;

$$\text{Var}(\underline{x}) = \Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_n x_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix},$$

$n \times n$ -kokoinen, neliömuotoinen matriisi; ja

$$\text{Var}(\underline{y}) = \Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1 y_2} & \cdots & \sigma_{y_1 y_m} \\ \sigma_{y_2 y_1} & \sigma_{y_2}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{y_m y_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{y_m}^2 \end{bmatrix},$$

$m \times m$ -kokoinen neliömatriisi. Tässä varianssit:

$$\sigma_{x_i}^2 = \text{Var}(x_i) = E\{(x_i - E\{x_i\})^2\},$$

ja *kovarianssit*:

$$\sigma_{x_i x_j} = \text{Cov}(x_i, x_j) = E\{(x_i - E\{x_i\})(x_j - E\{x_j\})\},$$

ja samoin $\underline{y}$:n komponenteille.

Kaava (1.7) kutsutaan *yleiseksi varianssien kasautumislainsi*. Kaavan (1.6) ilmaisema *lineaarisuusominaisuus* saadaan tarvittaessa aikaan *linearisoimalla*, josta puhuttiin aikaisemmin.

1.3 Geodeettinen päätehtävä

Varianssien kasautumislain sovelluksena tarkastetaan geodeettinen päätehtävä, missä suunta- ja etäisyydsmittauksen tunnetut epätarkkuudet kulkevat eli *kasautuvat* tuntemattoman pisteen koordinaattien epätarkkuuksiksi.

Geodeettinen päätehtävä: annettuna mittaussuureet s, A sekä lähtöpisteen P koordinaatit x_P, y_P , määritä tuntemattoman pisteen koordinaatit

$$\begin{aligned} x &= x_P + s \cdot \cos A, \\ y &= y_P + s \cdot \sin A. \end{aligned}$$

Ongelma ratkaistaan seuraavalla tavalla. Otetaan likiarvot s_0 , $s = s_0 + \Delta s$ ja A_0 , $A = A_0 + \Delta A$ ja kirjoitetaan Taylor-sarjakehitelmä:

$$x = x_P + s_0 \cos A_0 + \Delta s \cos A_0 + s_0 \frac{\partial \cos A}{\partial A} \Delta A = \underbrace{x_P + s_0 \cos A_0}_{x^0} + \overbrace{\begin{bmatrix} \cos A_0 & -s_0 \sin A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta A \end{bmatrix}}^{\Delta x}$$

ja samalla tavalla

$$y = y^0 + \overbrace{\begin{bmatrix} \sin A_0 & s_0 \cos A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta A \end{bmatrix}}^{\Delta y}.$$

Nyt meillä on (jättämällä, mutta muistamalla, 0-indeksit, ja tekemällä $\underline{x}$ - ja $\underline{y}$ -vektorit stokastisiksi eli satunnaismuuttujiksi):

$$\underline{y} \equiv \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \underline{x} \equiv \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta A \end{bmatrix}, \text{ ja } L = \begin{bmatrix} \cos A & -s \sin A \\ \sin A & s \cos A \end{bmatrix}; \text{ sekä } \text{Var}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 \end{bmatrix}$$

ja yllä olevat kaavat voidaan nyt kirjoittaa:

$$\underline{y} = L\underline{x}.$$

Varianssimatriisin

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{y}) &= \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = L \text{Var}(\underline{x}) L^T = \\ &= \begin{bmatrix} \cos A & -s \sin A \\ \sin A & s \cos A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos A & \sin A \\ -s \sin A & s \cos A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \cos^2 A + \sigma_A^2 s^2 \sin^2 A & \cos A \sin A (\sigma_s^2 - s^2 \sigma_A^2) \\ \cos A \sin A (\sigma_s^2 - s^2 \sigma_A^2) & \sigma_s^2 \sin^2 A + \sigma_A^2 s^2 \cos^2 A \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa alkiot laskettiin varianssien kasautumislain (1.7) avulla⁴.

Sijoittamalla vielä

$$\cos A = \frac{x - x_P}{s}, \sin A = \frac{y - y_P}{s}$$

saadaan vaihtoehtoinen muoto:

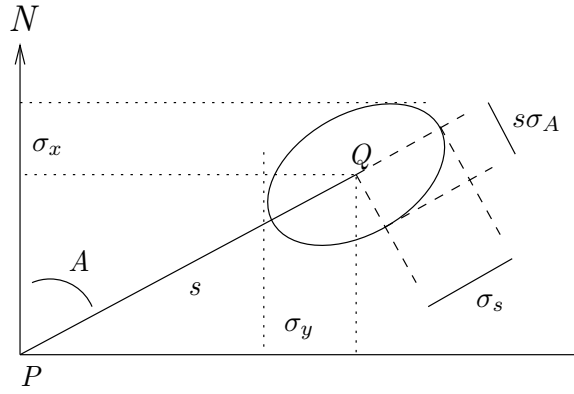
⁴Jos ilmaistaan suunnan A varianssi gooneissa, voidaan sijoittaa kaikkiin alla oleviin kaavoihin

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\sigma_A [\text{g}]}{\rho} \right)^2,$$

jossa ρ on radiaanin suuruus käytetyssä asteyksikössä, tässä tapauksessa $\rho = 63.661977236758$. Samoin kun käytetään kaarisekunteja: silloin

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\sigma_A ['']}{\rho} \right)^2,$$

jossa nyt $\rho = 57.295779513 \times 60 \times 60 = 206264.806247$.



Kuva 1.3: Virhe-ellipsin geometria

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2 &= \text{Var}(\underline{\Delta x}) = \left(\frac{x - x_P}{s} \right)^2 \sigma_s^2 + (y - y_P)^2 \sigma_A^2, \\
 \sigma_y^2 &= \text{Var}(\underline{\Delta y}) = \left(\frac{y - y_P}{s} \right)^2 \sigma_s^2 + (x - x_P)^2 \sigma_A^2, \\
 \sigma_{xy} &= \text{Cov}(\underline{\Delta x}, \underline{\Delta y}) = \left[\left(\frac{\sigma_s}{s} \right)^2 - \sigma_A^2 \right] (x - x_P)(y - y_P),
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

jossa $x - x_P = s \cos A$, $y - y_P = s \sin A$.

Näin havaintotyön keskivirheet σ_s, σ_A muunnetaan koordinaattikeskivirheiksi σ_x, σ_y . Kuten näkyy, vaikuttavat tarkkuuteen vaikuttavat sekä havaintojen tarkkuus σ_s, σ_A että geometria A, s .

Virhe-ellipsi on tilastomatemattinen varmuusalue kaksiulotteisen pisteen ratkaisulle. Tätä käytetään eri testeissä.

Pisteen tarkkuuden mitaksi on olemassa sopivampi suure joka ei riipu koordinaattiakseleiden suunnasta. Sellainen mitta saadaan seuraavasti: virhe-ellipsi on oikeastaan *varianssimatriisin kuvaaja*: jos pisteen P koordinaattien, tai kahden pisteiden P, Q , koordinaattierojen, x, y varianssimatriisi kirjoitetaan

$$V = \text{Var} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var}(\underline{x}) & \text{Cov}(\underline{x}, \underline{y}) \\ \text{Cov}(\underline{x}, \underline{y}) & \text{Var}(\underline{y}) \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin *invariantit* ovat sen *ominaisarvoja ja -vektoreita*: Kaavan $(V - \lambda I) \mathbf{x} = 0$ ratkaisuja $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$. Jos käännetään koordinaatiston akselit näin, että ne ovat samansuuntaisia ellipsin pääakseleiden kanssa, saadaan

$$V = \begin{bmatrix} s^2 \sigma_A^2 & 0 \\ 0 & \sigma_s^2 \end{bmatrix}$$

ja on selvä, että $\lambda_1 = s^2 \sigma_A^2$ ja $\lambda_2 = \sigma_s^2$. Yleisemmin ratkaistaan determinanttiyhtälö

$$\left\| \begin{bmatrix} V_{11} - \lambda & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right\| = 0,$$

mistä ns. *karakteristinen polynomi*: $(V_{11} - \lambda)(V_{22} - \lambda) - V_{12}^2 = 0$, siis $\lambda^2 - (V_{11} + V_{22})\lambda + (V_{11}V_{22} - V_{12}^2) = 0$, mistä⁵

$$\lambda_1 + \lambda_2 = V_{11} + V_{22} = \text{Var}(x) + \text{Var}(y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (1.9)$$

ja

$$\lambda_1 \lambda_2 = V_{11} V_{22} - V_{12}^2 = \det(V) = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 \quad (1.10)$$

(missä σ_{xy}^2 lasketaan kaavan (1.8) mukaan). Suureet (1.9, 1.10) ovat *invariantit* (siis: aina sama, koordinaattiakseleiden orientoinnista riippumatta) ja etenkin suure (1.9), jota kutsutaan pisteen P *pistevarianssiksi* σ_P^2 , on sopiva pistetarkkuuden mitta:

$$\sigma_P^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Pistekeskivirhe σ_P on tämän pistevarianssin neliöjuuri.

⁵Ominaisarvot ovat

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[V_{11} + V_{22} \pm \sqrt{(V_{11} + V_{22})^2 - 4(V_{11}V_{22} - V_{12}^2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[V_{11} + V_{22} \pm \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4V_{12}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (V_{11} + V_{22}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} (V_{11} - V_{22}) \right]^2 + V_{12}^2}, \end{aligned}$$

ja ellipsin pitkä ja lyhyt akselit puolikkaat ovat $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$.

Myös akseleiden *suunnat* voidaan määrittää: tutki koordinaattien lineaariyhdistelmä

$$z(\theta) = x \sin \theta + y \cos \theta,$$

joka on suuntakulman θ funktio.

Varianssien kasautumislain avulla saadaan

$$\text{Var}(z(\theta)) = V_{11} \sin^2 \theta + V_{22} \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta V_{12};$$

ellipsin akselit ovat tämän θ -funktion *stationaariset arvot*,

$$\frac{d}{d\theta} \text{Var}(z) = 0.$$

Differentioimalla

$$2 \sin \theta \cos \theta (V_{11} - V_{22}) + 2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) V_{12} = 0$$

eli

$$\sin 2\theta (V_{11} - V_{22}) + 2 \cos 2\theta \cdot V_{12} = 0$$

ja

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \arctan \left(-\frac{2V_{12}}{V_{11} - V_{22}} \right) + k \cdot 100 \text{ gon} = \\ &= \arctan \left(-\frac{V_{12}}{V_{12} + \sqrt{\left[\frac{1}{2} (V_{11} - V_{22}) \right]^2 + V_{12}^2}} \right) + k \cdot 100 \text{ gon}, \end{aligned}$$

käyttämällä arctangentin *puolikulmakaava*.

Luku 2

Datunit

Datum-käsite voidaan matemaattisesti käsitellä tapana *kiinnittää* verkkoratkaisussa tiettyjen pisteiden koordinaatit oletettuun likiarvoihinsa. Kiinnitettävien pisteiden valinta on mielivaltainen, siis datumin määrittely on mielivaltainen. Esim. syy, miksi Suomeen luotiin ja Suomessa käytettiin pitkään N60-korkeusdatumia jonka lähtöpiste on Helsingissä, on täysin poliittinen. Lähtöpiste olisi voinut olla Turussakin.

2.1 Yksiulotteiset datuminmuunnokset

Yksiulotteinen datuminmuunnos on yksinkertainen *translaatio* eli arvojen siirto vakiomäärällä. Esim. korkeusjärjestelmä jossa tietty piste on määritetty lähtöpisteeksi eli datumpisteeksi, jonka arvo on 0, voidaan muunta toiseksi siirtämällä kaikki arvot näin, että uuden datumpisteen arvoksi saadaan 0.

Olkoon pistejoukon korkeusarvot tietyssä datumissa H_i , ja tietyssä toisessa datumissa H'_i . Olkoon lisäksi käytettävässä joukolle korkeuksien *likiarvot* H_i^0 . Kuten myöhemmin tullaan näkemään, onko likiarvojen olemassaolosta hyötyä kun formuloidaan lineaariset havaintoyhtälöt.

Ensimmäisen datumin *lähtöpiste* olkoon A ja toisen datumin lähtöpiste B . Silloin

$$\begin{aligned} H_A &= H_A^0, \\ H'_B &= H_B^0. \end{aligned}$$

Jos määritetään

$$\begin{aligned} \Delta H_i &\equiv H_i - H_i^0, \\ \Delta H'_i &\equiv H'_i - H_i^0, \end{aligned}$$

seuraa, että

$$\Delta H_A = \Delta H'_B = 0.$$

Nyt johdetaan *datuminmuunnoskaava*! Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi sen olevan muotoa

$$H' = H + a,$$

missä a on vakio. Kaavan “delta-muoto” on

$$\Delta H' = \Delta H + a$$

eli

$$\Delta H'_i = \Delta H_i + a.$$

Pisteille A ja B saadaan

$$\begin{aligned}\Delta H'_A &= \Delta H_A + a \\ \Delta H'_B &= \Delta H_B + a\end{aligned}$$

ja koska $\Delta H_A = \Delta H'_B = 0$, saadaan

$$a = \Delta H'_A = -\Delta H_B.$$

Tästä yleinen muunnoskaava pisteille i :

$$\begin{aligned}\Delta H'_i &= \Delta H_i - \Delta H_B, \\ \Delta H_i &= \Delta H'_i - \Delta H'_A,\end{aligned}$$

ts. sekä eteenpäin (A -datumista B -datumiin) että taaksepäin muunnoskaava.

Matriisikielellä:

$$\begin{bmatrix} \Delta H'_i \\ \Delta H'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_i \\ \Delta H_B \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} \Delta H_i \\ \Delta H_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H'_i \\ \Delta H'_A \end{bmatrix}.$$

(nähdään helposti, että

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

eli matriisi on oma käänteismatriisinsä. Tämä matriisi kutsutaan S-muunnosmatriisiksi.)

Tietenkin näissä kaavoissa

$$\Delta H_i = [\Delta H_1 \quad \Delta H_2 \quad \cdots \quad \Delta H_n]^T,$$

jolloin

$$\begin{bmatrix} \Delta H'_1 \\ \Delta H'_2 \\ \vdots \\ \Delta H'_n \\ \Delta H'_A \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & -1 \\ & 1 & & & -1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \vdots \\ \Delta H_n \\ \Delta H_B \end{bmatrix}.$$

Myös

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & -1 \\ & 1 & & & -1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & -1 \\ & 1 & & & -1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right],$$

eli matriisi on oma käänteismatriisinsä.

Translaatiovakio on tavoitedatumin lähtöpisteen korkeuspoikkeama likiarvosta, laskettuna lähtödatumissa.

2.2 Kaksiulotteiset datuminmuunnokset

Kaksiulotteinen datuminmuunnos on useimmiten yhdenmuotois- eli HELMERT¹-muunnos, kaavana

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

(“neliparametrinen Helmert”) jossa a, b, c, d ovat muunnoksen parametrit: translaatio (siirto) a, b ja rotaatio/skaalaus c, d .

Selkeämpi kirjoitustapa:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = (1 + m) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

missä $c = (1 + m) \cos \theta$ ja $d = (1 + m) \sin \theta$.

Usein m ja θ ovat pieniä, jolloin voidaan kirjoittaa likimäärin:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= (1 + m) \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + m & -\theta(1 + m) \\ \theta(1 + m) & 1 + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} m & -\theta \\ \theta & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\theta m \\ \theta m & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \approx \\ &\approx \begin{bmatrix} m & -\theta \\ \theta & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \approx \\ &\approx \begin{bmatrix} m & -\theta \\ \theta & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

eli

$$\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -\theta \\ \theta & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

missä $x^0, y^0 \sim x, y$ ovat *likiarvoja*; uudelleen järjestäminen antaa (helposti verifioitavissa kirjoittamalla vain kaavat (2.1) ja (2.2) raa’asti auki):

$$\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 & -y^0 & 1 & 0 \\ y^0 & x^0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \theta \\ a \\ b \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

Helmert-muunnoksen parametrien *havaintoyhtälö*.

Kaikkien tuntemattomien määrittäminen edellyttää tietysti riittävä määrä “havaintoja” eli pistekoordinaattieroja vasemmalla puolella. Kahden pisteen koordinaatit on minimi.

¹Friedrich Robert Helmert, 1843-1917 kuuluisa Saksalainen geodeetti.

2.3 Kompleksinen esitystapa

Lähdetään Helmert-kaavasta (2.1) ja kirjoitetaan sen *kompleksilukujen* avulla²:

$$z' - z = \mu z^0 + \alpha,$$

missä $z' \equiv x' + iy'$, $z \equiv x + iy$, $\mu \equiv m + i\theta$, $z^0 \equiv x^0 + iy^0$ ja $\alpha \equiv a + ib$.

Määrittämällä taas delta-suureet

$$\begin{aligned}\Delta z &\equiv z - z^0, \\ \Delta z' &\equiv z' - z^0,\end{aligned}$$

saadaan

$$\Delta z' = \alpha + \Delta z + z^0 \mu.$$

Vaaditaan nyt *tavoitedatumin* kahden lähtöpisteen A, B koordinaattipoikkeamat nolaksi:

$$\Delta z'_A = \Delta z'_B = 0.$$

Eli

$$\begin{aligned}\alpha + \Delta z_A + z_A^0 \mu &= 0 \\ \alpha + \Delta z_B + z_B^0 \mu &= 0\end{aligned}$$

Vähennyslaskun avulla:

$$\Delta z_A - \Delta z_B + (z_A^0 - z_B^0) \mu = 0$$

eli :

$$\mu = -\frac{\Delta z_A - \Delta z_B}{z_A^0 - z_B^0}.$$

Seuraavaksi ratkaistaan α takaisinsijoituksen avulla:

$$\alpha = -\Delta z_A + z_A^0 \frac{\Delta z_A - \Delta z_B}{z_A^0 - z_B^0}.$$

Parametrit α, μ ovat nyt ratkaistuna ja voimme kirjoittaa yleinen muunnoskaava pisteille i :

$$\begin{aligned}\Delta z'_i &= \Delta z_i - \Delta z_A + z_A^0 \frac{\Delta z_A - \Delta z_B}{z_A^0 - z_B^0} - z_i^0 \frac{\Delta z_A - \Delta z_B}{z_A^0 - z_B^0} = \\ &= \Delta z_i - \Delta z_A - (z_i^0 - z_A^0) \frac{\Delta z_A - \Delta z_B}{z_A^0 - z_B^0} = \\ &= \Delta z_i - \left(\frac{z_i^0 - z_A^0}{z_A^0 - z_B^0} - 1 \right) \Delta z_A + \left(\frac{z_i^0 - z_A^0}{z_A^0 - z_B^0} \right) \Delta z_B = \\ &= \Delta z_i - \left(\frac{z_i^0 - z_B^0}{z_A^0 - z_B^0} \right) \Delta z_A - \left(\frac{z_i^0 - z_A^0}{z_B^0 - z_A^0} \right) \Delta z_B.\end{aligned}\tag{2.3}$$

²Vastaavasti Helmert-muunnoksen parametrien havaintoyhtälöksi (kaava 2.2) saadaan

$$z' - z = \begin{bmatrix} z^0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että kompleksilukujen $a + bi$ ja 2×2 matriisien $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ välillä on olemassa *isomorfismi*, eli ne käyttäytyvät samalla tavalla.

Kaava (2.3) kutsutaan *S-muunnokseksi*.

Se kuvaa “pientä” yhdenmuotoisuus- eli Helmert-muunnosta millä päästään erään koordinaattijärjestelmän tietystä “realisaatiosta” (eli lähtöpisteiden vallinnasta) toiseen. Kaavassa (2.3) korjaustermit jotka sisältävät $\Delta z_A, \Delta z_B$ ovat pieniä, yhtä pieniä kuin nämä delta-suureet itse.

Oletetaan vielä, että lähtökoordinaattijärjestelmän lähtöpisteet olivat C ja D , eli että $\Delta z_C = \Delta z_D = 0$; silloin voimme kirjoittaa kaava (2.3) seuraavaan matriisimuotoon (selvyyden vuoksi on Δz_i kirjoitettu auki vektoriksi $[\Delta z_1 \ \dots \ \Delta z_n]^T$:

$$\begin{bmatrix} \Delta z'_1 \\ \vdots \\ \Delta z'_n \\ \Delta z'_C \\ \Delta z'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & -\left(\frac{z_1^0 - z_B^0}{z_A^0 - z_B^0}\right) & -\left(\frac{z_1^0 - z_A^0}{z_B^0 - z_A^0}\right) \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -\left(\frac{z_n^0 - z_B^0}{z_A^0 - z_B^0}\right) & -\left(\frac{z_n^0 - z_A^0}{z_B^0 - z_A^0}\right) \\ \hline 0 & \dots & 0 & -\left(\frac{z_C^0 - z_B^0}{z_A^0 - z_B^0}\right) & -\left(\frac{z_C^0 - z_A^0}{z_B^0 - z_A^0}\right) \\ 0 & \dots & 0 & -\left(\frac{z_D^0 - z_B^0}{z_A^0 - z_B^0}\right) & -\left(\frac{z_D^0 - z_A^0}{z_B^0 - z_A^0}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \vdots \\ \Delta z_n \\ \Delta z_A \\ \Delta z_B \end{bmatrix}$$

tai vaihtoehtoisella notaatiolla, jossa datum on merkattu lähtöpisteillä $[AB]$ tai $[CD]$:

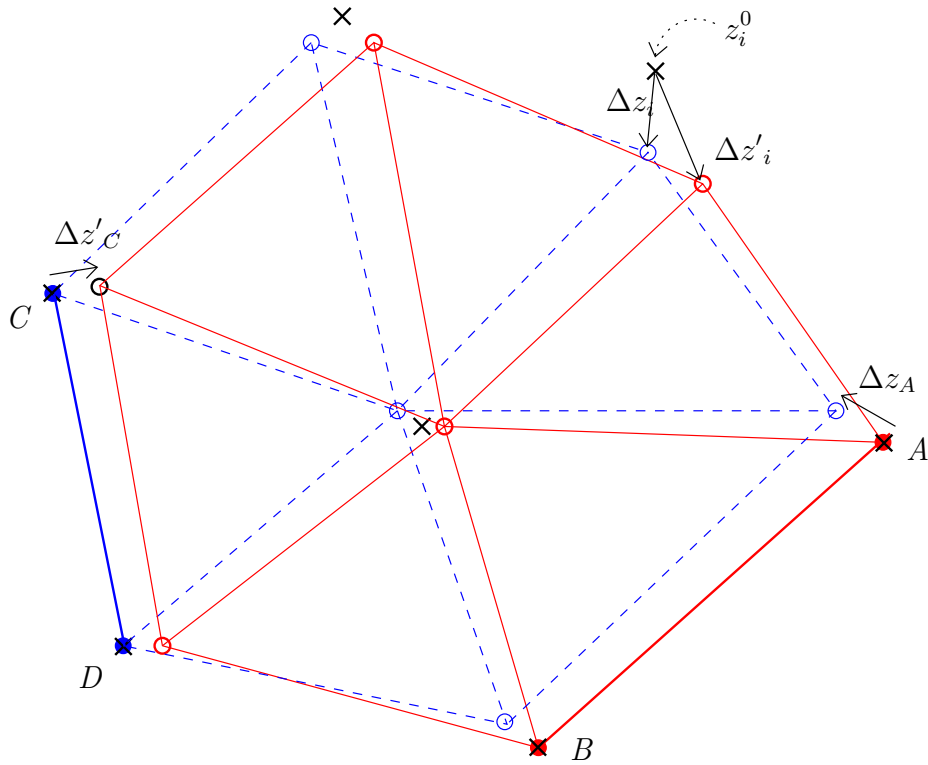
$$\begin{bmatrix} \Delta z_1^{[AB]} \\ \vdots \\ \Delta z_n^{[AB]} \\ \Delta z_C^{[AB]} \\ \Delta z_D^{[AB]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & -\left(\frac{z_1^0 - z_B^0}{z_A^0 - z_B^0}\right) & -\left(\frac{z_1^0 - z_A^0}{z_B^0 - z_A^0}\right) \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -\left(\frac{z_n^0 - z_B^0}{z_A^0 - z_B^0}\right) & -\left(\frac{z_n^0 - z_A^0}{z_B^0 - z_A^0}\right) \\ \hline 0 & \dots & 0 & -\left(\frac{z_C^0 - z_B^0}{z_A^0 - z_B^0}\right) & -\left(\frac{z_C^0 - z_A^0}{z_B^0 - z_A^0}\right) \\ 0 & \dots & 0 & -\left(\frac{z_D^0 - z_B^0}{z_A^0 - z_B^0}\right) & -\left(\frac{z_D^0 - z_A^0}{z_B^0 - z_A^0}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1^{[CD]} \\ \vdots \\ \Delta z_n^{[CD]} \\ \Delta z_A^{[CD]} \\ \Delta z_B^{[CD]} \end{bmatrix}$$

Tämä matriisi on neliön muotoinen ja kääntämiskelpoinen³. Ks. kuva 2.1.

2.4 Kolmiulotteinen datuminmuunnos (1)

Myös kolmessa ulottuvuudessa käytetään yleisesti Helmert-muunnos. Tässä tapauksessa meillä on kaksi joukkoa kolmiulotteisia, *suorakulmaisia koordinaatteja*, esim. toisaalta paikallinen perinteisiin geodeettisiin mittauksiin perustuva koordinaattiratkaisu, ja toisaalta globaalinen ratkaisu, joka perustuu satelliittipaikannusmittauksiin (GPS). Sitä käytetään myös eri satelliittiratkaisujen välillä. Siinä tapauksessa järjestelmien väliset muunnosparametrit ovat paljon pienempiä, mutta myös tarkempia.

³Osaatko kertoa mitään laskematta, minkä näköinen käänteismatriisi on?



Kuva 2.1: S-muunnos

Yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa ei saa olettaa, että kahden järjestelmän koordinaattiakselit ovat samansuuntaisia. Parametrien määrä on silloin *seitsemän*:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = (1 + m) \begin{bmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Tässä muunnosparametrit ovat $m, e_x, e_y, e_z, t_x, t_y, t_z$ ⁴. Tässä m on mittakaavapoikkeama ($K = 1 + m$ on muunnoksen mittakaava), $\begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^T$ on origon siirtymä- eli *translaatiovektori*, ja e_x, e_y, e_z ovat *kiertokulmat*, joita oletetaan olevan pieniä⁵. Usein m :n yksikkönä käytetään ppm (parts per million) ja e_x, e_y, e_z ilmaistaan kaarisekunteina. Kaikissa laskutoimituksissa on kuitenkin käytettävä radiaaneja.

Kaavaa voidaan kirjoittaa symbolisesti

$$\mathbf{X}' = (1 + m) R \mathbf{X} + \mathbf{t}, \quad (2.5)$$

jossa $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} X' & Y' & Z' \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^T$ ja rotaatiomatriisi on

$$R = \begin{bmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{bmatrix}.$$

⁴Kiertokulmien e_x, e_y, e_z oikeaan *suuntaan* on kiinnittävä huomiota. Jopa ammattikirjallisuudessa esiintyy virheitä!

⁵Elleivät ne olisi pieniä, sisältäisi rotaatiomatriisi monimutkaisia trigonometrisia ilmaisuja itse e -kulmien sijasta.

Joskus m jätetään pois; erityisesti satelliittimittauksessa jotka perustuvat konventionaaliseen valon nopeuteen,

$$c = 299\,792\,458\,\text{ms}^{-1};$$

koska myös satelliittimittaukset tapahtuvat ilmakehän läpi, ei voi kuitenkaan aina olettaa, että alueelliset mittaukset ja näihin perustuvat verkkoratkaisut olisivat aina mittakaavoiltaan oikeita.

Valitettavasti kolmessa ulottuvuudessa ei ole olemassa kompleksilukujen vastine. On yritetty käyttää Hamiltonin keksimät *kvaterniot*⁶, mutta tulokset eivät olleet yhtä tyydyttäviä kuin tasokoordinaateissa kompleksiluvukuja käyttäessä.

2.5 Kolmulotteinen datummuunnos (2)

Yllä kuvattua datummuunnosta (2.4) kutsutaan usein BURŠA-WOLF esitystavaksi. Tässä muunnoskaavassa rotaatio R (ja skaalaus $1 + m$) tapahtuu Maan massakeskipisteen suhteen, jonka jälkeen suoritetaan translaatio $\mathbf{t}$.

Usein paremmin käyttäytyvä muunnoskaava on MOLODENSKII-BADEKAS, jossa rotaatio ja skaalaus tapahtuu *koko pistekentän painopisteen*, $\bar{\mathbf{X}}$, suhteen. Tässä tapauksessa translaatio kuvaa tämän painopisteen siirtymistä:

$$\mathbf{X}' = \bar{\mathbf{X}} + (1 + m) R (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) + \tilde{\mathbf{t}}.$$

Tässä tapauksessa R ja m ovat identtisiä BURŠA-WOLFin vastaavien kanssa; kuitenkin $\tilde{\mathbf{t}} \neq \mathbf{t}$. Voimme johtaa

$$\mathbf{X}' = (1 + m) R \mathbf{X} + \bar{\mathbf{X}} - (1 + m) R \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{t}},$$

josta vertailemalla kaavan (2.5) kanssa saa seuraava yhteys kahden translaatiovektorin välillä:

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{X}} - (1 + m) R \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{t}}$$

eli

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} - \begin{bmatrix} m & e_z & -e_y \\ -e_z & m & e_x \\ e_y & -e_x & m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}},$$

taas olettamalla, että m, e_x, e_y, e_z ovat pieniä⁷.

MOLODENSKII-BADEKAS -esitystavan etuna on, että pistekentän kohdalla translaatio ja rotaatio ovat melkein riippumattomia toisistaan. Tämä tulee esille, kun ratkaistaan tuntemattomat parametrit pistekentän annetuista koordinaateista kummassa datumissa: silloin translaatio- ja rotaatioparametrien väliset korrelaatiot häviävät.

Haittana toisaalta on, että tämä ”optimaalisuus” toimii vain pistekentän alueella, se ei ole globaalisesti voimassa.

⁶Kvaterniot ovat lukuja $Q = a + ix + jy + kz$, joiden laskusäännöt ovat:

$$\begin{aligned} ij &= k, & jk &= i, & ki &= j, \\ ji &= -k, & kj &= -i, & ik &= -j, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1. \end{aligned}$$

Ne ovat jollain tavalla samanlaisia kuin kompleksiluvut, muttei niin käteviä. Keksijä oli Sir William R. Hamilton (1805-1865) Dublinista (<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/>).

Ks. myös <http://www.gsu.edu/~oprdeb/qtrn/index.html>.

⁷Huomaa, että jos $\bar{\mathbf{X}} = 0$, silloin $\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}}$, eli B-W on sama kuin M-B jossa pistekentän painopiste on Maan massakeskipisteessä, X, Y, Z -järjestelmän origossa.

Luku 3

Koordinaattijärjestelmät

3.1 Yleistä

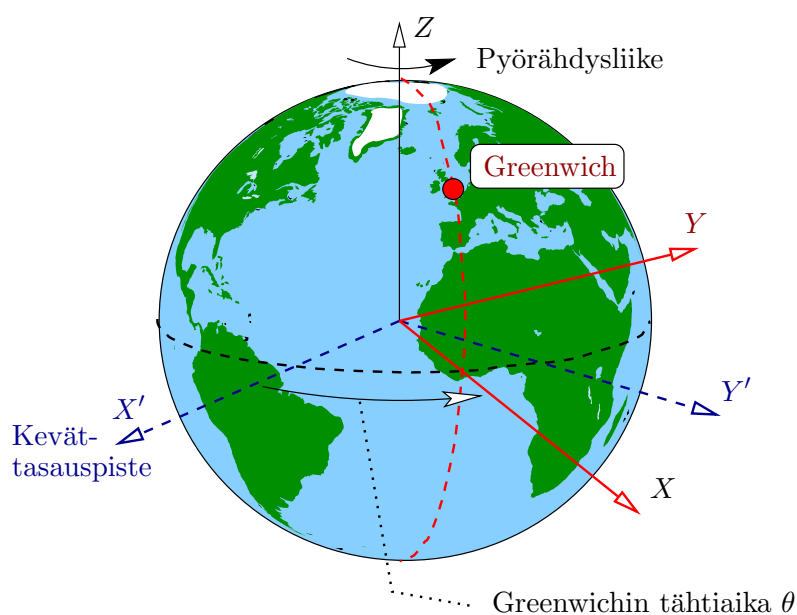
Tutkiessa koko maapallon tai sen suuren osan geometria on käytettävä kolmiulotteisia koordinaattijärjestelmiä. Näistä johdetaan sitten maanmittauksen käytön tarpeen mukaan kaksi- ja yksiulotteisia koordinaattijärjestelmiä. Korkeuksien referenssipintana käytetään *geoidia*; kaksiulotteiset koordinaatit lasketaan vertausellipsoidilla käyttämällä *projektiomenetelmää*.

3.2 Suorakulmaiset geosentriset koordinaatit

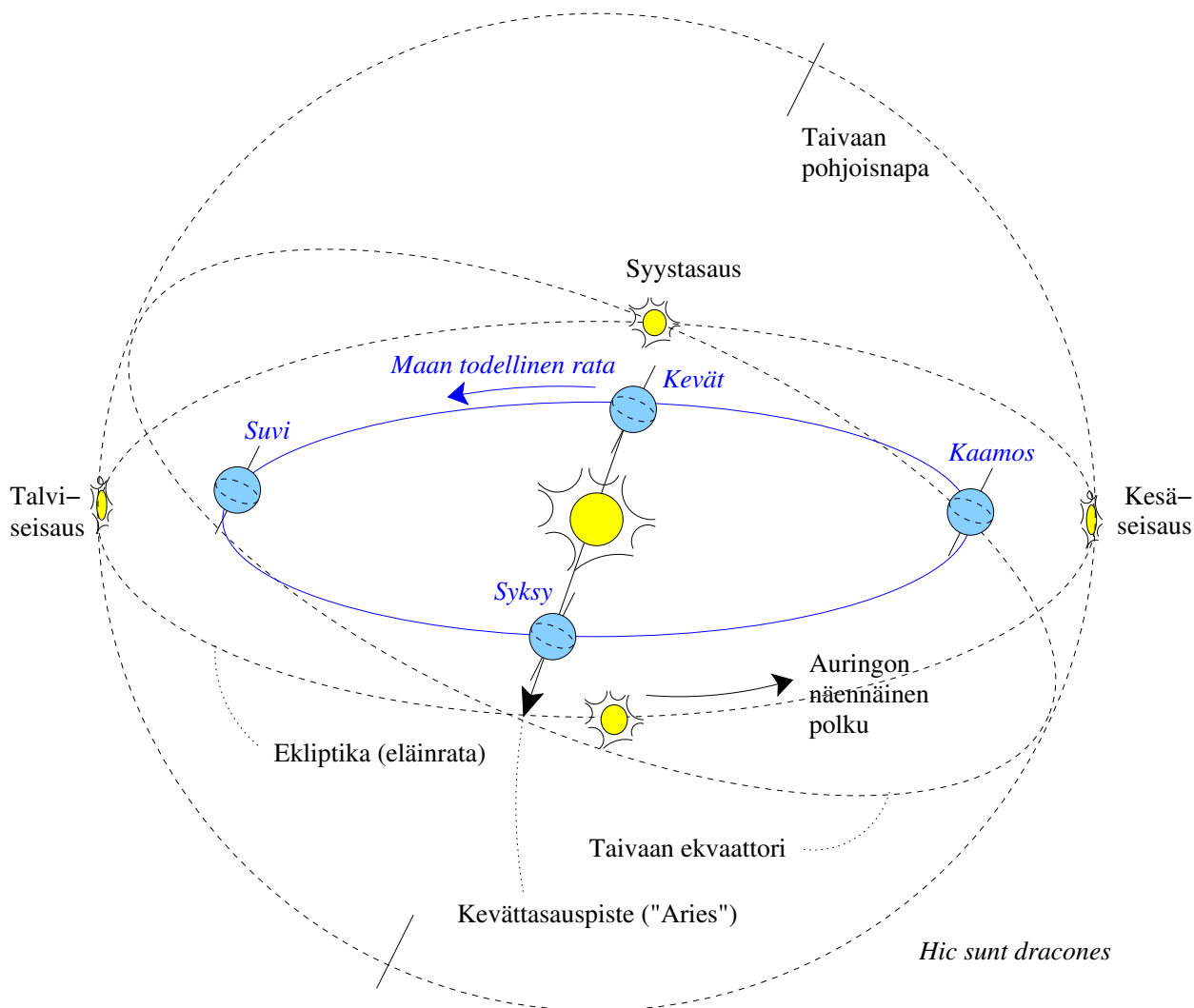
Kaiken pohjana oleva geosentrinen kolmiulotteinen suorakulmainen (karteesinen) järjestelmä koostuu kolmesta koordinaatista, X, Y, Z . Z -akseli osoittaa pohjoisnavan suuntaan; Greenwichin suunta on tasossa (X, Z) .

Geosentrinen merkitsee, että järjestelmän origo on Maan massakeskipiste. Satelliittipohjaiset järjestelmät ovat luonnostaan (lähes) geosentrisiä.

Ehdotettu X, Y, Z -järjestelmä ei ole inertiaalinen; inertiaalinen järjestelmä X', Y', Z' saadaan valitsemalla X' -akseli näin että se osoittaa ns. Arieksen pisteeseen, piste missä Aurinko ylittää taivaan ekvaattoria kevään alkaessa. Kulma akselien X ja X' välillä kutsutaan



Kuva 3.1: Geosentriset järjestelmät.



Kuva 3.2: Maan rata- ja pyörähdysliike ja ekliptika.

Greenwichin tähtiajaksi (Greenwich sidereal time). Tähtiaika kuvaa Maan pyörähdysliikettä. 24^t tähtiaikaa vastaa n. $23^t 56^m$ tavallista kellonaikaa ("siviiliaika"). Eli, *tähtikello tikittää nopeammin*, ja vuodessa on 366.2422 "tähtivuorokautta", yksi enemmän kuin siviilivuorokausien määrä, 365.2422. Syy tähän on auringon näennäinen liike taivaalla, joka on samansuuntainen kuin maapallon pyörähdysliike. Siis auringon nähden maapallo pyörii hitaammin.

Todellinen maapallo ei pyöri säännöllisesti. Hetkellinen pyörähdysakseli eroaa sen referenssi-suunnasta (CIO eli Conventional International Origin), ilmiö joka tunnetaan *napaliikkeenä*. Hetkellisen navan paikka eroaa *sen keskiarvosta* muutamalla metrillä. Liike on kaksiulotteinen ja koostuu pääasiallisesti kahdesta komponentista:

- Vuotuinen liike, amplitudi n. $0'',05 \dots 0'',1$.
- Ns. "Chandler-wobble", periodi n. 430 päivää, amplitudi myös $0'',05 \dots 0'',1$.

Tämän lisäksi napa siirtyy hyvin hitaasti ($0'',003$ / vuosi) ja tasaisesti $70^\circ W$ -meridiaanin suuntaan.

Myös maapallon pyörimisen nopeus, eli *vuorokauden pituus*, muuttuu. Ilmiötä seurataan ja taulukoidaan huolellisesti (IERS = International Earth Rotation Service). Siviiliaika seuraa maapallon todellista pyörähdysliikettä, ja eroaa siksi tarkasta atomiajasta. Jokaisena vuonna joului- ja kesäkuun lopulla laitetaan UTC:hen sopiva määrä "karkaussekunteja". UTC:n

ero atomiajasta on siis sekuntien kokonaismäärä; UTC seuraa sekunnin sisällä Maapallon todellista liikettä.

3.3 Vertausellipsoidi

- Pitkäakselin puolikas (ekvatoriaalisäde) a ,
- Lyhytakselin puolikas (napasäde) b ,
- Litistyneisyysuhde $f = \frac{a - b}{a}$.

Suomessa on ollut pitkään käytössä vertausellipsoidina *Kansainvälinen ellipsoidi 1924* (ns. Hayford-ellipsoidi), jonka parametrit ovat

$$\begin{aligned} a &= 6378388 \text{ m} \\ f &= 1/297,0 \\ (b &= 6356911,946128 \text{ m}) \end{aligned}$$

WGS84- ja monen muun modernin satelliittijärjestelmän pohjana (mm. EUREF89) on GRS80 (Geodetic Reference System 1980) joka antaa seuraavat ellipsoidiparametrit:

$$\begin{aligned} a &= 6378137 \text{ m} \\ f &= 1/298,257222101 \end{aligned}$$

3.4 WGS84-vertausjärjestelmä

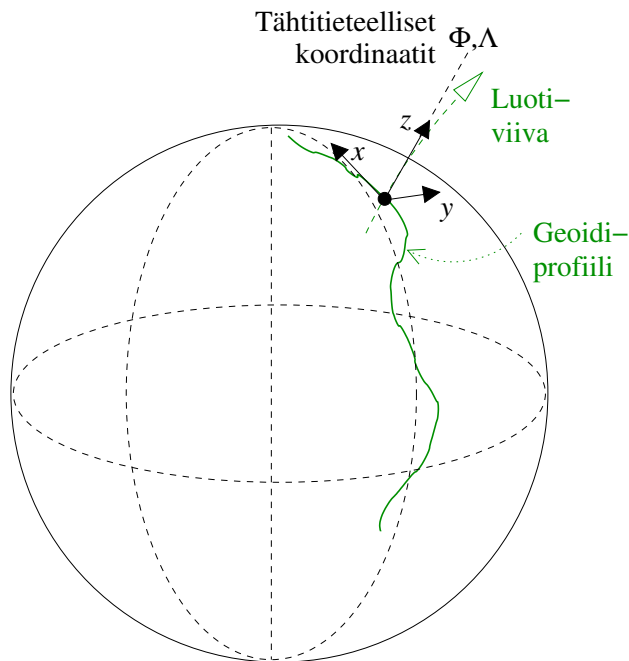
Tämä vertausjärjestelmä on sidottu GPS-konstellatioon eli tässä järjestelmässä satelliittien radat ("broadcast ephemeris") kuvataan. WGS84 on luonut ja ylläpitää Yhdysvaltain sotilasviranomaiset. GPS'n avulla saadut paikkakoordinaatit ovat siis periaatteessa aina WGS84-koordinaatteja.

WGS84-vertausjärjestelmän (suorakulmaisen, kolmiulotteisen) koordinaatiston *origo* on, kuten aina satelliittipohjaisilla systeemeillä, Maan massakeskipisteessä. Z -akseli osoittaa Maan keskimääräisen pyörähdysakselin (CIO:n) suuntaan, X -akseli Greenwichin meridiaanin suuntaan. WGS84-järjestelmään kuuluu myös painovoimakentän malli. Parametreista mainittakoon *dynaaminen litistyneisyys* ja *kokonaismassa* (mukaanlukien ilmakehä):

$$\begin{aligned} \overline{C}_{2,0} &= -484,16685 \cdot 10^{-6}, \\ GM &= 3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \end{aligned}$$

sekä oletettu Maan pyörähdysnopeus on $\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$. Nämä arvot ovat hyvin lähellä GRS80:n vastaavia arvoja.

Geodeettisessa työssä käytetään tavallisesti WGS84:ää parempaa vertausjärjestelmää, esim. Euroopan alueella EUREF89. Tämä järjestelmä on luotu vastaavanlaisella tavalla kuin WGS84: samat GPS-satelliitit jotka on käytetty WGS84-järjestelmän luomiseksi on myös käytetty



Kuva 3.3: Toposentrinen eli paikallinen tähtitieteellinen (PT) järjestelmä. z -akseli osoittaa paikallisen luotiviivan, eli tähtitieteellisen leveys- ja pituusasteen (Φ, Λ) suuntaan

tässä tapauksessa. Ero on, että määrittäminen on suoritettu International GPS Service for Geodynamics (IGS) suuren kansainvälisen siviili-GPS-asemien verkkonsa avulla.

Joskus kutsutaan EUREF89 WGS84:n erääksi *realisaatioksi*, mikä ei ole aivan tarkka. Muut, vastaavat, kirjallisuudessa vastaan tulevat järjestelmät ovat ITRF $_{xx}$, ETRF $_{xx}$, missä xx on vuosiluku. (I|E)TRF on “(International|European) Terrestrial Reference Frame”.

Alkuperäisen WGS84:n määrittystarkkuus ei ole puolta metriä parempaa. Myöhemmät realisaatiot ovat parempia ja ovat lähellä ITRF-järjestelmiä tai jopa identtisiä niiden kanssa. Kuitenkin on syytä aina käyttää (Euroopassa) EUREF89-järjestelmää, jonka realisaatiotarkkuus on luokkaa muutama cm. Kirjallisuudessa ilmaisu “WGS84” usein tarkoittaa EUREF89. EUREF89 on ETRS89:n realisaatio Euroopan alueella.

Suomessa EUREF-FIN on kuten EUREF89 Euroopassa, ETRS89:n realisaatio Suomen alueella.

Eurooppalainen INSPIRE-direktiivi vaatii, että Euroopassa käytettävät koordinaatit ja paikatietoaineistot ovat ETRS89-pohjaisia.

3.5 Toposentrinen koordinaattijärjestelmä

Toposentrinen koordinaattijärjestelmä on järjestelmä, jonka origo on itse havaintopaikka (tarkemmin: kojeen optisten akselien ristikohta) ja sen z -akseli on paikallinen painovoiman suunta eli *luotiviiva*.

Toposentrinen järjestelmä kutsutaan usein myös *paikalliseksi tähtitieteelliseksi* koordinaattijärjestelmäksi.

Jokaisella havaintopaikalla on oma toposentrinen järjestelmänsä, jota voidaan valita paikallisen *datum*in lähtöpisteeksi.

Määritellään maastohavainnot:

- atsimuti A_P : Toposentrisessä järjestelmässä mitattu myötäpäiväinen suunta toiseen pisteeseen P järjestelmän X_T -akselista (pohjoisesta).
- Pystykulma z_P : Paikallisesta vertikaalista Z_T eli zenitistä mitattu kulma toiseen pisteeseen: Zeniittikulma z .
- Vaihtoehtoisesti korkeuskulma (elevaatio) $\eta = 100 \text{ gon} - z$.
- Etäisyys s_P : Origon O ja toisen pisteen P välinen suora avaruusjana.
- Pisteen P toposentriset suorakulmaiset koordinaatit, ts. pisteiden O ja P väliset koordinaattierot, ovat:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \Delta x_{OP} \\ \Delta y_{OP} \\ \Delta z_{OP} \end{bmatrix} = s_P \begin{bmatrix} \cos A_P \sin z_P \\ \sin A_P \sin z_P \\ \cos z_P \end{bmatrix}_T.$$

Koska luotiviivojen suunnat vaihtelevat paikasta toiseen hieman epäsäännöllisellä tavalla¹, ei ole mahdollista *yhdistellä* liian suuren alueen eri pisteiden toposentriset järjestelmät yhdeksi suorakulmaiseksi koordinaattijärjestelmäksi, ainakaan yksinkertaisella tavalla.

Pienellä alueella, esim. tontin sisällä, se on kuitenkin käyttökelpoinen; toposentrisiä koordinaattijärjestelmiä voidaan yhdistää yksinkertaisella *translaatiolla* (siirroilla):

$$\begin{bmatrix} x_P^{(2)} \\ y_P^{(2)} \\ z_P^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{O_2P} \\ \Delta y_{O_2P} \\ \Delta z_{O_2P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{O_1P} \\ \Delta y_{O_1P} \\ \Delta z_{O_1P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_{O_2O_1} \\ \Delta y_{O_2O_1} \\ \Delta z_{O_2O_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{O_2O_1} \\ \Delta y_{O_2O_1} \\ \Delta z_{O_2O_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_P^{(1)} \\ y_P^{(1)} \\ z_P^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Tässä O_1 ja O_2 ovat (1)- ja (2)-järjestelmien origot maastossa. Vektori $\begin{bmatrix} \Delta x_{O_2O_1} & \Delta y_{O_2O_1} & \Delta z_{O_2O_1} \end{bmatrix}^T$ on itse asiassa (yksinkertainen) *datum-muunnos* kahden toposentrisen järjestelmän välillä.

Jos alue, eli etäisyys O_1O_2 on liian suuri, yksinkertainen translaatio ei riitä vain tarvitaan myös *rotaatiota*, koska (1)- ja (2)-järjestelmien akselit eivät ole samansuuntaisia. Kuinka suuri on ”liian suuri” riippuu tarkkuusvaatimuksista. Maan kaarevuussäde on $R = 6000 \text{ km}$ ja maan pinnan poikkeama tasopinnasta on $\delta = d^2/2R$, jossa d on matka. Saadaan seuraavat arviot yhteydestä sallitun virheen δ ja alueen koon d välillä:

1 cm: $d \sim 350 \text{ m}$

1 mm: $d \sim 110 \text{ m}$

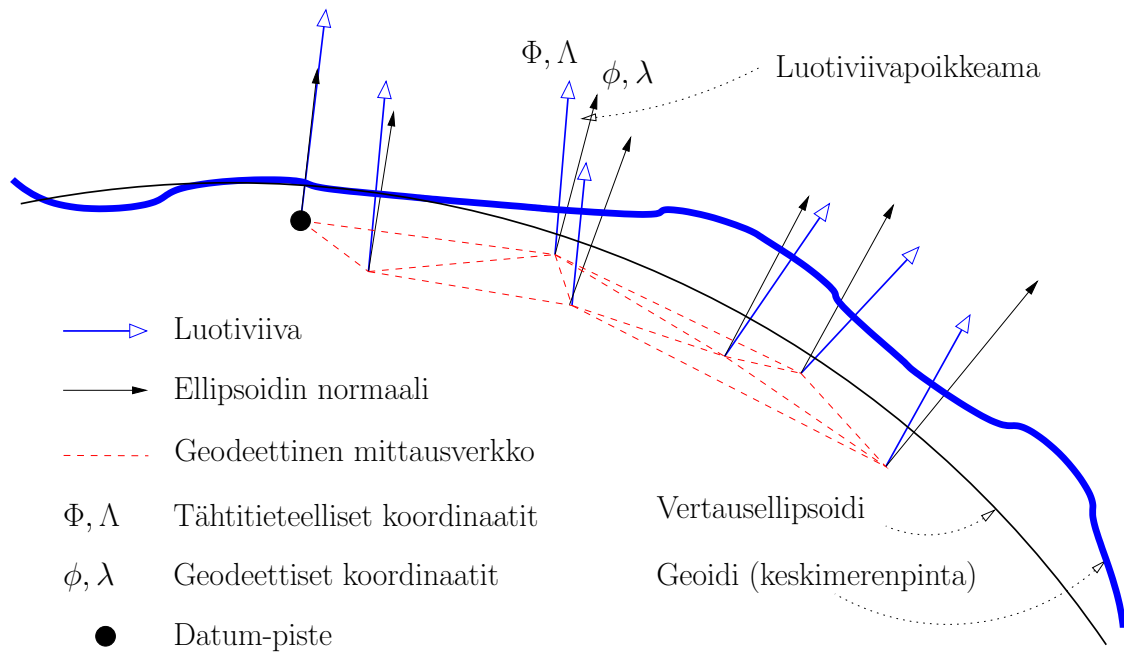
0.1 mm: $d \sim 35 \text{ m}$

Toposentrisen eli PT-järjestelmä ei sovi siis esim. kunnan alueella käytettäväksi järjestelmäksi.

3.6 Geodeettinen datum

Arkielämässä harvoin ajatellaan mitä oletuksia on tehtävä, että olisi mahdollista suorittaa maanmittaus jossain vertausjärjestelmässä. Tuntuu selvältä, että mittaukset ja laskennat kohdistetaan johonkin tasoon, ”vaakatasoon”. Tämä intuitiivinen ajatus voidaan kutsua

¹Toisin kuin luotiviiva, *vertausellipsoidin normaali* muuttuu hyvin säännöllisesti paikasta toiseen. Siksi myös tähän normaalin sidottua toposentristä järjestelmää (”paikallinen geodeettinen, PG”) ei voida laillisesti ulottaa kovin suuriin alueisiin.



Kuva 3.4: Geodeettiset ja tähtitieteelliset koordinaatit

“kenkälaatikko-erheeksi”; ajatellaan, että Maa on jättimäisen suorakulmaisen kenkälaatikon sisällä ja keskimerenpinta sen pohja...

Kuitenkaan tämä vertaustasoksi valittu vaakataso ei ole yksiselitteinen. Luotiviiva – jonka kohtaan vaakataso on joka paikassa kohtisuora – on paikallinen ilmiö ja jo sadan metrin päässä se on erilainen, koska luotiviivat seuraavat Maan kaarevuutta. Tämän lisäksi luotiviivojen suuntaa ei voida kuvata yksinkertaisen kaavan avulla; se seuraa Maan painovoimakenttää, joka on Maan sisäisen massajakauman epäsäännöllisyydestä johtuen itse epäsäännöllinen.

Kuitenkin voimme konstruoida vertausellipsoidi joka on *paikallisesti* mahdollisimman hyvin sopiva Maan muotoon, eli ellipsoidinen normaali on mahdollisimman samansuuntainen paikallisen luotiviivan kanssa. Toisin sanottuna *luotiviivapoikkeamat* ovat mahdollisimman pieniä.

On kaksi laajasti käytettyä tapaa tehdä tämä:

1. Klassinen geodeettinen datum sisältää, vertausellipsoidin muotoparametrien (a, f) lisäksi, myös
 - o lähtöpisteen P luotiviivapoikkeamien komponentit ξ_P, η_P (ks. kuva 3.4) ja
 - o lähtöpisteen P geoidikorkeus vertausellipsoidista N_P .

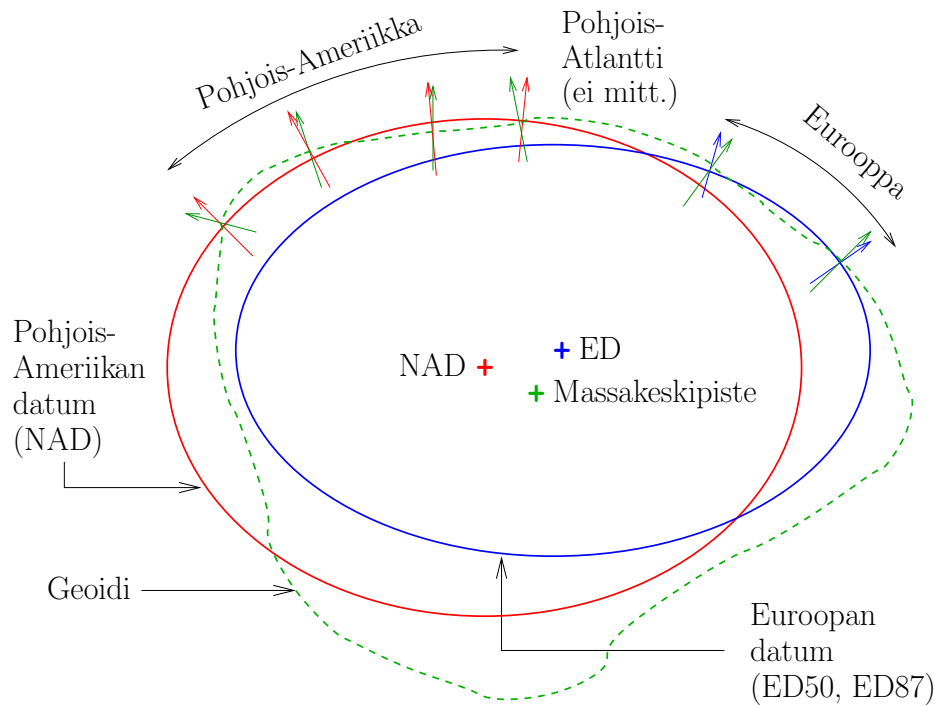
Siis yhteensä 5 (viisi) parametriä on kiinnitettävä valittuihin lähtöarvoihin. Näin kiinnitetään laskennallisen vertausellipsoidin sijainnin avaruudessa.

Sellaisen geodeettisen datumin esimerkkinä voidaan mainita ED50 (European Datum 1950), joka käyttää Münchenin (Baijeri) Frauenkirche lähtöpisteenä.

2. Minimoidaan *alueellinen* luotiviivojen ja geoidikorkeuksien poikkeama käyttämällä pienimmän neliösumman menetelmää:

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \min$$

$$\sum_{i=1}^n N_i^2 = \min$$



Kuva 3.5: Alueellisia datumeita.

jossa ξ_i, η_i, N_i ovat kaikki alueen mittauspisteiden (kolmiopisteiden) luotiviivapoikkeamat / geoidikorkeudet. Tällä menetelmällä niiden *keskiarvot* kaikkien käytettyjen pisteiden kesken saadaan nollattua. Toisin sanoen, tässä menetelmässä “lähtöpiste” ei ole yksi tietty piste vain kaikkien pisteiden *painopiste*.

Molemmissa tapauksessa voidaan, lähtöpisteen tai lähtöpistejoukon sijasta, käyttää vertausellipsoidin *keskipisteen* kolme koordinaattia (Maan massakeskipisteen nähden) datum-parametreina. Eli taas viisi parametria: a, f, X_0, Y_0, Z_0 .

ED50-datumin tapauksessa arvot X_0, Y_0, Z_0 ovat suuruusluokkaa ± 100 m. Tämä on aika tyypillistä klassisten geodeettisten datumien tapauksessa: Ei ole mahdollista mitata klassisin keinoin lähtöpisteen luotiviivan *absoluuttista* suuntaa.

Jos oletettu luotiviivan suunta eroaa absoluuttisesta $1''$:n verran, aiheuttaa tämä Maan keskipisteessä (6378 km etäisyydellä) jo $6378 \text{ km} / \rho \cdot 3600 \approx 28$ m:n “virhe” eli vertausellipsoidin keskipisteen poikkeama Maan massakeskipisteestä. Ja eri datumit poikkeavat eri tavalla, ks. kuva 3.5.

Satelliittipohjaisten datumien tapauksessa (WGS84, EUREF-89) on eri tilanne: satelliittien radat lasketaan järjestelmässä missä Maan massakeskipiste on origossa (koska liikeyhtälöt on kirjoitettu tässä järjestelmässä) ja paikat saadaan *aina ns. geosentrisessä järjestelmässä*. Vain itse mittauksen epävarmuudet aiheuttavat pieniä poikkeamia geosentrisyydestä, luokkaa muutama cm.

3.7 Geodeettisten datumien välinen muunnos

Geodeettinen datum määrittää joko yhden pisteen, tai pistejoukon, *ellipsoidisen normaalin suunta* φ, λ ja *pisteen korkeus* h *ellipsoidista*, tai vertausellipsoidin *origon paikka* X_0, Y_0, Z_0 maan massakeskipisteeseen nähden.

Suorakulmaiset koordinaatit voidaan kirjoittaa näin, *pallo-approksimaatiossa*!:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = (R + h) \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}.$$

Saman pisteen *tarkasti geosentriset* koordinaatit $(X, Y, Z)^T$ kirjoitettuna eri datumien koordinaateiksi (eli *eri vertausellipsoidin suhteen*) pitäisi olla *amat*:

$$\begin{bmatrix} X^{(1)} \\ Y^{(1)} \\ Z^{(1)} \end{bmatrix} = (R + h^{(1)}) \begin{bmatrix} \cos \varphi^{(1)} \cos \lambda^{(1)} \\ \cos \varphi^{(1)} \sin \lambda^{(1)} \\ \sin \varphi^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0^{(1)} \\ Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} X^{(2)} \\ Y^{(2)} \\ Z^{(2)} \end{bmatrix} = (R + h^{(2)}) \begin{bmatrix} \cos \varphi^{(2)} \cos \lambda^{(2)} \\ \cos \varphi^{(2)} \sin \lambda^{(2)} \\ \sin \varphi^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0^{(2)} \\ Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Tässä merkinnät (1) ja (2) tarkoittavat kahden eri datumien suhteen laskettuja geodeettisia koordinaatteja X, Y, Z tai φ, λ, h tai datumien origon paikat geosentrisessä järjestelmässä. *Oletus* on, että akselien *orientaatiot* ovat molemmissa datumissa samat.

Määritetään *erotussuureet* seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{(2)} \\ Y^{(2)} \\ Z^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ Y^{(1)} \\ Z^{(1)} \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0^{(2)} \\ Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0^{(1)} \\ Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta h &\equiv h^{(2)} - h^{(1)}, \\ \Delta \varphi &\equiv \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}, \\ \Delta \lambda &\equiv \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}, \end{aligned}$$

niin saadaan vähentämällä (huom. delta-notaatio):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} &= \left\{ (R + h^{(2)}) \begin{bmatrix} \cos \varphi^{(2)} \cos \lambda^{(2)} \\ \cos \varphi^{(2)} \sin \lambda^{(2)} \\ \sin \varphi^{(2)} \end{bmatrix} \right\} - \left\{ (R + h^{(1)}) \begin{bmatrix} \cos \varphi^{(1)} \cos \lambda^{(1)} \\ \cos \varphi^{(1)} \sin \lambda^{(1)} \\ \sin \varphi^{(1)} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} = \\ &= \Delta \left\{ (R + h) \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Laskemalla *osittaisderivaatat* (olettaen, että kaikki Δ -suureet ovat pieniä, niin että saa *linearisoida*):

$$\frac{\partial}{\partial h} \left((R+h) \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix},$$

ja samoin myös φ :n ja λ :n suhteen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial h} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \left((R+h) \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta h \\ \Delta \varphi \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & -(R+h) \sin \varphi \cos \lambda & -(R+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda & -(R+h) \sin \varphi \sin \lambda & +(R+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ \sin \varphi & +(R+h) \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h \\ \Delta \varphi \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Olemme tässä asettaneet

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X^{(2)} \\ Y^{(2)} \\ Z^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ Y^{(1)} \\ Z^{(1)} \end{bmatrix} = 0,$$

koska nämä ovat, datumista riippumatta, samat, tarkasti geosentriset, suorakulmaiset koordinaatit.

Koska $h \ll R$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos \varphi \cos \lambda & +R \sin \varphi \cos \lambda & +R \cos \varphi \sin \lambda \\ -\cos \varphi \sin \lambda & +R \sin \varphi \sin \lambda & -R \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi & -R \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h \\ \Delta \varphi \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\cos \varphi \cos \lambda & +R \sin \varphi \cos \lambda & +R \cos \varphi \sin \lambda \\ -\cos \varphi \sin \lambda & +R \sin \varphi \sin \lambda & -R \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi & -R \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N \\ -\Delta \xi \\ -\frac{\Delta \eta}{\cos \varphi} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

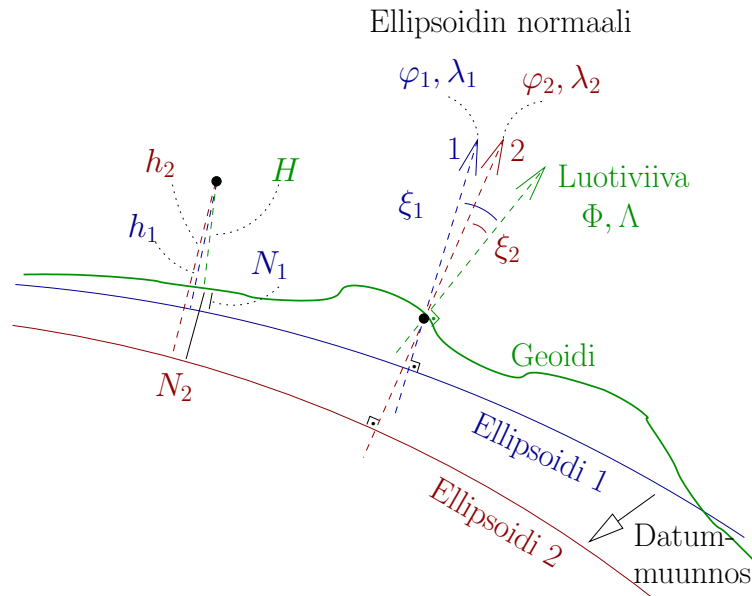
Tämä kaava antaa yhteys vertausellipsoidin epägeosentrisyyden ja sen määrittämän datumin (pisteessä (φ, λ) välillä. Se on samalla myös kaava, millä kahden geodeettisen datumin väliset erot $\Delta h, \Delta \varphi, \Delta \lambda$ lähtöpisteessä voidaan muuttaa origon koordinaattisiirtymiksi $\Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0$. Eli kaava, millä *muunnosparametrit* voidaan muuntaa toposentrisestä muodosta geosentriseen muotoon.

Olemme esittänyt toposenttrinen siirtymävektori myös muotoon $\begin{bmatrix} \Delta N & -\Delta \xi & -\frac{\Delta \eta}{\cos \varphi} \end{bmatrix}^T$, jossa esiintyvät geoidin korkeus N ja luotiviivapoikkeamat ξ, η , kaikki kolme datum-pisteessä. Ks. kuva 3.6. Huomaa, että²

$$\begin{aligned} N &= h - H \\ \xi &= \Phi - \varphi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \end{aligned}$$

missä

²Lisäkerroin $\cos \varphi$ η -kaavassa johtuu meridiaanikonvergenssista. Korkeimmilla leveysasteilla tietty pituussasteen muutos $\Delta \lambda$ vastaa yhä pienempään matkaan maan pinnalla, ja näin yhä pienempään vertikaalin suunnan muutokseen.



Kuva 3.6: Datum-muunnoksen (vertausellipsoidin siirron) vaikutus geodeetisiin leveys- ja pituusasteisiin φ, λ , luotiviivapoikkeamiin ξ, η , geoidikorkeuksiin N ja pisteiden ellipsoidikorkeuksiin h .

N geoidin korkeus vertausellipsoidista (“geoidikorkeus”),

h pisteen korkeus ellipsoidista (“ellipsoidinen korkeus”),

H pisteen korkeus geoidista (“ortometrinen korkeus”),

ξ, η luotiviivapoikkeamat eli suuntaerotukset tähtitieteellisen vertikaalin (“luotiviivan”) ja vertausellipsoidin välillä – ξ etelä-pohjoissuunnassa ja η länsi-itäsuunnassa,

Φ, Λ tähtitieteelliset leveys- ja pituusaste (luotiviivan suunta),

φ, λ geodeettiset leveys- ja pituusaste (ellipsoidin normaalin suunta).

Koska suureet H, Φ, Λ ovat fysikaalisia suureita – sekä paikallisen luotiviivan suunta tähti-taivaan nähden että pisteen korkeus geoidista eli “merenpinnasta” eivät riipu valitusta vertausellipsoidista – seuraa

$$\begin{aligned}\Delta N &= \Delta h \\ \Delta \xi &= -\Delta \varphi \\ \Delta \eta &= -\Delta \lambda \cos \varphi\end{aligned}$$

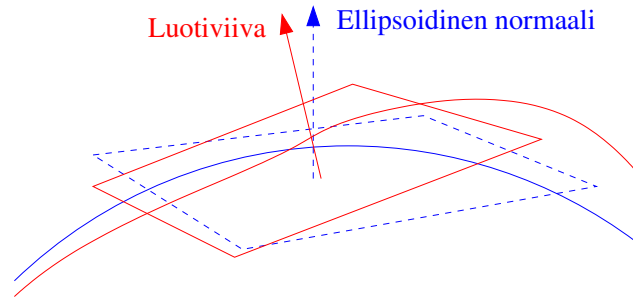
josta vaihtoehtoinen muoto seuraa.

Yllä olevan kaavan käänteiskaava on (MathematicaTM!):

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ -\Delta \xi \\ -\frac{\Delta \eta}{\cos \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h \\ \Delta \varphi \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -R \cos \varphi \cos \lambda & -R \cos \varphi \sin \lambda & -R \sin \varphi \\ + \sin \varphi \cos \lambda & + \sin \varphi \sin \lambda & -\cos \varphi \\ + \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi} & -\frac{\cos \lambda}{\cos \varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix}.$$

Nämä kaavat yksinkertaistuvat jonkin verran, jos kirjoitetaan toposentrinen siirtymä muotoon $\begin{bmatrix} \Delta N & -R\Delta \xi & -R\Delta \eta \end{bmatrix}^T$, koska silloin matriisit ovat puhtaita rotaatiomatriiseja:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ R\Delta \xi \\ R\Delta \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h \\ R\Delta \varphi \\ R \cos \varphi \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & +\cos \varphi \\ -\sin \lambda & +\cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix}.$$



Kuva 3.7: Paikallisen luotiviivan poikkeama ellipsoidista normaalista

3.8 Suuntakorjaus paikallisesta horisontista vertausellipsoidiin

Mitatut suunnat ovat paikalliseen horisonttiin projisoidut suunnat eli paikallisen horisonttitason ja jokaisen suunnan normaalitasen välisten leikkausviivojen suunnat. Mikäli jätetään huomioimatta paikalliset luotiviivapoikkeamat (eli oletetaan että paikallinen horisonttitaso on sama kuin paikallinen vertausellipsoidin tangenttipinta), voidaan sanoa, että tähtäys-suunnat ovat suuntahavaintojen normaalitasojen ja ellipsoidipinnan leikkausviivoja, ts. käyriä viivoja ellipsoidilla. Tämä oletama *ei ole kuitenkaan oikein*. Paikallinen horisontti on kohtisuora paikalliseen painovoimaan nähden jonka suunta eroaa jonkin verran vertausellipsoidin normaalin suunnasta. Ilmiö kutsutaan *luotiviivapoikkeamaksi* (kuva 3.7).

Luotiviivapoikkeamat ovat ξ pohjois-etelä-suunnassa ja η länsi-itä-suunnassa. Kaavat:

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \Phi\end{aligned}$$

missä (Φ, Λ) ovat tähtitieteellisesti määritettyjä leveys- ja pituusasteita. Koordinaatit (φ, λ) taas ovat maantieteellisiä leveys- ja pituusasteita, jotka ovat laskennallisia koordinaatteja kuten löytyvät kartoilta, laskettu tietyn vertausellipsoidin suhteen³.

Olkoon paikalliseen horisonttiin nähden mitattu atsimuti (absoluuttinen suunta) A , ja saman tähtäyksen atsimuti vertausellipsoidilla a .

Silloin voidaan sanoa, että

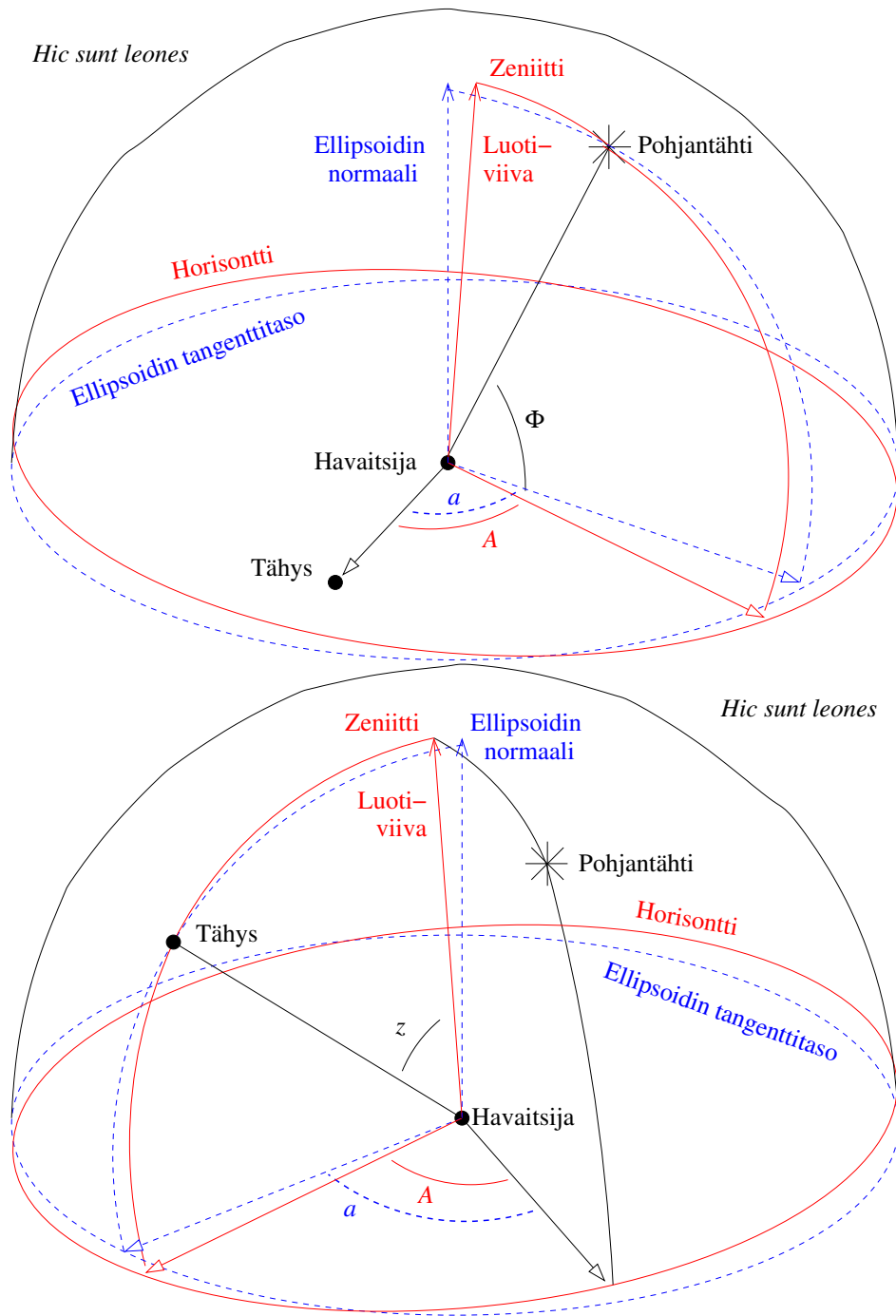
$$\begin{aligned}A - a &= \eta \tan \Phi + (\xi \sin A - \eta \cos A) \cot z = \\ &= (\Lambda - \lambda) \sin \Phi + ((\Phi - \phi) \sin A - (\Lambda - \lambda) \cos A \cos \Phi) \cot z\end{aligned}\quad (3.1)$$

missä z on zeniittikulma ja A atsimuti. Kaava 3.1 on ns. Laplace-yhtälö. Mikäli suunta on vaakatasossa on $\cot z = 0$ ja ylläoleva korjaus on mittauspaiikkakohtainen vakio, koska suuntakulman A riippuvuus häviää.

Alla oleva kuva selittää mistä molemmat termit on peräisin:

- ensimmäinen termi $\eta \tan \Phi$ johtuu taivaannavan suunnan eri projektioista paikalliseen horisonttiin kuin vertausellipsoidin tangenttitasoon. Se riippuu taivaannavan korkeudesta eli leveysasteesta Φ .

³Tämä merkitsee siis, että luotiviivapoikkeamat riippuvat valitusta vertausellipsoidista; Paikallisen vertausellipsoidin eli *datum*in valinta tehdään usein näin, että luotiviivapoikkeamien neliöllinen summa minimoituisi. Eli, että ellipsoidi sopisi mahdollisimman yhteen hyvin paikallisen painovoimakentän tasopinnan eli *geoidin* kanssa.



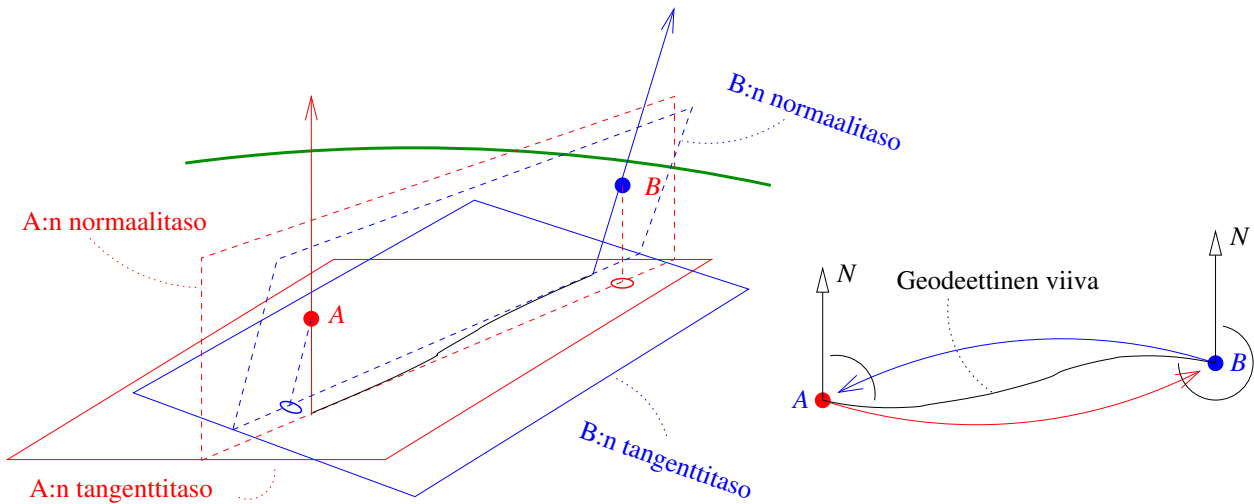
Kuva 3.8: Laplace-ilmiö: luotiviivapoikkeaman vaikutus atsimutin suuntaan

- o Toinen termi $(\xi \sin A - \eta \cos A) \cot z$ johtuu tähyksen suunnan eri projektioista paikalliseen horisonttiin kuin ellipsoidin tangenttitasoon. Se taas riippuu samalla tavalla tähyksen zenittikulmasta z ja häviää jos $z = 90^\circ$.

3.8.1 Ellipsoidisten normaalien erisuuntaisuus

Sen jälkeen kun suunnat on redukoitu paikallisesta horisonttitasosta vertausellipsoidin tangenttitasoon, kaikki ei ole vielä kunnossa.

Kuvassa 3.9 tämä on selostettu: Piste B tähtäys-suunta pisteessä A saadaan projisoimalla



Kuva 3.9: Luotiviivat eivät ole samassa normaalitasossa

piste B pisteen A tangenttitasoon, ja pisteen A tähtäys-suunta B :hen taas saadaan projisoi-malla piste B pisteen A tangenttitasoon.

Molemmat suunnat eroavat “geodeettisen viivan” eli lyhyin mahdollisen matkan viivan suun-nasta ellipsoidin pinnalla. Puhutaan *normaalitasoista*⁴: pisteen B *atsimuti* pisteessä A on kulma A :n meridiaanitason ja sen pisteen A normaalitason välillä, joka sisältää myös pisteen B . Toisaalta, pisteen A *atsimuti* pisteestä B mitattuna on kulma B :n meridiaanitason ja sen B :n normaalitason välillä, joka sisältää myös A .

Nämä normaalitasot eivät yleensä ole samoja, ellipsoidin litistyneisyyden johdosta. Vain jos pisteet A ja B ovat samalla meridiaanilla (ts. niiden pituusaste on sama) tai molemmat ovat esim. päiväntasaajalla, ovat normaalitasot identtisiä ja geodeettinen viiva on “suora” (torsioton) käyrä, normaalitason leikkausviiva itse ellipsoidipinnan kanssa.

Geodeettisen viivan ja normaalitason *atsimutien* välillä on olemassa pienenpieni ero. (Cooper, 1987) antaa kaavan

$$\delta A ['] = 2,8 \cdot 10^{-6} \ell^2 \sin 2A \cos \varphi_A$$

jonka mukaan jopa sadan kilometrin kaarella ero on vain luokkaa $0,03''$.

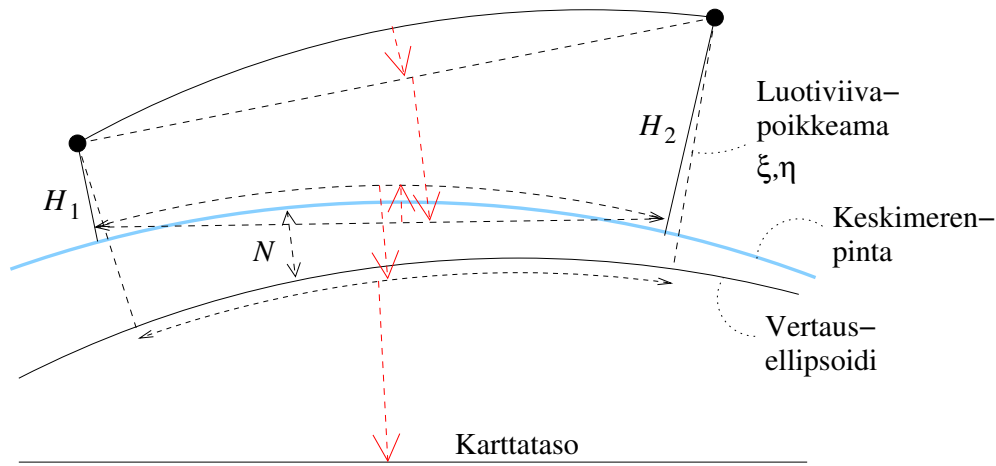
Myös jos havaitut suunnat t_i eivät ole absoluuttisia, on ne redukoitavia paikallisesta hori-sontista ellipsoidiin käyttämällä kaava 3.1, koska aniharvoin kaikki zeniittikulmat z_i ovat tarkasti 100 gon. Kolmioverkkoa tasoitetaan ellipsoidilla; tähtitieteelliset pohjoissuuntaha-vainnot (“Laplace-pisteet”) A redukoidaan myös ellipsoidiin kaavan 3.1 avulla, ja arvoja a käytetään silloin ehtoina koko verkon orientoimiseksi ja (mikäli on useita Laplace-pisteitä) vahvistamiseksi.

3.8.2 Pituuskorjaus

Tarkasti ottaen sähkömagneettisesti mitattu etäisyys ei ole suoran janan vain avaruuskäy-rän pituus. Tästä johtuvat korjaukset on annettu kirjassa (Blachut et al., 1979, s. 113); esimerkiksi korjaus mitatusta suoraan janaan on

$$C = D - \frac{(2k - k^2) D^3}{24R^2}.$$

⁴En. normal section, ks. (Cooper, 1987) luku 2.4.



Kuva 3.10: Etäisyysmittauksen korkeusreduktiot

Tässä D on ei-korjattu, kaarta pitkin mitattu matka; C on korjattu matka. k on ns. *refraktiokerroin*, $k = R/\rho$, jossa ρ on mittaussäteiden kaarevuussäde. Tyypillisesti k on arvoltaan 0.1-0.2.

Tämä korjaus on tärkeä vain pitkillä matkoilla, kymmeniä kilometrejä. Myös kirjallisuudesta löytyvä ns. *toinen refraktiokorjaus* kuuluu tähän ryhmään.

Aluksi valitaan sopiva *vertaustaso*, yleensä “keskimerenpinta” eli se pinta, johon paikallinen korkeusjärjestelmä on sidottu.

Suoraa janaa redukoidaan “merenpinnan kaareksi” seuraavalla tavalla. Ensin merenpinnan *janaksi* kaavalla:

$$C_s = \sqrt{\frac{C^2 - (H_2 - H_1)^2}{(1 + H_1/R)(1 + H_2/R)}},$$

missä H_1 ja H_2 ovat päätepisteiden korkeudet merenpinnalta ja R on paikallisesti oikea vertausellipsoidin kaarevuussäde. Sitten

$$S_s = C_s + \frac{C_s^3}{24R^2}$$

antaa kaaren pituus janan pituudesta.

Reduktio vertausellipsoidiin suoritetaan seuraavasti:

$$S = S_s + (\bar{\xi} \cos A + \bar{\eta} \sin A) (H_2 - H_1) - \frac{\bar{N} S_s}{R},$$

missä $\bar{\xi} = \overline{(\Phi - \phi)}$ ja $\bar{\eta} = \overline{(\Lambda - \lambda) \cos \phi}$ ovat keskimääräiset luotiviivan poikkeamat sivua pitkin ja $\bar{N}$ on keskimääräinen geoidin korkeus. Näin saadut vertausellipsoidille projisoituja kaaren pituuksia voidaan käyttää suoraan verkkotasoituksessa jos reduktio suoritetaan maantieteellisissä koordinaateissa ellipsoidin päällä.

Luku 4

Keskistykset, asematasoitus

Usein ei ole mahdollista laittaa havaintokojetta tai tähystä varsinaiseen kohteeseen. Silloin käytetään epäkeskinen koje- tai tähyspaikka ja tehdään laskennallinen korjaus, ns. *keskistys*. On tärkeätä huomauttaa, että ilman keskistyshavaintoja epäkeskisesti suoritettut varsinaiset havainnot ovat *arvottomia*.

Huomaa myös, että kun sekä mittauskoje että tähys ovat mitattavan pisteen yläpuolella, on pystysuunnassa *aina* kyse keskistyksestä. ”Pystykeskistysalkiot” eli kojeen ja tähyksen – tai GPS-antennin – korkeudet on syytä *mitata* niin kauan kuin kolmijalka on vielä pystyssä. . .

4.1 Vaakakeskistys

Jos koje pystytetään pisteeseen H eikä K , tehdään suuntahavainnossa virhe ε .

Vaakageometrian *keskistysalkiot* e, ν mitataan havaintopaikalla:

$\bar{e}$ etäisyys vaakatasossa H :n ja K :n välillä

ν vaakakulma $\angle KHT$

Nyt voidaan laskea (ks. kuva) sinisääntöä käyttäen: $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \nu} = \frac{\bar{e}}{\bar{s}}$ eli $\sin \varepsilon = \frac{\bar{e}}{\bar{s}} \cdot \sin \nu$, jossa

$\bar{s}$ etäisyys vaakatasossa K :n ja T :n välillä.

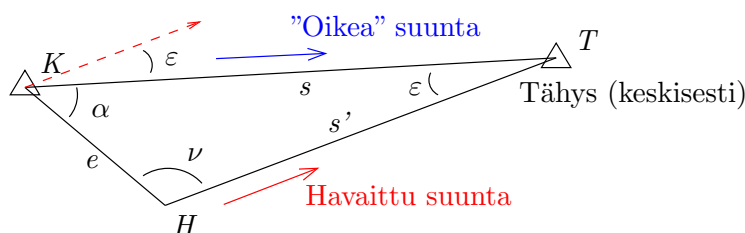
Jos ε on riittävän pieni, saadaan $\varepsilon \approx \bar{e}/\bar{s} \cdot \sin \nu$, missä ρ on tuttu radiaanin suuruus ilmaistuna käytetyssä kulmayksikössä, 63.661977 jos käytetään gooneja.

Jos mittauksesta on saatu $\bar{s}'$, saadaan $\bar{s}$ kaavan $\bar{s}/\sin \nu = \bar{s}'/\sin \alpha$ avulla, missä $\alpha = 200 g - \nu - \varepsilon$.

Jos, kuten on tavallista, mittaukset on suoritettu avaruudessa, pitää laskea vaakaetäisyydet avaruusjanoista. Tätä varten esitetään seuraavat suureet:

ΔH_K kojepaikassa olevan tähyksen korkeus merkistä

ΔH_T tähyksen korkeus merkistä



Kuva 4.1: Keskistys vaakatasossa

z_{HK} mitattu zeniittikulma H :ssa olevasta kojeesta pisteen K tähykseen

z_{HT} mitattu zeniittikulma H :ssa olevasta kojeesta pisteen T tähykseen

Nyt lasketaan vaakaetäisyydet seuraavaksi:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= e \sin z_{HK}; \\ \bar{s}' &= s' \sin z_{HT}.\end{aligned}$$

Mikäli zeniittikulmat ovat lähellä 100° , ei ole niiden tarkka mittaus kriittinen.

4.2 Korkeuskeskistys

Myös *korkeuskeskistys* voidaan suorittaa: tarkoitus on laskea *merkkien* välinen korkeusero $H_T - H_K$ käytettävissä olevista mittauksista. Seuraavasti:

$$\begin{aligned}H_T - H_K &= (H_T - H_H) - (H_K - H_H) = \\ &= (s' \cos z_{HT} - \Delta H_T + \Delta H_H) - (e \cos z_{HK} - \Delta H_K + \Delta H_H) = \\ &= s' \cos z_{HT} - e \cos z_{HK} - \Delta H_T + \Delta H_K,\end{aligned}$$

josta ΔH_H , kojeen korkeus H :n merkistä, on sopivasti pudonnut pois.

Mikäli ei koje vaan tähy on epäkeskinen, saadaan korjauskaava vastaavalla tavalla. Silloin keskistysalkiot e , v ja z_{HT} mitataan tähyksen paikalla.

4.3 GPS-keskistys

GPS-mittausten yhteydessä on usein myös suoritettava keskistys, jos mittaus varsinaisessa pisteessä ei ole mahdollista.

GPS:n tapauksessa tarvitaan *absoluuttiset* eli orientoidut keskistyselementit: olkoon mitattuna kolmiulotteiset keskistysalkiot e , v ja z_{HK} epäkeskisellä pisteellä H , ja suuntakulma (atsimuti) A_{HT} tähykseen päin, niin voidaan laskea suuntakulma

$$A_{HK} = A_{HT} - v.$$

Redukoitu zeniittikulma z_{HK}^{red} , siis zeniittikulma “pultista pulttiin”, saadaan seuraavasti¹:

$$e^{red} \cos z_{HK}^{red} = e \cos z_{HK} - \Delta H_K + \Delta H_H. \quad (4.1)$$

Samalla myös e redukoidaan “pultista pulttiin” -etäisyydeksi seuraavan kaavan avulla:

$$e^{red} \sin z_{HK}^{red} = e \sin z_{HK}, \quad (4.2)$$

täytyy tehdä jos jana HK ei ole vaakatasossa. Ilmeisesti kaavat 4.1 ja 4.2 on ratkaistava yhdessä, iterativisesti.

Meillä on nyt seuraavat absoluuttiset (napa-) keskistysalkiot kolmessa ulottuvuudessa: A_{HK} , e^{red} ja z_{HK}^{red} .

¹Huomaa, että GPS-mittaukset tehdään aina “pultista” sillä tavalla, että antennin korkeus pultista on aina osa haivaintotiedostoa, ja se otetaan automaattisesti huomioon. Siksi “reduktio pulttiin” on tarpeen.

Absoluuttisia keskistyselementtejä annetaan usein “North, East, Up” -järjestelmässä:

$$\begin{aligned}\Delta N_{HK} &= e^{red} \cos A_{HK} \sin z_{HK}^{red} \\ \Delta E_{HK} &= e^{red} \sin A_{HK} \sin z_{HK}^{red} \\ \Delta U_{HK} &= e^{red} \cos z_{HK}^{red}\end{aligned}$$

Tässä on siis koordinaattierot muodossa “keskipiste minus epäkeskinen piste”. Usein ne annetaan myös muodossa “epäkeskinen piste minus keskipiste”. *Aina on kirjallisuuslähteestä selvitettävä, kumpi muoto on valittu.*

GPS-mittausten yhteydessä annetaan usein keskitysalkiot *geosentrisesti*: $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$. Konvertointi *NEU*-systemiin on suoranaista. Kirjoitetaan

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta E \\ \Delta U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\Delta\varphi \\ R\cos\varphi\Delta\lambda \\ \Delta h \end{bmatrix},$$

ja (pallon geometria)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} &= (R+h) \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -R\sin\varphi\cos\lambda & -R\cos\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -R\sin\varphi\sin\lambda & +R\cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ R\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\lambda \\ \Delta h \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & +\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta E \\ \Delta U \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Käänteistä muunnosta:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta E \\ \Delta U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & +\cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

on helppoa verifioida².

4.4 Vaakakulmien asematasoitus

Asematasoitus eli teodoliitilla tehtyjen useiden havaintosarjojen yhdistäminen yhdeksi optimaaliseksi ratkaisuksi on *tasoitustehtävä*, vaikkakin lähes triviaalinen sellainen. Tässä annetaan esimerkki, missä on havaittu neljä mittaussarjaa kolmeen tähtyyssuuntaan. Jokaisen sarjan kaksi kojeasemaa on jo yhdistetty.

Tässä esimerkissä on sarjoja $s = 4$, tähtäyksiä $r = 3$, siis havaintoja $n = rs = 12$. Tuntemattomien tähtäysten määrä sarjakeskiarvossa on $r - 1 = 2$. Jokaisessa sarjassa on yksi

²Itse asiassa syy, miksi tämä on niin helppo on, että kyseessä on *ortogonaalinen* rotaatiomatriisi, jolle pätee $R^{-1} = R^T$.

orientointituntamaton³. Siis *ylimääräisiä havaintoja* (redundanssi, vapausasteiden määrä) on

$$rs - (r - 1 + s) = (r - 1)(s - 1).$$

Havaintoyhtälö on⁴

$$t_{ij} + v_{ij} = A_j - \Omega_i,$$

missä $i = 1 \dots 4$ on sarjan numero, $j = 1 \dots 3$ suunnan numero, Ω_i sarjan vaakakehän orientointituntematon, A_j tähyksen suuntatuntematon (mitatun sivun atsimuti), ja t_{ij} (raaka) suuntahavainto. Tämän lisäksi on kiinnitettävä yksi suunta tai suuntien lineaariyhdistelmä, jotta koko ongelma olisi ratkaistavissa (suhteellisista kulmahavainnoista ei voi ratkaista absoluuttisia suuntia). Eli vaaditaan lisäksi vaikkapa⁵:

$$A_1 = 0. \quad (4.3)$$

Seuraavassa annetaan ilman todistusta, miten voi laskea asematasoituksen tulos ja miten sitä voi järjestää yksinkertaiseksi latkentataulukoksi. Menetelmä on tilastollisesti optimaalinen.

4.4.1 Kulmamuunnos

Ensin suoritetaan seuraava toimenpide (*kulmamuunnos*):

Vähennetään jokaisesta havainnosta t_{ij} paitsi joka sarjan ensimmäisestä, sarjan ensimmäinen havainto t_{i1} .

³Tilanne on hieman sama kuin GPS-mittauksessa. Sielläkin jokaisen vastannottimen kaikki havainnot sisältävät kellovirhetuntemattoman ΔT , ja siksi havaintosuure kutsutaan pseudoetäisyys- eikä etäisyyshavainnoksi. Samoin voitaisiin tässä puhua ”pseudosuuntahavainnoista”. Tällaiset ei-kiinnostavat lisätuntemattomat kutsutaan *nuisance parametreiksi*.

⁴Siis rakennematriisi on, neljän sarjan ja kolmen tähtäyksen tapauksessa:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & -1 & & \\ & 1 & & -1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ \hline 1 & & & -1 & & \\ & 1 & & -1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ \hline 1 & & & -1 & & \\ & 1 & & -1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ \hline 1 & & & -1 & & \\ & 1 & & -1 & & \\ & & 1 & -1 & & \end{array} \right],$$

jos havaintojen vektori on $\underline{\ell} = [t_{11} \ t_{21} \ t_{31} \mid t_{12} \ t_{22} \ t_{32} \mid t_{13} \ t_{23} \ t_{33} \mid t_{14} \ t_{24} \ t_{34}]^T$ ja tuntemattomien vektori $\hat{\mathbf{x}} = [A_1 \ A_2 \ A_3 \mid \Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4]^T$, jolloin havaintoyhtälöt kirjoitetaan muotoon

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{\mathbf{x}},$$

$\underline{v}$ ollessa jäännösvirheiden vektori.

⁵Täysin mielivaltainen. Yhtä hyvin $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, tai vaikkapa $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ joka olisi ainakin ”demokraattinen”.

Määritellään myös tuntemattomat uudelleen (siis, ne eivät ole enää absoluuttisia tämän jälkeen):

$$T_j \equiv A_j - A_1.$$

Ratkaisu on nyt:

$$\hat{T}_j = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s t'_{ij}$$

eli *tasoitettu kulmamuunnos on sarjojen kulmamuunnosten keskiarvo*.

Tässä voidaan mielivaltaisesti asettaa $\hat{T}_1 \equiv 0$. T -arvot ovat tasoitettut, mutta relatiiviset suunnat, eivätkä absoluuttiset atsimutit.

Nyt saadaan ratkaisuksi orientaatiotuntemattomille:

$$\hat{\Omega}_i = -\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (t_{ij} - \hat{T}_j).$$

4.4.2 Jäännösvirheet ja vapausasteet

Nyt, kun tuntemattomat $\hat{T}_j$ ja $\hat{\Omega}_i$ on laskettu, tarkemmin *estimoitu* pienimmän neliösumman menetelmän avulla, voidaan myös laskea jäännösvirheet eli residuaalit:

$$v_{ij} = \hat{T}_j - \hat{\Omega}_i - t_{ij}.$$

Olkoon suuntahavaintojen t_{ij} keskivirhe σ (ja sama kaikille) ja olko suuntahavainnot korreloimattomia. Siinä tapauksessa havaintojen *varianssimatriisi* on

$$Q_{\ell\ell} = \text{Var}\{\ell\} = \sigma^2 I_{s \times r},$$

jossa $I_{s \times r}$ on $(s \times r) \times (s \times r)$ -kokoinen yksikkömatriisi.

Tässä tapauksessa suure (”siirtosuure”, Baarda)

$$\underline{\mathcal{E}} = \underline{v}^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{v} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r v_{ij}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j} v_{ij}^2.$$

on jakautunut ns. χ_b^2 -jakauman mukaan, jonka odotusarvo on b , *vapausasteiden* eli ylimääräisten havaintojen määrä.

Aikaisemmin nähtiin, että $b = (r-1)(s-1)$, kulmamuunnosten (riippumattomien suuntamittausten) määrä kerrottuna *ylimääräisten* sarjojen määrällä. Siis $\underline{\mathcal{E}}$ on jakautunut $\chi_{(r-1)(s-1)}^2$ mukaan ja sen odotusarvo on $(r-1)(s-1)$. Eli:

$$E \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j} v_{ij}^2 \right\} = (r-1)(s-1) \Rightarrow \sigma^2 = E \left\{ \frac{\sum_{i,j} v_{ij}^2}{(r-1)(s-1)} \right\},$$

jä näemme, että

$$\hat{\sigma}^2 \equiv \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r v_{ij}^2}{(r-1)(s-1)}$$

on yhden havainnon varianssin σ^2 harhaton *estimaattori*:

$$E \left\{ \hat{\sigma}^2 \right\} = \sigma^2.$$

4.4.3 Asematasoituksen laskentataulukko

Asematasoitus koostuu seuraavista askeleista:

1. Kiinnitetään mielivaltaisuus suuntien määrittelyssä, esim. kiinnittämällä ensimmäinen suunta nolnaan, $T_1 = 0$; tätä kutsutaan *kulmamuuunnokseksi*. Se tehdään vähentämällä ensimmäinen havaittu suuntaluku saman sarjan muista suuntaluvuista.
2. Lasketaan jokaiselle suunnalla sen suuntahavaintojen *keskiarvot kaikkien sarjojen kesken* $\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s t_{ij}$ jokaiselle suunnalle j ;
3. Lasketaan havaintojen residuaalit *sarjakeskiarvojen* suhteen

$$v'_{ij} = t_{ij} - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s t_{ij};$$

4. Lasketaan “ensimmäisten residuaalien” v'_{ij} summat jokaisen sarjan kaikkien suuntien yli:

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r v'_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left(t_{ij} - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s t_{ij} \right);$$

5. Lasketaan lopulliset residuaalit $v_{ij} = v'_{ij} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r v'_{ij}$, mikä vastaa juuri residuaalit, jos annettaisiin jokaiselle sarjalle oman orientointituntemattoman Ω_j suuntien tuntemattomien A_i lisäksi, kuten alkuperäisessä havaintoyhtälöryhmässä.

Lopputuloks on yksinkertaisesti esitetty laskentataulukko (taulukko 4.1), joka pitää sisällään nämä operaatiot ja pitäisi olla ilman selitystäkin selvä.

Kaavan täyttämisen jälkeen (järjestyksessä sarjakeskiarvo, v' , sarjakohtainen summa, v) yhden tähtäyksen (eli painoyksikön) keskivirhe lasketaan ensin laskemalla residuaalien neliösumma kaikkien sarjojen ja tähtäyssuuntien residuaalien yli:

$$v^T v = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r v_{ij}^2 = [vv]$$

(viimeinen kirjoitustapa on Gaußin keksimä joka joskus vielä käytetään). Sitten lasketaan (eli *estimoidaan*⁶)

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{\underline{v}^T \underline{v}}{rs - (r + s) + 1}} = \sqrt{\frac{\underline{v}^T \underline{v}}{(r - 1)(s - 1)}} = 3,7^{\text{cc}}.$$

Tässä:

- rs havaintojen määrä (r suuntaa s sarjassa)
- $r + s$ tuntemattomien määrä (r suuntatuntemattonta A_i , s orientaatiotuntemattonta Ω_j)

⁶Huomaa, että $E\{\hat{\sigma}^2\} = \sigma^2$, mutta kuitenkin $E\{\hat{\sigma}\} \neq \sigma$! Syy tähän on, että E -operatoria ja neliöjuurta ei saa vaihtaa keskenään: yleisesti $E\{\sqrt{x}\} \neq \sqrt{E\{x\}}$. Todistus vastaesimerkillä: jos $\underline{x}$ todennäköisyysjakauma on $p(1) = 0,5$, $p(4) = 0,5$, ja muulloin $p(x) = 0$, me saadaan $E\{\sqrt{x}\} = 1,5$ mutta $\sqrt{E\{x\}} = \sqrt{2,5} \approx 1,58$. Siis $\hat{\sigma}$ ei ole harhaton vaikka $\hat{\sigma}^2$ on.

	Kulmamuunnos (gon)	v' (cc)	v (cc)
1. sarja	0,00 00	0	-3,7
	68,84 30	+4	+0,3
	209,18 80	+7	+3,3
Sarjan summa, keskiarvo:		+11	+3,7
2. sarja	0,00 00	0	-1,3
	68,84 25	-1	-2,3
	209,18 78	+5	+3,7
Sarjan summa, keskiarvo:		+4	+1,3
3. sarja	0,00 00	0	+2,7
	68,84 24	-2	+0,7
	209,18 68	-5	-2,3
Sarjan summa, keskiarvo:		-7	-2,7
4. sarja	0,00 00	0	+3,7
	68,84 22	-4	-0,3
	209,18 66	-7	-3,3
Sarjan summa, keskiarvo:		-11	-3,7
Sarjakeskiarvo	0.00 00		
	68.84 26		
	209.18 73		

Taulukko 4.1: Asematasoituksen laskentataulukko

- o Luku +1 edustaa ongelman *defekti* eli ratkaisuvapaisuuden ulottuvuus: se yllä mainittu seikka, että suureen Δ lisääminen sekä A_i :hin että Ω_j :hen ei vaikuta havaintoihin millään havaittavalla tavalla, ja siis, että ratkaisu ei ole yksiselitteinen ilman *yhtä* lisäehtoa⁷, esim. $A_1 = 0$.

Suuretta $rs - (r + s) + 1 = (r - 1)(s - 1)$ kutsutaan *vapausasteiden määräksi*.

Tämän jälkeen sarjakeskiarvon keskivirheen estimaatio on $\hat{\sigma}_s = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{s}} = 1,8^{\text{cc}}$.

⁷Tätä lisäehtoa voidaan myös ymmärtää "pseudo-havainnoksi": silloin havaintojen määrä on $rs + 1$.

Luku 5

Vaaitus

5.1 Vaaitusrefraktio

Refraktiomallia kuvaavat parametrit ovat:

- α maaston kaltevuus
- $\frac{dt}{dh}$ lämpötilan pystygradientti eli muutos korkeuden funktiona – tai funktio $t(h)$ itse.

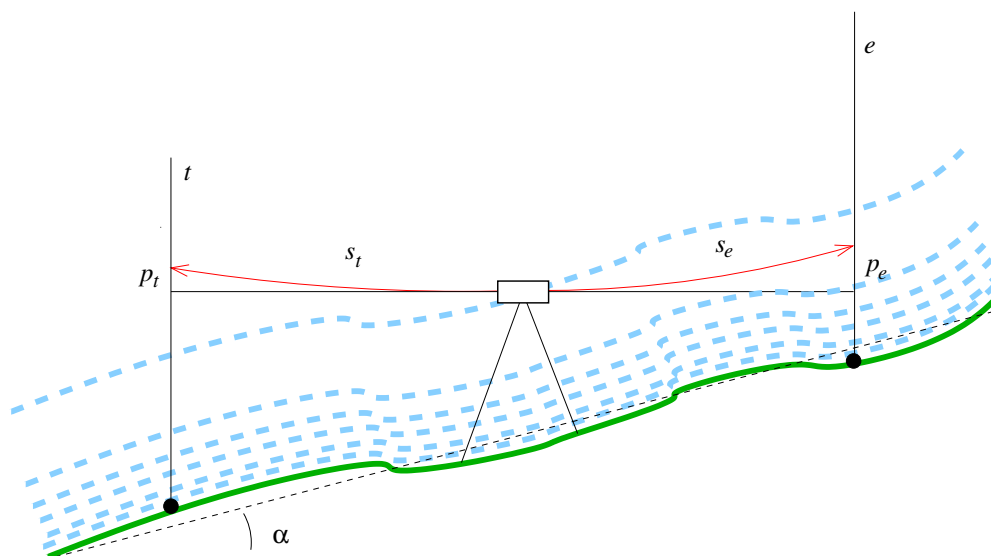
Kansainvälisesti asia on tutkittu paljon, etenkin T.J. KUKKAMÄEN tutkimukset (([Kukkamäki, 1938](#)), ([Kukkamäki, 1939](#))) on mainittava.

Kuvan 5.1 mukaisesti oletetaan, että isotermiset pinnat (saman lämpötilan pinnat) ovat samansuuntaisia maan pinnan kanssa. Siksi isotermisten pintojen kulma paikallisen vaakasuunnan kanssa on α .

Suurin vaikeus on *ilman lämpötilan pystygradientin* $\frac{dt}{dh}$, tai vaihtoehtoisesti koko funktion $t(h)$, määrittäminen. Tarkkaa mittausta on yritetty, mutta vaikea, mallinta (pilvisyyden, maaperän ominaisuuksien, auringon korkeuden jne. jne. funktiona) on jonkin verran tuottanut tuloksia.

5.2 Vaaituksen satunnaiset virheet

- Kohdistus



Kuva 5.1: Vaaitusrefraktio

- ▷ Väreily, huojunta; ehkäisykeino mittaamien pilvisinä päivinä, tai kuumina päivinä aamulla ja illalla
- ▷ Kuplan vaeltaminen, esim. kun asfaltti kolmijalan alla on pehmeä kuumana kesäpäivänä
- ▷ Lattojen (tai kilpikonnan) vajoaminen, lika latan pohjalevyssä
- ▷ Pohjalevyn kuluminen johtuu epätasaisuuteen
- ▷ Eripitkät tähtäykset
- Ilmakehä eli refraktio

Käytännössä tarkka korjaus ei ole oikein mahdollista, siksi valitaan *yhtäpitkät tähtäykset*. Ja mäkisessä maastossa se ei edes auta, ks. kuva 5.1.

5.3 Vaaituksen systemaattiset virheet

Ilmakehä:

- Refraktio

Tähtäys aina vähintään 50 cm maan pinnan yläpuolella. Sään oltava sopiva, mieluiten pilvinen. Lämpötilan gradientit (etenkin pystygradientti) mahdollisimman pieniä.

- Lämpötilan vaikutus kojeisiin

Kojeen annettava lämmetä tai viiletä ilman lämpötilaan noin minuutin verran jokaiselle Celsiusasteen lämpöerolle. Koje ja latat on suojeltava suoralta paisteelta kuljetettaessa ja mitattaessa, laatikot, päivänvarjot, ei kosketella kojeita. Tarkimmissa mittauksessa käytetään invarnauhan lämpölaajenemiskorjausta.

Latat:

1. Jaotusvirheet

- a) mittakaavavirhe; korjataan korkeuseroihin, ei lukemiin (ne ovat "lattametreissä")
- b) jakoviivojen satunnaiset virheet. Perinteisesti niitä ei korjattu (oletettiin käyttäytyvän satunnaisesti), nykyisin on olemassa automaattinen lattakalibrointi missä kaikki viivat mitataan
- c) nollapistevirhe

jaotus alkaa eri kohdasta latan alapään nähden eri latoissa

Lääke: valitse parillinen määrä kojeasemia ja siirrä aina takalatta uuteen pisteeseen, silloin nollapistevirhe eliminoiduu!
- d) Säännöllinen tarkastus, säännöllinen kalibrointi! Nykyisin on mahdollista kalibroida latat automaattisesti, jolloin *kaikki* viivat tulevat kalibroiduiksi.

2. Lattatasaimen virhe

Ei kumoudu vain menee latan mittakaavaan: lukemat aina liian suuria.

Tasain tarkistettava säännöllisin välein pitkän luotinarun avulla.

Pienet tasausvirheet harmittomia: esim. 0,1 gon $\approx 0,0015$ rad (1.5 mm kallistus metria kohtaan, näkyy selvästi luotinarun avulla) aiheuttaa kaavan $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ mukainen, relatiivinen virhe:

$$0,5 \cdot 0,0015^2 = 0,000001 = 1 \text{ ppm.}$$

Toisin sanoen, 1 mm per km korkeusero.

Jo yhden goonin tasausvirhe antaisi 100 ppm:n, eli 10 cm per km, korkeuseron virheen, mikä ei ole enää hyväksyttävissä.

- Tasainten säännöllinen tarkastus!

Kojeet:

Ensin on varmistettava, että tähtäys- ja tasainakselit ovat yhdensuuntaisia. Tämä tarkistus on helppo, ks. Johdanto geodesiaan -luentomoniste. Jos valitaan etu- ja takaetäisyydet suunnilleen yhtäpitkiksi, kumoutuu mahdollinen jäännösvirhe.

- Kojeen vajoaminen mittauksen aikana tai jalustat painuvat kasaan. Asfaltti kuumana päivänä vaarallinen!
- Kompensaattorin virheet itsetasaavissa kojeissa (automaattikojeissa).
- Geomagneettinen vaikutus lieenee korjattua valmistajien toimesta. Vain kaiken tarkimissa kojeissa.
- Arviointivirheet latta luettaessa, jos ei optista mikrometriä.
- Parallaksi. Hyvä fokusointi tärkeä; silmälasit voi ottaa pois ellei sylinterilasit.

5.4 Vaaituksen karkeat virheet

Vaaituksella on tekniikkana huono redundanssi, eli se kontrolloi havaintoja huonosti. Siksi on tarkoissa ja tuotannollisesti tärkeissä mittauksissa (siis: *aina!*) tehtävä sidos *kahteen* toisistaan riippumattomaan lähtöpisteeseen.

Lisäksi tarkoissa mittauksissa voidaan vaaitus suorittaa kahta rinnakkaista mittausta käyttämällä; *kaksiasteikkoiset latat*. Asteikot voivat olla latan samalla puolella tai latan eri puolilla (kääntölatta).

Asteikot alkaavat eri pisteistä (suuri ero suositeltava!); asteikkojen erotus lisäksi saa olla kokonaisluku, jotta asteikkojen pyöristysvirheet olisivat tilastollisesti riippumattomia.

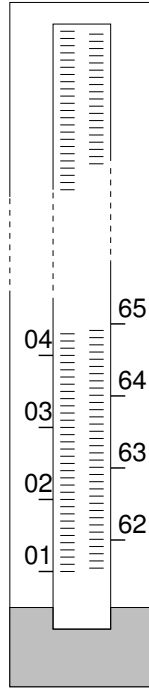
Kutsutaan takalattaan mittausta t_1, t'_1 ja etulattaan mittausta e_1, e'_1 . Silloin oikea mittausmenetelmä systemaattisten virheiden minimoimiseksi on t_1, e_1, e'_1, t'_1 .

Kahden asteikon lisäksi voidaan käyttää (ja joskus käytetäänkin, jos pelataan varman päällä)

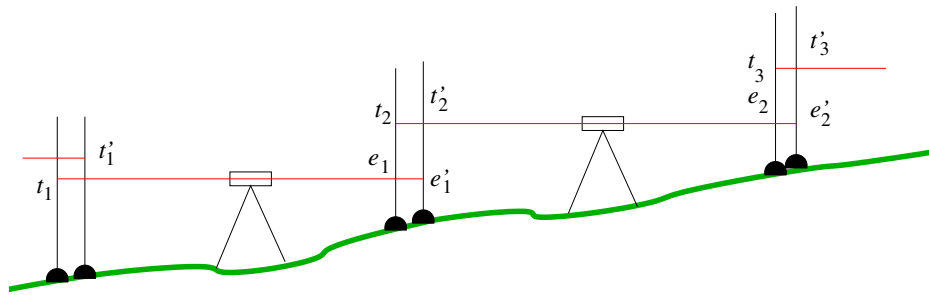
- kaksi latta,
tai
- kaksi kojetta.

Kaikissa tapauksissa saadaan kaksi korkeuseroa:

$$\begin{aligned}\Delta H &= t_1 - e_1 \\ \Delta H' &= t'_1 - e'_1\end{aligned}$$



Kuva 5.2: Kaksoisasteikko



Kuva 5.3: Kahden latan käyttö

Yleisemmin, jos on mitattu n :llä kojeasemalla $i = 1, \dots, n$ pisteestä A pisteeseen B :

$$\Delta H_i = t_i - e_i; \Delta h_{AB} = \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n e_i$$

Välin varianssi:

$$\sigma_{\Delta H_i}^2 = \sigma_{t_i}^2 + \sigma_{e_i}^2$$

Linjan varianssi:

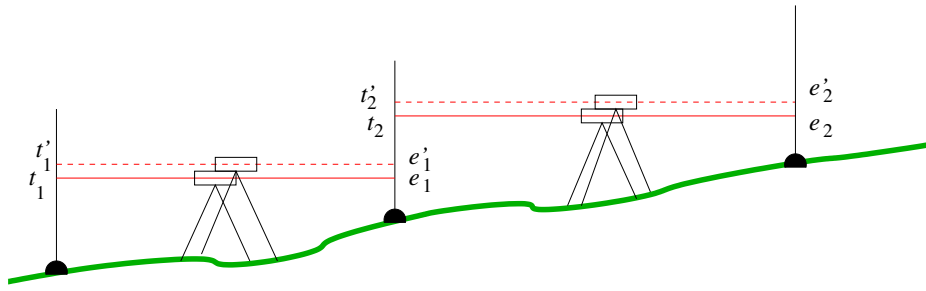
$$\sigma_{\Delta H_{AB}}^2 = 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 2n\sigma_0^2,$$

jossa σ_0^2 on yhden eteen- tai taakse- mittauksen varianssi.

Vaaituksen laadun mitaksi käytetään usein ns. *kilometrikeskivirhettä*

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{w^2}{\sum s}$$

Yhdestä w -arvosta ei saada luotettavia likiarvoja. Monesta linjasta saadaan luotettavampi



Kuva 5.4: Kahden kojeen käyttö

tulos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{s_i}, \quad (5.1)$$

missä $i = 1, \dots, n$ on vaaituslinjojen laskuri. Jos on kyse kaksinkertaisen vaaituksen tuloksesta, voidaan laskea niiden erotuksista

$$\underline{d} = \underline{\Delta H} - \underline{\Delta H'}$$

ja

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{s_i},$$

missä nyt $i = 1, \dots, n$ laskee mitatut korkeuserot (välit), usein suuri luku.

Kahden mittauksen keskiarvon keskivirheen estimaatti $\widehat{\sigma_{0,2}}$ saadaan seuraavasti:

$$\widehat{\sigma_{0,2}^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{2}.$$

Havaittu seikka, josta on oltava tietoinen, on että mitä suurempi havaintoaineisto yritetään sovittaa yhteen, sitä suuremmaksi arvio $\hat{\sigma}_0^2$ muodostuu. Myös tasoverkkotasoituksessa verkosta saatu arvo on useimmiten huomattavasti suurempi kuin mitä asematasoitukset ovat antaneet.

Samalla vaaitusverkoissa: välien edestakaisesta mittauksesta saatu $\hat{\sigma}_0^2$ on aina pienempi kuin mitä linjoista saa, ja se on taas pienempi kuin vaaitusverkkotasoituksesta saatu arvio.

Tämä on vain looginen seuraus siitä, että laajempi aineisto on aina saatu suuremmalta alueelta ja pitemmältä mittausajalta, jolla on voinut tapahtua enemmän tarkuutta huonontavia seikkoja: puutteellisesti mallinnettuja geofysikaalisia tai ilmatieteellisiä ilmiöitä, laitteiden ominaisuuksien muuttuminen, jne. jne.

5.5 Yksittäisen vaaitusjonon laskeminen

Lähdetään kilometrikeskivirheen hypoteesista, eli oletus, että jos vaaituslinjan pituus on s , sen päätepisteiden korkeuseron Δh varianssi on

$$\sigma_{\Delta h}^2 = \sigma_0^2 s, \quad (5.2)$$

missä σ_0 on kilometrikeskivirhe. Tällä järkeväksi osoitetulla olettamuksella voidaan käyttää pistevälin pituus vaaitusjonon tasoituksen painona.

Pisteväli	s , km	dH , m
13-1	0,4	0,534
1-2	0,6	2,634
2-3	1,0	3,075
3-16	0,2	0,517
Σ	2.2	6,760

Tunnetaan $H_{13} = 78,278$ m, $H_{16} = 85,002$ m; ero $H_{16} - H_{13} = 6,724$ m. Sulkuvirhe $w = +0,036$ m.

Tasoitettu korkeus:

$$H_k = \underbrace{\text{alkukorkeus}}_{H_T} + \underbrace{\text{korkeuserot}}_{\sum_{i=1}^k dH_i} - \underbrace{\text{tasoituskorjaus}}_{\frac{\sum_{i=1}^k p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} w},$$

missä H_T lähtöpisteen (13) korkeus. Painoluvuiksi otetaan linjan pituus, $p_k = s_k$. Esimerkissä:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,4 \\ p_1 + p_2 &= 0,4 + 0,6 = 1,0 \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 0,4 + 0,6 + 1,0 = 2,0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 0,4 + 0,6 + 1,0 + 0,2 = 2,2 \end{aligned}$$

Syy miksi $p_k = s_k$:

Myöhemmin luvussa 11.3 näytetään, että *ehtotasoituksena* vaaitussilmukan tasoituksessa tilastollisesti “oikeat” (optimaaliset) painot ovat vaaitusvälien mittausvarianssit $\sigma_{\Delta H_i}^2$. Vaaituksessa pätee kilometrivirhe-olettamus (kaava 5.2). Tämä merkitsee, että vaaitusvälin varianssi on suoraan verrannollinen sen pituuteen. Tämä taas merkitsee, että voidaan käyttää vaaitusvälien pituudet tasoituksen painoina.

Miksi kilometrivirhe-olettamus pätee? Yksi havainto vaaitusjonon tasoituksessa on pulttivälin korkeusero. Tämä ero on useiden taakse-eteen -lukemien erostusten summa:

$$\sum (h_t - h_e) = \Delta H.$$

Yhden tällaisen erotuksen keskivirhe on aina sama (sama menetelmä, sama koje, suunnilleen sama mittausetäisyys, $\dots$: σ_i). Korkeuseron ΔH keskivirhe saadaan summan keskivirheenä

$$\sigma_{\Delta H} = \sqrt{\sum \sigma_i^2},$$

eli

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = n\sigma_i^2.$$

Summattavien erotuksien eli kojeasemien lukumäärä pulttivälillä on suoraan verrannollinen vaaittuun matkaan eli varianssi $\sigma_{\Delta H}^2$ on myös suoraan verrannollinen vaaittuun matkaan s :

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \sigma_0^2 s. \quad (5.3)$$

Numeroesimerkki:

Tässä numeroesimerkissä käytetään luvussa 11.3 johdetut tasoitettun korkeuseron varianssin kaavat.

$$\sigma_0^2 = 385,6 \text{ mm}^2/\text{km} \text{ (kaava 5.1).}$$

$$\sigma_{\Delta H_1}^2 = \sigma_0^2 \cdot 0.4 \left(1 - \frac{0.4}{2.2}\right) = 125,6 \text{ mm}^2 \quad \sigma_{\Delta H_1} = 11,2 \text{ mm eli } 28 \text{ ppm}$$

$$\sigma_{\Delta H_2}^2 = \sigma_0^2 \cdot 0.6 \left(1 - \frac{0.6}{2.2}\right) = 168,3 \text{ mm}^2 \quad \sigma_{\Delta H_2} = 13,0 \text{ mm eli } 22 \text{ ppm}$$

$$\sigma_{\Delta H_3}^2 = \sigma_0^2 \cdot 1.0 \left(1 - \frac{1.0}{2.2}\right) = 210,3 \text{ mm}^2 \quad \sigma_{\Delta H_3} = 14,5 \text{ mm eli } 15 \text{ ppm}$$

$$\sigma_{\Delta H_4}^2 = \sigma_0^2 \cdot 0.2 \left(1 - \frac{0.2}{2.2}\right) = 78,1 \text{ mm}^2 \quad \sigma_{\Delta H_4} = 8,4 \text{ mm eli } 42 \text{ ppm}$$

Tasoitettut korkeudet (huom: 0,0164 on $\frac{w}{\Sigma s} = \frac{0,036}{2,2}$):

$$H_1 = 78,278 + 0,534 - 0,4 \cdot 0,0164 = 78,806$$

$$H_2 = 78,278 + (0,534 + 2,634) - 1,0 \cdot 0,0164 = 81,430$$

$$H_3 = 78,278 + (0,534 + 2,634 + 3,075) - 2,0 \cdot 0,0164 = 84,488$$

Tarkistus: pisteelle 16 pitää saada annettu korkeus takaisin:

$$\begin{aligned} H_{16} &= 78,278 + (0,534 + 2,634 + 3,075 + 0,517) - \\ &\quad - 2,2 \cdot 0,0164 = 85,002 \end{aligned}$$

Tasoitettujen korkeuksien keskivirheet (varienssit). Käytetään mittausvälien varienssit painoina:

$$\sigma_{H_k}^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_{\Delta H_i}^2 \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_{\Delta H_i}^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta H_i}^2}\right)$$

Korkeuksien varienssit käyttämällä välien pituudet painoina, kaavan (5.3) mukaan:

$$\begin{aligned} \sigma_{H_k}^2 &= \sum_{i=1}^k \sigma_0^2 s_i \left(1 - \frac{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^k s_i}{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^n s_i}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^k \sigma_0^2 s_i \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k s_i}{\sum_{i=1}^n s_i}\right). \end{aligned}$$

σ_0 kilometrikeskivirhe tai sen arvio eli estimaatti.

σ_0 :n arvio voidaan saada esim. sulkuvirheestä. Jos on käytettävissä vain yksi sulkuvirhe (vaaituslinja), arvio tulee olemaan karkea. Jos sulkuvirhe on $\underline{w}$, on suure

$$\underline{\omega} \equiv \frac{\underline{w}}{\sigma_0 \sqrt{s}}$$

jakautunut *normaalisti* (ts. Gaußin kellokäyrän mukaisesti) odotusarvolla $E\{\underline{w}\} = 0$ ja keskivirheellä 1 (standardi-normaali jakauma, $N\{0; 1\}$). Kirjallisuudesta ((Cooper, 1987)) löytyvien taulukoiden mukaan on todennäköisyys, että $|\underline{w}| > 1.96$, eli

$$|\underline{w}| > 1.96\sigma_0\sqrt{s},$$

vain 5%. Jos näin on kuitenkin asian laita, voidaan tehdä johtopäätös, 95%:n *luottamustasolla*¹, että joko

1. σ_0 on arvioitu liian pieneksi; tai
2. mittauksessa on karkea virhe.

Kuten yllä jo selostettu, jos on käytettävissä useita sulkuvirheitä (esim. useasta linjasta ja/tai edestakaisesta vaaituksesta) voidaan *estimoida* kilometrikeskivirhe seuraavasti:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{s_i},$$

missä n on sulkuvirheiden määrä.

¹Siis: *emme* voi sanoa, että “todennäköisyys, että on tapahtunut virhe, on 95%”!

Luku 6

Korkeuden mittaus ja käsittely

6.1 Refraktiokerroin

Refraktiota kuvataan usein samanlaisella tavalla kuin Maan kaarevuutta: Käytetään *refraktiokerrointa* k , joka kuvaa valonsäteen kaarevuussäteen r ja Maapallon kaarevuussäteen R keskinäistä suhdetta: $k = R/r$.

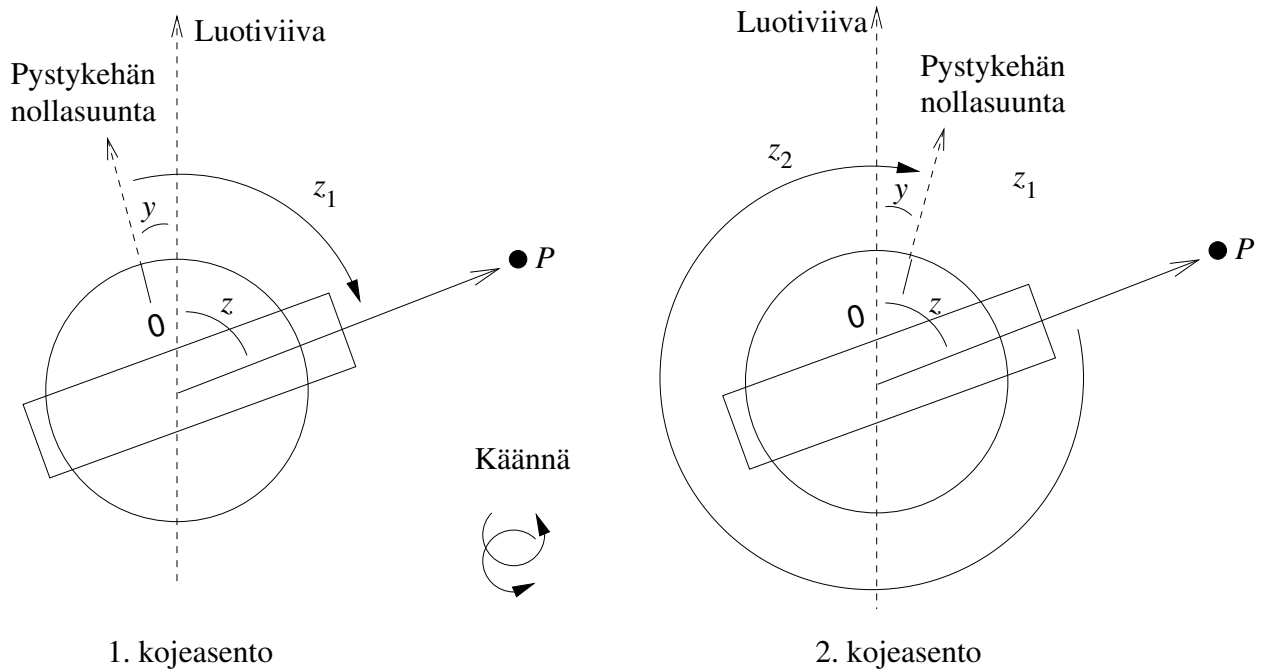
Jos jätetään mahdolliset ilman taitekertoimen n vaihtelut vaakasuunnassa huomioimatta, voidaan valonsäteen kaarevuus kirjoittaa n :n *pystygradientin* funktiona:

$$k = -R \frac{dn}{dh} \sin \beta,$$

missä $\frac{dn}{dh}$ on taitekertoimen pystygradientti ja β valonsäteen ja paikallisen vertikaalin välinen kulma, yleensä lähellä 100 gon. $\frac{dn}{dh}$ liittyy tiivistä sääolosuhteisiin ja voidaan laskea ilman lämpögradientista $\frac{dt}{dh}$.

Avoimessa ilmakehässä kaukana maan pinnalta ilman lämpögradientti asettuu adiabaattisen gradientin mukaan. Adiabaattinen gradientti on se raja-arvo, jonka yläpuolella syntyy voimakasta konvektiivista lämpökuljetusta. Kysymys on, mitä tapahtuu pienellä ilmakuplalla, joka nousee. Kun se nousee, se myös laajenee kun ympäröivä ilmanpaine vähenee. Laajenemisella se tekee työtä ympäröivään ilmaan ja siten jäähtyy. Jos nyt kuplan lämpötila on alhaisempi kuin ympäröivän ilman, se on sitä painavampi ja vajoaa takaisin. Jos kupla on kuitenkin lämpimämpi eli kevyempi kuin ympäröivä ilma (ts. jos kuplan ulkopuolella vallitsee voimakkaasti negatiivinen lämpögradientti) se jatkaa nousuaan ja syntyy voimakas *konvektio*, joka pyrkii tasoittamaan lämpögradientti. Gradientin raja-arvo eli (negatiivinen) adiabaattinen gradientti (en. *adiabatic lapse rate*) on kuivalle ilmalle $9.8^\circ\text{C}/\text{km}$; kostealle ilmalle se vaihtelee, mutta on tyypillisesti n. $5^\circ\text{C}/\text{km}$.

Kirkkaana päivänä ilman lämpögradientti on lähellä adiabaattista gradienttia (paitsi aivan lähellä maan pintaa). Konvektiosolut näkyvät lammaspilveinä (cumulus) ja voidaan käyttää hyväksi purjehduslennossa (termiikka). Kirkkaana yönä toisaalta se voi aamupäivään mennessä olla vahvasti positiivinen (inversiosää), kun maan pinta jäähtyy säteilemällä lämpöenergiansa avaruuteen, ja kylmyys siirtyy myös alimpiin ilmakerroksiin. Tämä toimii vain jos ilma on riittävän kuiva, muulloin voi syntyä sumua.



Kuva 6.1: Pystykulmamittaus

6.2 Pystykulma

Pystykulmien havaitseminen korkeuden mittauksessa:

- Pystykulmat havaitaan kahdessa kojeasennossa I ja II, kohde kerrallaan, absoluuttisena mittauksena, referenssina *luotiviiva*. Mittaamalla kahdessa asennossa voidaan eliminoida kojeen pystykehän *indeksivirhe* y , ks. kuva. Indeksivirhe on se, että pystykehästä luettu arvo ei ole tarkasti 100° (kojeasento I) tai 300° (kojeasento II), vaikka tähys olisi samassa korkeudessa kuin koje.

Olkoon tähysen ”oikea” zeniittikulma z . Ensimmäisessä kojeasennossa mitataan arvo $z_1 = z + y$; toisessa arvo $z_2 = 400^\circ - z + y$. Yhdistämällä saadaan lasketuksi erikseen sekä ”oikea” arvo $z = \frac{1}{2}(400^\circ + z_1 - z_2)$, että indeksivirhe $y = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - 400^\circ)$.

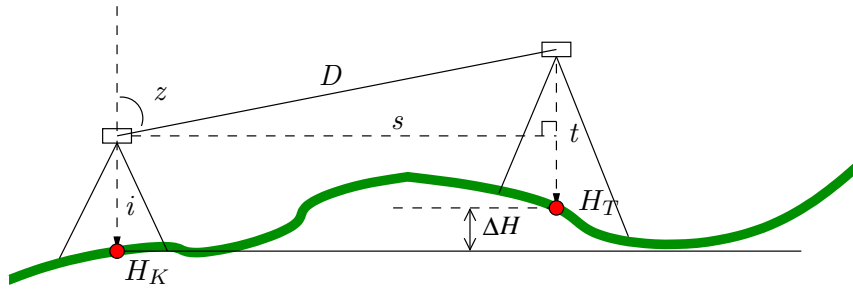
- Koska indeksivirhe kompensattorikojeissa muuttuu – lineaarisesti, jaksollisesti tai monimutkaisemmalla tavalla, mutta ainakin *hitaasti* –, on mittaukset suoritettava *mahdollisimman lyhyellä aikavälillä*. Silloin, jos $y_1 \neq y_2$, saadaan käyttämällä ”sokeasti” yo. kaava:

$$z_{lask} = \frac{1}{2}(400^\circ + z_1 - z_2) = z + \frac{1}{2}(y_1 - y_2),$$

eli tehty *virhe* on

$$z_{lask} - z = \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

- Vaihtoehtona voidaan käyttää suhteellinen pystykulman mittausta tunnetun pisteen suhteen. Tällä tavoin voidaan eliminoida myös joitakin muita kojevirheitä.



Kuva 6.2: Trigonometrinen korkeudenmäärittäminen

6.3 Trigonometrinen korkeudenmittaus

6.3.1 Periaate, virhepropagaatio

Trigonometrinen korkeudenmittaus käytetään lyhyillä etäisyyksillä¹ ($s < 250$ m). Tässä tapauksessa ei oteta mukaan maan kaarevuutta eikä refraction vaikutusta.

Kuvassa suureilla on seuraavat merkitykset:

z	pystykulma (paikallisen luotiviivan suhteen)
D	vinoetäisyys
i	kojeen korkeus
t	tähtyksen korkeus

$$\Delta H = D \cos z + i - t \quad (6.1)$$

$$H_T = H_K + \Delta H$$

Tarkkuus virhepropagaatiolla eli *varianssien kasautumislaitilla*; kertoimet saadaan osittaisdifferentioimalla kaava 6.1. Eli

$$\delta(\Delta H) = \frac{\partial \Delta H}{\partial D} \delta D + \frac{\partial \Delta H}{\partial z} \delta z = \cos z \delta D - D \sin z \delta z,$$

ja (järkevästi olettaen, että D ja z ovat toisistaan tilastollisesti riippumattomia)

$$\sigma_{\Delta H}^2 = (\cos z)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{D}{\rho} \sin z \right)^2 \sigma_z^2 + \sigma_i^2 + \sigma_t^2$$

Tässä ρ on $\frac{400}{2\pi}$, muunnoskerroin radiaaneista gooneihin: oletetaan, että σ_z on annettuna goonit yksikkönä.

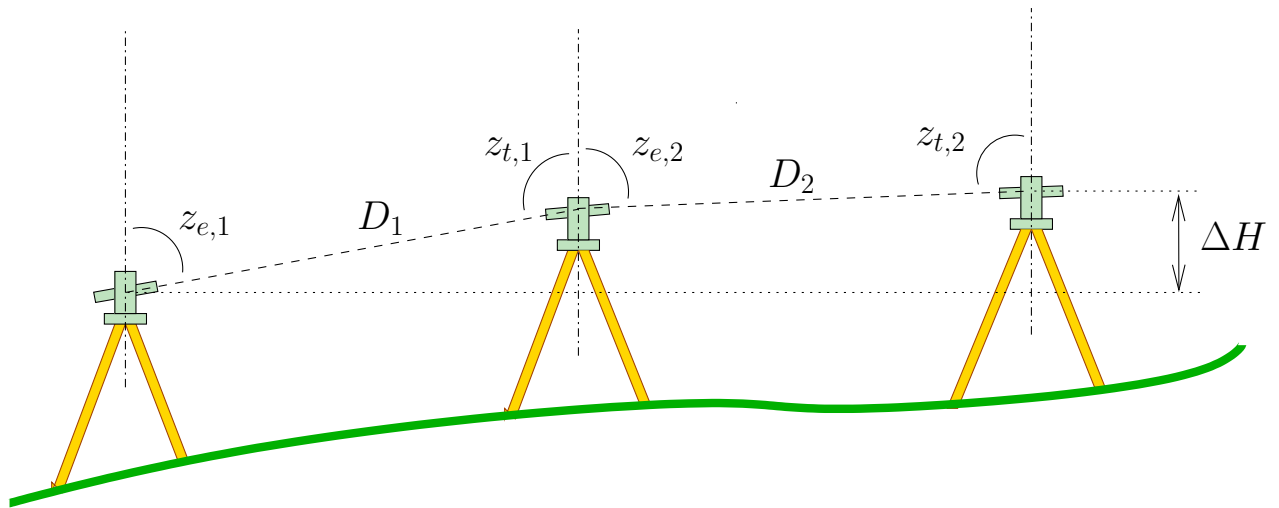
Vaihtoehtoisesti jos D :n sijaan tulee mitatuksi *vaakaetäisyys* s :

$$\Delta H = s \cot z + i - t \quad (6.2)$$

Samoin tarkkuus tassa tapauksessa kaavasta 6.2:

$$\sigma_{\Delta H}^2 = (\cot z)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{s}{\rho \sin^2 z} \right)^2 \sigma_z^2 + \sigma_i^2 + \sigma_t^2$$

¹Perinteisesti trigonometrinen korkeudenmäärittäminen on tehty myös vuoristoisessa maastossa, mm. Lapissa, jolloin mittausetäisyydet olivat kymmeniä kilometrejä.



Kuva 6.3: Trigonometrinen vaaitus

6.3.2 Trigonometrinen vaaitus

Kutsutaan etutähtys e ja takatähtys t . Niiden välisen korkeuseron ΔH määrittämiseksi käytetään kaava

$$\Delta H_i = D_i \cos z_{e,i} = -D \cos z_{t,i} = \frac{1}{2} D_i (\cos z_{e,i} - \cos z_{t,i}),$$

missä

D mitattu vinoetäisyys

z_e, z_t mitatut zeniittikulmat

$i = 1, 2, \dots$ mittausväli.

Pistevälin korkeuseron varianssi (johdetaan samalla tavalla kuin yllä):

$$\sigma_{\Delta H_i}^2 = \left(\frac{1}{2} (\cos z_{e,i} - \cos z_{t,i}) \cdot \sigma_D \right)^2 + \left(\frac{1}{2} D_i \frac{\sigma_z}{\rho} (\sin z_{e,i} + \sin z_{t,i}) \right)^2$$

Oletus: $\sigma_z = \sigma_{z_e} = \sigma_{z_t}$.

Jonomittauksessa mitataan useita pistevälejä; koko jonon korkeuseron varianssi on silloin

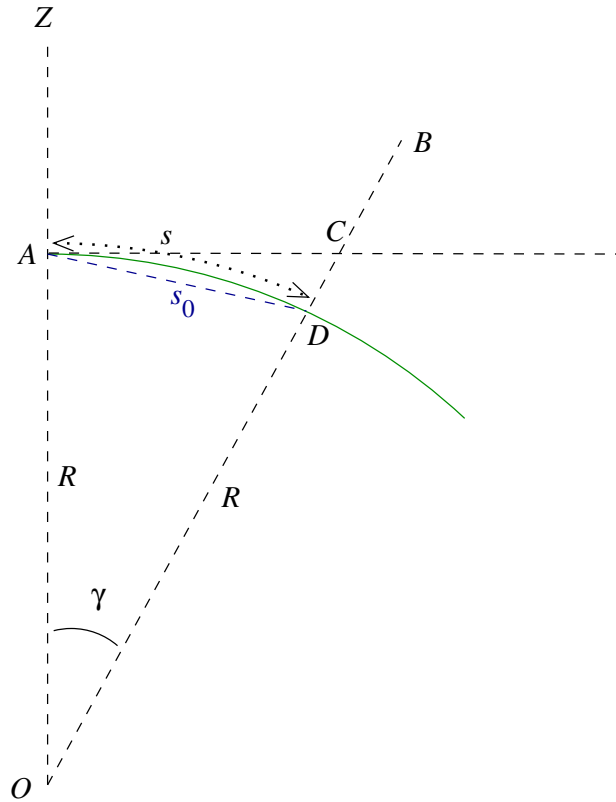
$$\sigma_{\Delta H}^2 = \sigma_{\Delta H_1}^2 + \sigma_{\Delta H_2}^2 + \dots + \sigma_{\Delta H_n}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta H_i}^2.$$

Tässä n on kojeasemavälien lukumaara; kojeasemien määrä on $n + 1$.

Tässä ei ole vielä esitetty, miten kojeen korkeus saadaan siirretyksi maassa olevaan kiintopisteeseen; siihen on olemassa erilaisia vaihtoehtoja.

6.3.3 Refraktion ja Maan kaarevuuden vaikutus

Tutkitaan refraction ja Maan kaarevuuden vaikutus korkeudenmittauksessa samalla teoreettisella lähestymistavalla: kyse on kahden erikaarevan tason tai säteen välisen etäisyyden kasvusta vaakataäisyyden mukaan.



Kuva 6.4: Maan kaarevuuden vaikutus

Maanpinnan tangenttitaso (horizonttitaso, kohtisuora luottiviiva kohtaan) A :ssa leikkää B :n paikallinen normaali (luottiviiva) pisteessä C . Kulma $\angle DAC = \frac{\gamma}{2}$. Kaarietäisyys Maan pinnalla:

$$s = \gamma R,$$

jossa γ oltava *radiaaneissa*. Approksimaatio $s \approx s_0$, missä s kaarietäisyys AD , s_0 janaetäisyys AD .

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{s_0}{2R} \approx \frac{s}{2R}.$$

Tästä kolmion sinikaavan kautta ($\angle ACO = 100^\circ - \gamma$):

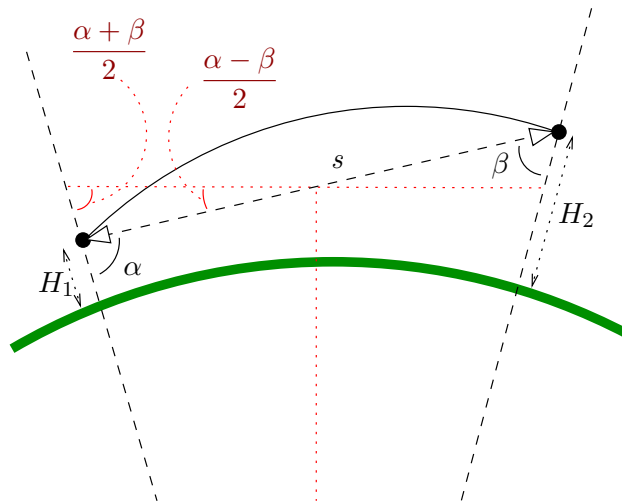
$$\begin{aligned} \frac{CD}{s} &= \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin (100^\circ - \gamma)} \\ CD_{kaar} &= \frac{s \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma} \approx s \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{s^2}{2R}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

(oletus γ pieni, siis $\cos \gamma \approx 1$) mikä kuvaa maan kaarevuuden vaikutusta korkeuseromittaukseen. Tässä olemme valinneet kirjoitustapaa $CD \equiv CD_{kaar}$, painottakseen että tämä on maan kaarevuuteen liittyvä ilmiö.

Esimerkkilaskenta:

s , m	100	200	500	1000	5000	7906	10000
CD , mm	0,8	3,2	20	79	1960	4900	7839

Kysymys: paikallinen painovoima on 9.8 m s^{-2} .



Kuva 6.5: Vastakkaiset, yht'aikaiset mittaukset

1. Paljonko vapaasti putoava esine putoaa yhden sekunnin aikana?
2. Jos esine lentää vaakasuuntaan nopeudella 7906 m s^{-1} , paljonko silloin Maan pinta “putoaa” esineen alta Maan kaarevuuden seurauksena?
3. Mitä olemme juuri keksineet?

Refraktion vaikutuksen kaava on samanlainen (mutta vastakkaisella etumerkillä) kuin Maan kaarevuuden vaikutuksen kaava 6.3: se on

$$CD_{refr} = -\frac{s^2}{2r} = -k\frac{s^2}{2R},$$

josta saadaan kokonaisvaikutus (Maan kaarevuus ja refraktio):

$$CD_{tot} = CD_{kaar} + CD_{refr} = (1 - k) \frac{s^2}{2R}.$$

Nähdään, että, mikäli $k = 1$ (fysikaalisesti epärealistista), nettoefekti häviää.

Käytännössä maaston muodot monimutkaistavat refraktion käsittelyä trigonometrisessä korkeudenmäärittämisessä, vaikka mittaukset suoritettaisiinkin ns. *pintakerroksen* ulkopuolella esim. puutornien avulla.

6.3.4 Vastakkaiset yht'aikaiset mittaukset

Vastakkaiset yht'aikaiset mittaukset eliminoivat refraktion ja Maan kaarevuuden vaikutuksen suurin osa jopa pitkillä mittausväleillä. Menetelmä on perinteisesti käytetty kolmiomittauksen yhteydessä; kuitenkin sitä käytetään myös trigonometrisessä vaaituksessa, jolloin matkat ovat luokkaa muutama sata metriä eivätkä kymmeniä kilometrejä.

Syy tähän näkyy kuvasta 6.5. Korkeusero $H_2 - H_1$ lasketaan sinisäännön avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\frac{H_2 + R}{\sin \alpha} &= \frac{H_1 + R}{\sin \beta} = \frac{s}{\sin \gamma} \Rightarrow \\
\frac{H_2 - H_1}{\sin \alpha} &= \frac{H_1 + R}{\sin \beta} - \frac{H_1 + R}{\sin \alpha} \Rightarrow \\
H_2 - H_1 &= \frac{(H_1 + R)}{\sin \beta} (\sin \alpha - \sin \beta) = \\
&= \frac{s}{\sin \gamma} (\sin \alpha - \sin \beta),
\end{aligned}$$

missä $\gamma = 200^\circ - \alpha - \beta$, siis:

$$\begin{aligned}
\sin \gamma &= \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(2 \cdot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right) = \\
&= 2 \sin\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right).
\end{aligned}$$

Nyt jos kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mu + \delta \\
\beta &= \mu - \delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin \alpha - \sin \beta &= \sin(\mu + \delta) - \sin(\mu - \delta) = \\
&= (\sin \mu \cos \delta + \cos \mu \sin \delta) - (\sin \mu \cos \delta - \cos \mu \sin \delta) = \\
&= 2 \cos \mu \sin \delta = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right).
\end{aligned}$$

Sijoittaminen tuottaa

$$H_2 - H_1 = s \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)}. \quad (6.4)$$

Tätä kaavaa voidaan myös helposti tulkita ja ymmärtää geometrisesti, ks. kuva 6.5.

Jos kulmaetäisyys γ on alle $1^\circ = 111 \text{ km}$, voidaan kirjoittaa tarkkuudella 0.02%:

$$\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right) = \cos \frac{1}{2}\gamma \approx 1.$$

Jos taas voi olettaa, että refraktion seurauksena mittaussäteen polku on ympyränkaari, ja että siis mitatuille kulmille α_m ja β_m pätee:

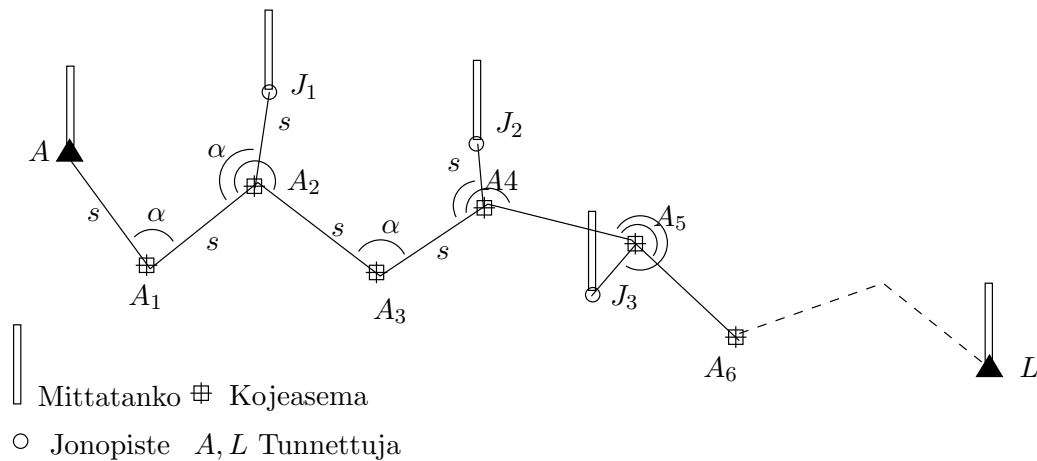
$$\alpha_m - \alpha \approx \beta_m - \beta,$$

seuraa, että kaavasta (6.4) saadaan erittäin hyvä likimääräinen kaava:

$$H_2 - H_1 \approx s \sin\left(\frac{1}{2}(\alpha_m - \beta_m)\right) = s \sin\left(\frac{1}{2}(z_1 - z_2)\right),$$

jossa $z_1 = 200^\circ - \alpha_m$, $z_2 = 200^\circ - \beta_m$ ovat pisteissä 1 ja 2 mitatut zenitiittikulmat.

Trigonometrinen korkeudenmääritys on perinteisesti käytetty vuoristomaissa. Myös Mount Everestin korkeutta määritettiin ensimmäistä kertaa Survey of India'n kolmiomittauksen puitteissa v. 1856. Nimi "Mount Everest" annettiin v. 1865 poikkeuksellisesti sen korkeuden määrittäjän Sir George EVERESTIN mukaan.

Kuva 6.6: xyH -jonomittaus

6.4 xyH -jonomittaus, “tarkka trigo”

Eräs Geodesian laboratorion kehittämä sovellus on ns. xyH -jonomittaus, lyhytsivuinen trigonometrinen korkeus- ja sijaintijono. Ks. kuva 6.6.

Tässä menetelmässä teodoliittia ei pystytettyä koskaan mitattavalle pisteelle. Se on siis *vaapaan asemapisteen menetelmän* eräs variantti. Näin kojeen pystytys on nopea eikä synny keskistysvirheitä. Mitataan EDM-korkeusjono ja monikulmiojono yhdessä operaatiossa.

Ensin lasketaan vaillinaisesti suljettu jono ja sen pisteille $A_1, \dots, A_n$ koordinaatit. Näistä koordinaateista lähtien lasketaan varsinaiset jonopisteet $J_1, \dots, J_m$ geodeettisella päätehtävällä.

Mittaamalla samalla *pystykulmat*, saadaan pisteille $J_1, \dots, J_m$ myös korkeudet.

Jotta päästään jonomittaustarkkuuteen, on käytettävä mittatankoa, jossa on keskiset tähykset sekä vaakakulman että pystyakulman havaintoa varten, sekä keskinen prisma etäisyyttä varten.

Ominaisuudet:

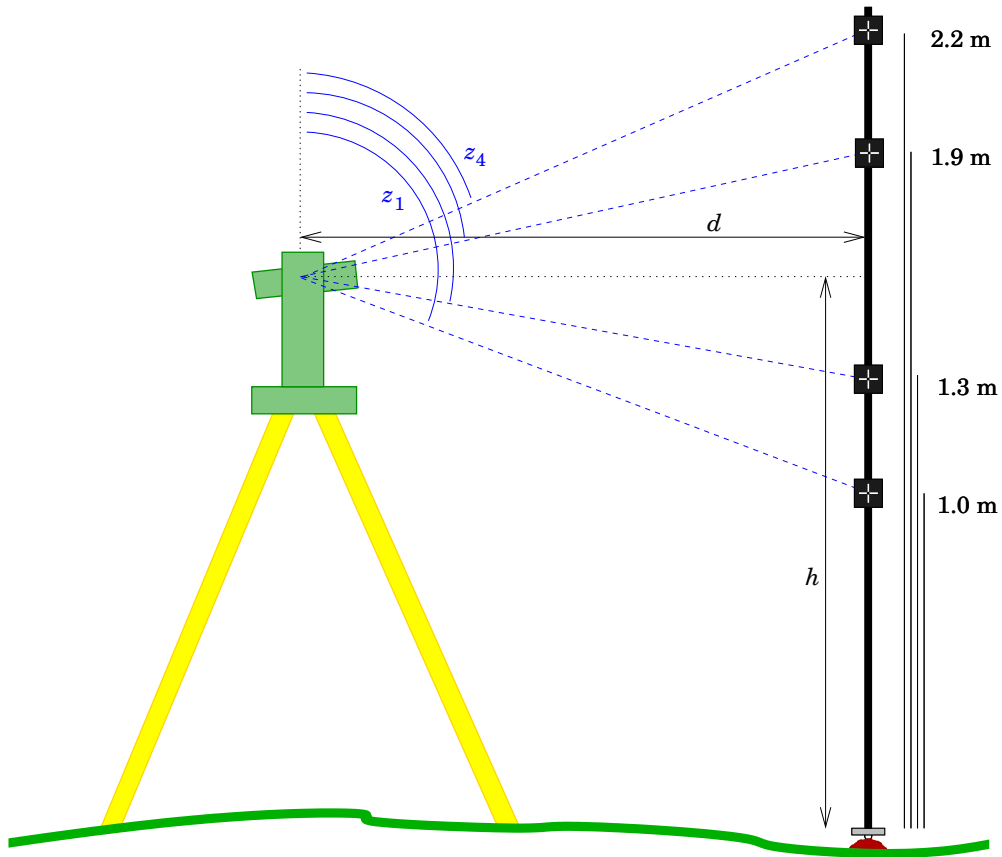
- Pystyakulmahavainnot suoritetaan yht’aikaa molemmista päistä refraktion eliminoimiseksi
- Taso- ja korkeusmittaukset suoritetaan yhtä aikaa
- *Ainoastaan koordinaattisulut* (ei liitossuuntia)
- Lyhyemmät sivut kuin normaalissa IV. luokan jonossa

Jonopisteiden välillä *ei tarvita näköyhteyttä* eli menetelmä on *joustava* etenkin metsäisillä tai kaupunkialueilla. Jonopisteillä ei myöskään tarvita näkyvyyttä ylöspäin, kuten GPS-havainnoille on vaatimus.

Eräs usein käytetty variantti on “*tarkka trigo*”. Silloin mitataan vaan pystyakulmat ja etäisyydet eikä määritetä vaakasijainteja. Se korvaa tarkkavaaitusta silloin kun maaston korkeuserot ovat jyrkkiä, tai kun on pisteitä korkeissa rakennuksissa.

6.4.1 Mittatanko

Tämä ns. xyH -tanko, johon on kiinnitetty neljä tähtäyslevyä, käytetään



Kuva 6.7: *xyH*-tanko ja sen käyttö. Kuvaus Mikko TAKALO ((TAKALO, 1995))

1. takymetrinen korkeusjonon siirtämiseksi tunnettuun pulttiin, ja
2. kolmiulotteisen jonominittauksen yhteydessä (*xyH*-jono) kuten edellisessä osassa kuvattu.

Tanko on tehty hiilikuidusta ja sen lämpö- ja kosteuslaajeneminen on olematon. Ks. kuva 6.7.

Idea on, että pystykulmamittauksilla $z_1 \dots z_4$ voidaan määrittää tuntemattomat h ja d . Tähän riittäisi jo kaksi mittausta, mikäli tanko on tarkasti pystysuunnassa asennettu. Neljän tähtyksen käyttö antaa redundanssia. Havaintoyhtälöt johdetaan seuraavasti:

$$d \cot z_i = \ell_i - h,$$

jossa $\ell_1 = 1,0 \text{ m}$, $\ell_2 = 1,3 \text{ m}$, $\ell_3 = 1,9 \text{ m}$ ja $\ell_4 = 2,2 \text{ m}$.

Linearisointi antaa (oletetaan ℓ_i tarkoiksi, eli $\ell_i = \ell_i^{(0)}$ ja $\Delta \ell_i = \ell_i - \ell_i^{(0)} = 0$):

$$\Delta d \cot z_i - d \sin^{-2} z_i \Delta z_i = -\Delta h$$

eli

$$\Delta z_i = \frac{-\Delta h - \Delta d \cot z_i}{-d} \sin^2 z_i = \begin{bmatrix} \frac{\sin^2 z_i}{d} & \frac{\sin 2z_i}{2d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h \\ \Delta d \end{bmatrix}.$$

Tämä on jo havaintoyhtälöryhmä, jossa

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \Delta h \\ \Delta d \end{bmatrix} \text{ ja } A = \begin{bmatrix} \frac{\sin^2 z_1}{d} & \frac{\sin 2z_1}{2d} \\ \frac{\sin^2 z_2}{d} & \frac{\sin 2z_2}{2d} \\ \frac{\sin^2 z_3}{d} & \frac{\sin 2z_3}{2d} \\ \frac{\sin^2 z_4}{d} & \frac{\sin 2z_4}{2d} \end{bmatrix}.$$

Ylimääräisyys (neljä havaintoa, kaksi tuntematonta) auttaa huomaamaan karkeita virheitä. Tarkka mittaus edellyttää, että h on ℓ_i -arvojen välillä, eli ei mitata jyrkästi alas- tai ylöspäin.

Luku 7

Monikulmiojonon laskenta

Vuonna 1807 Nathaniel BOWDITCH voitti kilpailun sopivimmasta monikulmiojonon laskentamenetelmästä. Palkinto oli \$10 ((Cooper, 1982, ss. 147-150)).

Bowditchin menetelmä, perinteinen suunta- ja koordinaattitasoitus erikseen, on yleisesti ottaen epäoptimaalinen. Seuraavassa tutkitaan monikulmiojonot hieman tarkemmin.

Monikulmiojono (poligoni) on mittauspisteiden jono, jossa jokaisessa jonopisteessä mitataan suunnat ja etäisyydet edelliseen ja seuraavaan pisteeseen. Käytetty laite on yleensä takymetri.

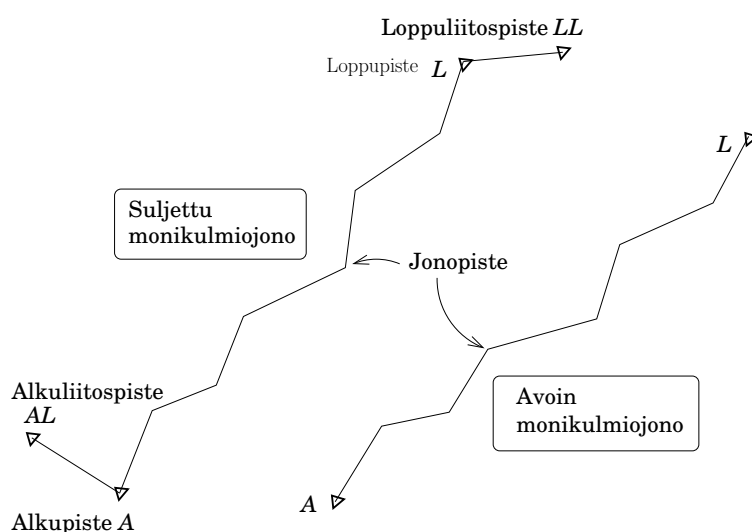
Monikulmiojonoja on kahdenlaisia: *avoimia* ja *suljettuja*. Ks. kuva 7.1. Aina tunnetaan alkupiste ja loppupisteiden koordinaatit (x, y) .

Avoimen ja suljetun monikulmiojonon välinen ero on *liitospisteiden* käyttö jälkimmäisessä. Liitospisteet ovat koordinaateiltaan tunnetut pisteet jotka auttavat orientoimaan monikulmiojono oikein.

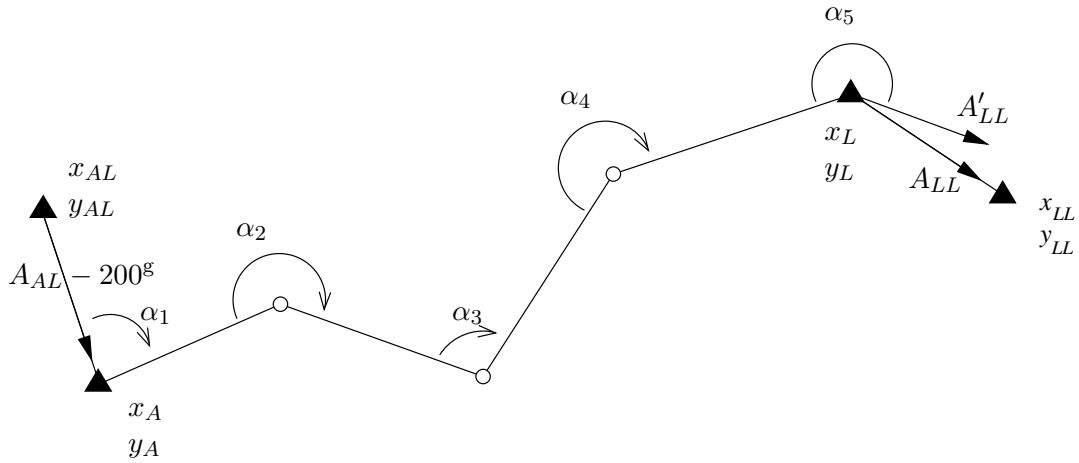
7.1 Suljettu monikulmiojono

Tunnetaan:

(x_A, y_A) ; (x_{AL}, y_{AL}) alkupiste A ja alkuliitospiste AL ;



Kuva 7.1: Avoim ja suljettu monikulmiojono



Kuva 7.2: Monikulmiojonon kuvio. Vain kulmat ja sukkusuunnat merkattu

(x_L, y_L) ; (x_{LL}, y_{LL}) loppupiste L ja loppuliitospiste LL .

Ks. kuva 7.2.

Havaitaan:

n taitekulmaa: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$n - 1$ etäisyyttä: $s_{12}, s_{23}, \dots, s_{n-1,n}$

Laskettava:

(x_i, y_i) -koordinaatit jonopisteille $i = 2, \dots, n - 1$. Uusia pisteitä on $n - 2$ kappaletta.

7.2 Alku- ja loppuliitossuunnan laskeminen

Geodeettisen käänteistehtävän ratkaisuna saadaan *alkuliitossuunta* ja *loppuliitossuunta*:

$$\begin{aligned} A_{AL} &= \arctan \frac{y_{AL} - y_A}{x_{AL} - x_A} + k\pi, \\ A_{LL} &= \arctan \frac{y_{LL} - y_L}{x_{LL} - x_L} + k\pi, \end{aligned} \quad (7.1)$$

jossa $k \in \{0, 1\}$ on valittava sopivasti oikean kvadrantin mukaan.

Käytettävä likimääräinen Bowditch-laskentamenetelmä on kaksivaiheinen. Ensin lasketaan läpi *suunnat*, sitten *koordinaatit*.

7.3 Suuntien tasoitus

Lasketaan suunnat $A_{AL}, A_{12}, \dots, A_{n-2,n-1}, A_{n-1,n}, A_{n,n+1}$, missä tunnetaan A_{AL} , ja $A_{n,n+1}$ on saatu havainnoista nimellä A_{LL} .

Seuraavasti¹:

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= A_{AL} + \alpha_1 \\
 A_{23} &= A_{12} - 200^g + \alpha_2 \\
 \dots &\dots \dots \\
 A_{i,i+1} &= A_{i-1,i} - 200^g + \alpha_i \\
 \dots &\dots \dots \\
 A_{n-1,n} &= A_{n-2,n-1} - 200^g + \alpha_{n-1} \\
 A'_{LL} &= A_{n-1,n} - 200^g + \alpha_n
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Lopuksi saadaan siis arvo A'_{LL} , joka, jos kaikki kulmahavainnot α_i olisivat virheettömiä, olisi identisesti sama kuin kaavalla (7.1) koordinaatteista laskettu A_{LL} . Todellisuudessa näin ei kuitenkaan ole, vaan *suuntasulkuvirhe* on:

$$w_t = A'_{LL} - A_{LL}.$$

Tämä sulkuvirhe poistetaan, eli *tasoitetaan*, jakamalla se tasan kaikille taitekulmille eli jokaiseen taitekulmaan tehdään *korjaus*:

$$\Delta\alpha_i = -\frac{w_t}{n},$$

jonka jälkeen suoritetaan kulmien lasku uudelleen, tuloksena *tasoitettut suunnat*:

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_{12} &= A_{AL} + (\alpha_1 + \Delta\alpha) \\
 \hat{A}_{23} &= A_{12} - 200^g + (\alpha_2 + \Delta\alpha) \\
 \dots &\dots \dots \\
 \hat{A}_{i,i+1} &= A_{i-1,i} - 200^g + (\alpha_i + \Delta\alpha) \\
 \dots &\dots \dots \\
 \hat{A}_{n-1,n} &= A_{n-2,n-1} - 200^g + (\alpha_{n-1} + \Delta\alpha) \\
 \hat{A}'_{LL} &= A_{n-1,n} - 200^g + (\alpha_n + \Delta\alpha)
 \end{aligned}$$

7.4 Koordinaattien tasoitus

Näin tasoitetuilla suunnilla lasketaan pisteille $2, \dots, n-1$ koordinaatit geodeettisella päätehtävällä:

Piste 2:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{12} &= s_{12} \cos \hat{A}_{12} \\
 \Delta y_{12} &= s_{12} \sin \hat{A}_{12}
 \end{aligned}$$

jonka avulla

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 + \Delta x_{12} \\
 y_2 &= y_1 + \Delta y_{12}
 \end{aligned}$$

¹Huomaa, että ensimmäisen taitekulman α_1 yhteydessä ei vähennetä 200 gon! Ja jos haluat pitää suunta-
kulmat A_i kätevästi välillä $[0, 400 \text{ gon})$, on joskus lisättävä tai vähennettävä 400 gon.

Yleinen piste i : (ja myös loppupiste $i \rightarrow n$)

$$\begin{aligned}\Delta x_{i-1,i} &= s_{i-1,i} \cos \hat{A}_{i-1,i} \\ \Delta y_{i-1,i} &= s_{i-1,i} \sin \hat{A}_{i-1,i}\end{aligned}$$

jonka avulla

$$\begin{aligned}x_i &= x_{i-1} + \Delta x_{i-1,i} \\ y_i &= y_{i-1} + \Delta y_{i-1,i}\end{aligned}$$

Yleisesti: (muista, että $x_A = x_1$ ja $y_A = y_1$)

$$\begin{aligned}x_k &= x_A + \sum_{i=2}^k s_{i-1,i} \cos \hat{A}_{i-1,i}, \\ y_k &= y_A + \sum_{i=2}^k s_{i-1,i} \sin \hat{A}_{i-1,i}.\end{aligned}$$

Sijoittamalla $k \rightarrow n$ saadaan *loppupisteen* kaavat ja koordinaatit x_n, y_n of the *closing points*.

Mikäli havainnot olisivat virheettömiä, olisi $x_n = x_L$ ja $y_n = y_L$, mutta näin ei ole asian laita. Saadaan *koordinaattisulkuvirheet*:

$$\begin{aligned}w_x &= x_n - x_L, \\ w_y &= y_n - y_L.\end{aligned}$$

Sulkuvirheet tasoitetaan antamalla jokaiselle pistevälille *painokerroin* $q_{i-1,i}$, ja näiden painokertoimien suhteessa jaetaan w_x ja w_y pisteväleille.

Pieni painokerroin $\Leftrightarrow$ suuri paino, suuri painokerroin $\Leftrightarrow$ pieni paino!

Lasketaan painokerrointen summaa vastaava *standardikorjaus* erikseen x - ja y -koordinaateille:

$$\begin{aligned}dx &= -\frac{w_x}{\sum_{i=2}^n q_{i-1,i}}, \\ dy &= -\frac{w_y}{\sum_{i=2}^n q_{i-1,i}}.\end{aligned}$$

Tasoitetuiksi koordinaateiksi saadaan

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= \hat{x}_{i-1} + s_{i-1,i} \cos \hat{A}_{i-1,i} + q_{i-1,i} dx, \\ \hat{y}_i &= \hat{y}_{i-1} + s_{i-1,i} \sin \hat{A}_{i-1,i} + q_{i-1,i} dy;\end{aligned}$$

tai alkupisteestä A laskien:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \hat{x}_A + \sum_{i=2}^k \left(s_{i-1,i} \cos \hat{A}_{i-1,i} + q_{i-1,i} dx \right), \\ \hat{y}_k &= \hat{y}_A + \sum_{i=2}^k \left(s_{i-1,i} \sin \hat{A}_{i-1,i} + q_{i-1,i} dy \right).\end{aligned}$$

7.5 Laskentakaavio

Koko laskenta voidaan suorittaa alla olevan laskentakaavion avulla, jota voidaan helposti automatisoida. Annettuna $t_{AL} = 145,3750$ gon ja $t_{LL} = 72,3818$ gon, sekä alkupisteen A ja loppupisteen L koordinaatit. $n = 5$. Käytetty painotus: tasainen.

i	α_i	$A_{i,i+1}$	ΔA	$\hat{A}_{i,i+1}$
A		<u>345,3750</u>		
1	212,2345	157,6095	+7	157,6102
2	151,4565	109,0660	+15	109,0675
3	221,9823	131,0483	+22	131,0505
4	175,9831	107,0314	+29	107,0343
5	165,3467	72,3781	+37	72,3818
L		<u>72,3818</u>		
Sulkuvirhe w_t		-0,0037	↑	

i	$\hat{A}_{i,i+1}$	$s_{i,i+1}$	$s \cos A$	$s \sin A$	x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	$\hat{x}_i$	$\hat{y}_i$
1	157,6102	502,345	-395,038	+310,315	<u>1000,235</u>	<u>256,256</u>				
2	109,0675	487,241	-69,164	+482,307	605,197	566,571	+9	-36	,206	,535
3	131,0505	445,981	-209,001	+393,977	536,033	1048,878	+18	-73	,051	,805
4	107,0343	512,125	-56,472	+509,002	327,032	1442,855	+26	-109	,058	,746
5	72,3818				270,560	1951,857	+35	-146	,595	,711
L					<u>270,595</u>	<u>1951,711</u>				
Sulkuvirheet w_x, w_y					-0,035	+0,146	↑	↑		

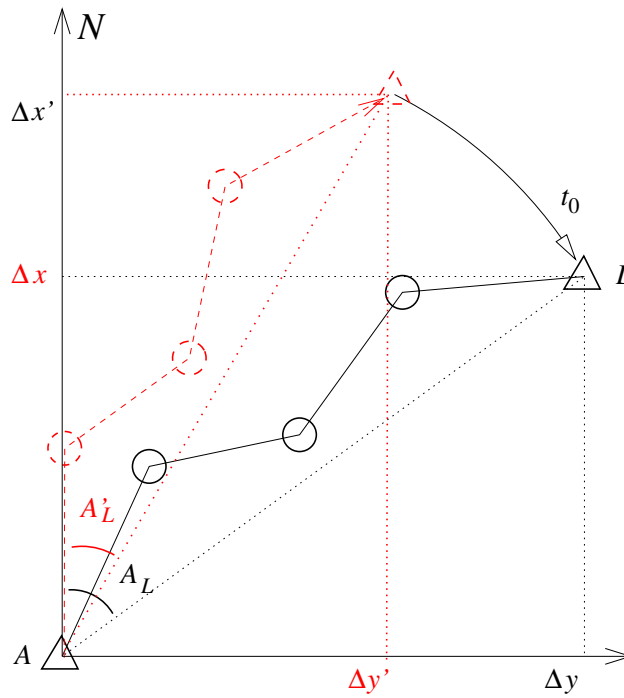
Lähtö- ja loppupisteiden annetut arvot alleviivattuina, havainnot mustia, lasketut punaisia, sulkuvirheet ja tasoituksen korjaukset sinisia. Tämä kaavio kelpaa käytännön työhön paikallisessa runkomittauksessa.

7.5.1 Huomautuksia

- Yllä kuvattu tasoitusmenetelmä on *likimääräinen* eli suboptimaalinen. Oikeaoppisessa pienimmän neliösumman tasoitusmenetelmässä lasketaan kulma- ja koordinaattikorjaukset samanaikaisesti, koska ne *korreloivat* keskenään. Tulokset ovat silloin hieman erilaisia.

Kuitenkin, jos monikulmiojono on suhteellisen suora (eli sivut suunnilleen samansuuntaisia), on suboptimaalisuus pieni ja oikeaoppinen tasoitus aiheuttaisi vain pieniä muutoksia lopullisiin koordinaatteihin. Toisaalta ei ole toivottavaa että sivut olisivat *aivan* samansuuntaisia; se hankaloittaisi mahdollisten karkeiden virheiden etsintää.

- Jonolasku tapahtuu *tasolaskuna*. Kuitenkin havainnot on tehty kolmiulotteisesti, “avaaruudessa”. Tämä edellyttää, että koje ja tähys ovat tarkasti ja oikein *keskistettyjä* ja koje *tasattu*, ja että kaikki relevantit *reduktiot* (kallistus- nollataso-, ks. Johdanto geodesiaan -luentomoniste) on suoritettu. Vain siinä tapauksessa voidaan sanoa, että



Kuva 7.3: Avoin monikulmiojono

- ▷ vaakakulmat ovat tasokulmia, ja
- ▷ redukoidut etäisyydet ovat tasoetäisyyksiä.
- Tasokoordinaattien laskennassa suunnat referoidaan aina *karttapohjoiseen* ja myös etäisyydet ovat redukoitu *karttatasoon* eli projektion aiheuttama *mittakaavavirhe* on otettu huomioon.

7.6 Avoin monikulmiojono

Yleensä pyritään mittaamaan suljettu monikulmiojono, koska se antaa mahdollisuuden tarkistaa ja tasoittaa sekä mitattuja kulmia että etäisyyksiä. On kuitenkin tilanteita, joissa tämä on mahdotonta tai hankalaa ja joissa on käytettävä *vaillinaisesti suljettua* jonoa.

Yleisin on tapaus, jossa ei tunneta alku- eikä loppusuuntaa. Ks. kuva 7.3.

Tunnetaan x_A, y_A , alkupiste

x_L, y_L , loppupiste

Laskettava jonopisteille koordinaatit (x_i, y_i) , $i = 2, \dots, n - 1$.

7.6.1 Lähtösuunta

Koska alku- ja loppuliitossuuntaa ei tunneta, suuntia ei voida tasoittaa. Suunnan t_{12} laske-
miseksi ei ole lähtösuuntaa. Sitä voidaan saada kahdella eri tavalla:

1. Havainnoista *ottamalla ensimmäisen sivun suuntakulma* $A_{12} = 0$ (kuva), tai (paremmin)
2. Valitaan kartalta mittaamalla *likiarvo* A_{12} :lle, sanotaan A'_{12} .

7.6.2 Jonon laskenta

Suoritetaan suuntien lasku tuttuun tapaan:

$$\begin{aligned} A_{12} &= A'_{12} \\ A_{23} &= A_{12} - 200^g + \alpha_2 \\ &\dots \dots \dots \\ A_{i,i+1} &= A_{i-1,i} - 200^g + \alpha_i \\ &\dots \dots \dots \\ A_{n-1,n} &= A_{n-2,n-1} - 200^g + \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

Nämä suunnat ovat "lopullisia". Laskemme niille koordinaatit geodeettisella päätehtävällä:

$$\begin{aligned} x'_2 &= x_A + s_{12} \cos A_{12}, \\ y'_2 &= y_A + s_{12} \sin A_{12}, \end{aligned}$$

ja niin edelleen:

$$\begin{aligned} x'_i &= x'_{i-1} + s_{i-1,i} \cos A_{i-1,i}, \\ y'_i &= y'_{i-1} + s_{i-1,i} \sin A_{i-1,i}. \end{aligned}$$

Lopuksi:

$$\begin{aligned} x'_n &= x'_{n-1} + s_{n-1,n} \cos A_{n-1,n}, \\ y'_n &= y'_{n-1} + s_{n-1,n} \sin A_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Tämä tasointa on suoritettu oikealla tavalla, mutta *väärin orientoidussa koordinaatistossa*. Sulkuvirheet $\Delta x' = x'_n - x_L$ ja $\Delta y' = y'_n - y_L$ eivät kerro mittausvirheistä vaan oletetun suunnan A'_{12} likimääräisyydestä. Tästä syystä sulkuvirheitä ei saa poistaa tasoittamalla kuten täysin suljetussa jonossa.

Koko jono on *kiertynyt* kulman t_0 verran, ja sen pitää kiertää takaisin HELMERT- eli yhdenmuotoisuusmuunnoksella.

Koska alkupiste A on molempien koordinaatistojen välinen kiertopiste, voimme yksinkertaisesti laskea niiden välisen mittakaavakertoimen K ja kiertokulman t_0 , eli

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}}, \\ t_0 &= \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} - \arctan \frac{\Delta y'}{\Delta x'} \end{aligned}$$

– tai puolikulmakaavalla:

$$t_0 = 2 \left[\arctan \frac{\Delta y}{\Delta x + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} - \arctan \frac{\Delta y'}{\Delta x' + \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}} \right]$$

missä

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_L - x_A, \\ \Delta y &= y_L - y_A, \\ \Delta x' &= x'_n - x_A, \\ \Delta y' &= y'_n - y_A. \end{aligned}$$

Konstruoidaan taas muunnosmatriisi:

$$\begin{aligned}c &= K \cos t_0, \\s &= K \sin t_0,\end{aligned}$$

jonka avulla jonopisteiden $i = 1, \dots, n$ koordinaateiksi saadaan:

$$\begin{aligned}x_i &= x_A + c\Delta x'_i - s\Delta y'_i, \\y_i &= y_A + s\Delta x'_i + c\Delta y'_i.\end{aligned}$$

Matriisimuodossa:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x'_i \\ \Delta y'_i \end{bmatrix},$$

missä

$$\begin{aligned}\Delta x'_i &= x'_i - x_A, \\ \Delta y'_i &= y'_i - y_A.\end{aligned}$$

Huomaa, että matriisissa

$$M = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{bmatrix}$$

suuntakorjaus t_0 korjaa ainoastaan alkusuunta-olettamuksen, kun taas mittakaavakorjaus K sisältää myös mittausepä-tarkkuuden aiheuttaman sulkuvirheen korjauksen²: vaikka lähtösuunta t_{12} olisikin täysin oikein arvattu, kuitenkin eivät x'_n, y'_n välttämättä osuisi tarkkaan pisteeseen x_L, y_L . Kuitenkin sivusuunnassa (kohtisuoraan jonoa vastaan) jää havaintovirhe tasoittamatta, tai tarkemmin sanottuna, se “absorboituu” t_0 :aan.

Hyvä lopputarkastus on:

$$\begin{aligned}x_L &\stackrel{?}{=} x_A + c\Delta x'_n - s\Delta y'_n, \\ y_L &\stackrel{?}{=} y_A + s\Delta x'_n + c\Delta y'_n.\end{aligned}$$

Tämän lisäksi on tarkistettava, onko K realistinen, eli lähellä 1. Vaihtoehtoisesti voidaan laskea yksi koordinaattisulkuvirhe asettamalla $K = 1$, ja testata se tunnetun etäisyysmitauksen tarkkuutta vastaan.

²...eli se on alkeellinen *tasointus*.

Luku 8

Ehtoyhtälöiden tasoitus

8.1 Teoria

Tasoituskaskussa tavataan usein tilanne, jossa tutttujen *havaintoyhtälöiden* muodostaminen ei ole tarkoituksenmukaista, vaan on helpompaa vaihtoehtoisesti muodostaa *ehtoyhtälöitä*. Silloin kirjoitetaan:

$$\begin{aligned} \underline{y}_1 &= b_{11}\underline{\ell}_1 + b_{12}\underline{\ell}_2 + \cdots + b_{1n}\underline{\ell}_n + b_{10}; \\ \underline{y}_2 &= b_{21}\underline{\ell}_1 + b_{22}\underline{\ell}_2 + \cdots + b_{2n}\underline{\ell}_n + b_{20}; \\ \dots &\dots \dots \\ \underline{y}_k &= b_{k1}\underline{\ell}_1 + b_{k2}\underline{\ell}_2 + \cdots + b_{kn}\underline{\ell}_n + b_{k0}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

...missä suureet $\underline{y}_i$ kutsutaan *nollasuureiksi*, koska niiden odotusarvo on nolla. Havainnoista lasketut $\underline{y}_i$ -arvot kutsutaan *sulkuvirheeksi*. Mittausvirheiden vuoksi ne eivät ole tarkasti nolla, vaan jakautuvat nollan molemmiin puolin.

Tässä on k ehtoyhtälöä n havaintosuureiden välillä. Ehdot kertovat, että teoreettisesti, jos annetut havainnot $\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_2, \dots, \underline{\ell}_n$ olisivat virheettömiä, niiden yllä annetut lineaariyhdistelmät olisivat nolla. Esimerkiksi vaaitussilmukan korkeuseromittausten summa, eli silmukan *sulkuvirhe*, pitäisi olla nolla.

Ehtoyhtälöiden tasointumenetelmässä havaintosuureet $\underline{\ell}_j$ ovat samalla myös tuntemattomat $\hat{\underline{\ell}}_j$, siis suureet joiden arvot halutaan estimoida mahdollisimman tarkasti. *Tasointustehtävänä* on tässä tapauksessa korjata havaintosuureet $\underline{\ell}_j$ näin, että saadaan nämä optimaaliset estimaattorit $\hat{\underline{\ell}}_i$. Samalla tasoinuksen jälkeen ehdot täyttävät ja sulkuvirheet häviävät.

Matriisimuotoon:

$$\underline{y} = B\underline{\ell} + \underline{b}. \tag{8.2}$$

Jos oletetaan, että kaikilla havainnoilla $\underline{\ell}_i$ on sama keskivirhe σ ja että ne eivät korreloi keskenään (englannin kielellä, ne ovat i.i.d., *Independent and Identically Distributed*), voidaan kirjoittaa, että

$$\hat{\underline{\ell}} = \underline{\ell} - B^T (BB^T)^{-1} \underline{y}. \tag{8.3}$$

Nollasuureiden vektorin $\underline{y}$ alkioden lukumäärä, *ehtojen määrä*, on aina pienempi kuin havaintojen eli havaintovektorin $\underline{\ell}$ alkioden määrä:

$$\begin{aligned} \underline{\ell} &\in \mathbb{R}^n, \\ \underline{y} &\in \mathbb{R}^k, \end{aligned}$$

missä $k < n$. B on $k \times n$ -kokoinen matriisi, siinä on k riviä ja n saraketta. B^T taas on $n \times k$ -kokoinen ja BB^T on $k \times k$ -kokoinen.

8.2 Esimerkki: kolmioehto

Klassinen esimerkki ehtotasoituksesta on kolmion kolmen kulman ehdon

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 200^\circ$$

käyttäminen mittattujen kulmien $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3$ tasoittamiseksi.

Kirjoitetaan tämä ehtoyhtälönä:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 \\ \underline{\alpha}_2 \\ \underline{\alpha}_3 \end{bmatrix} - 200^\circ,$$

missä $\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 & \underline{\alpha}_2 & \underline{\alpha}_3 \end{bmatrix}^T$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Suure $\underline{y}$ on ongelman *nollasuure*.

Lasketaan matriisi BB^T ja vektori $B^T (BB^T)^{-1} \underline{y}$:

$$BB^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3; \quad (BB^T)^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Siis

$$B^T (BB^T)^{-1} \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \underline{y}$$

ja

$$\hat{\underline{\ell}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \end{bmatrix} = \underline{\ell} - B^T (BB^T)^{-1} \underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 - 1/3 \underline{y} \\ \underline{\alpha}_2 - 1/3 \underline{y} \\ \underline{\alpha}_3 - 1/3 \underline{y} \end{bmatrix},$$

tulos yhteensopiva aikaisempien tulosten kanssa, jos muistetaan, että $\underline{y} = \underline{\Delta}$ on *sulkuvirhe*. Sulkuvirhe tasoitetaan pois havaituista kulmista, jokainen kulma saa kolmasosan korjauksesta. Huomaa, että ehtotasoitusta on tässä tapauksessa *paljon elegantimpi ja yksinkertaisempi* kuin havaintoyhtälöistä.

8.3 Monikulmiojonotasoitus ehtoyhtälötasoituksena

8.3.1 Ilman painotusta

Suljetun monikulmiojonon suuntatasoitusta (kaava (7.2)) voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\underline{y} \equiv A'_n - A_{LL} = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \beta,$$

missä

$$\beta \equiv A_{AL} - A_{LL} - (n-1) \cdot 200^\circ, \quad (8.4)$$

mikä on ehtoyhtälön esimerkki — $\underline{y}$ on nollasuure ($E\{\underline{y}\} = 0$) nimeltä *sulkuvirhe*. Jos havainnoiksi valitaan kulmat $\underline{\ell} \equiv \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 & \underline{\alpha}_2 & \cdots & \underline{\alpha}_n \end{bmatrix}^T$, seuraa, että matriisi B ja vektori $\mathbf{b}$ (kaava 8.2) ovat muodoltaan

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \beta$$

ja jos oletamme että havainnot eivät korreloi keskenään, saadaan

$$BB^T = n$$

ja

$$\hat{\ell} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_i \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_i \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{n} \cdot \underline{y},$$

eli

$$\hat{\alpha}_i = \underline{\alpha}_i - \frac{y}{n} = \underline{\alpha}_i - \frac{A'_n - A_{LL}}{n},$$

eli suuntasulkuvirhe $w_i = A'_n - A_{LL}$ (joka saadaan laskemalla läpi monikulmiojonon suunnat ja vertaamalla loppusuunta A'_n koordinaateista saadun loppusuunnan A_{LL} kanssa) jaetaan “kristillisesti” kaikkien jonon kulmapisteiden yli.

Suure β on vakio. Se voidaan laskea suoraan pisteiden A, AL, L, LL koordinaattien (sekä monikulmiojonon pistemäärän) perusteella.

8.3.2 Painotuksen kera

Mikäli havaintosuureet eivät ole kaikki yhtä tarkkoja, on käytettävä *painotusta*. Olkoon havaintovektorin varianssimatriisi (*diagonaalimatriisi*)

$$\text{Var}(\ell) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \equiv \Sigma.$$

Ehtoyhtälötasoituskaava muuttuu seuraavaksi:

$$\hat{\ell} = \underline{\ell} - \Sigma B^T (B \Sigma B^T)^{-1} \underline{y}, \quad (8.5)$$

missä

$$B \Sigma B^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

ja

$$\Sigma B^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \sigma_n^2 \end{bmatrix},$$

lopputuloksena

$$\hat{\ell} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_i \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_i \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1}^2 \\ \sigma_n^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \cdot \underline{y}, \quad (8.6)$$

tulos jota saatiin jo luvussa 7.4 vaikkakin eri notaatiolla.

Havaintojen varianssit toimivat ehtotasoituksessa painokertoimina.

Voimme määritellä *painokertoimet* seuraaviksi:

$$q_i \equiv \sigma_i^2 / \sigma_0^2,$$

jossa σ_0^2 mielivaltainen *varianssitekijä* eli *painoyksikön varianssi*. Silloin kaavasta 8.6 tulee:

$$\hat{\ell} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_i \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_i \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n q_i} \cdot \underline{y}.$$

Nyt,

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_n \end{bmatrix}$$

missä Q on *painokerroinmatriisi*.

Lisäksi:

1. Havainnoille tehtävä tasoituskorjaus on verrannollinen painokertoimeen;
2. Tasoituskorjausten summa on sama kuin sulkuvirhe $\underline{y}$ päinvastaisella etumerkillä: *tasoitus poistaa sulkuvirheen*.

Jos kaikki varianssit ovat samoja, $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$, $i = 1, \dots, n$; $\Sigma = \sigma_0^2 I$, tapaus 8.5 palautuu yksinkertaisempaan tapaukseen 8.3.

8.4 Jonon laskenta

Jono lasketaan läpi kuten aikaisemmin on kuvattu. Tässä tutkitaan lähemmin painotus, virheiden kasautuminen ja tilastillinen testaus.

8.4.1 Painokertoimien valinnasta

Painokertoimien $q_{i-1,i}$ valinta voidaan tehdä usealla eri tavalla. Yllä esitetty laskumenetelmä on itse asiassa *pienimmän neliösumman tasoitus*, joka on optimaalinen vain jos se ottaa huomioon havaintojen tosiasialliset mittaustarkkuudet eli satunnaisvirheiden suuruuden. Näin ollen käytössä on *kaski erilaista painotusmenetelmää*:

1. Painotus pistevälien etäisyyksien mukaan:

$$\sum_{i=2}^n q_{i-1,i} = \sum_{i=2}^n s_{i-1,i}.$$

Silloin koordinaattisulkuvirheet w_x ja w_y tasoitetaan etäisyyksien suhteessa, ja pitkiä pistevälejä korjataan suhteessa enemmän (eli ne saavat vähemmän *painoa*) kuin lyhyitä välejä.

2. Tasainen painotus:

$$\sum_{i=2}^n q_{i-1,i} = n - 1 \Rightarrow q_{i-1,i} = q = \frac{1}{n - 1}$$

Tällöin kaikki pistevälit, sekä lyhyet että pitkät, saavat saman suuruiset korjaukset, $-w_x/n-1$ x -koordinaattierolle ja $-w_y/n-1$ y -koordinaattierolle.

Intuitiivisesti on selvää, että painotus etäisyyksien mukaan on oikeampi siinä tapauksessa, että käytetyn etäisyysmittarin mittauksen tilastollinen epävarmuus kasvaa etäisyyden mukaan, eli mittausepävarmuus on sitä suurempi, miten pitempi matka on. Tasainen painotus on oikeellisempi niissä tapauksessa, missä etäisyyksien mittausvirhe *ei* riipu (merkittävästi) mitatusta pituudesta.

Nykyiset mittauslaitteet ovat niin tarkkoja että – ainakin paikallisessa monikulmiojonomitauksissa – tasainen painotus on oikeampi.

8.4.2 “Realistiset” painoluvut

Voidaan valita painoluvut myös “realististen” varianssien perusteella, käyttämällä parhaat olemassa olevat arvot etäisyys- ja suuntahavaintojen keskivirheestä.

Pistevälin varianssi saadaan varianssien kasautumislain perusteella (josta enempää myöhemmin):

$$\sigma_{x_{j-1,j}}^2 = (\cos A_{j-1,j} \sigma_s)^2 + \left(s_{j-1,j} \sin A_{j-1,j} \frac{\sigma_A [g]}{\rho} \right)^2 \quad (8.7)$$

$$\sigma_{y_{j-1,j}}^2 = (\sin A_{j-1,j} \sigma_s)^2 + \left(s_{j-1,j} \cos A_{j-1,j} \frac{\sigma_A [g]}{\rho} \right)^2 \quad (8.8)$$

σ_s etäisyyshavaintojen keskivirhe

$\sigma_A [g]$ suuntahavaintojen keskivirhe *gooneissa*

$x_{j-1,j} \equiv x_j - x_{j-1}$, $y_{j-1,j} \equiv y_j - y_{j-1}$.

Koska nyt x :lle ja y :lle on omat painoluvut, lasketaan

$$\sum p_{x_j} = \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{x_{j-1,j}}^2, \quad \sum p_{y_j} = \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{y_{j-1,j}}^2$$

$$dx = -\frac{w_x}{\sum \sigma_{x_{j-1,j}}^2}, \quad dy = -\frac{w_y}{\sum \sigma_{y_{j-1,j}}^2}$$

$$x_k = x_{k-1} + s_k \cos A_k + \sigma_{x_{k-1,k}}^2 \frac{w_x}{\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{x_{j-1,j}}^2}$$

$$y_k = y_{k-1} + s_k \sin A_k + \sigma_{y_{k-1},k}^2 \frac{w_y}{\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{y_{j-1},j}^2}$$

Tasointa tapahtuu todellisten havaintopäätarkkuuksien suhteessa.

Pistevälin epätarkkuus johtuu sekä suunta- että etäisyyshavainnon epätarkkuudesta.

8.4.3 Relatiivinen pistekeskivirhe, loppupistekeskivirhe

Määritetään vielä *relatiivinen pistekeskivirhe*

$$\sigma_{P_{j-1},P_j}^{rel} \equiv \sqrt{\sigma_{x_{j-1},j}^2 + \sigma_{y_{j-1},j}^2},$$

jolloin saadaan kaavojen 8.7, 8.8 avulla

$$\begin{aligned} \sigma_{P_{j-1},P_j}^{rel} &= \sqrt{(\cos A_{j-1,j} \sigma_s)^2 + \left(s_{j-1,j} \sin A_{j-1,j} \frac{\sigma_A [g]}{\rho}\right)^2 +} \\ &\quad + (\sin A_{j-1,j} \sigma_s)^2 + \left(s_{j-1,j} \cos A_{j-1,j} \frac{\sigma_A [g]}{\rho}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_s^2 + s^2 \left(\frac{\sigma_A [g]}{\rho}\right)^2}, \end{aligned}$$

koska $\sin^2 A_{j-1,j} + \cos^2 A_{j-1,j} = 1$.

Tällä kaavalla voi laskea jononmittauksen loppupisteen pistekeskivirhettä summaamalla:

$$\sigma_{P_n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sigma_{P_{i-1},i}^{rel}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\sigma_s^2 + s_{i-1,i}^2 \left(\frac{\sigma_A [g]}{\rho}\right)^2\right]},$$

8.4.4 Karkeiden virheiden löytäminen

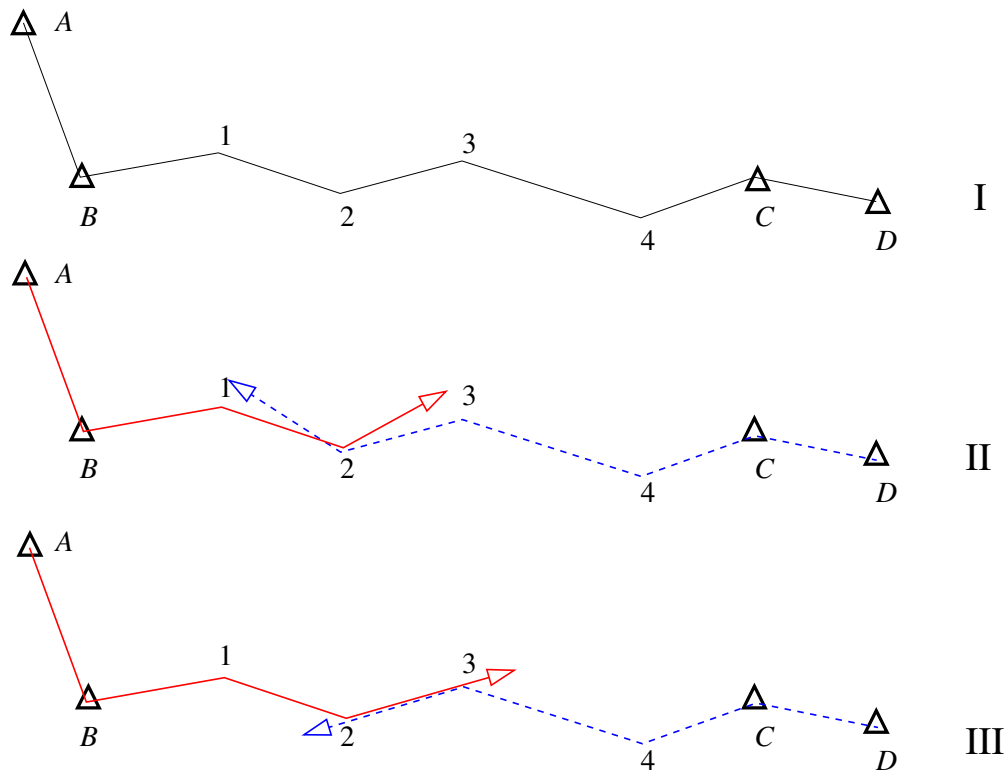
Suljetun monikulmiojonon tapauksessa *yhden karkean virheen löytäminen on suhteellisen helppoa*: Lasketaan molemmista päistä taaksepäin geodesian päätehtävää käyttäen. Virhe näkyy graafisesti (Kuva 8.1). Kuva I on monikulmiojono ilman virheitä; kuvassa II on tapahtunut virhe pisteen 2 kulmamittauksessa, kuvassa III sivun 2-3 mittauksessa.

Jos on useampi karkea virhe yht'aikaa, on tilanne vaikeampaa. Siinä tapauksessa on kaikki mittaukset tutkittava/toistettava; samalla käytetyt mittausmenetelmät ja -organisaatio kannattaisi arvioida uudelleen, koska useiden virheiden sattuminen yht'aikaa saattaa viitata sen kaltaisiin ongelmiin.

Seuraavassa käsitellään sulkuvirheiden tilastollista testausta yleisemmin.

8.4.5 Sulkuvirheiden testaus

Voimme testata koordinaattisulkuvirheet yhdessä niiden muodollisen varianssi-kovarianssimatriisin kanssa. Oletetaan, että koordinaattisulkuvirheet $\underline{w}_x, \underline{w}_y$ ovat normaalisti jakautuneet, niiden odotusarvo on nolla, ja niiden varianssi-kovarianssimatriisi on sama kuin *a priori*



Kuva 8.1: Karkean virheen löytäminen suljetusta monikulmiojonosta

Taulukko 8.1: χ_n^2 -testin hylkäysrajat eri merkitsevyystasojille ja vapausasteiden määrille

χ_n^2 -hylkäysrajat	90%	95%	99%
$n = 1$	2,71	3,84	6,63
$n = 2$	4,61	5,99	9,21
$n = 3$	6,25	7,81	11,34
$n = 4$	7,78	9,49	13,28

(siis, ennen tasoitusta laskettu, pitämällä alkupiste kiinni) loppupisteen sijainnin varianssi-kovarianssimatriisi:

$$\Sigma_{ww} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_n}^2 & \sigma_{x_n y_n} \\ \sigma_{x_n y_n} & \sigma_{y_n}^2 \end{bmatrix}.$$

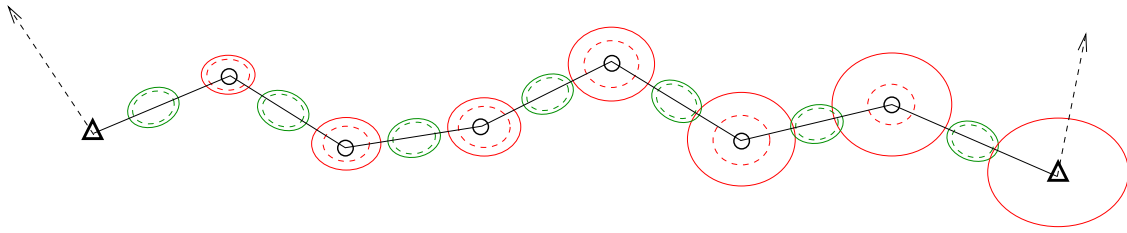
Silloin pitää tarkastella kvadraattinen muoto

$$\underline{w}^T \Sigma_{ww}^{-1} \underline{w} \quad (8.9)$$

joka on χ_2^2 -jakauman mukaan jakautunut, odotusarvolla 2. Taulukon 8.1 mukaan todennäköisyys, että $|\underline{w} Q_{ww}^{-1} \underline{w}| > 5,99$ sattumalta, eli jos nollahypoteesi “mittaukset ovat kunnossa” pätee, on vain 5%. Eli, 95%:n merkitsevyystason testauskriteeri on:

$$\begin{aligned} |\underline{w}^T \Sigma_{ww}^{-1} \underline{w}| > 5,99 &\implies H_0 \text{ hylätään} \\ |\underline{w}^T \Sigma_{ww}^{-1} \underline{w}| \leq 5,99 &\implies H_0 \text{ hyväksytään} \end{aligned}$$

Testi kertoo, kuinka hyvin mittaus on onnistunut saavuttamaan mittausmenetelmän ja käytetyn laitteiston edellyttämää tarkkuutta. Voisi ajatella että jos testi hyväksytään, niin mitaaja mittaa



Kuva 8.2: Monikulmiojonon virhekuviot. Ennen tasoitusta (jatkuva viiva) ja tasoituksen jälkeen (katkoviiva). Absoluuttiset punaisia, relaatiiviset vihreitä

1. mittaa ja mittaa oikeilla kojeilla ja menetelmillä, ja
2. suunnilleen tasapitkiä pistevälejä, ja
3. mittauksissa ei ole (suuria) karkeita virheitä.

Koordinaattisulkuvirheiden lisäksi on syytä testata suljetuissa monikulmiojonoissa myös *suuntasulkuvirheitä*. Itse asiassa parasta olisi testata kaikki kolme $\underline{w}_x, \underline{w}_y, \underline{w}_t$ yhdessä niiden yhteisen 3×3 varianssi-kovarianssimatriisin kanssa. Silloin kvadraattisen muodon (8.9) jakauma on χ_3^2 ja käytettävä 95%:n raja-arvo on 8.72 (ks. taulukko 8.1).

8.4.6 Tasoitetun pisteen keskivirhe

Nämä kaavat johdetaan teoreettisesti osassa 11.3.

1. *Absoluuttinen* pistekoordinaattivarianssi, *a posteriori*:

$$\sigma_{\widehat{x_k}}^2 = \left(\sum_{i=1}^k \sigma_{x_{i-1,i}}^2 \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_{x_{i-1,i}}^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_{x_{i-1,i}}^2} \right)$$

$$\sigma_{\widehat{y_k}}^2 = \left(\sum_{i=1}^k \sigma_{y_{i-1,i}}^2 \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_{y_{i-1,i}}^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_{y_{i-1,i}}^2} \right)$$

$$k = 1 \dots n - 1$$

Alla olevassa kuvassa on annettu absoluuttiset ja relatiiviset virhe-ellipsit ennen (jatkuva viiva) ja jälkeen (katkoviiva) jonon tasoitusta. Oletettu on, että virhe-ellipsit ovat ympyröitä. Huomaa, että, jos kaikki välivarianssit ovat samoja $((\sigma_x^{rel})^2, (\sigma_y^{rel})^2)$, pätee

$$\sigma_{\widehat{x_k}}^2 = (\sigma_x^{rel})^2 \cdot k \left(1 - \frac{k}{n} \right),$$

$$\sigma_{\widehat{y_k}}^2 = (\sigma_y^{rel})^2 \cdot k \left(1 - \frac{k}{n} \right).$$

2. *Suhteellinen* eli pistekoordinaattierojen varianssi, *a posteriori*:

$$\sigma_{\widehat{x_{j-1,j}}}^2 = \sigma_{x_{j-1,j}}^2 \left(1 - \frac{\sigma_{x_{j-1,j}}^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_{x_{i-1,i}}^2} \right)$$

$$\widehat{\sigma_{y_{j-1,j}}^2} = \sigma_{y_{j-1,j}}^2 \left(1 - \frac{\sigma_{y_{j-1,j}}^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_{y_{i-1,i}}^2)} \right)$$

Jos kaikki välivarianssit on samoja, saadaan

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma_{x_{j-1,j}}^2} &= \sigma_{x_{j-1,j}}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right), \\ \widehat{\sigma_{y_{j-1,j}}^2} &= \sigma_{y_{j-1,j}}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Pistekeskivirheestä suhteessa sivun pituuteen (“ppm-virhe”) saadaan *estimaatio*:

$$\hat{\mu} = 10^6 \cdot \frac{\widehat{\sigma_P}}{L},$$

missä keskivirhe-arvio saadaan tuttuun tapaan

$$\widehat{\sigma_{P_{i-1},P_i}} = \sqrt{\widehat{\sigma_{x_{i-1,i}}^2} + \widehat{\sigma_{y_{i-1,i}}^2}}.$$

$\hat{\mu}$, *a posteriori* suhteellinen pistekeskivirhe kahden pisteen välein, verrataan taas ohjeisiin. Se on “normaalikokoinen” luku, esim. 50 jos tarkkuusvaatimus on 50 ppm.

Luku 9

Kriteerivarianssit

Käytännössä geodeettisissa mittauksissa annetaan jonkinlainen *kriteeri* siitä, kuinka tarkasti monikulmiojonon mittaus pitäisi olla riippuen

1. Mittauksen tyypistä (perusrunkopistemittaus, käyttöpistemittaus, ...)
2. Mitatun monikulmiojonon pituudesta L .

Annettu kriteeri liittyy usein *mittausluokkaan*, eli verkkojen luokkahierarkiaan.

Esimerkiksi:

Runkomittauksessa meillä on *viidennen luokan jono*, missä ohjeen ((Anon., 1991), luku 1.11 p. 3) mukaan sallittu *suhteellinen pistekeskivirhe* (kahden pisteen välisen vektorin pistekeskivirhe, eli toisen pisteen keskivihe toisesta pisteestä laskettuna) on $\mu = 50$ ppm. Tässä L on kahden pisteen välinen etäisyys.

Kriteerikeskivirhe on silloin:

$$\sigma_P^c = \mu \cdot 10^{-6} L = 5 \cdot 10^{-5} L,$$

missä L on kahden pisteen välinen etäisyys. Kriteerikeskivirheen määritelmä on

$$\sigma_P^c = \sqrt{(\sigma_x^c)^2 + (\sigma_y^c)^2},$$

missä

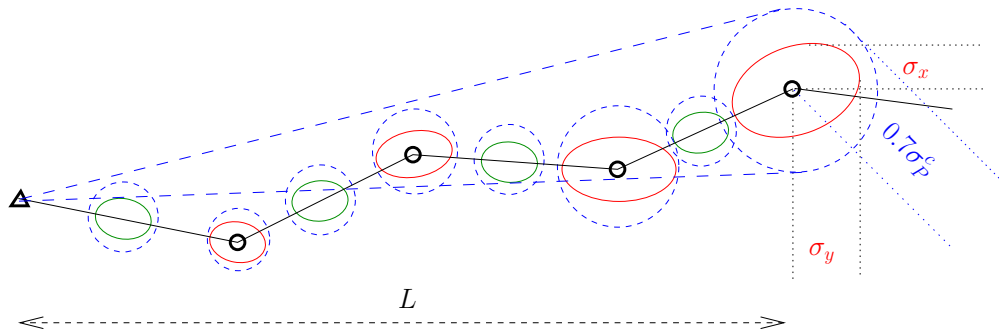
$$\text{Var}^c(\mathbf{r}_n) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mu \cdot 10^{-6} L \equiv \begin{bmatrix} (\sigma_x^c)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma_y^c)^2 \end{bmatrix},$$

eli määritelmä perustuu oletukseen, että x - ja y -koordinaatin epävarmuudet ovat yhtä suuria eivätkä korreloi keskenään. Tasapainoisesti suunnitelleessa mittausgeometriassa tämä pitää likimäärin paikkansa. Tässä tapauksessa *kriteerivirhe-ellipsit ovat ympyröitä*.

9.1 Esimerkki: jono

Kriteerikeskivirhettä voidaan soveltaa jonon kaikkiin peräkkäisten pisteparien relatiivikeskivirheisiin, ja myös kaikkiin pisteisiin jos ensimmäinen piste pidetään kiinni. Huomaa, että kriteerillä *arvioidaan jonon muodollisen tarkkuuden riittävyttä mittausluokkaan*, eli verrataan jonotasoituksesta saadut virhe-ellipsit vastaaviin kriteerivirhe-ellipseihin¹.

¹Yleisemmin verrataan koko verkon tasoituksesta saatu varianssi-kovarianssimatriisi Σ synteettisesti generoidun kriteerimatriisin C kanssa, jossa mittausluokan μ toimii skaalatekijänä. Verkkoa hyväksytään jos ominaisarvotehtävän $(\Sigma - \lambda C)\mathbf{x} = 0$ suurin ominaisarvo $\lambda_{\max} < 1.0$ – mitä merkitsee, että verkko-tuntemattomien abstraktisessa vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^m$, varianssimatriisin Σ hyper-ellipsoidi on kokonaan kriteerimatriisin C hyper-ellipsoidin sisällä. Jonon peräkkäisten pisteiden, tai ykkös- ja muiden pisteiden välisten, relatiivisten virhe-ellipsien testaus on vain tämän yleistestin osajoukko.



Kuva 9.1: Kriteerivirhe-ellipsit. Näytetty on sekä absoluuttiset (laskettu alkupisteestä, punaisia) että relatiiviset (peräkkäisten pisteiden välillä, vihreitä). Kussakin tapauksessa virhe-ellipsi on oltava kokonaan vastaavan sinisen kriteeriympyrän sisällä

Yllä (9) käsiteltiin jo kriteerivarianssi ja kriteerivarianssimatriisi yhden monikulmiojonon tapauksessa, ja miten kriteerivarianssia voidaan käyttää arvioimaan, onko käytetty mittaussmenetelmä ja -laitteisto riittävän hyvä tavoitellun mittausluokan tarkkuusvaatimuksiin. Tässä luvussa yleistään tätä tarkastelua siten, että formuloidaan kriteerimatriisi kokonaiselle geodeettiselle (sijainti-)verkolle, ja verrataan sitä pienimmän neliösumman verkkoratkaisusta saatuun varianssi-kovarianssimatriisiin.

9.2 Verkon varianssi-kovarianssimatriisi

Jos PNS-menetelmän tasoituksesta saatu tuntemattomien vektori kirjoitetaan muotoon $\hat{\mathbf{x}}$, on tämän vektorin, eli *koko verkon*, varianssi-kovarianssimatriisi vaikkapa

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}.$$

Tässä σ_0^2 kutsutaan *varianssitekijäksi*, myös painoyksikön varianssiksi, ja $Q_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ *painokerroinmatriisiksi*. Idea tässä on, että σ_0^2 kuvaa mittauksien tarkkuutta, ja Q -matriisi taas “standardoidun” varianssi-kovarianssimatriisin yleistä muotoa. Tämä vastaa havaintovektorille $\underline{\ell}$ vastaavaan kaavaan

$$\Sigma_{\underline{\ell}\underline{\ell}} = \sigma_0^2 Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}},$$

jossa $Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}}$ voi olla yksikkömatrisi jos kaikki mittaukset vektorissa $\underline{\ell}$ ovat samanarvoisia ja ei-korreloituja, nimellistarkkuus ollessa σ_0 .

Tästä varianssimatriisista voidaan sitten poimia yhden pisteen, vaikkapa pisteen i , koordinaattien (x_i, y_i) *osavarianssimatriisi*, seuraavasti:

$$\Sigma_{ii} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}_{ii} = \begin{bmatrix} \text{Var} \{ \underline{x}_i \} & \text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{y}_i \} \\ \text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{y}_i \} & \text{Var} \{ \underline{y}_i \} \end{bmatrix}.$$

Tässä on oletettu, että pistekoordinaatit ovat järjestetty $\hat{\mathbf{x}}$ -vektorin sisällä näin, että ensin tulee pisteen 1 x - ja y -koordinaatit, sitten pisteen 2 x - ja y -koordinaatit, jne. Koko matriisista saadaan siis pisteeseen i vastaava, 2×2 kokoinen “blokki” päälävistäjältä.

Varianssimatriisista voidaan vastaavasti “poimia” kahden eri pisteen i ja j pisteen välistä eli *relatiivista* varianssi-kovarianssimatriisia:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Delta ij} &= \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta x}^2 & \sigma_{\Delta x \Delta y} \\ \sigma_{\Delta x \Delta y} & \sigma_{\Delta y}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var} \{ \underline{x}_j - \underline{x}_i \} & \text{Cov} \{ \underline{x}_j - \underline{x}_i, \underline{y}_j - \underline{y}_i \} \\ \text{Cov} \{ \underline{x}_j - \underline{x}_i, \underline{y}_j - \underline{y}_i \} & \text{Var} \{ \underline{y}_j - \underline{y}_i \} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{Var} \{ \underline{x}_i \} + \text{Var} \{ \underline{x}_j \} - 2\text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{x}_j \} & \text{Cov} \{ \underline{x}_j, \underline{y}_j \} + \text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{y}_i \} \\ & -\text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{y}_j \} - \text{Cov} \{ \underline{x}_j, \underline{y}_i \} \\ \text{Cov} \{ \underline{x}_j, \underline{y}_j \} + \text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{y}_i \} & \text{Var} \{ \underline{y}_i \} + \text{Var} \{ \underline{y}_j \} - 2\text{Cov} \{ \underline{y}_i, \underline{y}_j \} \\ & -\text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{y}_j \} - \text{Cov} \{ \underline{x}_j, \underline{y}_i \} \end{bmatrix} = \\ &= \Sigma_{ii} + \Sigma_{jj} - \Sigma_{ij} - \Sigma_{ji},\end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned}\Sigma_{ii} &= \begin{bmatrix} \text{Var} \{ \underline{x}_i \} & \text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{y}_i \} \\ \text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{y}_i \} & \text{Var} \{ \underline{y}_i \} \end{bmatrix}, \\ \Sigma_{jj} &= \begin{bmatrix} \text{Var} \{ \underline{x}_j \} & \text{Cov} \{ \underline{x}_j, \underline{y}_j \} \\ \text{Cov} \{ \underline{x}_j, \underline{y}_j \} & \text{Var} \{ \underline{y}_j \} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij} &= \begin{bmatrix} \text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{x}_j \} & \text{Cov} \{ \underline{x}_i, \underline{y}_j \} \\ \text{Cov} \{ \underline{y}_i, \underline{x}_j \} & \text{Cov} \{ \underline{y}_i, \underline{y}_j \} \end{bmatrix}, \\ \Sigma_{ji} &= \begin{bmatrix} \text{Cov} \{ \underline{x}_j, \underline{x}_i \} & \text{Cov} \{ \underline{x}_j, \underline{y}_i \} \\ \text{Cov} \{ \underline{y}_j, \underline{x}_i \} & \text{Cov} \{ \underline{y}_j, \underline{y}_i \} \end{bmatrix} = \Sigma_{ij}^T.\end{aligned}$$

Eli, voimme laskea $\Sigma_{\Delta ij}$ yhdistämällä koko matriisista *neljä* 2×2 -kokoista osamatriisia, suuresta matriisista poimittuina:

$$\Sigma_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{bmatrix} \sigma_{x_i}^2 & \sigma_{x_i y_i} \\ \sigma_{x_i y_i} & \sigma_{y_i}^2 \end{bmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & \begin{bmatrix} \sigma_{x_i x_j} & \sigma_{y_i x_j} \\ \sigma_{x_i y_j} & \sigma_{y_i y_j} \end{bmatrix} & & \\ & & & \begin{bmatrix} \sigma_{x_j}^2 & \sigma_{x_j y_j} \\ \sigma_{x_j y_j} & \sigma_{y_j}^2 \end{bmatrix} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Tässä vasemmassa ylänurkassa näkyy Σ_{ii} , oikeassa alanurkassa Σ_{jj} , ja diagonaalin ulkopuolella $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}^T$.

9.3 Verkon kriteerimatriisi

Voimme *generoida* synteettinen varianssi-kovarianssimatriisi eli *kriteerimatriisi* koko verkolle vaikkapa seuraavalla tavalla:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(C)} = \sigma_0^2 C_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}},$$

jossa C -matriisi vastaa yllä määritellyyn painokerroinmatriisiin. Sopivan matriisin C generointi ei ole aivan yksinkertainen. (Baarda, 1973) kuvaa menetelmän sopivan matriisin generoimiseksi: oletus on, että kahden pisteen välinen relatiivinen sijainnin epävarmuus on verrannollinen etäisyyteen, verrannollisuuskertoimella (vaikkapa) σ^2 .

Helpoin tapa kuvailla Baardan kriteerimatriisin generointimenetelmä on esittää pistekoordinaatit tasossa *kompleksilukuina*, ks. myös osa 2.3:

$$\mathbf{z} = x + iy.$$

Silloin kriteerimatriisin mahdollinen muoto on

$$C_{ij} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} & -\frac{\mathbf{z}_{Ai}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{z}_{iA}\overline{\mathbf{z}_{iA}} & \mathbf{z}_{iB}\overline{\mathbf{z}_{iB}} \\ \mathbf{z}_{jA}\overline{\mathbf{z}_{jA}} & 0 & \mathbf{z}_{AB}\overline{\mathbf{z}_{AB}} \\ \mathbf{z}_{jB}\overline{\mathbf{z}_{jB}} & \mathbf{z}_{AB}\overline{\mathbf{z}_{AB}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\overline{\mathbf{z}_{jB}}}{\overline{\mathbf{z}_{AB}}} \\ -\frac{\overline{\mathbf{z}_{Aj}}}{\overline{\mathbf{z}_{AB}}} \end{bmatrix},$$

jossa A ja B ovat *datumpisteet* eli annetut lähtöpisteet, joiden sijainnin epävarmuus on nolla. Kompleksiset vektorit on määritelty esim.:

$$\mathbf{z}_{AB} = \mathbf{z}_B - \mathbf{z}_A.$$

Yläviiva merkitsee kompleksikonjugaatti: $\overline{\mathbf{z}} = x - iy$.

9.4 Varianssi- ja kriteerimatriisin vertailu

Tämä tapahtuu *ominaisarvotekniikan* kautta. Kirjoitetaan

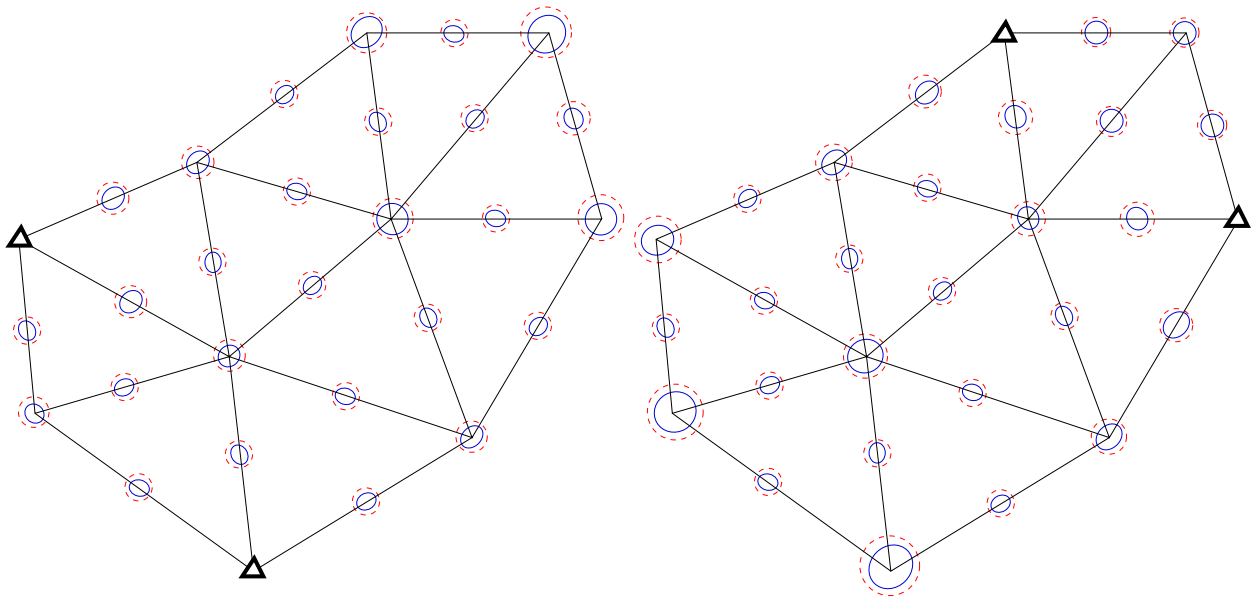
$$(Q_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} - \lambda C_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}})\hat{\mathbf{x}} = 0$$

ja vaaditaan, että ominaisarvoista λ suurin on kuitenkin oltava pienempi kuin 1:

$$\lambda_{\max} \leq 1.$$

Ilman todistusta väittäkään, että silloin *kaikki absoluuttiset ja relatiiviset virhe-ellipsit* ovat vastaavien kriteeriympyriä² sisällä.

²Käytännössä kriteerimatriisin generoimat pistevirhe-ellipsit ovat aina ympyröitä.



Kuva 9.2: Pistevarianssi- ja kriteeriellipsit. Vasen, oikea: eri datumpisteet

Luku 10

Pienimmän neliösumman tasoitus

Ks. (Cooper, 1987).

10.1 Teoreettinen tausta

Maanmittaustyössä, teknisessä maanmittausessa ja runkoverkkomittauksessa yleensä meitä kiinnostavat tuntemattomat ovat *pisteiden koordinaatit*. Koordinaatit annetaan tavallisesti kolmiulotteisina suorakulmaisina (karteesisina) koordinaatteina. Menettelytapa on seuraava: Mittaukset suoritetaan ja korjataan tunnettuja fysikaalisia efektejä varten, kuten ilmakehän ja kojeen aiheuttamat virheet; tämän jälkeen mittaukset voidaan katsoa geometrysten suureiden mittauksina vektoriavaruuksessa.

Funktionaalimalli joka yhdistää mitattu suure ja tuntemattomat, estimoitavissa olevat parametrit muodostetaan sitten tässä abstraktissa avaruudessa.

Joskus havaintojen korjaus ilmakehää, kojettä tai muun virhelähdettä varten ei ole mahdollista koska tarvittavaa informaatiota ei ole saatavissa. Tässä tapauksessa voidaan *laajentaa* funktionaalimalli sisältämään lisätuntemattomia joiden arvot estimoidaan yhdessä koordinaattien kanssa. Sellaiset lisäparametrit voivat olla kellovirhe, refraktiokerroin, tai fotogrammetriassa kameran tai linssin parametrit. GPS-mittausten tapauksessa lisätuntemattomat voivat olla vastaanottimen kellokorjaus, satelliittirataelementtien korjaukset tai troposfääriparametrit, mm.

Pienimmän neliösumman menetelmän kaavat ovat kaikki *lineaarisia*. Jos todellisessa mittaus-tilanteessa funktionaaliset yhteydet tuntemattomien $\underline{x}$ ja havaintosuureiden $\underline{\ell}$ välillä eivät ole lineaarisia, joudutaan *linearisoimaan*.

10.1.1 Pienimmän neliösumman ratkaisu

Havaintoyhtälöt kirjoitetaan seuraavaan muotoon:

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{\underline{x}},$$

missä $\hat{\underline{x}}$ on tuntemattomien vektori (tarkemmin: sen pienimmän neliösumman estimaattori), $\underline{\ell}$ havaintojen vektori ja $\underline{v}$ residuaalien (havaintojen korjausten) vektori. Huomaa, että *korjatut* havainnot $\hat{\underline{\ell}} \equiv \underline{\ell} + \underline{v}$ ovat *tarkasti* yhteensopivia linearisoidun funktionaalimallin kanssa. Minimoitava suure on

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \underline{v}^T Q^{-1} \underline{v} = (A\hat{\underline{x}} - \underline{\ell})^T Q^{-1} (A\hat{\underline{x}} - \underline{\ell}) = \\ &= \hat{\underline{x}}^T A^T Q^{-1} A \hat{\underline{x}} - \hat{\underline{x}}^T A^T Q^{-1} \underline{\ell} - \underline{\ell}^T Q^{-1} A \hat{\underline{x}} + \underline{\ell}^T Q^{-1} \underline{\ell}, \end{aligned}$$

ja differentioimalla saadaan minimi:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_i} = (\hat{\mathbf{x}}^T A^T Q^{-1} A \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T A^T Q^{-1} A \hat{\mathbf{x}}) - (\mathbf{e}_i A^T Q^{-1} \underline{\ell} + \underline{\ell}^T Q^{-1} A \mathbf{e}_i) + 0, \quad i = 1, \dots, m$$

mikä on oltava nolla kaikille i -arvoille, siis kaikille yksikkövektoreille $\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ (ykkönen paikassa i ¹). Tämä onnistuu asettamalla

$$(A^T Q^{-1} A) \hat{\mathbf{x}} = A^T Q^{-1} \underline{\ell}. \quad (10.1)$$

Kaavaa 10.1 kutsutaan *normaaliyhtälöiksi*. Niistä ratkaistaan $\hat{\mathbf{x}}$, jonka jälkeen saadaan korjatut havaintosuureet seuraavasti:

$$\underline{\ell} + \underline{\mathbf{v}} = A \hat{\mathbf{x}}, \quad (10.2)$$

ja residuaalit $\underline{\mathbf{v}} = A \hat{\mathbf{x}} - \underline{\ell}$.

10.1.2 Harhattomuus

Haluamme osoittaa, että yllä johdettu pienimmän neliösumman ratkaisusta $\hat{\mathbf{x}}$ laskettava “tasoitettu havaintosuureiden vektori” $\hat{\underline{\ell}} = A \hat{\mathbf{x}}$ on *harhaton*, siis, että sen odotusarvo on sama kuin havaintovektorin $\underline{\ell}$ odotusarvo.

Todistuksen antamiseksi meillä pitää olla *malli havaintoprosessista*. Tämä malli voisi vaikkapa olla

$$\underline{\ell} = A \mathbf{x} + \underline{\mathbf{n}},$$

jossa $\underline{\mathbf{n}}$ on ns. havaintovirhe (ei: jäännösvirhe!), jonka odotusarvo on $E \{\underline{\mathbf{n}}\} = 0$ ja jonka painokerroinmatriisi² on $Q = Q_{\ell\ell}$, eli havaintovektorin $\underline{\ell}$ painokerroinmatriisi. Vektori $\mathbf{x}$ taas on ei-stokastinen ja sisältää tuntemattomien *oikeat arvot*³, siis ne arvot, jotka saataisiin, jos voitaisiin mitata äärettömän tarkasti.

Vektori $\underline{\mathbf{n}}$ kutsutaan joskus myös havaintojen *kohinaksi*.

Nyt:

$$E \{\underline{\ell}\} = A \mathbf{x} + E \{\underline{\mathbf{n}}\} = A \mathbf{x}.$$

Kuitenkin myös, kaavasta (10.2),

$$E \{\underline{\ell}\} + E \{\underline{\mathbf{v}}\} = A E \{\hat{\mathbf{x}}\},$$

ja ratkaisukaavasta (10.1) saadaan

$$\begin{aligned} E \{\hat{\mathbf{x}}\} &= (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q \cdot E \{\underline{\ell}\} = \\ &= (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q A \mathbf{x} = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

¹Huomaa, että $A \mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$, A -matriisin i :s sarakevektori.

²Siis $\underline{\mathbf{n}}$:n varianssimatriisi on

$$\Sigma = \Sigma_{\ell\ell} = \sigma_0^2 Q_{\ell\ell},$$

jossa σ_0^2 on painyksikön varianssi.

³Tämä on ns. työhypoteesi. “Oikeat arvot” eivät välttämättä edes pidä olla olemassa. Niiden olemassaolon kysymys on tavallaan metafyyminen: suhiseeko tuuli puussa kun kukaan ei ole kuuntelemassa? Kuitenkin pääasia on, että oikeasti olemassa olevat havainnot $\underline{\ell}$ käyttäytyvät annetun kaavan mukaisesti.

Siis yhdistämällä edelliseen:

$$E\{\underline{\ell}\} + E\{\underline{v}\} = A\mathbf{x}$$

ja vähentämällä sitä edeltävästä:

$$E\{\underline{v}\} = 0.$$

Siis: *jäännösvirheiden odotusarvot häviävät*. Jäännösvirheet ovat ”kohinaa”. Silloin myös, koska $\widehat{\underline{\ell}} = \underline{\ell} + \underline{v}$, seuraa, että

$$E\{\widehat{\underline{\ell}}\} = E\{\underline{\ell}\} + 0 = E\{\underline{\ell}\}.$$

Siis: $\widehat{\underline{\ell}}$ on $\underline{\ell}$:n harhaton estimaattori, ja $\widehat{\mathbf{x}}$ on $\mathbf{x}$:n harhaton estimaattori.

10.1.3 Jäännösvirheiden varianssi

Varianssien kasautumislain avulla saamme suoraan normaaliyhtälön (10.1) ratkaisusta $\widehat{\mathbf{x}}$:n painikerroinmatriisiksi:

$$Q_{\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{x}}} = (A^T Q^{-1} A)^{-1} A Q^{-1} \cdot Q \cdot Q^{-1} A^T (A^T Q^{-1} A)^{-1} = (A^T Q^{-1} A)^{-1}.$$

Tästä $\widehat{\underline{\ell}} = A\widehat{\mathbf{x}}$:n varianssimatriisi:

$$Q_{\widehat{\underline{\ell}}\widehat{\underline{\ell}}} = A Q_{\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{x}}} A^T = A (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T.$$

Lasketaan seuraavasti suureiden $\widehat{\mathbf{x}}$ ja $\underline{v}$ välinen kovarianssi:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\widehat{\mathbf{x}}, \underline{v}) &= Q_{\widehat{\mathbf{x}}v} = \text{Cov}(\widehat{\mathbf{x}}, A\widehat{\mathbf{x}} - \underline{\ell}) = \text{Var}(\widehat{\mathbf{x}}) A^T - \text{Cov}(\widehat{\mathbf{x}}, \underline{\ell}) = \\ &= Q_{\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{x}}} A^T - (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} \text{Var}(\underline{\ell}) = \\ &= (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T - (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} Q \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sanotaan, että tuntemattomien pienimmän neliösumman estimaattorit $\widehat{\mathbf{x}}$ ja jäännösvirheet $\underline{v}$ ovat keskenään *ortogonaalisia*:

$$\widehat{\mathbf{x}} \perp \underline{v}.$$

Tietysti tämä merkitsee, että *jokaisen* tasoitetun tuntemattoman $\widehat{x}_j$ ja *jokaisen* jäännösvirheen v_i välillä, $j = 1 \dots m$, $i = 1 \dots n$, kovarianssi on nolla. Samoin tietysti myös jokaisen tasoitetun havainnon $\widehat{\underline{\ell}} = A\widehat{\mathbf{x}}$ ja jokaisen jäännösvirheen välillä.

Tästä seuraa:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{\ell}) &= \text{Var}(\widehat{\underline{\ell}} - \underline{v}) = \text{Var}(\widehat{\underline{\ell}}) + \text{Var}(\underline{v}) - 2 \cdot \text{Cov}(\widehat{\underline{\ell}}, \underline{v}) = \\ &= \text{Var}(\widehat{\underline{\ell}}) + \text{Var}(\underline{v}), \end{aligned}$$

koska kovarianssi on nolla. Siis (”Pythagoras”, ajattele $Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}} = \|\underline{\ell}\|^2$ jne.):

$$Q = Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}} = Q_{\widehat{\underline{\ell}}\widehat{\underline{\ell}}} + Q_{vv}.$$

Tämä on sopiva kaava *jäännösvirheiden painoyksikkömatriisiin* laskemiseksi (ja siitä jäännösvirheiden varianssit) kun alkuperäisten (Q) ja tasoitettujen havaintojen painoyksikkömatriisit ($Q_{\widehat{\underline{\ell}}\widehat{\underline{\ell}}}$) on jo saatu.

10.2 Vinoetäisyys avaruudessa

Olkoon kojeen ja tähyksen koordinaatit (x_1, y_1, z_1) ja (x_2, y_2, z_2) . Silloin funktionaalimalli (kaava 1.2) on

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (10.3)$$

Ensin oletetaan, että piste $(x_1 \ y_1 \ z_1)^T$ on tunnettu. Silloin tuntemattomien vektori koostuu vain toisen pisteen koordinaateista, $\mathbf{x} = (x_2 \ y_2 \ z_2)^T$. Havaintovektorilla on vain yksi alkio, $\ell = (s)$ ja rakennematriisi A (kaava 1.4) on:

$$A = A_i = \frac{\partial s}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_2} & \frac{\partial s}{\partial y_2} & \frac{\partial s}{\partial z_2} \end{bmatrix}.$$

Alkiot lasketaan differentioimalla 10.3:

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{s}$$

ja niin edelleen. Lopputulos on

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{s} & \frac{y_2 - y_1}{s} & \frac{z_2 - z_1}{s} \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että matriisin A alkiot ovat yksikkövektorin alkioita! Käyttämällä suuntakulma (atsimuti) α ja zeniittikulma ζ voimme kirjoittaa

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{12} \sin \zeta_{12} & \sin \alpha_{12} \sin \zeta_{12} & \cos \zeta_{12} \end{bmatrix}$$

tai jopa symbolisemmin

$$A = [\mathbf{e}_{12}^T]$$

jossa $\mathbf{e}_{12}$ on pisteen 1 ja 2 välinen *suuntavektori*, jolle pätee

$$\|\mathbf{e}_{12}\| = 1.$$

Yleisempi tapaus, missä molemmat pisteet ovat tuntemattomia, käsitellään seuraavaksi. Tuntemattomien vektoriksi muodostetaan $\mathbf{x} = (x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2)^T$, ja havaintovektori on taas $\ell = (s)$. Rakennematriisi A (kaava 1.4) on:

$$A_i = \frac{\partial s}{\partial x^i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_1} & \frac{\partial s}{\partial y_1} & \frac{\partial s}{\partial z_1} & \frac{\partial s}{\partial x_2} & \frac{\partial s}{\partial y_2} & \frac{\partial s}{\partial z_2} \end{bmatrix}.$$

Edellisen perusteella on lopputulos

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{x_2 - x_1}{s} & -\frac{y_2 - y_1}{s} & -\frac{z_2 - z_1}{s} & \frac{x_2 - x_1}{s} & \frac{y_2 - y_1}{s} & \frac{z_2 - z_1}{s} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{21}^T & \mathbf{e}_{12}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{12}^T & \mathbf{e}_{12}^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Linearisoitu havaintoyhtälö on siis:

$$[\Delta s + \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{12}^T & \mathbf{e}_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 \end{bmatrix},$$

missä

- $\mathbf{e}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{s} & \frac{y_2 - y_1}{s} & \frac{z_2 - z_1}{s} \end{bmatrix}^T$
- $\Delta \mathbf{r}_i = [\Delta x_i \quad \Delta y_i \quad \Delta z_i]^T, i = 1, 2$
- $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$
- $\Delta s \equiv s - s_0$, jne.

Tässä indeksi 0 merkitsee likiarvoja.

Likiarvoille *pätee funktionaalimalli* tarkasti:

$$s_0 = f(\mathbf{x}_0) = \sqrt{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2 + (z_2^0 - z_1^0)^2}.$$

10.3 Atsimutimittaus

Jos atsimuti⁴ α mitataan pisteiden 1 ja 2 välillä:

$$\alpha = \alpha_{12} = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) + k\pi,$$

silloin $\mathbf{x} = (x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2)^T$.

Rakennematriisi saadaan taas *ketjusäännön* avulla, esim. (lyhentämällä $x_{12} = x_2 - x_1$ jne.):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \arctan\left(\frac{y_{12}}{x_{12}}\right)}{\partial x_1} &= \frac{\partial \arctan\left(\frac{y_{12}}{x_{12}}\right)}{\partial \left(\frac{y_{12}}{x_{12}}\right)} \frac{\partial \left(\frac{y_{12}}{x_{12}}\right)}{\partial x_{12}} \frac{\partial x_{12}}{\partial x_1} = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y_{12}}{x_{12}}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y_{12}}{x_{12}^2}\right) \cdot (-1) = \\ &= \frac{y_{12}}{x_{12}^2 + y_{12}^2} = \frac{y_{12}}{s_{\perp}^2} = -\frac{\sin \alpha_{21}}{s_{\perp}}. \end{aligned}$$

Koko matriisi:

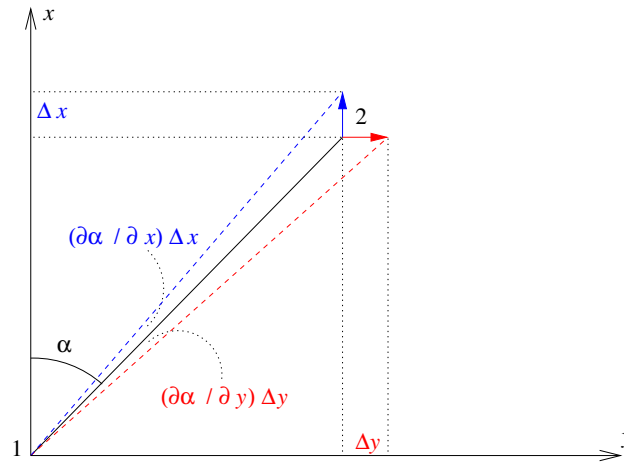
$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\sin \alpha_{21}}{s_{\perp}} & \frac{\cos \alpha_{21}}{s_{\perp}} & -\frac{\sin \alpha_{12}}{s_{\perp}} & +\frac{\cos \alpha_{12}}{s_{\perp}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} +\frac{y_2 - y_1}{s_{\perp}^2} & -\frac{x_2 - x_1}{s_{\perp}^2} & -\frac{y_2 - y_1}{s_{\perp}^2} & +\frac{x_2 - x_1}{s_{\perp}^2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa $s_{\perp} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, kojeen ja tähyksen välinen vaakatasoon projisoitu etäisyys.

Tästä linearisoitu havaintoyhtälö:

$$\Delta \alpha + v = \begin{bmatrix} +\frac{y_2 - y_1}{s_{\perp}^2} & -\frac{x_2 - x_1}{s_{\perp}^2} & -\frac{y_2 - y_1}{s_{\perp}^2} & +\frac{x_2 - x_1}{s_{\perp}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}.$$

⁴Käytetään α eikä A sekaannuksen välttämiseksi rakennematriisiin A kanssa.



Kuva 10.1: Atsimutimittauksen geometria ja rakennematriisi

10.4 Zeniittikulmamittaus

Jos mitataan pisteiden 1 ja 2 välinen zeniittikulma⁵:

$$\zeta = \arccos \frac{z_2 - z_1}{s} = \arctan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{z_2 - z_1}{s_{\perp}} \right),$$

missä $s_{\perp} = \rho = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$.

Nyt $\mathbf{x} = (x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2)^T$ ja

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial \zeta}{\partial x^i} = \\ &= \left[\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y_1} \quad \frac{\cos \zeta_{21}}{s} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y_2} \quad \frac{\cos \zeta_{12}}{s} \right] = \\ &= \left[\frac{\cos \zeta_{21}}{\rho} (-\cos \alpha_{21}) \quad \frac{\cos \zeta_{21}}{\rho} \sin \alpha_{21} \quad \frac{s_{\perp}}{s^2} \quad \frac{\cos \zeta_{12}}{\rho} (-\cos \alpha_{12}) \quad \frac{\cos \zeta_{12}}{\rho} \sin \alpha_{12} \quad -\frac{s_{\perp}}{s^2} \right] \\ &= \left[-\frac{(x_2 - x_1)}{s^2 \tan \zeta_{12}} \quad +\frac{(y_2 - y_1)}{s^2 \tan \zeta_{12}} \quad \frac{s_{\perp}}{s^2} \quad +\frac{(x_2 - x_1)}{s^2 \tan \zeta_{12}} \quad -\frac{(y_2 - y_1)}{s^2 \tan \zeta_{12}} \quad -\frac{s_{\perp}}{s^2} \right]. \end{aligned}$$

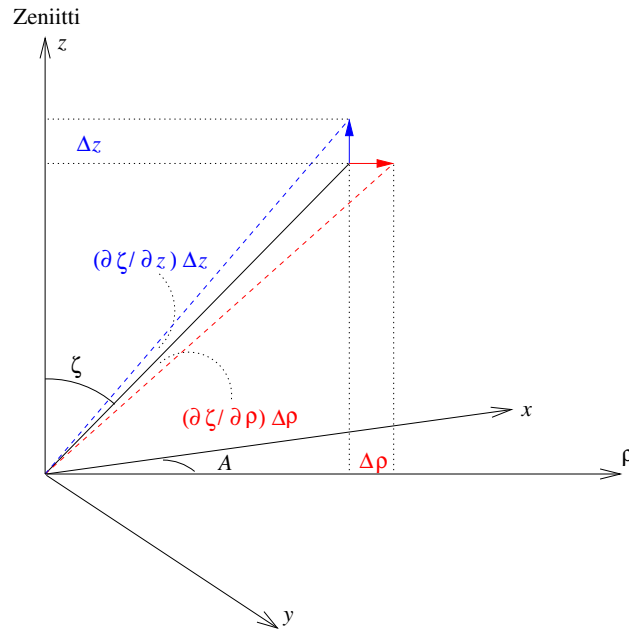
Tässä osittaisderivaatta $\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$ on laskettu lieriökoordinaateissa (ρ, α, z) . Silloin $\zeta = \zeta(\rho, z)$.

Itse asiassa ρ on sama kuin $s_{\perp}$.

Nyt havaintoyhtälö on

$$\delta \zeta + v = \left[-\frac{(x_2 - x_1)}{s^2 \tan \zeta} \quad +\frac{(y_2 - y_1)}{s^2 \tan \zeta} \quad \frac{s_{\perp}}{s^2} \quad +\frac{(x_2 - x_1)}{s^2 \tan \zeta} \quad -\frac{(y_2 - y_1)}{s^2 \tan \zeta} \quad -\frac{s_{\perp}}{s^2} \right] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}.$$

⁵Käytetään symboli ζ ettei tule sekaannusta z -koordinaatin kanssa.



Kuva 10.2: Zeniittikulmamittauksen geometria

10.5 Käytännön esimerkki

Käytännön esimerkkinä voidaan mainita *eteenpäin leikkaus avaruudessa*.

Olkoon kaksi tunnettua pistettä A ja B , ja tuntematon piste C . Tunnetuilta pisteiltä mitataan suuntakulmat (atsimutit) α_{AC} ja α_{BC} , korkeuskulmat ζ_{AC} ja ζ_{BC} sekä etäisyydet s_{AC} ja s_{BC} . Tuntemattomina on pisteen C koordinaatit x_C, y_C, z_C .

Havaintoyhtälöt (jäännösvirhetermi jätetty pois):

$$\begin{bmatrix} \Delta\alpha_{AC} \\ \Delta\alpha_{BC} \\ \Delta\zeta_{AC} \\ \Delta\zeta_{BC} \\ \Delta s_{AC} \\ \Delta s_{BC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y_C - y_A}{\rho_{AC}^2} & +\frac{x_C - x_A}{\rho_{AC}^2} & 0 \\ -\frac{y_C - y_B}{\rho_{BC}^2} & +\frac{x_C - x_B}{\rho_{BC}^2} & 0 \\ +\frac{x_C - x_A}{s_{AC}^2 \tan \zeta_{AC}} & -\frac{y_C - y_A}{s_{AC}^2 \tan \zeta_{AC}} & -\frac{\rho_{AC}}{s_{AC}^2} \\ +\frac{x_C - x_B}{s_{BC}^2 \tan \zeta_{BC}} & -\frac{y_C - y_B}{s_{BC}^2 \tan \zeta_{BC}} & -\frac{\rho_{BC}}{s_{BC}^2} \\ \frac{x_C - x_A}{s_{AC}} & \frac{y_C - y_A}{s_{AC}} & \frac{z_C - z_A}{s_{AC}} \\ \frac{x_C - x_B}{s_{BC}} & \frac{y_C - y_B}{s_{BC}} & \frac{z_C - z_B}{s_{BC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_C \\ \Delta y_C \\ \Delta z_C \end{bmatrix},$$

jossa $\rho_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$ jne.

Tässä kaavassa A -matriisi on saatu suoraan sijoittamalla yllä johdetut kaavat atsimuteille, korkeuskulmille ja vinoetäisyyksille. Tietysti tämän matriisin elementit tulee evaluoida *konsistentin likiarvojen joukon* avulla. Sellainen saa olettamalla ensin likiarvot x_C^0, y_C^0, z_C^0 tuntemattomille, ja laskemalla niistä havaintojen likiarvot $\alpha_{AC}^0 = \arctan\left(\frac{y_C^0 - y_A}{x_C^0 - x_A}\right)$, jne.

Matriisissä likiarvomerkinnät on yksinkertaisuuden vuoksi jätetty pois.

Yllä olevalla tehtävällä on kolme tuntematonta ja kuusi havaintoa eli kolme ylimääräisyyttä (ehtoja). Mikäli jätetään etäisyysmittaus pois (eli käytetään vain perinteisiä teodoliitteja)

on havaintojen määrä neljä ja on vain yksi ylimääräisyys eli ehto: se, että A :lta ja B :lta lähtevät suuntaviivat pitäisi leikata eivätkä mennä vain ristiin.

Luku 11

Tasotuslaskun variantit ja sovellukset

11.1 Pakkoehtoien käyttö ratkaisun kiinnittämiseksi

Jos käytetään yllä olevia havaintoyhtälöitä verkon pisteiden koordinaattien ratkaisemiseksi, huomataan pian, että se ei välttämättä onnistu. Mittaukset sitovat pisteiden suhteelliset sijainnit, muttei koko verkon absoluuttista paikkaa. Siksi käytetään aina *pakkoehtoja* (en. *constraints*). Esim. monikulmiojonon mittauksessa on joko yksi tai molemmat päätepisteet koordinaateiltaan annettuja. Jos on kyse kahden pisteen verkosta joiden välillä on mitattu etäisyys, atsimuti ja korkeuskulma, voivat pakkoehdot olla esimerkiksi:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\y_1 &= 0 \\z_1 &= 0\end{aligned}$$

mikä luo paikallisen koordinaattijärjestelmän (datum) jossa pisteen 2 koordinaatit (x_2, y_2, z_2) ratkaistaan.

Pakkoehtoien määrä riippuu

1. Onko kyse 1- 2- tai 3-ulotteista verkosta,
2. Onko kiinnitettävä vain sijainnin vain myös orientoinnin ja mahdollisesti mittakaavan.

	1D	2D	3D
Sijainti	1/0	2	3
Orientointi	-	1	3/0
Mittakaava	1/0	1	1/0
Yhteensä	2/1/0	4	7/6/3

Kuten huomaat, on pakkoehtoien määrä sama kuin ko. avaruudessa käytettävän Helmert-muunnoksen parametrien määrä. Tämä ei ole sattuma.

Korkeusverkoissa ei yleensä käytetä mittakaavatuntematonta, koska vaaituslatat oletetaan kunnollisesti kalibroiduiksi. Lisäksi korkeuksien arvoväli on vain korkeintaan muutama km, kun tasoverkkojen koko voi olla tuhansia kilometrejä.

Toinen yksiulotteinen verkko on *painovoimamittausverkko*. Kun käytetään absoluuttigravimetriä, ei tarvita referenssipistettä. Kun käytetään relatiivinen gravimetri (yleensä jousigravimetri) on lähtöpisteen käyttö tarpeellinen ja mittaus antaa vain eri pisteiden välisiä painovoimaeroja, aivan kuten vaaitus antaa vain pisteiden välisiä korkeuseroja.

Kolmiulotteisissa verkoissa ei välttämättä tarvita orientointia eikä mittakaava, jos on kyse GPS-miitauksesta pienen alueen sisällä. Silloin yksi datum-piste riittää, ja datum-muunnos on yksinkertainen *translaatio* avaruudessa. Suurille GPS-tarkkuusverkoille kuitenkin setsemänparametrinen Helmert-muunnos rotaatiokulmineen mittakaavoineen on välttämätöntä.

11.2 Ehto- ja havaintoyhtälöiden välinen yhteys

Havaintovektori $\ell = [\ell_1 \ \ell_2 \ \cdots \ \ell_n]^T$ on n -ulotteisen lineaarisen vektoriavaruuden alkio. Koska tasoitetuille havainnoille

$$\hat{\ell} = A\hat{x},$$

missä tuntemattomien vektorin x estimaattori $\hat{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m]^T$ on m -ulotteinen, voidaan operaatio $\underline{\ell} \rightarrow \hat{\ell}$ tulkita *projektioksi* m -ulotteiseen aliavaruuteen.

Jos myös pätee

$$B\hat{\ell} = 0$$

samalle $\hat{\ell}$:lle (*ehtoyhtälöryhmä*), voidaan päätellä, että

$$BA\hat{x} = 0.$$

Ja koska tämä pitää paikkansa $\hat{x}$:n arvosta riippumatta, seuraa

$$BA = 0.$$

Toisin sanoen, jos kirjoitetaan

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}, \quad A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_m],$$

seuraa, että

$$\langle b_i \cdot a_j \rangle = 0, \quad i = 1 \dots k, \quad j = 1 \dots m.$$

Taas toisin sanoen:

B:n rivivektorit ja A:n sarakevektorit ovat keskenään ortogonaalisia.

... ja koska vektorit a_j virittävät n -ulotteisen vektoriavaruuden m -ulotteista aliavaruutta, on b_i -vektoreiden maksimimäärä $k = n - m$:

Tuntemattomien määrä m plus ehtojen määrä k on yhtä suuri kuin havaintojen määrä n .

Kirjoitetaan

$$\underline{y} = B\underline{\ell}$$

ja

$$\begin{aligned} Q_{yy} &= BQ_{\ell\ell}B^T, \\ Q_{\ell y} &= Q_{\ell\ell}B^T. \end{aligned}$$

Etsitään optimaalinen ratkaisu joka on yleistä muotoa:

$$\hat{\ell} = \underline{\ell} - C\underline{y} = (I - CB)\underline{\ell}.$$

Koska $E\{\underline{y}\} = 0$, on $E\{\widehat{\underline{\ell}}\} = E\{\underline{\ell}\}$, ja olemme etsimmässä optimaalinen *harhaton* estimaattori.

Estimaattorin $\widehat{\underline{\ell}}$ painokerroinmatriisi (eli painoyksikön keskivirheellä σ_0 "skaalattu" varianssi $\Sigma_{\widehat{\underline{\ell}}}$) on

$$Q_{\widehat{\underline{\ell}}} = (I - CB) Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}} (I - CB)^T.$$

Tämän minimointi edellyttää

$$\frac{dQ_{\widehat{\underline{\ell}}}}{dC} = -BQ_{\underline{\ell}\underline{\ell}}(I - CB)^T - (I - CB)Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}}B^T = 0,$$

mikä toteutuu, mikäli

$$-(I - CB)Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}}B^T = 0$$

eli

$$Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}}B^T - CBQ_{\underline{\ell}\underline{\ell}}B^T = 0 \Rightarrow C = Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}}B^T (BQ_{\underline{\ell}\underline{\ell}}B^T)^{-1}.$$

Tämän jälkeen pienimmän neliösumman ratkaisu voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{\ell}} &= \underline{\ell} - C\underline{y} = \\ &= \underline{\ell} - Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}}B^T (BQ_{\underline{\ell}\underline{\ell}}B^T)^{-1} \underline{y} = \\ &= \underline{\ell} - Q_{\underline{\ell}y}Q_{yy}^{-1}\underline{y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \widehat{\underline{\ell}} - \underline{\ell} &= -Q_{\underline{\ell}y}Q_{yy}^{-1}\underline{y}. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Suureet $\underline{v} \equiv \widehat{\underline{\ell}} - \underline{\ell}$ tunnetaan tässäkin jäännösvirheinä eli *residuaaleina*.

Näin n -ulotteinen "havaintoavaruus" jakautuu kahteen toisensa nähden "ortogonaaliseen" aliavaruuteen: Toisaalta m -avaruus missä tasoitettut tuntemattomat $\widehat{\underline{x}}$ ja tasoitettut havainnot $\widehat{\underline{\ell}}$; toisaalta $n - m$ -avaruus missä "nollasuureet" (siis: Suureet jotka ehtoyhtälöiden mukaan pitää olla nolla) $\underline{y}$ ja residuaalit $\underline{v} = \widehat{\underline{\ell}} - \underline{\ell}$.

Yleisesti voimme todeta:

Tietty pienimmän neliösumman tasointuongelma voidaan kirjoittaa joko havaintoyhtälötasointuksena tai ehtoyhtälötasointuksena. Esitystavat ovat samanarvoisia ja niitä voi muuntaa toisilleen. Esimerkiksi, jos A -matriisi on annettu, voidaan ortogonaalisuusehtojen kautta B -matriisin laskea ja toisiinpäin. Matriisin *tulkinta* on sitten jo toinen kysymys.

Käytännön tasointuongelmissa tarjoutuu usein joki havaintoyhtälö- tai yhtoyhtälömenetelmä luonnollisempaan: jos on helposti identifioitavia sulkuvirheitä, on ehtotasointu luultavasti paras.

11.2.1 Testaussuureen laskenta

Lasketaan testaussuure $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}} &= \underline{v}^T P \underline{v} = \underline{v}^T Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}}^{-1} \underline{v} = \\ &= (\underline{y}^T Q_{yy}^{-1} Q_{y\ell}) Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}}^{-1} (Q_{\ell y} Q_{yy}^{-1} \underline{y}) = \\ &= \underline{y}^T Q_{yy}^{-1} B Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}} Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}}^{-1} Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}} B^T Q_{yy}^{-1} \underline{y} = \\ &= \underline{y}^T Q_{yy}^{-1} (B Q_{\underline{\ell}\underline{\ell}} B^T) Q_{yy}^{-1} \underline{y} = \\ &= \underline{y}^T Q_{yy}^{-1} Q_{yy} Q_{yy}^{-1} \underline{y} = \underline{y}^T Q_{yy}^{-1} \underline{y}. \end{aligned}$$

Siis: testaussuuretta voidaan laskea yhtä hyvin nollasuureista (esim. *sulkuvirheistä* ja niiden varianssimatriisista) kuin jäännösvirheistä. Tämä testaussuure, joka on siis χ^2 -jakauman mukaan jakautunut, kertoo, onko verkossa jotain pielessä. Se ei kerro *mitä* on pielessä – se jää geodeetin löydettäväksi.

11.3 Vaaitus ehtoyhtälöiden esimerkkinä

Aikaisemmin on näytetty, miten vaaitussilmukan tasoituksessa voidaan käyttää vaaituslinjan pituus painona silmukkaa tasoitettaessa. Tässä tutkitaan asia hieman teoreettisemmin.

Olkoon havainnot pulttivälit ΔH_i , $i = 1, \dots, n$. Ehtoyhtälö on, että silmukka sulkeutuu¹:

$$\sum_{i=1}^n \Delta H_i = 0.$$

Kirjoitetaan muotoon

$$B\ell = 0,$$

missä

$$\ell = \begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta H_n \end{bmatrix}$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Jos “nollasuure” eli sulkuvirhe

$$\underline{y} = B\underline{\ell},$$

on sen painokerroinmatriisi

$$Q_{yy} = BQ_{\ell\ell}B^T = \sigma_0^{-2} \sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta H_i}^2$$

ja estimaattori (kaava 11.1):

$$\hat{\ell} = \underline{\ell} - Q_{\ell\ell}B^TQ_{yy}^{-1}\underline{y}$$

¹Fysikaalista geodesiaa lukeneet varmaan huomaavat, että sulkoehdon pitäisi tarkasti olla $\sum_{i=1}^n g_i \Delta H_i$, g_i pulttivälin painovoima.

josta

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \widehat{\Delta H_1} \\ \widehat{\Delta H_2} \\ \widehat{\Delta H_3} \\ \vdots \\ \widehat{\Delta H_n} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{\Delta H_1} \\ \underline{\Delta H_2} \\ \underline{\Delta H_3} \\ \vdots \\ \underline{\Delta H_n} \end{bmatrix} - \sigma_0^{-2} \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta H_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta H_2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\Delta H_3}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta H_n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\underline{w}}{\sigma_0^{-2} \sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta H_i}^2} = \\
 &= \begin{bmatrix} \underline{\Delta H_1} \\ \underline{\Delta H_2} \\ \underline{\Delta H_3} \\ \vdots \\ \underline{\Delta H_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta H_1}^2 \\ \sigma_{\Delta H_2}^2 \\ \sigma_{\Delta H_3}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{\Delta H_n}^2 \end{bmatrix} \frac{\underline{w}}{\sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta H_i}^2},
 \end{aligned}$$

missä $\underline{w}$ on silmukan sulkuvirhe.

Siis: vaaitussilmukan tasoituksessa (ja kaikissa vastaavissa ehtotasoituksissa) *sulkuvirhe jaetaan havaintoväleihin suhteessa niiden havaintojen variansseihin*. Mikäli, kuten on vaaituksen tapauksessa asian laita, vaaitusvälin varianssi on suoraan verrannollinen vaaituun etäisyyteen (“kilometrivirhe-olettamus”, kaava 5.2), voidaan käyttää välien pituudet suoraan painoina.

Lasketaan nyt samalla tasoitettun havaintovektorin $\widehat{\ell}$ painokerroinmatriisi:

$$\begin{aligned}
 Q_{\widehat{\ell}\widehat{\ell}} &= Q_{\ell\ell} - 2Q_{\ell y}Q_{yy}^{-1}Q_{y\ell} + Q_{\ell y}Q_{yy}^{-1}Q_{yy}Q_{yy}^{-1}Q_{y\ell} = \\
 &= Q_{\ell\ell} - Q_{\ell y}Q_{yy}^{-1}Q_{y\ell}.
 \end{aligned}$$

Laskenta antaa:

$$\begin{aligned}
 Q_{\widehat{\ell}\widehat{\ell}} &= \sigma_0^{-2} \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta H_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta H_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta H_n}^2 \end{bmatrix} - \\
 &- \frac{1}{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta H_i}^2} \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta H_1}^2 \sigma_{\Delta H_1}^2 & \sigma_{\Delta H_1}^2 \sigma_{\Delta H_2}^2 & \cdots & \vdots \\ \sigma_{\Delta H_2}^2 \sigma_{\Delta H_1}^2 & \sigma_{\Delta H_2}^2 \sigma_{\Delta H_2}^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \sigma_{\Delta H_n}^2 \sigma_{\Delta H_n}^2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

ja yhden välin varianssi tasoituksen jälkeen (*a posteriori*):

$$\sigma_{\widehat{\Delta H_i}}^2 = \sigma_{\Delta H_i}^2 \left(1 - \frac{\sigma_{\Delta H_i}^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta H_i}^2} \right).$$

Tämä voidaan yleistää helposti havaitsemalla, että $H_k = H_0 + \sum_{i=1}^k \Delta H_i$ (siis, pisteen absoluuttinen korkeus on sen suhteellinen korkeus lähtöpisteeseen nähden) ja siis, että $\sigma_{H_k}^2 =$

$\sum_{i=1}^k \sigma_{\Delta H_i}^2$. Mistä saadaan suoraan *absoluuttisiksi* pistekorkeuksien *a posteriori* variansseiksi:

$$\sigma_{\widehat{H}_k}^2 = \left(\sum_{i=1}^k \sigma_{\Delta H_i}^2 \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_{\Delta H_i}^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_{\Delta H_i}^2} \right).$$

Tähän voi halutessa sijoittaa $\sigma_{\Delta H_i}^2 \rightarrow s_i$.

Vastaavat kaavat pätevät myös muissa ehtotasoituksissa, mm. monikulmiojonojen suunta- ja koordinaattitasoituksissa. Näissä tapauksissa kuitenkin “kilometriviirhe-olettama” ei välttämättä päde.

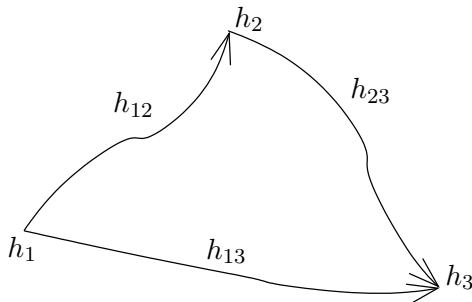
11.4 Esimerkki: vaaitusverkko

Olkoon annettuna kolme pistettä 1, 2 ja 3, ja niiden tuntemattomat korkeudet h_1 , h_2 ja h_3 . Käytettävissä olevat mittaukset ovat *korkeuserot* (ks. kuva):

$$\ell_1 = \underline{h}_{12} = 5,227 \text{ m}$$

$$\ell_2 = \underline{h}_{23} = 1,219 \text{ m}$$

$$\ell_3 = \underline{h}_{13} = 6,440 \text{ m}$$



Tämän lisäksi on annettu, että

$$h_1 = 1,875 \text{ m},$$

korkeusjärjestelmän kiinnittämiseksi.

Muodostetaan *linearisoidut* havaintoyhtälöt, siis havaintoyhtälöt joissa sekä havainnot että tuntemattomat ovat “delta-suureita” joista jokaisesta on vähennetty vastaava likiarvo:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{h}_{12} \\ \Delta \underline{h}_{23} \\ \Delta \underline{h}_{13} \\ \Delta \underline{h}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \widehat{h}_1 \\ \Delta \widehat{h}_2 \\ \Delta \widehat{h}_3 \end{bmatrix}$$

Ensin lasketaan (käytännön heuristiikkana käyttämällä havaintoarvot mielivaltaisessa järjestyksessä) tuntemattomien eli pistekorkeuksien *likiarvot*:

$$h_1^0 = 1,875 \text{ m}$$

$$h_2^0 = 7,102 \text{ m}$$

$$h_3^0 = 8,315 \text{ m}$$

ja näistä *havaintosuureiden* likiarvot (koko likiarvojen kokoelma on oltava konsistentti funktionaalimallin kanssa!):

$$\begin{aligned} h_{12}^0 = h_2^0 - h_1^0 = 5,227 \text{ m} &\Rightarrow \Delta \underline{h}_{12} = \underline{h}_{12} - h_{12}^0 = 0, \\ h_{23}^0 = h_3^0 - h_2^0 = 1,213 \text{ m} &\Rightarrow \Delta \underline{h}_{23} = \underline{h}_{23} - h_{23}^0 = 0,006 \text{ m}, \\ h_{13}^0 = h_3^0 - h_1^0 = 6,440 \text{ m} &\Rightarrow \Delta \underline{h}_{13} = \underline{h}_{13} - h_{13}^0 = 0, \\ h_1^0 = 1,875 \text{ m} &\Rightarrow \Delta \underline{h}_1 = \underline{h}_1 - h_1^0 = 0. \end{aligned}$$

Siis linearisoitu havaintovektori eli “delta-havaintovektori” on

$$\Delta \underline{\ell} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,006 \text{ m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sitten lasketaan normaaliyhtälöt; rakennematriisi on

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja oletetaan että $Q = I_4$, 4×4 yksikkömatriisi². Silloin

$$A^T Q^{-1} A = A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ja

$$A^T Q^{-1} \Delta \underline{\ell} = A^T \Delta \underline{\ell} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,006 \text{ m} \\ +0,006 \text{ m} \end{bmatrix}.$$

Nyt normaaliyhtälöt ovat

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{h}_1 \\ \Delta \hat{h}_2 \\ \Delta \hat{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,006 \text{ m} \\ +0,006 \text{ m} \end{bmatrix}$$

mistä “delta-ratkaisu” ja koko ratkaisu (lisäämällä likiarvot takaisin)

$$\begin{aligned} \Delta \hat{h}_1 = 0 \text{ m} &\Rightarrow \hat{h}_1 = h_1^0 + \Delta \hat{h}_1 = 1,875 \text{ m} \\ \Delta \hat{h}_2 = -0,002 \text{ m} &\Rightarrow \hat{h}_2 = h_2^0 + \Delta \hat{h}_2 = 7,100 \text{ m} . \\ \Delta \hat{h}_3 = +0,002 \text{ m} &\Rightarrow \hat{h}_3 = h_3^0 + \Delta \hat{h}_3 = 8,317 \text{ m} \end{aligned}$$

²Ei kovin realistista. Realistisempaa olisi muoto $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix}$, olettaen että matkat 1-2, 1-3 ja 2-3 ovat yhtäpitkiä. Ja jos piste 1 on kiinteä lähtöpiste, $q = 0$.

Tasoitettut havainnot samalla tavalla käsiteltyinä:

$$\begin{aligned}\Delta \hat{h}_{12} &= -0,002 \text{ m} \Rightarrow \hat{h}_{12} = 5,227 \text{ m} - 0,002 \text{ m} = 5,225 \text{ m.} \\ \Delta \hat{h}_{23} &= +0,004 \text{ m} \Rightarrow \hat{h}_{23} = 1,213 \text{ m} + 0,004 \text{ m} = 1,217 \text{ m.} \\ \Delta \hat{h}_{13} &= +0,002 \text{ m} \Rightarrow \hat{h}_{13} = 6,440 \text{ m} + 0,002 \text{ m} = 6,442 \text{ m.} \\ \Delta \hat{h}_1 &= 0 \text{ m} \Rightarrow \hat{h}_1 = h_1^0 = 1,875 \text{ m.}\end{aligned}$$

Näky, että tasoitettujen havaintojen kohdalla pätee:

$$\hat{h}_{12} + \hat{h}_{23} - \hat{h}_{13} = 0$$

eli silmukan sulkuvirhe on tasoitettu pois.

Korjaukset/residuaalit:

$$\begin{aligned}\underline{v}_1 &= \hat{h}_{12} - \underline{h}_{12} = -0,002 \text{ m.} \\ \underline{v}_2 &= \hat{h}_{23} - \underline{h}_{23} = -0,002 \text{ m.} \\ \underline{v}_3 &= \hat{h}_{13} - \underline{h}_{13} = +0,002 \text{ m.} \\ \underline{v}_4 &= \hat{h}_1 - \underline{h}_1 = 0 \text{ m.}\end{aligned}$$

Mistä painoykisikön keskivirhe:

$$\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{4-3}} = \sqrt{\frac{\underline{v}^T Q^{-1} \underline{v}}{1}} = \sqrt{\underline{v}^T \underline{v}} = 0,001 \text{ m} \sqrt{12} \approx \pm 0,004 \text{ m.}$$

Luku $1 = 4 - 3$ on *vapausasteiden määrä*, kun on 4 havaintoa ja 3 tuntematonta.

11.5 Helmert-muunnosparametrien estimointi

Käytännössä tulee usein vastaan tehtävä, että on estimoitava Helmert-muunnosta määrävät parametrit, kun pistekentän koordinaatit on annettu kahdessa koordinaattijärjestelmässä.

Esimerkiksi on muunnoskaava kahden kolmiulotteisen koordinaattijärjestelmän välillä (Ollikainen, 1993):

$$\begin{bmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \\ z^{(2)} \end{bmatrix} = (1+m) R \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}, \quad (11.2)$$

missä $1+m$ on mittakaavakerroin (m yleensä pieni), R on pyörähdysmatriisi ja t_x, t_y, t_z järjestelmien välinen siirtovektori.

Koska pyörähdyskulmat ovat yleensä pieniä, voidaan kirjoittaa:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{bmatrix},$$

missä e_x, e_y, e_z ovat pieniä kiertokulmia akseleiden x, y, z ympäri.

Kaava (11.2) voidaan kirjoittaa uudelleen ja linearisoida seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} x^{(2)} - x^{(1)} \\ y^{(2)} - y^{(1)} \\ z^{(2)} - z^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & e_z & -e_y \\ -e_z & m & e_x \\ e_y & -e_x & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix},$$

eli

$$\begin{bmatrix} x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \\ y_i^{(2)} - y_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} - z_i^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i^0 & 0 & -z_i^0 & +y_i^0 & 1 & 0 & 0 \\ y_i^0 & +z_i^0 & 0 & -x_i^0 & 0 & 1 & 0 \\ z_i^0 & -y_i^0 & +x_i^0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ e_x \\ e_y \\ e_z \\ t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}. \quad (11.3)$$

Tässä on yleisyyden vuoksi lisätty piste-indeksi i , $i = 1, \dots, n$. Pisteiden määrä on silloin n , "havaintojen" (annettujen koordinaattierotusten) määrä on $3n$.

11.6 Vapaa asemapiste

Perinteisesti on kartoitusmittauksessa oletettu, että asemapiste tunnetaan. Myös säteittäinen kartoitusmittaus suoritettiin sillä tavalla, että valittu asemapiste oli tunnettu piste, ja mittauspisteet mitattiin tästä pisteestä lähtien.

Nykyaikaisessa takymetriassa on sen verran tietojenkäsittelyvoima, että tämä ei ole enää välttämätöntä. Sillä ehdolla, että mittauksessa otetaan mukaan riittävä määrä pisteitä, joiden koordinaatit tavoitetussa koordinaattijärjestelmässä ovat jo tiedossa, voidaan *jo kentällä* saada kaikki mitattujen kartoituskohteiden koordinaatit valmiiksi tähän järjestelmään.

Menetelmän nimi on *vapaan asemapisteen menetelmä*.

Nykyaikainen takymetria mahdollistaa suurien pisteblokkien samanaikaisen mittaamisen. Mittausten tehokas suorittaminen edellyttää, että asemapisteet voidaan valita vapaasti, kartoitettavien pisteiden ehdoilla. Vaatimus, että asemapiste olisi jo tunnettu piste, olisi liian rajoittava ja aiheuttaisi ylimääräistä työtä (esim. kojeen ylimääräisiä siirtoja annetun piste-kentän mittaamiseksi).

Vapaan asemapisteen menetelmä on HELMERT-muunnoksen parametrien estimoinnin sovellus.

11.7 Vapaan asemapisteen laskuesimerkki

1. Tunnetuille jonopisteille 1 ja 2 on olemassa koordinaatit koordinaatistossa x, y : x_1, y_1 ja x_2, y_2 , ja mittauksesta saadaan pisteiden kojekoordinaatit u_1, v_1 ja u_2, v_2
2. Oletetaan, että on suurehko määrä kohdepisteitä $i = 1, \dots, n$. Pisteille on määritettävä koordinaatit x_i, y_i mitatuista kojekoordinaateista u_i, v_i .
3. Suoritetaan *koordinaatistomuunnos* eli Helmert- tai yhdenmuotoisuusmuunnos. Tämä on lineaarinen, tasossa neljän parametrin muunnos.
4. Kertoimet kahden tunnetun pisteen tapauksessa saadaan alla kuvatulla menetelmällä.

5. muunnetaan kohdepisteiden mitatut kojekoordinaatit u_i, v_i koordinaatit x_i, y_i -koordinaateiksi

Vapaan asemapisteen menetelmä mahdollistaa kohdepisteiden mittaamisen ennen kuin jonopisteitä on mitattu. Muunnos kojekoordinaateista tavoitekoordinaatteihin suoritetaan silloin jälkeinpäin.

Yleensä käytetään kolme tai useampi tunnettua pistettä; silloin muunnosparametrit on laskettava tasoituslaskulla. Etuina ovat

1. suurempi tarkkuus,
2. mahdollisten karkeiden virheiden löytäminen, ja
3. mahdollisen x, y -koordinaatiston paikallisen vääristymän huomaaminen.

11.8 Helmert-tasomuunnos kahdesta tunnetusta pisteestä

Muunnoskaavat $(u, v) \longrightarrow (x, y)$:

$$\begin{aligned}x &= a + cu - dv \\y &= b + du + cv\end{aligned}$$

eli

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

tai selkeämmin:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (11.4)$$

PYTHAGORAS antaa mittakaavan:

$$s_{xy} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ja

$$s_{uv} = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2},$$

ja tästä

$$K = \frac{s_{xy}}{s_{uv}}.$$

Samalla tavalla saadaan orientaatio³:

$$\theta = \arccos \frac{x_2 - x_1}{s_{xy}} - \arccos \frac{u_2 - u_1}{s_{uv}}$$

tai⁴

$$\theta = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \arctan \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}.$$

Tämän jälkeen siirtovektorin $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^T$ laskeminen on suoranaista.

³Mikä käytännön vika on tässä kaavassa? Tarkasta tapaus $x_2 - x_1 \approx s_{xy}$! Ratkaisu?

⁴Entä jos $x_2 \approx x_1$? Ratkaisu: Käytä $\theta = -\arctan \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} + \arctan \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}$!

Intermezzo. *Kompleksilukujen käyttö.* Helmert-muunnosta (kaava 11.4) saadaan helposti kompleksilukuversio:

$$z = \alpha + \beta w,$$

missä $z \equiv x + iy$, $w \equiv u + iv$, $\alpha \equiv a + ib$ ja

$$\beta \equiv K (\cos \theta + i \sin \theta) = K e^{i\theta}.$$

Mikäli K on lähellä 1 (kuten lähes aina), voi kirjoittaa $K = 1 + m \approx e^m$ ja seuraa:

$$\beta = e^{m+i\theta} = e^\mu,$$

missä taas $\mu \equiv m + i\theta$! Näin

$$z = \alpha + w e^\mu,$$

ja, jos sekä m että θ ovat pieniä,

$$z \approx \alpha + w (1 + \mu),$$

eli käytännössä $\beta \approx 1 + \mu$.

11.9 Helmert-parametrien virheiden kasautuminen

Mikäli on enemmän kuin kaksi tukipistettä, on mahdollista analysoida miten virheet kasautuvat tukipisteiden koordinaateista Helmert-parametreihin ja niiden kautta tuntemattomien pisteiden (muunnettuihin) koordinaatteihin. Ks. esim. (Kahmen and Faig, 1988, ss. 253-255).

Lähdetään Helmert-muunnoskaavasta kirjoitettuna havaintoyhtälönä⁵:

$$\begin{bmatrix} x_i - u_i \\ y_i - v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +u_{i,0} & -v_{i,0} & 1 & 0 \\ +v_{i,0} & +u_{i,0} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \theta \\ a \\ b \end{bmatrix}, \quad (11.5)$$

missä arvot $u_{i,0}$ etc. ovat riittävän hyviä likiarvoja. Tietysti tukipisteiden annetut koordinaattiarvotarvot ovat riittävän hyviä. $m = d - 1$, $\theta = c$ ovat mittakaavakorjaus ja pyörähdyskulma, jotka usein ovat pieniä (useimmat, myös paikalliset, koordinaattijärjestelmät ovat suunnilleen oikean mittaisia ja orientoituvat pohjoiseen).

Yllä olevissa havaintoyhtälöissä on $2n$ riviä, missä n on tukipisteiden määrä; $i = 1, \dots, n$. Rakennematriisi A on muotoa

$$A = \begin{bmatrix} +u_i & -v_i & 1 & 0 \\ +v_i & +u_i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jos oletetaan, että kaikki tukipisteet ovat yhtä tarkkoja, voidaan laskea *normaalimatriisi* N seuraavasti ($\sum$ merkitsee summaus kaikkien tukipisteiden yli):

⁵Kompleksina:

$$z_i - w_i = \begin{bmatrix} w_{i,0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} \sum (u^2 + v^2) & 0 & \sum u & \sum v \\ 0 & \sum (u^2 + v^2) & -\sum v & \sum u \\ \sum u & -\sum v & n & 0 \\ \sum v & \sum u & 0 & n \end{bmatrix}$$

Tämän merkitys on, että tuntemattomien $[m \ \theta \ a \ b]^T$ varianssimatriisi on juuri N^{-1} .

Mikäli nyt $\sum u = \sum v = 0$, t.s. u, v ovat *painopistekoordinaatit*, saadaan

$$N = \begin{bmatrix} \sum (u^2 + v^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum (u^2 + v^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

ja parametrien varianssit ovat:

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= \sigma_\theta^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sum (u^2 + v^2)}, \\ \sigma_a^2 &= \sigma_b^2 = \frac{\sigma_0^2}{n}. \end{aligned}$$

Ja parametrit eivät tilastollisesti korreloi.

Nyt on varianssien kasautumislain avulla suoranaista johtaa, mikä on Helmert-parametrien virheiden vaikutus muunnetun pisteen koordinaattivirheeseen. Jos kirjoitetaan muunnetun pisteen sijainti muotoon $\ell = [x \ y]^T$, saadaan

$$\Sigma_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 A N^{-1} A^T = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{u^2 + v^2}{\sum_{tp} (u^2 + v^2)} + \frac{1}{n_{tp}} & 0 \\ 0 & \frac{u^2 + v^2}{\sum_{tp} (u^2 + v^2)} + \frac{1}{n_{tp}} \end{bmatrix}.$$

Mistä seuraa suoraan

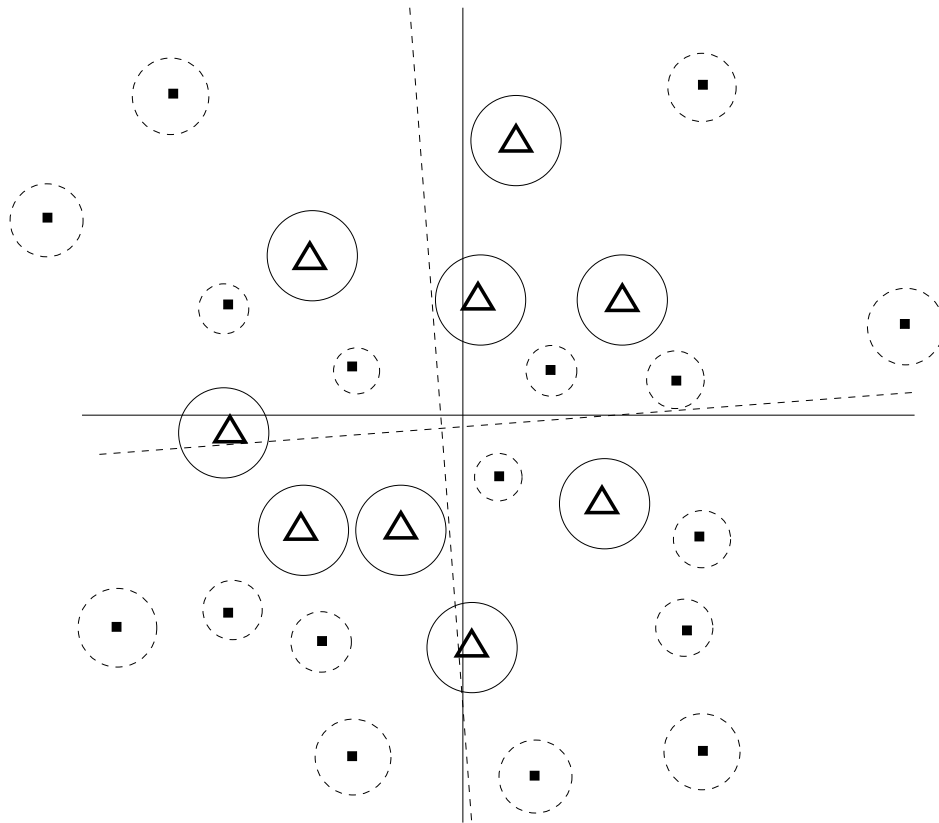
$$\sigma_{p_i}^2 = 2\sigma_{x_i}^2 = 2\sigma_{y_i}^2 = 2\sigma_0^2 \left(\frac{u_i^2 + v_i^2}{\sum_{tp} (u^2 + v^2)} + \frac{1}{n_{tp}} \right).$$

Nämä ovat käytännön kaavat Helmert-muunnoskaavan kautta saatujen pisteiden pistekeskivirheille. Esiintyvät koordinaatit u, v ovat *painopistekoordinaatteja* ts. origo on tukipistekentän painopiste. Pistekoordinaattien kovarianssi on

$$\sigma_{xy} = 0,$$

ts. pisteiden x - ja y -koordinaatit eivät korreloi ja pisteiden virhe-ellipsien akselit ovat x - ja y -akselein suuntaisia. Tarkemmin, virhe-ellipsit ovat *ympyröitä*. Ja niiden koko riippuu *ainoastaan etäisyydestä origosta* eli annettujen pisteiden painopisteestä.

Kuvassa 11.1 on kuvattu graafisesti tämän virheen käyttäytymistä. Lienee intuitiivisesti selvä, että annetut pisteet on peitettävä koko alue missä näihin perustuvaa Helmert-muunnosta



Kuva 11.1: Miten annettujen pisteiden virheet (kolmiot) kasautuvat Helmert-muunnoksen kautta uusiin (muunnettuihin) pisteisiin (neliöt).

aiotaan käyttää. Ja miten enemmän pisteitä, sitä tarkempi tulos. Minimipistemäärä on käytännön kokemuksen mukaan oltava vähintään kaksi kertaa matemaattista minimiä, eli neljä pistettä = 8 koordinaattiero, joista lasketaan 4 muunnosparametriä. Sanotaan, että *redundanssi* on $2\times$.

Tässä laskennassa ei ole vielä otettu huomioon *muut virhelähteet* kuten itse lähtöpisteen ja muunnettavan pisteen piste- ja mittauskeskivirheitä. Yksi sellainen on *pisteen identifioinnin keskivirhe*: piste ei ole maastossa välttämättä merkitty kovin tarkasti. Esim. pultti voi olla kulunut.

Luku 12

GPS-mittaus ja laskenta

12.1 Yleistä

Geodeettiset mittaukset tehdään yhdistettyinä pseudoetäisyys- ja vaihe-eromittauksina. Käytetään vähintään kahta vastaanotinta jotka toimivat yhtäaikaan, eli mittaus on *relatiivinen* ja perustuu havaintopaikkojen välisten erotusten käsittelyyn.

Saavutettava tarkkuus on (muutaman kilometrin vektoreille) 1...5 ppm staattisella mittauksella; myöhemmin käsiteltävällä kinemaattisella tekniikalla saavutetaan 10...20 mm + 1...2 ppm. Tämä on hyvin riippuvainen olosuhteista ja mittausjakson pituudesta. Runkomittaukseen pitää käyttää vain *staattinen* mittausmenetelmä.

12.2 Rekognosointi

Ennen mittausta on suoritettava *rekognosointi*, jonka ansoista itse mittauksilanteessa pisteet löytyvät vaivattomasti: tarkistettu, selkeä pistekortti piirroksineen sekä lähestymiskarttoineen ja -ohjeineen on oltava jokaiselle pisteelle.

GPS-konstellaaation nykytila on niin hyvä, että yleisesti ei tarvitse ottaa sitä huomioon GPS-mittauksia suunniteltaessa. Mittauksia voidaan suorittaa 24 tuntia vuorokaudessa ja luottaa siihen, että hyvä ratkaisu voidaan laskea. On kuitenkin erikoistilanteita missä tämä ei pidä paikkansa. Satelliittien näkyvyys havaintopaikalta voi olla niin huono että on tarkoin suunniteltava koska riittävä määrä satelliitteja on havaittavissa.

Havaintopaikkaa valitessa on otettava huomioon *näkyvyys ylöspäin*: Jokaisesta havaintopaikasta tehdään *horisonttipiirros* missä kaikki esteet näkyvät. Havainnot tehdään vain tiettyyn korkeuskulmaan saakka, ns. *cut-off angle*. Arvo on ollut perinteisesti 20° tai 15°, mutta nykyisin geodeettisia tarkkuusmittauksia tehdään jopa 5°:een saakka. Ilmakehämallien parantunut laatu on mahdollistanut tätä. Näin matala raja-arvo ei sovellu kuitenkaan rutiinimittauksille eikä RTK-mittauksille.

12.3 Vektoreiden mittaus

Havaintoja tehdään useimmiten *vektoreiden* mittauksena. Vektori on kahden havaintopaikan välinen kolmiulotteinen, koordinaattieroista koostuva objekti eli mittauksituloksena. Vektorit yhdistetään verkoksi sopivalla pienimmän neliösumman menetelmällä, jolloin testataan myös niiden oikeellisuutta.

Jokainen edellisessä kohdassa muodostettu vektori mitataan (vähintään) *kahdessa sessiossa*. Eli jokaiselle pisteparille jonka väliin on muodostettu vektori, pitää olla kaksi mittausjaksoa eli sessiota, joissa ne ovat yht'aikaisesti miehitettyjä. Tämä helpottaa mittauksen laadun – sekä tarkkuuden että luotettavuuden – varmistaminen jo kenttätöön aikana.

12.4 Vektoreiden määrä

Numeerisen kartoituksen maastomittausohjeiden ((Anon., 1991)) luvussa 1.391 (s. 16) käsitellään, miten arvioidaan tarvittava määrä mittausjaksoja ja laskennassa tarvittava määrä riippumattomia vektoreita. Julkaisussa käytetään seuraavat symbolit:

R	Yhtäaikaa mitattavien vastaanottimien — siis: käytettävissä olevien vastaanottimien — määrä
M	Mitattavien pisteiden kokonaislukumäärä; tukipisteet ja määritettävät pisteet yhteenlaskettuna
N	Haluttu mittauksen <i>ylimääräisyyskerroin</i> (redundanssiaste, vapausastekerroin).

Ylimääräisyyskerroin N riippuu käytettävissä olevien vastaanotinten määrästä R ja valitaan alla olevan taulukon mukaisesti:

Vastaanottimien määrä R	ylimääräisyyskerroin N , vähintään
2	2
3	1,4
4	1,2
5 tai useampia	(1)

Tämän takana on filosofia, että jos on useampia vastaanottimia käytettävissä yhtäaikaa, saadaan redundanssia *verkko geometrian* kautta. Jos on vain kaksi vastaanotinta, ei saada verkkoa vain yksi ainoa vektori kerrallaan.

Mittausjaksojen (sessioiden) vähimmäismäärä S ja mitattaville riippumattomien vektoreiden vähimmäismäärä B voidaan tästä laskea:

$$S = (1 + p) \frac{MN}{R} + kM,$$

missä p on varmuuskerroin *mittauksen epäonnistumisriskin* ja k *alueen koon* (siirtymisriskin) takia:

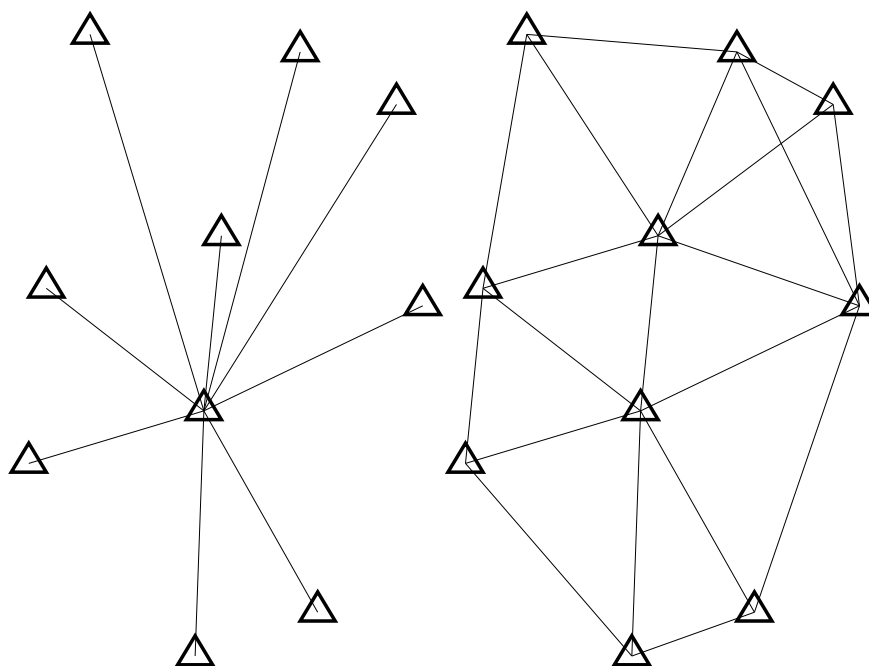
- $p = 0.1, \dots, 0.2$. $p = 0.1$ vastaa onnistumisprosenttiin 90%, $p = 0.2$ vastaa 80-prosenttiseen onnistumiseen.
- $k = 0.1, \dots, 0.2$. Sataa kilometriä pienemmille alueille valitaan $k = 0.1$, muuten $k = 0.2$.

Arvioitu vektoreiden kokonaismäärä V (vektori AB on identtinen vektorin BA kanssa, ja vektori AA ei olekaan; siksi vektoreiden määrä yhdessä sessiossa on $v = \frac{1}{2} (R - 1) R$):

$$V = R(R - 1) \frac{S}{2}$$

Riippumattomia vektoreita (pistevälejä) B :

$$B = (R - 1) S.$$



Kuva 12.1: GPS-verkon geometria

12.5 Verkon geometria

Jos mitattavalla verkolla on n pistettä, voidaan muodostaa niiden välillä $n - 1$ riippumatonta vektoria. Kaikkiaan voidaan muodostaa $\frac{1}{2}n(n - 1)$ vektoria. Kuitenkin voidaan suositella, että

Mitataan $2n$ vektoria (ks. edellinen luku ja taulukko); vektorit valitaan niiden pituuksien mukaan eli mahdollisimman lyhyiksi; kuitenkin näin, että jokaiseen pisteeseen kytkeytyy ainakin kolme vektoria.

Esimerkiksi: jos on 10 pistettä ($n = 10$), on 9 riippumatonta vektoria ja mahdollisia vektoreita olisi 45. Valitaan niistä 20 lyhyimmät.

Verkon geometrian rakentaminen käy edelleen parhaiten käsin; ks kuva 12.1.

12.6 Mittausten kesto ja aikataulu

Mittaukset jaetaan havaintojaksoihin eli *sessioihin*.

Yhden mittausjakson ajallinen kesto riippuu

1. Vektorin pituudesta, ja
2. halutusta tarkkuudesta.

Hyödyllinen käytännön kaava joka kuvaa GPS-mittauksen tarkkuutta vektorin pituuden ja session keston funktiona on:

$$\sigma^2 = C \ell^p t^q,$$

missä σ on vektorin komponenttien (koordinaattierojen) keskivirhe, ℓ on vektorin pituus, t mittauksen kesto, ja C sopiva vakio, joka riippuu mm. Auringon aktiivisuudesta, mittauspaikan leveysasteesta, mittauslaitteiden ominaisuuksista jne. jne. Eksponentteja p ja q on

jonkin verran tutkittu empiirisesti; “Bernese rule-of-thumb” esim. sanoo, että $p = +1$, eli virhe on verrannollinen etäisyyden neliöjuureen. Myös $q = -1$ tuntuu järkevältä: Tarkkuus paranee kerättyjen havaintojen määrän neliöjuuren mukaan.

Käytännössä:

Jos verkon vektoripituudet ovat luokkaa 1–10 km, kuten on asian laita monessa kunnallisessa runkoverkoissa, järkevä mittausaika olisi $1^h - 2^h$. Jos vektorin toinen piste – tai molemmat – on peitteinen, voidaan tuplata sen vektorin mittausession pituutta. Näin voidaan saavuttaa sentrimetriluokan paikannustarkkuutta. Mikäli EUREF-FIN sidospisteet ovat myös pisteisiin, jotka ovat alle 10 km etäisyydellä, pätee sama myös näihin.

Peitteisyyden arvointi voidaan tehdä piirtämällä *horisonttikuva* jossa raja-elevaatio on piirretty eri suuntin ympäri horisonttia. Hyvä taivaan näkyvyys on vapaa näkyvyys korkeuskulmaan 20° saakka. Yksittäiset esteet (puut, mastot) tiettyihin suuntiin eivät ole ongelma; jos on laajempi este, je voi olla syy mittausajan pidentämiseen. Kuitenkin jos este on laaja ja läpinäkymätön, kuten rakennuksen seinä joka peittää taivaalta yhden puoliskon melkein kokonaan, pisteessä ei kannata mitata.

Kun sessioiden pituudet on saatu selville, voidaan laatia *mittausaikataulu*, jossa otetaan huomioon myös matkustus päämajasta pisteisiin – nehän ovat rekognosoinnin ansiosta tarkoin ennakoitavissa – ja työaikasäännökset. Myös *kustannuslaskelma* on silloin jo mahdollista tehdä.

Kuitenkin:

Muista *varata ylimääräistä aikaa* odottamattomiin tilanteisiin! Niitä kun tapahtuu aina: vastaanotin voi joutua epäkuntoon! Sopiva varaus lienee 10-30%, riippuen käytettävien vastaanotinten määrästä.

12.7 Ratatiedot

1-10 km kokoisissa verkoissa broadcast-ratatietojen käyttö pitäisi olla riittävä; kuitenkin usein tarkkojen ratatietojen käyttö parantaa tulokset. 10–50 km pitkät vektorit pitää ehdottomasti prosessoida käyttäen *precise ephemeris*.

12.8 Antennit ja pystytys

Yleistä:

1. Kampanjassa käytetään aina samantyyppiset antennit; näin sähköisen keskipisteen vaihtelut eliminoiduvat ongelmasta.
2. Kun on kyse pitkien matkojen mittauksesta ja mittauksesta EUREF-pisteeseen, kannattaa käyttää ns. choke ring -antenni, jonka maaheijastuksia torjuvat ominaisuudet (“multipath”) ovat hyviä.
3. Kolmijalkojen, erityisesti optisen luodin, kunta tarkastetaan ennen mittausta ja sen jälkeen.

Kentällä:

1. Antenni pystytetään pisteen yläpuolella kolmijalan ja pakkokeskistyslevyn avulla. Keskitetään ja tasataan huolella, ja suunnataan antenni (magneettiseen) pohjoiseen kompassin avulla.
2. Mitataan huolellisesti antennin korkeus pisteen yläpuolella. Yleensä mittaus suoritetaan merkin keskipisteestä antennin reunaan, kolmeen eri reunan paikkaan. Kolmesta arvosta otetaan keskiarvo. Arvot ei saa poiketa toisistaan millimetriä enempää, muuten tarkistettava keskistys ja taseaus.
3. Antennin korkeusmittaus mittauksen alussa ja lopussa, pitkissä mittausissa myös (varovasti!) mittauksen aikana.

12.9 Havaintogeometria, havainto-yhtälöt

Maastomittauksessa käytetty menetelmä on lähinnä staattinen kantoaaltovaihemittaus ja laskentamenetelmä relatiivinen paikannus, yleensä pienellä alueella (muutama kymmenen, korkeintaan sataa kilometriä).

GPS:n tuottamat havaintosuureet ovat *pseudoetäisyyksiä*¹:

$$p = \rho + c(\Delta t - \Delta T) + d_{ion} + d_{trop}.$$

Yksinkertaisuuden vuoksi jätetään ilmakehän vaikutus pois ja oletetaan myös että satelliittirata – ja radasta ja kellonajasta laskettu satelliitin hetkellinen paikka avaruudessa – ja satelliitin kellovirhe Δt ovat *tunnettuja*. Tässä ρ on geometrinen etäisyys satelliitti - vastaanotin ja ΔT on vastaanottimen kellovirhe.

Kirjoitetaan

$$\rho = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2},$$

missä $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ on tunnettu satelliitin paikka avaruudessa, laskettu ratatiedoista eli efermeriideista. Nyt (unohdetaan tropo- ja ionosfäärin vaikutukset)

$$p = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} + c(\Delta t - \Delta T),$$

missä on *neljä tuntematonta*, X, Y, Z ja ΔT .

Nämä neljän tuntemattoman ratkaisemiseksi riittää havainnot neljälle satelliitille. Mikäli käytettävien satelliittien määrä on suurempi, saadaan redundanssi ja *tasoitustehtävä*.

Linearisointi on suoranaista: valitse likiarvot X_0, Y_0, Z_0 ja $\Delta T_0 = 0$. Silloin “yhteensopiva” havaintosuureen likiarvo on:

$$p_0 = \sqrt{(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 + (z - Z_0)^2} + c\Delta t$$

ja pienet erotussuureet (Taylor-kehityksen ensimmäiset termit):

$$\Delta p \equiv p - p_0 \approx \frac{\partial \rho}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial \rho}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial \rho}{\partial Z} \Delta Z - c\Delta T, \quad (12.1)$$

¹Geodeettisissa mittauksissa käytetään ensisijaisesti ns. kantoaallon vaihemittauksia, jotka kuitenkin käyttäytyvät suunnilleen samalla tavalla tasointilaskussa. Vain mittaustarkkuus on pari suuruusluokkaa parempaa.

missä osittaisderivaatat lasketaan seuraavasti ketjusäännön avulla:

$$\frac{\partial \rho}{\partial X} = \frac{1}{2\rho} \cdot \frac{\partial (x - X)^2}{\partial X} = -\frac{x - X}{\rho},$$

ja vastaavasti

$$\frac{\partial \rho}{\partial Y} = -\frac{y - Y}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial Z} = -\frac{z - Z}{\rho}.$$

Vaihtoehtoisesti käytetään toposentrisia (taivaanpallon) pallokoordinaatteja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial X} &= \cos A \cos \eta, \\ \frac{\partial \rho}{\partial Y} &= \sin A \cos \eta, \\ \frac{\partial \rho}{\partial Z} &= \sin \eta, \end{aligned}$$

missä A on atsimuti (suuntakulma) ja η on korkeuskulma horizontin yläpuolella.

Huomaa myös, että $\mathbf{e} \equiv \left[\frac{\partial \rho}{\partial X} \quad \frac{\partial \rho}{\partial Y} \quad \frac{\partial \rho}{\partial Z} \right]$ on *yksikkövektori*, ts. sen pituus on $\|\vec{\mathbf{e}}\| = 1$.

Tällä tavoin voimme kirjoittaa linearisoitu havaintoyhtälö seuraavasti:

$$\Delta p + v = \begin{bmatrix} \mathbf{e} & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R} \\ \Delta T \end{bmatrix}, \quad (12.2)$$

missä v on jäännösvirhe.

Jos kirjoitetaan havaintoyhtälöt symboliseen muotoon $\ell + v = \mathbf{A}x$, on *rakennematriisi*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A \cos \eta & \sin A \cos \eta & \sin \eta & -c \end{bmatrix}.$$

Esimerkkimatriisissa on vain yksi rivi. Yleisemmin rivien määrä vastaa havaintojen määrää:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos A^1 \cos \eta^1 & \sin A^1 \cos \eta^1 & \sin \eta^1 & -c \\ \cos A^2 \cos \eta^2 & \sin A^2 \cos \eta^2 & \sin \eta^2 & -c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos A^i \cos \eta^i & \sin A^i \cos \eta^i & \sin \eta^i & -c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos A^n \cos \eta^n & \sin A^n \cos \eta^n & \sin \eta^n & -c \end{bmatrix}. \quad (12.3)$$

12.10 Tuntemattomien varianssimatriisi ja varianssit

Tuntemattomien $\underline{x}$ painomatriisi on *normaalimatriisi*:

$$\begin{aligned} N &= [\mathbf{A}^T \mathbf{A}] = \\ &= \begin{bmatrix} \sum \cos^2 A \cos^2 \eta & \sum \cos A \sin A \cos^2 \eta & \sum \cos A \cos \eta \sin \eta & -c \sum \cos A \cos \eta \\ \sum \cos A \sin A \cos^2 \eta & \sum \sin^2 A \cos^2 \eta & \sum \sin A \cos \eta \sin \eta & -c \sum \sin A \cos \eta \\ \sum \cos A \cos \eta \sin \eta & \sum \sin A \cos \eta \sin \eta & \sum \sin^2 \eta & -c \sum \sin \eta \\ -c \sum \cos A \cos \eta & -c \sum \sin A \cos \eta & -c \sum \sin \eta & nc^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Huomaa, että tämän matriisin jokainen alkio paikassa (i, j) saadaan kertomalla A -matriisin sarake i ja sarake j keskenään (”skalaaritulo”): jos kirjoitetaan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix},$$

jossa

$$a_1 \equiv \begin{bmatrix} \cos A_1 \cos \eta_1 & \cos A_2 \cos \eta_2 & \cdots & \cos A_n \cos \eta_n \end{bmatrix}^T,$$

$$a_2 \equiv \begin{bmatrix} \sin A_1 \cos \eta_1 & \sin A_2 \cos \eta_2 & \cdots & \sin A_n \cos \eta_n \end{bmatrix}^T,$$

jne., saadaan

$$N = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 & a_1 \cdot a_3 & a_1 \cdot a_4 \\ a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 & a_2 \cdot a_3 & a_2 \cdot a_4 \\ a_3 \cdot a_1 & a_3 \cdot a_2 & a_3 \cdot a_3 & a_3 \cdot a_4 \\ a_4 \cdot a_1 & a_4 \cdot a_2 & a_4 \cdot a_3 & a_4 \cdot a_4 \end{bmatrix},$$

jossa $a \cdot b$ on kahden vektorin skalaari- eli pistetulo $\sum_{k=1}^n a_k b_k$.

Tässä summaus $\sum$ tapahtuu kaikkien satelliittien $i = 1, \dots, n$ yli, ja i -indeksi A - ja η -arvoille on jätetty merkitsemättä.

Tästä saa tuntemattomien *a posteriori* -varianssit – rarkemmin, painokertoimet – käänteis-matriisin $Q_{\hat{x}\hat{x}} = N^{-1}$ alkioina:

$$\begin{aligned} q_{xx} &\equiv (Q_{\hat{x}\hat{x}})_{11}, \\ q_{yy} &\equiv (Q_{\hat{x}\hat{x}})_{22}, \\ q_{zz} &\equiv (Q_{\hat{x}\hat{x}})_{33}, \\ q_{tt} &\equiv (Q_{\hat{x}\hat{x}})_{44}. \end{aligned}$$

Näin laskettujen q -arvojen perusteella DOP²-suureet on määritelty seuraavasti³:

$$\begin{aligned} \text{GDOP} &= \sqrt{q_{xx} + q_{yy} + q_{zz} + q_{tt}} \\ \text{PDOP} &= \sqrt{q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}} \\ \text{HDOP} &= \sqrt{q_{xx} + q_{yy}} \\ \text{VDOP} &= \sqrt{q_{zz}} \\ \text{TDOP} &= \sqrt{q_{tt}} \end{aligned}$$

Muista kuitenkin, että näin laskettu Q -matriisi⁴ ja sen alkiot voidaan kutsua variansseiksi vain *fiktio* perusteella, että yhden satelliitin pseudoetäisyshavainnon tarkkuus *olisi* $\sigma_0 = \sqrt{q_0} = 1$.

²Dilution of Precision

³Kirjallisuudessa määritelmät vaihtelevat hieman

⁴Näin laskettu ”varienssimatriisi” – missä havaintojen todellinen tarkkuus on korvattu konventionaalisella arvolla 1 – kutsutaan usein *painokerroinmatriisiksi*.

Siinä tapauksessa, että yhden satelliitin pseudoetäisyyden *todelliseksi* tarkkuudeksi on tiedossa: σ_0 , saadaan:

$$\begin{aligned}\text{PDOP} &= \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}}{\sigma_0} = \frac{\sigma_P^{(3D)}}{\sigma_0} \\ \text{HDOP} &= \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\sigma_0} = \frac{\sigma_P^{(2D)}}{\sigma_0} \\ \text{VDOP} &= \frac{\sqrt{\sigma_z^2}}{\sigma_0}\end{aligned}$$

missä $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ovat X, Y ja Z -koordinaattien *todelliset* (realistiset) keskivirheet: $\sigma_x^2 = q_{xx}\sigma_0^2$, $\sigma_y^2 = q_{yy}\sigma_0^2$, $\sigma_z^2 = q_{zz}\sigma_0^2$.

Yllä olevissa kaavoissa on käytetty myös $\sigma_P^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 [+ \sigma_z^2]$, joko kaksi- tai kolmiulotteinen *pistevarianssi*, pistekeskivirheen neliö.

12.11 Esimerkki: atsimutisymmetrinen geometria

Olettakaame nyt yksinkertaistetun analyysin vuoksi, että

satelliitit on tasaisesti jaettu ympäri taivasta eli atsimutiarvojen A mukaan, erikseen jokaiselle korkeuskulmalle η .

Silloin yllä olevassa matriisissa

1. *kaikki ei-päälävistäjän arvot häviävät*, koska niissä on joko $\sin A$ tai $\cos A$, tai jopa $\sin A \cos A$. Ainoastaan $\sum \sin \eta$ ei häviä.
2. Päälävistäjäelementit

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \cos^2 A^i \cos^2 \eta^i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i, \\ \sum_{i=1}^n \sin^2 A^i \cos^2 \eta^i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i,\end{aligned}$$

koska sekä $\sin^2 A$:n että $\cos^2 A$:n keskiarvo ympyrän ympäsi on $\frac{1}{2}$.

Siksi $[A^T A]$:stä tulee *melkein* diagonaalinen matriisi joka on suhteellisen helppoa kääntää⁵:

$$[A^T A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n \sin^2 \eta^i & -c \sum_{i=1}^n \sin \eta^i \\ 0 & 0 & -c \sum_{i=1}^n \sin \eta^i & nc^2 \end{bmatrix}.$$

⁵Tulemme kuitenkin pärjäämään ilman matriisinkäännöstä.

Muunnetaan nyt havaintoyhtälö (12.1) ja rakennematriisi (12.3) seuraavalla tavalla:

$$\ell + \mathbf{v} = A\mathbf{x} = A\mathbf{I}\mathbf{x} = A[\Lambda\Lambda^{-1}]\mathbf{x} = [A\Lambda][\Lambda^{-1}\mathbf{x}] = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}},$$

missä

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \widetilde{\Delta T} \end{bmatrix} = \Lambda^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \Delta T - \frac{\sum \sin \eta}{nc} \Delta Z \end{bmatrix} \quad (12.4)$$

ja

$$\tilde{A} = A\Lambda = \begin{bmatrix} \cos A^1 \cos \eta^1 & \sin A^1 \cos \eta^1 & \sin \eta^1 - \frac{1}{n} \sum \sin \eta & -c \\ \cos A^2 \cos \eta^2 & \sin A^2 \cos \eta^2 & \sin \eta^2 - \frac{1}{n} \sum \sin \eta & -c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos A^i \cos \eta^i & \sin A^i \cos \eta^i & \sin \eta^i - \frac{1}{n} \sum \sin \eta & -c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos A^n \cos \eta^n & \sin A^n \cos \eta^n & \sin \eta^n - \frac{1}{n} \sum \sin \eta & -c \end{bmatrix},$$

koska⁶

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\sum \sin \eta}{nc} & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sum \sin \eta}{nc} & 1 \end{bmatrix}$$

Nyt saadaan

$$\tilde{N} = [\tilde{A}^T \tilde{A}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \eta^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n \left(\sin \eta^i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin \eta^j \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & nc^2 \end{bmatrix},$$

Kirjoitetaan nyt $\tilde{\mathbf{x}}$ -vektorin virhe-ellipsoidin, eli vastaavasti matriisin $\tilde{N}^{-1}$ kuvaaja-ellipsoidin, kaava:

$$\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{A}^T \tilde{A} \tilde{\mathbf{x}} = 1,$$

missä $\tilde{\mathbf{x}}$ kuten kaavassa (12.4). Tulos on

$$n_{11}\Delta X^2 + n_{22}\Delta Y^2 + \tilde{n}_{33}\Delta Z^2 + n_{44}\widetilde{\Delta T}^2 = \frac{\Delta X^2}{q_{xx}} + \frac{\Delta Y^2}{q_{yy}} + \frac{\Delta Z^2}{q_{zz}} + \frac{\widetilde{\Delta T}^2}{\widetilde{q}_{tt}} = 1,$$

⁶Tarkista, että $\Lambda\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda = I$!

mistä näkyy heti määritelmän mukaiset, varianssimatriisin $Q_{xx} = [A^T A]^{-1}$ alkio:

$$q_{xx} = \frac{2}{\sum \cos^2 \eta},$$

$$q_{yy} = \frac{2}{\sum \cos^2 \eta},$$

mistä lasketaan

$$\text{HDOP} = \sqrt{q_{xx} + q_{yy}} = \sqrt{\frac{4}{\sum \cos^2 \eta}} = \frac{2}{\sqrt{\sum \cos^2 \eta}}.$$

Samalla, hieman uudelleen järjestämisen jälkeen,

$$q_{zz} = \frac{1}{\sum \sin^2 \eta - \frac{1}{n} (\sum \sin \eta)^2},$$

ja VDOP on sen neliöjuuri⁷.

12.12 Erotushavaintojen havaintoyhtälöt

Voimme lähteä yksinkertaisten GPS-pseudoetäisyys havaintojen havaintoyhtälöstä (kaava 12.2, c on valon nopeus):

$$\Delta p + v = \begin{bmatrix} \mathbf{e} & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R} \\ \Delta T \end{bmatrix}.$$

Kirjoitetaan satelliittien indeksi yläindeksinä ja maa-asemien indeksi alaindeksinä:

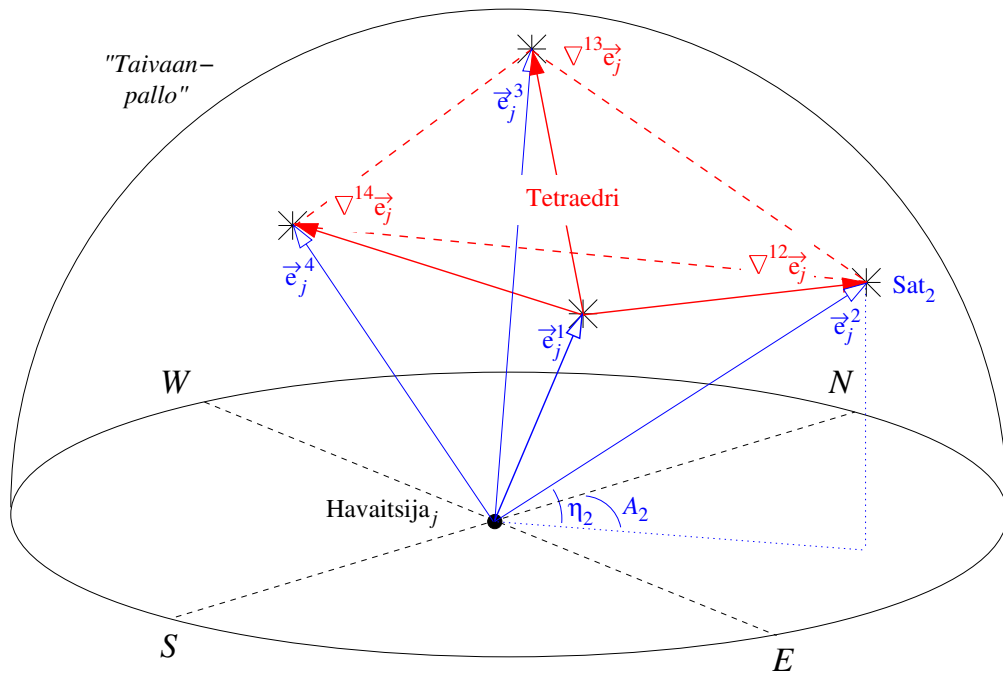
$$\begin{bmatrix} \Delta p_j^1 + v_j^1 \\ \vdots \\ \Delta p_j^i + v_j^i \\ \Delta p_j^{i'} + v_j^{i'} \\ \vdots \\ \Delta p_j^n + v_j^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j^1 & -c \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_j^i & -c \\ \mathbf{e}_j^{i'} & -c \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_j^n & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}_j \\ \Delta T_j \end{bmatrix}.$$

Tässä on kirjoitettu vain kahdet sarakkeet, havaintoasemalle numero j . Käytännössä tulee olemaan kaksi saraketta jokaiselle maa-asemalle j .

Muodostetaan nyt satelliittien väliset erotukset⁸ vähentämällä yhtälöryhmän ensimmäinen rivi kaikista muista joilla on sama maa-asema j :

⁷Huomaa, että jos η on vakio, niin nimittäjä haviää! Eli, korkeuden määrittäminen GPS:llä edellyttää, että on satelliitteja eri korkeuksilla taivaassa.

⁸Notaatio “ ∇ ” ei ole mitään tekemistä vektorianalyysin ∇ -operaattorin kanssa! Se on valittu vain, koska merkin muoto kuvaa geometrisesti kahden satelliitin ja yhden maa-aseman idea.



Kuva 12.2: GPS-pseudoetäisyshavaintojen ja erotushavaintojen geometria

$$\begin{bmatrix} \nabla^{12} p_j + \nabla^{12} v_j \\ \vdots \\ \nabla^{1i} p_j + \nabla^{1i} v_j \\ \nabla^{1i'} p_j + \nabla^{1i'} v_j \\ \vdots \\ \nabla^{1n} p_j + \nabla^{1n} v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla^{12} \mathbf{e}_j \\ \vdots \\ \nabla^{1i} \mathbf{e}_j \\ \nabla^{1i'} \mathbf{e}_j \\ \vdots \\ \nabla^{1n} \mathbf{e}_j \end{bmatrix} [\Delta \mathbf{R}_j]. \quad (12.5)$$

Huomaa, miten ongelmasta on poistunut kellotuntematon ΔT . Koska se on sama satelliitista riippumatta, se häviää kun vähennetään saman vastaanottimen kahden eri satelliitin havainnot toisistaan.

Yllä annettujen kaavojen matriisimuodot ovat:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \Delta T \end{bmatrix}$$

ja

$$\nabla \mathbf{p} = \nabla \mathbf{e} \mathbf{R},$$

missä matriisi

$$[\nabla]_j = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

koostuu "blokeista" jokaiselle havainto-asemalla j . Huomaa, että matriisi on suorakulmainen eikä neliön muotoinen. Sarakkeita on rivejä yksi enemmän. Se kuvaa se, että erotushavaintoja on aina yksi (per maa-asema) vähemmän kuin alkuperäisiä.

Tästä voimme laskea myös erotushavaintojen *painokerroinmatriisi*. Jos alkuperäisten havaintojen $\mathbf{p}$ painokerroinmatriisi on Q , saadaan $\nabla\mathbf{p}$:n painokerroinmatriisi kaavalla

$$Q_{\nabla\nabla} = \nabla Q \nabla^T.$$

Jos Q on yksikkömatriisin muotoinen, siis varianssimatriisi $\Sigma = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 I$, saadaan kaunis tulos:

$$Q_{\nabla\nabla} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} = (I + J),$$

käyttämällä notaatio: I on yksikkömatriisi, J on “ykkösten matriisi”, siis sellainen, jonka *kaikki* elementit ovat ykkösiä.

12.13 Vektorimittaukset

Mikäli mitataan GPS:n avulla vektoreita eikä absoluuttisia koordinaattiratkaisuja, ovat havaintoyhtälöt edelleen yllä kuvatun muotoisia, *edellyttäen* että vektorin toinen pää pidetään kiinni. Silloin tuntemattomat $\Delta\mathbf{R}_j = [\Delta X_j \ \Delta Y_j \ \Delta Z_j]^T$ ovat tämän *vektorin* kolme komponenttia. Mikään muu ei muutu.

Mikäli halutaan estimoida todella absoluuttiset pistekoordinaatit geosentrisessä järjestelmässä käyttämättä jo tiedossa olevia lähtöpisteitä, on sekin mahdollista yo. kaavojen avulla. Emme tätä tapausta tässä käsittele. Se kuuluu globaalin tarkkuusgeodesian piiriin.

Mikäli mitataan *verkkoja* jotka koostuvat useista vektoreista, mutkistuvat kuviot. Olkoon alkuperäisten mittausten havaintoyhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1^1 + v_1^1 \\ \vdots \\ \Delta p_1^n + v_1^n \\ \hline \vdots \\ \hline \Delta p_m^1 + v_m^1 \\ \vdots \\ \Delta p_m^n + v_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^1 & \cdots & 0 & -c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_1^n & \cdots & 0 & -c & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \mathbf{e}_m^1 & 0 & \cdots & -c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{e}_m^n & 0 & \cdots & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{R}_m \\ \hline \Delta T_1 \\ \vdots \\ \Delta T_m \end{bmatrix}.$$

Tässä n on satelliittien, m maa-asemien määrä.

Samalla tavalla kuin aikaisemmin konstruoidaan kaksoiserotusten havaintoyhtälöt, jolloin

ΔT :t taas häviävät:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{12}\nabla^{12}p + \Delta_{12}\nabla^{12}v \\ \vdots \\ \Delta_{12}\nabla^{1n}p + \Delta_{12}\nabla^{1n}v \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_{1m}\nabla^{12}p + \Delta_{1m}\nabla^{12}v \\ \vdots \\ \Delta_{1m}\nabla^{1n}p + \Delta_{1m}\nabla^{1n}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla^{12}\mathbf{e}_1 & \nabla^{12}\mathbf{e}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\nabla^{1n}\mathbf{e}_1 & \nabla^{1n}\mathbf{e}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\nabla^{12}\mathbf{e}_1 & 0 & \cdots & \nabla^{12}\mathbf{e}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\nabla^{1n}\mathbf{e}_1 & 0 & \cdots & \nabla^{1n}\mathbf{e}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{R}_m \end{bmatrix}.$$

(Tästä näkyy heti, jos $\Delta R_i = 0$, $i = 2, 3, \dots, m$, että saadaan takaisin yksinkertaisten erotusten havaintoyhtälöryhmä 12.5.)

Tässä tapauksessa “nabla-matriisi” on

$$[\Delta\nabla] = \left[\begin{array}{cccc|cccccccc} 1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 1 & -1 & \cdots & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right].$$

Jos taas Q on yksikkömatriisin muotoinen eli varianssimatriisi $\Sigma = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 I$, saadaan kaksoiserotusten $\Delta\nabla\mathbf{p}$ painokerroinmatriisi seuraavasti:

$$Q_{\Delta\nabla, \Delta\nabla} = [\Delta\nabla] Q [\Delta\nabla]^T = [\Delta\nabla] [\Delta\nabla]^T,$$

jonka muoto on monimutkainen.

Pääpointti tässä on, että erotushavainnot ovat *korreloituja keskenään*. Kahden satelliitin välillä lasketut yksinkertaiset erotukset korreloituvat yhteisen vertaussatelliitin (yllä: satelliitti 1) kautta. Kaksinkertaiset havainnot taas korreloituvat yhteisen maa-aseman kautta jos sellainen on. Tämän seurauksena *samasta pisteestä lähtevät vektorit korreloituvat*.

Kuitenkin monet käytännön GPS-laskentaohjelmistot (kuten Ashtechin WinPrism) toimivat *kaksivaiheperiaatteella*:

1. Lasketaan yksittäiset vektorit, jokainen kahden verkon pisteen välillä
2. Tasoitetaan vektoreista muodostettu verkko.

Yleensä kakkosvaiheessa oletetaan, että vektorit ovat toisistaan tilastollisesti riippumattomia. Tiedämme nyt, että ne eivät sitä ole. Vektorien tarkkuudeksi oletetaan yleensä funktio, joka riippuu vektorien pituudesta, esim. pituuden kanssa verrannollinen funktio.

Likimääräinen menetelmä toimii useimmiten hyvin, vaikkei optimaalisesti. Esim. Bernese-ohjelmisto tarjoaa mahdollisuuden ottaa erotushavaintojen todelliset korrelaatiot huomioon. Tulos ei välttämättä aina parane. Tämä on vaikea ala.

Paljon suurempi approksimaatio, jota tehdään monessa GPS-laskentaohjelmassa (myös Berneessä), on, että peräkkäiset GPS-havainnot ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan. Tiedämme, että sekään ei pidä paikkansa. Tämän oletuksen seurauksena GPS-ohjelman tuottamat, muodolliset pistekeskivirheet voivat olla jopa 10-20 kertaa liian optimistisia.

Luotettava tapa selvittää tulosten todellista tarkkuutta on tutkia vektorien verkkotasoituksesta saatua painoyksikön keskivirhettä. Toinen lähestymistapa tähän on *ristivalidointi*: lasketaan verkko käyttäen vain puolet aineistosta, ensin ensimmäinen puoli, sitten toinen puoli; ja verrataan tulokset keskenään. Tässä menetelmässä ei tehdä epävarmoja oletuksia. Se kyllä edellyttää, että mittaukset on kerätty tavalla joka mahdollistaa tämä, siis jokainen osamittaus on tehty kahtena eri sessiona.

Luku 13

Geodeettiset mittaukset ja laskennat

13.1 Runkoverkkojen hierarkia ja tarkkuusluokitus

Verkkohierarkiasta hieman erillään oleva käsite on *tarkkuusluokitus*.

Eritellään seuraavat käsitteet:

- *Tarkkuusluokitus* (class)
- *Hierarkia* eli järjestysluokitus (order)

Eri luokkien verkkojen pisteet omaavat eri tarkkuuksia. Tarkkuuksien sijasta voidaan puhua myös *toleranssista*: nyrkkisääntö on, että jos pisteen pistekeskivirhe on σ_P , on toleranssi, eli pisteen sijainnin vaihteluväli jonka sisällä se todennäköisimmin on, n. 2,5 kertaa σ_P .

Tarkkuusluokituksella on seuraavat käytännön aspektit:

1. Toiminnallinen

maa on kallista: sijainti ja pinta-ala on tunnettava tarkasti. Pieni virhe voi aiheuttaa suuret rahalliset seuraamukset etenkin kaupunkialueilla. Tarkkuusluokitus ottaa tämä huomioon.

2. Paikkatietojen yhteiskäyttö

Tästä syystä luokitus on standardoitu mm. uusien kaavoitusmittausohjeitten ja tilusmittausohjeitten muodossa.

Pisteen koordinaattien lisäksi on aina ilmoitettava sijainnin epävarmuus (esim. pistekeskivirhe) ja käytetty koordinaattijärjestelmä.

13.2 Valtakunnalliset runkoverkot

Valtakunnallisella I. luokan kolmiomittauksella on seuraava tarkoitus:

1. Käytännön tarkoitus on luoda maahan yhtenäinen, kaikkiin käyttötarkoituksiin riittävän tarkka tasokiintopisteverkko muiden kolmiomittausten sekä kartoitustöiden pohjaksi.

I. luokan kolmiomittaus saatiin päätökseen 1980-luvulla; sen avulla luotu kartoitusjärjestelmä (koordinaatisto) oli nimeltään *kkj*. GPS-aikakaudella sen sisäinen tarkkuus ei enää ritä kaikkien tarkimpiin mittaus- ja kartoitustöihin. On käyty yhteiskunnallinen keskustelu uuteen järjestelmään, EUREF-FIN:iin siirtymiseksi ja tällä hetkellä siirtyminen on useimmissa valtion laitoksissa ja monissa kunnissa käynnissä tai jo suoritettu. GL:n mittauksen tuloksena on olemassa n. 450 pisteen valtakunnallinen kiintopisteistö

uudessa järjestelmässä; myös Maanmittauslaitoksella on n. 2500 kiintopistettä joiden EUREF-FIN koordinaatit on maanmittareiden käytettävissä. EUREF-FIN:iin siirtyminen on kallis, monivuotinen operaatio.

2. Tieteellinen tarkoitus oli

- a) määrittää luotiviivanpoikkeamat geodeettisesti laskettujen ja tähtitieteellisesti määritettyjen leveys- ja pituusasteiden välillä; ja niistä laskea geoidin ja vertausellipsoidin väliset erot (geoidi-undulaatiot).

GPS toteuttaa nykyisin tämä päämäärä paremmin määrittämällä suoraan kolmiulotteiset (X, Y, Z) -koordinaatit ja niistä geoidin korkeus vertausellipsoidin nähden. Historiallisen jatkuvuuden kannalta päätettiin viisaasti käyttää Suomen EUREF-tihennysverkkoa (EUREF-FIN) olemassa olevien I. luokan kolmioverkon pisteitä uudelleen GPS-mittauksissa. Mittaukset suoritettiin 1996–1997 ja näissä mitattiin n. 100 pistettä.

- b) seurata mahdolliset vaaka- ja pystyliikkeet Suomen maankuoressa. Vasta GPS:n yliverlainen tarkkuus on tehnyt tätä päämäärää realistiseksi ja se on ollut olemassa vasta 1990 luvusta lähtien.

Geodeettinen laitos mittasi I. luokan kolmioverkko etelä- ja keskisuomessa *ketjuverkkona*, jonka reiät Maanmittauslaitos sulki omilla kolmiomittauksilla. Pohjois-Suomessa GL:n mitaama kolmioverkko oli täydellinen, vaikkakin koostui suuremmista kolmioista.

1990-luvulla Geodeettinen laitos perusti FinnRefTM pysyvä GPS-verkkoa 12 asemalla ympäri suomea; tämä on nykyhierarkiassa korkein luokka. Vuosina 1996-97 GL mittasi GPS-tekniikalla n. 100 pistettä lisää GPS-kampanjoilla; näitä oisteita luokitellaan E1-luokkaan. Vuosina 1998-99 mitattiin 350 pistettä lisää, jotka kuuluvat E1b-luokkaan.

13.3 Alemman luokan runkoverkot

Vanhat alemman luokan runkoverkot ja -pisteet olivat seuraavia:

- o Ila ja IIb luokka: Maanmittauslaitoksen mittaamat kolmioverkon tihennykset
- o III luokan pisteet muodostavat kunnallinen ylin luokka. Kolmioverkko
- o IV luokka: monikulmiojonoilla tihennystä
- o V lk ja VI lk: käyttöjonoja

Nykyluokituksessa käytetään luokkakoodit E2-E6. Kuntatasolla korkein luokka (runkoverko) on yleensä E3, jotka ovat Maanmittauslaitoksen mittaamia staattisella GPS:llä. Kunnan runkoverkon tihennyksissä on syytä ottaa mukaan kaikki sen alueella olevat, MML:n mittaamat E3- ja E4- luokan pisteitä.

<http://www.maanmittauslaitos.fi/kartat/koordinaatit/3d-koordinaatistot/euref-fin>

13.4 Perinteisiä ja satelliittimittauksia

Tavallista on, että joudutaan mittaamaan alueella, jossa on ennestään olemassa pistekenttä, jonka koordinaatit tunnetaan perinteisessä valtakunnallisessa järjestelmässä ja/tai paikallisessa tai paikkakunta-kohtaisessa järjestelmässä. Kuitenkin mittaukset suoritetaan GPS-menetelmällä ja mittausten tuloksena saadaan pisteille ETRS-89 (eli sen realisaation EUREF-89 tai EUREF-FIN) geosentrisiä koordinaatteja.

Tässä tapauksessa syntyvät seuraavat kysymykset.

13.4.1 kkj-järjestelmän määrittäminen

Suomessa on Gauß-Krüger projektio sovellettu näin, että

1. Kolmiulotteiset ED50-koordinaatit X, Y, Z ovat projisoitu Kansainväliselle ellipsoidille (Hayford).
2. Näin saadut kaksiulotteiset karttakoordinaatit (x, y) on *Helmert-muunnettu* tavalla, joka minimoi erotukset jo olemassa olevien Helsingin järjestelmän (x, y) kanssa, Parm (1970). Sopiva muunnos löytyy myös julkaisusta ([Ollikainen, 1993](#)):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{kkj} = \begin{bmatrix} -61,5805 \\ 95,6691 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,0000007515 & -0,0000043933 \\ 0,0000043933 & 1,0000007515 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{ED50}.$$

3. Projektiokaistojen väliseksi etäisyydeksi on valittu $\Delta\lambda = 3^\circ$. Näin ollen saadaan Suomen alueelle neljä (4) kaistaa. Keskimeridiaanit ovat $21^\circ, 24^\circ, 27^\circ, 30^\circ$. Mielivaltaisen pisteen maksimietäisyys keskimeridiaanista on $1^\circ.5 \approx 80$ km meidän latituudeilla.
4. y -koordinaattiin lisätään 500000 m, jotta saadaan jokaisessa kaistassa aina vain positiiviset y -arvot.

kkj:n yhtenäiskoordinaatisto

Tässä järjestelmässä, joka käytetään pienimittakaavaisilla kartoilla joissa kuvataan koko Suomea ja sen huomattavaa osaa, on vain yksi keskimeridiaani, 27° . Näin ollen kaistan leveys on peräti $-420 \dots + 250$ km.

Helsingin järjestelmä

Nimetty myös “vanha valtion järjestelmä” (*vvj*). Tämä on lähes sama kuin *kkj*. On vielä yllättävän monella paikalla käytössä (muttei Helsingissä!). Tässä systeemissä ilmoitetaan pituuskaistan keskimeridiaanin pituusaste eikä kaistan numero.

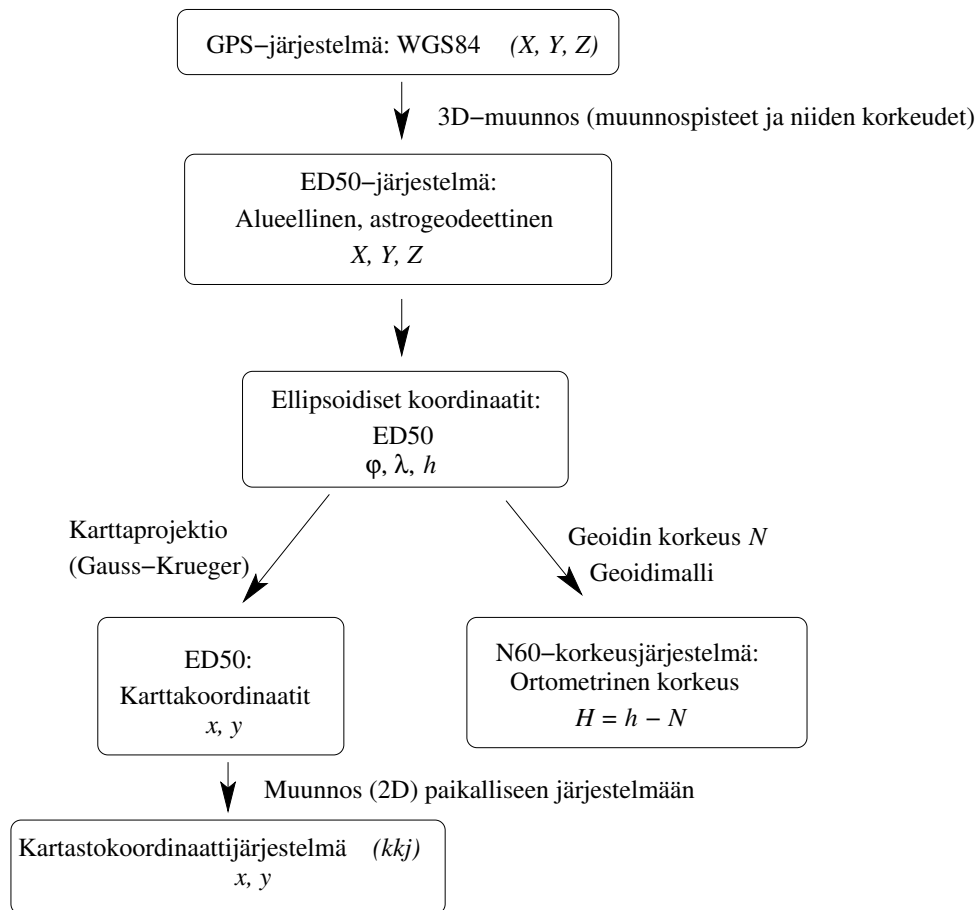
Paikalliset järjestelmät

Yleensä ne ovat kuntien omia järjestelmiä. Jonkinlainen yhteys *kkj:hen* tai *vvj:hen* on yleensä olemassa.

Muunnoskaavat on yleensä olemassa ja dokumentoitu. Kuitenkin siihen ei saisi sokeasti luottaa: koelaskenta tunnettujen pisteiden avulla kannattaa aina suorittaa.

13.4.2 Korkeusjärjestelmät ja geoidin rooli

Yhteiseurooppalainen ED50-datum perustuu ns. *kansainväliseen ellipsoidiin* eli Hayford-ellipsoidiin. Systeemin kanssa käytetään Bomford-geoidi, joka määritettiin astrogeodeettisesti, siis luotiviivapoikkeamien perusteella.



Kuva 13.1: *kkj*-koordinaattien tuottaminen GPS-mittauksin

Taulukko 13.1: Kansainvälisen ellipsoidin ja GRS80-ellipsoidin parametrit

Parametri	Kansainvälinen	GRS80
a	6378388 m	6378137 m
f	1/297	1/298,257222101
b	6356911,946	6356752,3141

Modernit GPS-datumit kuten Suomen EUREF-FIN perustuvat GRS80-vertausellipsoidiin, jonka parametrit ovat erilaisia. Sen lisäksi niiden keskipisteiden sijainnit avaruudessa on erilaisia, ks taulukko 13.2.

Sen seurauksena *samoilla* pisteillä on *eri* geoidikorkeudet eri järjestelmässä: kun Bomfordin geoidikorkeudet vaihtelevat -7 metrissä $+5$ metriin, on modernit geoidit Suomen alueella (kuten esim. M. OLLIKAISEN laskema FIN2000) välillä 16–32 m. Ks. kuva 13.3.

Aina on käytettävä sopiva geoidimalli sopivan vertausjärjestelmän ja -ellipsoidin kanssa! Eli, esimerkiksi, Bomford + ED50/Hayford, tai FIN2000 + EUREF/GRS80.

13.4.3 Muunnokset eri järjestelmien välillä

EUREF ja ED50

Vanha Suomen valtakunnallinen koordinaattijärjestelmä *kkj* perustuu eurooppalaiseen datumiin ED50. Uusi koordinaattijärjestelmä EUREF-FIN taas on geosentrinen ja perustuu

Taulukko 13.2: Muunnosparametrit EUREF89→ED50. Kaava sama kuin alla (ja erilainen kuin (Ollikainen, 1993)!)

Parametri	Arvo	Keskivirhe	Yksikkö
ΔX	93,477	3,345	m
ΔY	103,453	5,534	m
ΔZ	123,431	2,736	m
m	-2,062	0,417	10^{-6}
e_1	0,246	0,168	”
e_2	-0,109	0,106	”
e_3	-0,068	0,112	”

GRS80 vertausellipsoidiin.

Kahden järjestelmän koordinaattien välillä ero on toista sataa metriä. Ks. taulukko, joka perustuu M. OLLIKAISEN laskemiin arvoihin (Ollikainen, 1993).

Näin voidaan ED50-datumin koordinaatit muuntaa EUREF89 (tarkemmin: ETRS89) järjestelmään, tai toisinpäin. Muunnos ED50:n ja *kkj*:n välillä taas tapahtuu tasossa yllä jo mainitun Helmert-kaavan avulla.

Muunnoskaavojen johtaminen

Käytännössä nämä muunnoskaavat sopivat käytettäväksi valtakunnallisesti; pienellä alueella kuitenkin kannattaa aina laskea tarkat muunnosparametrit jotka sopivat käytettäväksi siinä alueessa. Menetelmiksi tarjoutuu:

1. Paikallinen Helmert-muunnos
2. Paikallinen affiinin muunnos
3. ”Pätkittäinen” ratkaisu, jos paikallinen terrestrinen järjestelmä on pahasti deformatunut tai koostuu useasta eri tavalla käyttäytyvästä osasta (kuntaliitos)

Helmert-parametrien estimointi käy helposti pienimmän neliösumman menetelmän avulla:

1. Annetut *kkj*-koordinaatit muunnetaan ensin ED50-järjestelmän (x, y) -karttaprojektiokoordinaateiksi sen jälkeen karttaprojektiokaavan kautta (Gauss-Krüger) $(\varphi, \lambda)_{ED50}$ maantieteellisiksi koordinaateiksi. Ellipsoidiset korkeudet lasketaan erikseen $h_{ED50} = H_{N60} + N_{Bomford}$ avulla. Sen jälkeen Hayford-ellipsoidin kaavalla lasketaan $(\varphi, \lambda, h)_{ED50} \rightarrow (X, Y, Z)_{ED50}^{vanha}$.
2. Mitatut GPS-koordinaatit EUREF-FIN järjestelmässä muunnetaan $(X, Y, Z)_{EUREF-FIN} \rightarrow (X, Y, Z)_{ED50}^{uus}$, jonka jälkeen ne ovat vertailukelpoisia.
3. Tämän jälkeen määritetään kolmiulotteisia Helmert-parametreja kahden koordinaattijoukon $(X, Y, Z)_{ED50}^{vanha}$ ja $(X, Y, Z)_{ED50}^{uus}$ välillä.

Molempien koordinaattien muuntaminen ED50-järjestelmään on vain yksi menetelmä eikä välttämättä paras; parametrien estimointia voidaan suorittaa myös EUREF-FIN järjestelmästä. Se edellyttää taulukon ... käänteismuunnoksen $ED50 \rightarrow EUREF89$ käyttöä.

Eri ITRF ja ETRF järjestelmät

Nykyisin IERS (International Earth Rotation Service) laskee säännöllisin välein uusia geosentrisiä vertausjärjestelmiä nimeltään ITRFxx, jossa xx on vuosiluku. Laskennassa käyte-

Taulukko 13.3: Muunnos ITRF93→ITRF89 (IERS Technical Note 18).
Huomaa, että luvut ovat pari suuruusluokkaa pienempiä kuin edellisessä taulukossa

Suure	Arvo	Yksikkö	Aikaderivaatta	Yksikkö
ΔX	1,9	cm	0,29	cm/y
ΔY	4,1	cm	-0,04	cm/y
ΔZ	-5,3	cm	-0,08	cm/y
m	0,39	10^{-8}	0,0	10^{-8} /y
e_1	0,39	0,001''	0,11	0,001''/y
e_2	-0,80	0,001''	0,19	0,001''/y
e_3	0,96	0,001''	-0,05	0,001''/y

tään erityyppiset havainnot (GPS, satelliittilaser, VLBI, ...) monelta vuodelta ennen nimelisivuotta.

Käsitteellisellä tasolla erotetaan toisistaan *reference system* ja *reference frame*. *Reference system* (koordinaattijärjestelmä) on teoreettisesti määritetty järjestelmä, jonka *realisaatio* maastossa, mitattujen pisteiden kautta, kutsutaan *reference frame*:ksi (koordinaatisto).

Esimerkiksi: ETRS89 (European Terrestrial Reference System 1989) on *koordinaattijärjestelmä*, jonka eräät *realisaatiot* ovat ETRF89 (European Terrestrial Reference *Frame* 1989, perustuu yhteiseurooppalaiseen mittauskampanjaan 1980-luvun lopulla, toinen nimi EU-REF89) ja EUREF-FIN (Suomen valtakunnallisen työn tuloksena), sekä monien muiden maiden kansalliset realisaatiot.

Maailmanlaajuisesti ovat olemassa vastaavat ITRS (International TRS) ja ITRF (International TRF) käsitteet. Esim. ITRS89, ITRF97, ITRF2000.

Kahden [I/E]TRF -ratkaisun välillä on olemassa *muunnoskaava*, joka on kolmiulotteinen yhdenmuotoismuunnos. Sen parametrit ovat kuitenkin ajasta riippuvaisia. Muunnos on

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^{(B)} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^{(A)} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & -e_3 & e_2 \\ e_3 & m & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^{(A)},$$

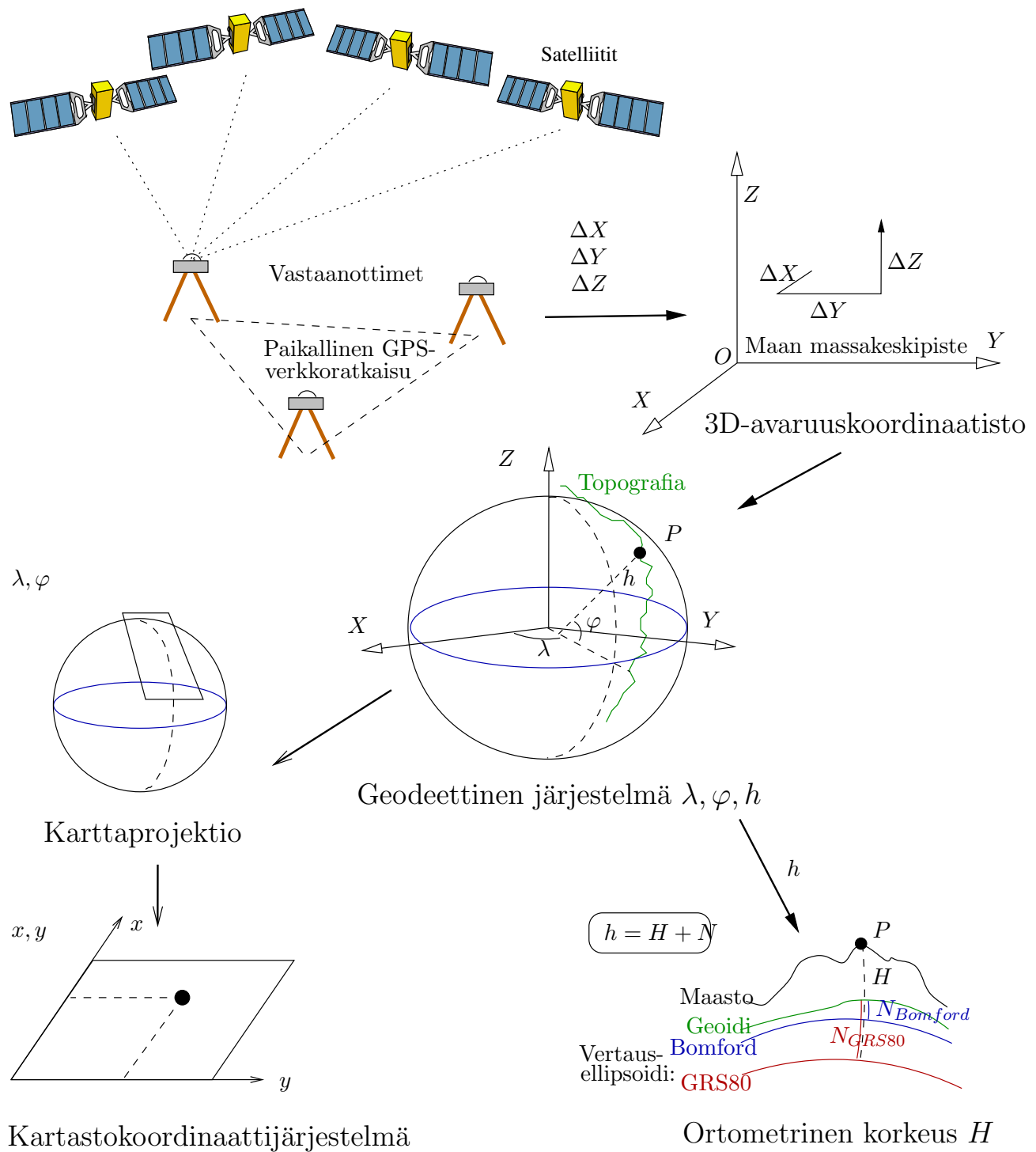
jossa jokaiselle parametrille p (siis $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, m, e_1, e_2, e_3$) pätee

$$p(t) = p(t_0) + \dot{p}(t - t_0),$$

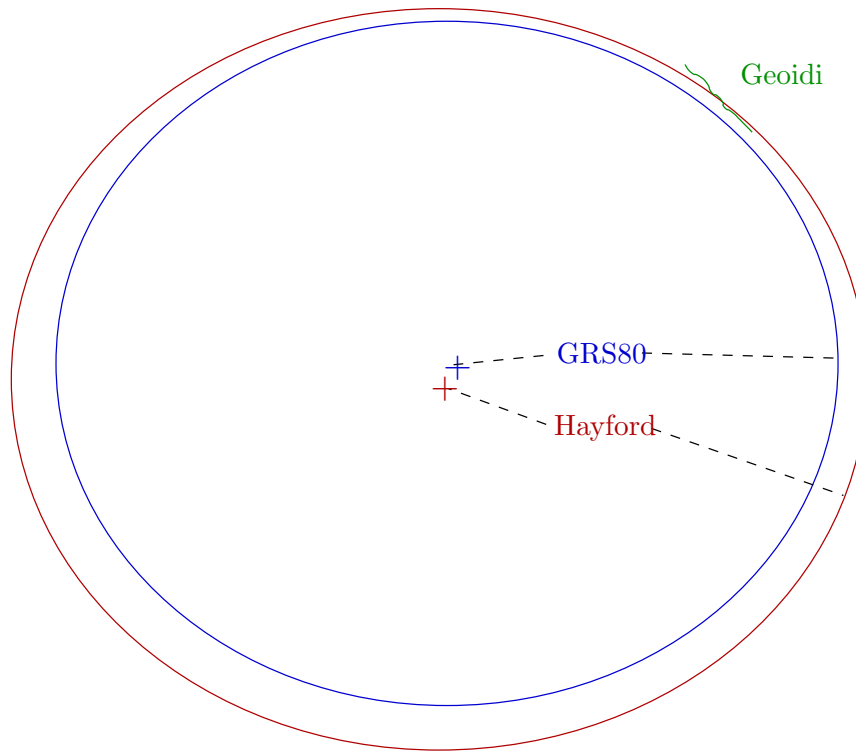
jossa t on aika ja t_0 vertausepookki. Esimerkiksi:

Lopuksi huomautetaan vielä, että toisaalta ITR[F/S] ja toisaalta ETR[F/S] -järjestelmien välillä on *mannerlaattaliike*, jota otetaan huomioon mallin avulla. Käytetty malli on nimeltään NNR-NUVEL1A.

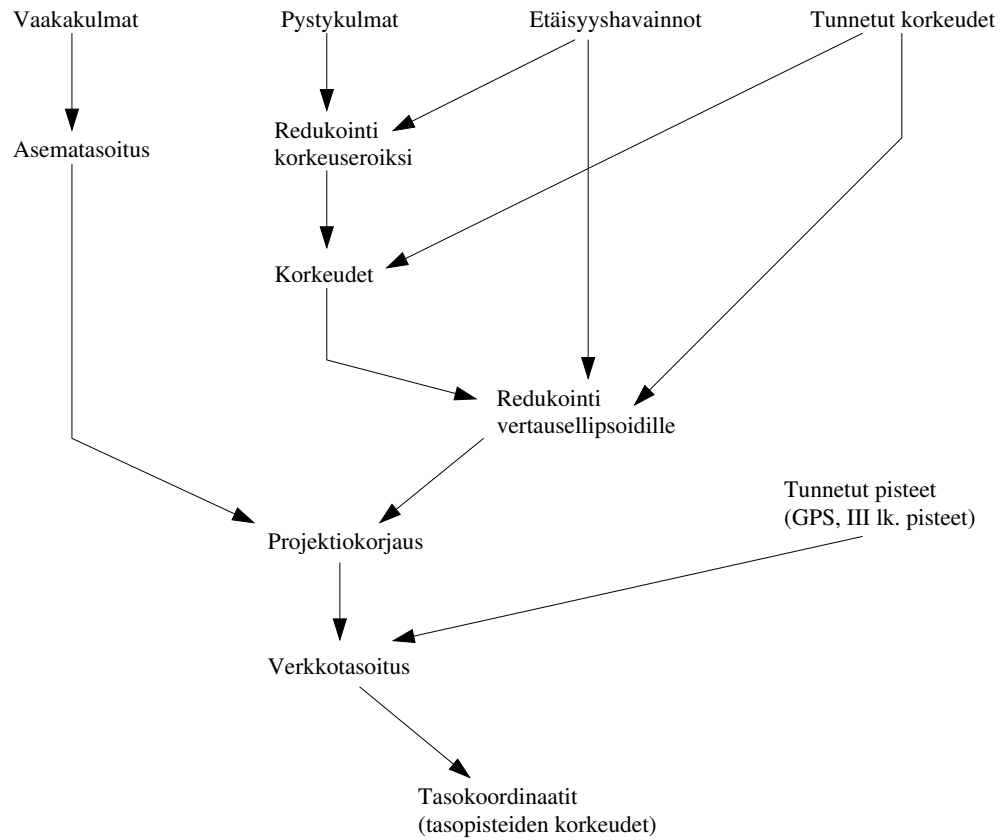
Geodeettisesta GPS-mittauksesta 2D + 1D -koordinaatteihin



Kuva 13.2: Geodeettisesta GPS-mittauksesta taso- ja korkeuskoordinaatteihin



Kuva 13.3: Kahden datum-ellipsoidin sijainti avaruudessa ja geoidin pinta Suomessa



Kuva 13.4: Mittauksista koordinaatteihin

Luku 14

Maastomittaus käytännössä

14.1 Geodesian laboratorion maastomittaukset

Geodesian laboratorio järjestää joka toinen vuosi maastomittaus, yleensä suomalaisen kaupungin alueella, jonka runkoverkko mitataan uudelleen käyttämällä nykyaikaiset menetelmät, mm. staattinen GPS.

Runkomittauksen *tavoitteet* ovat yleensä kaupungin kannalta:

- Runkoverkon pisteiden tarkka uudelleenmittaus ja kytkeminen valtakunnalliseen EUREF-järjestelmään GPS-menetelmällä; verkon tarkkuuden ja sisäisen vääristämättömyyden varmistamiseksi GPS-teknologian edellyttämällä tarkkuustasolla, n. 1–2 cm.
- Vanhan koordinaattijärjestelmän, yleensä kaupungin oma ja/tai *kkj*, ja uuden EUREF-FIN järjestelmän välisen muunnoksen selvittäminen. Tämä edellyttää riittävä määrä pisteitä, joihin on saatavissa sekä GPS:llä mitatut kolmiulotteiset koordinaatit että perinteiset taso- ja korkeuskoordinaatit, eli *kkj* (tai vastaava) ja N60 (tai vastaava).
- Usein kaivataan myös neuvoja, miten kaupungin siirtyminen uuteen EUREF-FIN järjestelmään, ja vanhojen ja uusien mittauksen ja paikkatietojen yhteiskäyttö, voidaan parhaiten suorittaa.

Mittauksen *opetukselliset tavoitteet* ovat:

- Käytännön tutustuminen erilaisiin nykyaikaisiin geodeettisiin mittausmenetelmiin, mm. staattinen GPS-paikannus, digitaalinen tarkkavaaitus, trigonometrinen vaaitus, monikulmiojononmittaus takymetrillä ja pituusperusviivan tarkka mittaus, mikäli sellainen on olemassa kaupungin alueella; sekä kaikkien menetelmien laskentatoimiin tutustuminen.
- Kokonaisvaltaisen tuotantoprojektin läpivieminen tiimityönä.
- Kahden viikon kenttämittauksen sosiaalista eli yhteisöllistä puolta ei tule aliarvioidaan.

14.2 Maastomittauksessa käytetyt tekniikat

Kaupungin alueella tulee ensin identifoida olemassa olevat pisteet, jotka soveltuvat runkomittaukseen. Yleensä ne ovat jo käytössä olevat pisteet, jotka ovat III luokan pisteitä (hätätapauksessa IV) sekä taso- että korkeusverkossa. Näin ollen mitattavan verkon luokka on IV.

Muista, että perinteisissä verkoissa tasosijainti ja korkeus käsitellään erikseen, toisin kuin GPS-tekniikassa. Muunnoskaavojen johtaminen, yleensä seitsemän parametrin Helmert-muunnoksen

muodossa, kuitenkin edellyttää, että myös perinteiset koordinaatit ovat kolmiulotteisia: on oltava samojen pisteiden sekä *kkj*:n tai vastaavan järjestelmän *x, y* -tasokoordinaatit että (vaikkapa) N60-korkeuskoordinaatit *H*. Kuitenkin aidosti kolmiulotteisten koordinaattien laskeminen vertausellipsoidilla edellyttää ellipsoidisten korkeuksien $h = H + N$ käyttöä, eli myös pisteiden geoidikorkeudet on laskettava geoidimallin avulla.

Vaatus kaikkien kolmen koordinaatin olemassaolista samoissa pisteissä johtaa vaatustöiden tarpeeseen, koska perinteisten taso- ja korkeusverkkojen kiintopisteet eivät yleensä ole samoja.

14.2.1 Staattinen GPS-mittaus

Pisteiden määrä vaihtelee, mutta on liikkunut n. 20 pisteen tienoilla. Mittaukseen käytetään 6–8 geodeettista vastaanotinta, Laboratorion omien Ashtech Z12 -laitteiden lisäksi Geodeettiselta laitokselta lainatut kojeet. Mikäli mahdollista käytetään geodeettisessa tarkkuusmittauksessa ns. *Choke ring* -antenneja monitieheijastusten vaikutuksen minimoimiseksi.¹

Mittausverkkoa ja mittauksen edistymistä suunnitellaan etukäteen. Liikutaan kompakteissa, kuuden pisteen ryhmissä, joiden välillä oltava vahvat kytkennöt. Jokaisella pisteellä mitataan vähintään kaksi sessiota. Mikäli pisteiden väliset etäisyydet ovat alle 10 km, riittää session pituus 1,5–2 t; pidemmät vektorit vaativat enemmän aikaa.

Kaupungin ympäriltä identifioidaan *vähintään kolme tunnettua pistettä eri ilmansuuntiin*. Aiemmin valittiin tähän tarkoitukseen EUREF-FIN -pisteitä joita Geodeettinen laitos on mitannut 1996–1999 aikoina. Vektorit kaupungin pisteiden ja Geodeettisen laitoksen EUREF-pisteiden välillä olivat yleensä kymmeniä kilometriä pitkiä, mikä edellytti vähintään kahden 6 tunnin sessiot.

Nykyisin käytetään mieluummin Maanmittauslaitoksen tunnetuja pisteitä, vähintään 3. luokan pisteet joiden EUREF-FIN koordinaatit MML on määrittänyt. Niiden etäisyys mittausalueelta on lyhyempi (kilometrejä), ja käyttämällä näitä, ei ohiteta verkkojen virallista *hierarkiaa*. Edelleen pisteet on oltava alueen eri puolilla, niin että mittausalue on pisteiden muodostavan kuvion sisällä.

Käytännön neuvot:

- Käytettävät optiset luodit tarkastetaan toimistossa ennen ja jälkeen mittauksia. Linjeerausvirhe johtaa keskistysvirheeseen!
- Antenni pystytetään keskisesti pisteelle. Keskistys tarkistetaan ennen ja jälkeen GPS-mittauksia, tarvittaessa myös mittauksen aikana.
- Horisontti oltava 10° korkeuskulmaan asti vapaata. Tee tarvittaessa horisonttipiirros.
- Havaittaja mittaa antennin korkeuden, *ennen ja jälkeen* GPS-mittauksia, tarvittaessa myös mittauksen aikana.
- Nykyisin ei enää tehdä säähavaintoja, koska on havaittu, että niistä ei ole apua tarkkuuden kannalta.
- Matkapuhelinyhteys mittauksen johdolle ja viereisten pisteiden mittajille: session kesto on pisteiden *yhteinen* mittausaika!

¹Samalla helpottuu myös havaintojen käsittelyä yhdessä Suomen pysyvän GPS-verkon FinnRefin asemien datan kanssa, mikäli sellainen on lähellä.

14.2.2 Digitaalinen tarkkavaaitus

Nykyisin runkomittauksissa käytetään digitaalivaaituskoje ja viivakoodilattoja. Niiden tarkkuus on nykyisin riittävä tähän ja aikaisemmat systemaattisten virheiden ongelmat (mm. Maan magneettikenttä) on ratkaistu.

- “Hyppymenetelmä”: Taakse Eteen Eteen Taakse
- Samat etäisyydet eteen ja taakse
- Kojeen ja lattojen varjostus suoralta Auringonvalolta. Myös varjot voivat aiheuttaa ongelmia
- Metsäisessä maastossa on raivattava kunnolla, koska koje käyttää latan kokonaista aluetta eikä vain yhtä viivaa.

Digitaalisen vaaituskojeen tarkistukseen (kollimaatioakselin vaakasuunnan tarkastamiseen) käytetään kenttätestausmenetelmä ennen mittausten aloittamista.

14.2.3 Trigonometrinen vaaitus: “tarkka trigo”

Tämä Geodesian laboratorion (Takalo, Santala, Salminen) kehittämä menetelmä on käyttökelpoinen silloin, kun

1. Korkeuserot ovat suuria lyhyellä matkalla
2. Maaperä tekee perinteinen vaaitus hankalaksi tai mahdottomaksi: soinen maasto tai vedenylitys.

Tarkassa trigossa käytetään kaksi takymetria, joilla mitataan samanaikaisesti vastakkaisiin suuntiin pystykulmat toisen takymetrin päälle laitettuun tähykseen. Myös etäisyydet mitataan samalla ajanketkellä, mutta vaan yhteen suuntaan. Mittausdata kaukaisesta takymetrin siirtyä radiomodeemitse toiseen asemaan, kenttämikroon tallennettavaksi, kuten toisen takimetrin ja sääaseman datakin.

Käytännön mittauksissa vaaitus suoritetaan digitaal- ja trigonometrisen vaaituksen yhdistelmänä.

14.2.4 Monikulmiojonomittaus

Tämän osuuden tavoitteena on tutustua modernin takymetrin käyttöön runko- ja kartoitusmittauksen tuontantoympäristössä.

Mitataan:

- 4 vaakakulmasarjaa
- 5 erillistä etäisyysmittausta
- 2 pystykulmasarjaa
- kojeen korkeus mitataan huolellisesti. Epäkeskisen etäisyysmittauslaitteen tapauksessa mitataan molemmat korkeudet erikseen.
- tähyksen korkeus (prisma) mitataan huolellisesti
- Säähavainnot mieluiten molemmissa päissä etäisyysmittauksen aikana.

Vaihtoehtoisesti suoritetaan tarkka perusviivamittaus, jos sellainen on kaupungin alueella tarjolla ja sitä käytetään pituudenmittauskojeiden kalibrointiin. Käytettävä laite tässä tapauksessa on Mekometer (ME5000 tai ME2000) ja mittausmenetelmä, säähavaintoja mukaan lukien, erittäin huolellinen.

14.3 Case: Jyväskylän maastomittaus

Vuonna 1999 mitattiin Jyväskylässä kaupungin runkomittaus uudelleen käyttämällä GPS, takymetrit (monikulmiojonot) ja tarkka trigonometrinen korkeudenmääritys. Työ on dokumentoitu työselostuksessa (([Geodesian ja kartografian laboratorio, 1999](#))).

Mittauksen tarkoitus oli saada Jyväskylän oman järjestelmän mukaiset tasokoordinaatit (2D), sekä *kkj*:n mukaiset kartastokoordinaatit. Tämän lisäksi laskettiin geosentriset EUREF-FIN koordinaatit (3D) ja niistä myös projisoidut tasokoordinaatit Gauß-Krüger-projektion ja GRS80-vertausellipsoidin mukaisesti.

Näin ollen koordinaatit laskettiin kolmessa eri koordinaattijärjestelmässä.

Mittaukset suoritettiin Geodesian ja kartografian laboratorion kenttäharjoituksen puitteissa 17–28 toukokuuta 1999. Laskennat suoritettiin kesällä 1999.

Piste 1337 käytettiin paikallisena lähtöpisteenä. Sen EUREF-koordinaatit laskettiin käyttämällä lähtöpisteenä 131 Puolakka, missä Geodeettisen laitoksen mittauksista oli saatu EUREF-FIN-koordinaatit:

	°	,	”
leveys	61	55	36.32944
pituus	25	32	1.04996
ellipsoidinen korkeus	211.485 m		

Ks. kansikuva.

Kirjallisuutta

- Anon. (1991). Numeerisen kartoituksen maastomittausohjeet. Geodesian laboratorian julkaisu 20/1991, Teknillinen korkeakoulu, Maanmittaustekniikan laitos, Geodesian laboratorio, Otaniemi. 77, 106
- Baarda, W. (1973). *S-transformations and criterion matrices*, volume 5 no. 1 of *New*. Netherlands Geodetic Commission, Delft. 80
- Blachut, T. J., Chrzanowski, A., and Saastamoinen, J. H. (1979). *Urban Surveying and Mapping*. Springer Verlag, New York - Heidelberg - Berlin. 31
- Cooper, M. A. R. (1982). *Modern Theodolites and Levels*. Granada Publishing Ltd, London, second edition. 59
- Cooper, M. A. R. (1987). *Control surveys in civil engineering*. Collins, Department of Civil Engineering, The City University, London. 31, 48, 83
- Geodesian ja kartografian laboratorio (1999). Raportti jyvaskylän kaupungin runkomittauksesta vuonna 1999. osa 1: Työselostus. Technical report, Teknillinen korkeakoulu, Maanmittausosasto, Otaniemi. 130
- Kahmen, H. and Faig, W. (1988). *Surveying*. Walter de Gruyter, Berlin - New York. 101
- Kukkamäki, T. (1938). Über die nivellitische Refraktion. Technical Report 25, Finnish Geodetic Institute, Helsinki. 41
- Kukkamäki, T. (1939). Formeln und Tafeln zur Berechnung der nivellitischen Refraktion. Technical Report 27, Finnish Geodetic Institute, Helsinki. 41
- Ollikainen, M. (1993). GPS-koordinaattien muuntaminen Kartastokoordinaateiksi. Tiedote 8, Geodeettinen laitos, Helsinki. 98, 121, 123
- Takalo, M. (1995). Computer supported Finnish EDM height traversing. Part I: technical description. *Surveying Science in Finland*, 13(2):56–99. 57

Hakemisto

A

atsimuutti, [23](#)

C

Chandler-wobble, [20](#)

CIO, *katso* Conventional International Origin

Conventional International Origin, [20](#), [21](#)

D

datum, [22](#)

E

elevaatio, *katso* korkeuskulma

ellipsoidi

Hayford, [21](#)

kansainvälinen, [21](#)

ephemeris

broadcast, [21](#)

F

Frauenkirche München, [24](#)

G

geosentrinen, [19](#)

H

Helmert-muunnos, [13](#)

K

karkaussekunti, [20](#)

korkeuskulma, [23](#)

L

litistyneisyssuhde, [21](#)

luotiviivapoikkeamat, [24](#)

M

massakeskipiste

Maan, [19](#)

N

napaliike, [20](#)

P

painovoimakenttä, [21](#)

projektiomenetelmä, [19](#)

R

rekursiivinen, *katso* rekursiivisuus

rekursiivisuus, *katso* rekursiivinen

S

siviiliaika, [20](#)

S-muunnos, [15](#)

T

tähtiaika, [20](#)

Taylor-sarja, [1](#), [4](#)

U

UTC, [20](#)