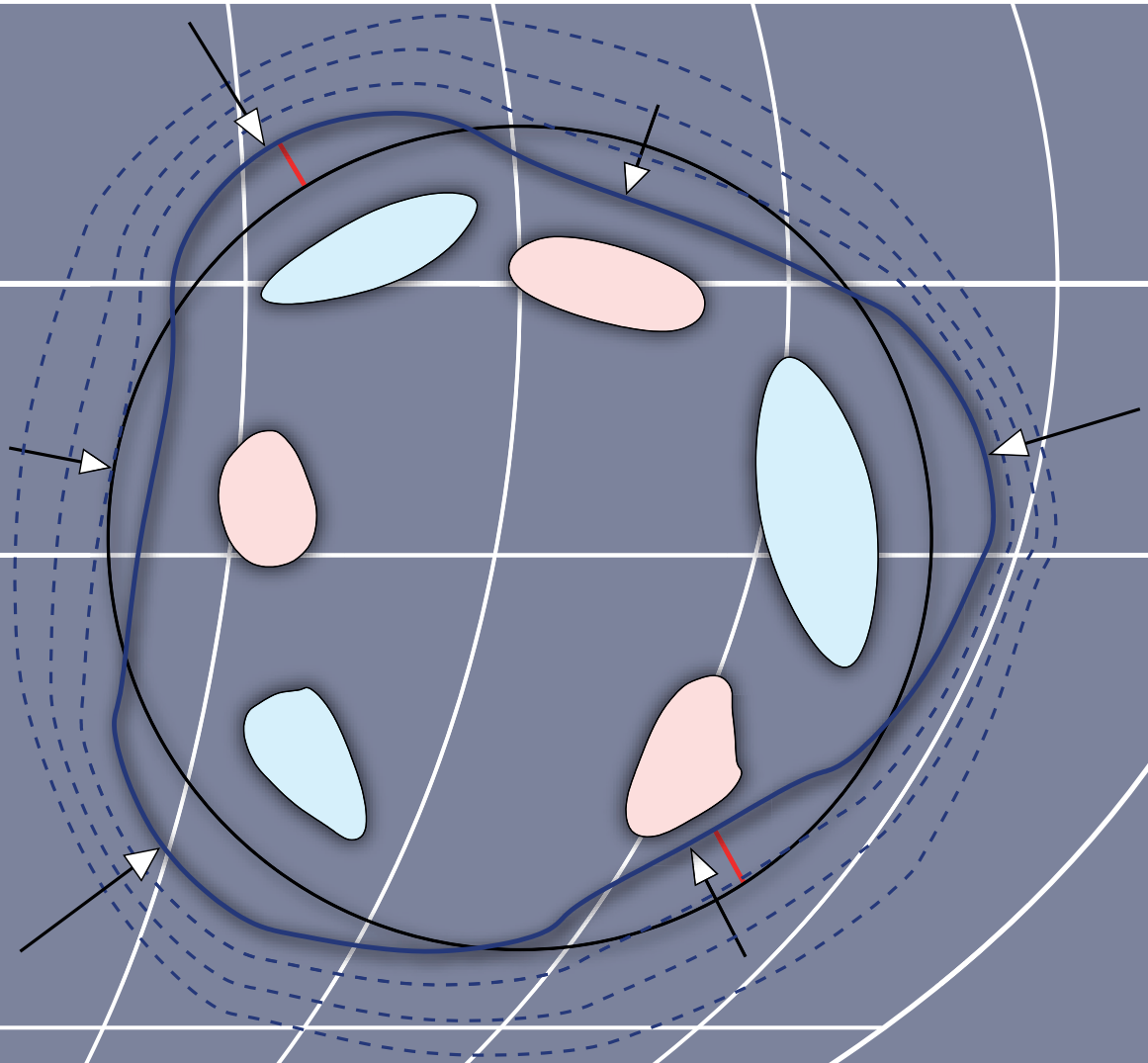
Martin Vermeer

FYSIKAALINEN GEODESIA



Aalto-yliopisto

Aalto-yliopiston julkaisusarja
TIEDE + TEKNOLOGIA 1/2020

Fysikaalinen geodesia

Martin Vermeer

Aalto-yliopisto
Insinööritieteiden korkeakoulu
Rakennetun ympäristön laitos

Aalto-yliopiston julkaisusarja
TIEDE + TEKNOLOGIA 1/2020

© 2020 Martin Vermeer

ISBN (pdf) 978-952-60-8941-6
ISSN 1799-4888 (pdf)
http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-60-8941-6

Graafinen suunnittelu: Kansi: Tarja Paalanen

Helsinki 2020

Tekijä
Martin Vermeer

Julkaisun nimi
Fysikaalinen geodesia

Julkaisija Insinööritieteiden korkeakoulu

Yksikkö Rakennetun ympäristön laitos

Sarja Aalto University publication series TIEDE + TEKNOLOGIA 1/2020

Tutkimusala Maanmittausoppi

Kieli suomi

Tiivistelmä

Fysikaalinen geodesia tutkii Maan muotoa ja sen painovoimakenttää, jotka liittyvät läheisesti toisiinsa. Newtonin gravitaatioteoria on painovoimakentän ymmärtämisen perusta. Esitämme kenttäteoriaa ja kentän spatiaalikäyttäytymistä kuvaavia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Maanpinnan reunaehdot esitetään yhtälöiden ratkaisumenetelmien avulla. Keskeinen käsite on geopotentiaali.

Maan muotoa approksimoidaan pyörähdysellipsoidilla, jonka jälkeen tarkkaa muotoa voidaan kuvata pieninä poikkeamina tästä ellipsoidipinnasta. Myös korkeusjärjestelmät esitetään tässä yhteydessä. Lähestymistavan yleistys Maan painovoimakenttään antaa pieniä erotussuureita kuten häiriöpotentiaali ja painovoima-anomaliat.

Kirjassa käydään läpi painovoimakentän mallinnusmenetelmät, kuten kentän spektraalikehitelmä pallofunktioita käyttäen, Stokesin yhtälö, nopeaan Fourier'n muunnokseen perustavat laskentatekniikat, *remove-restore* -menetelmä ja pienimmän neliösumman kollokaatio. Kirjassa esitellään myös painovoiman mittaustekniikat, sekä yhteydet geofysiikan kanssa, kuten isostasia, maaston vaikutus, keskimerenpinta, merenpintayhtälö sekä vuorovedet.

Avainsanat Maan muoto, painovoimakenttä, geopotentiaali, vertausellipsoidi, normaalikenttä, häiriöpotentiaali, painovoima-anomalia, geoidi, korkeusjärjestelmä, pallofunktiot, Stokesin yhtälö, *remove-restore*, pienimmän neliösumman kollokaatio, gravimetria, isostasia, keskimerenpinta, vuorovedet

ISBN (pdf) 978-952-60-8941-6

ISSN (PDF) 1799-490X

Julkaisupaikka Helsinki **Painopaikka** Helsinki **Vuosi** 2020

Sivumäärä 516 **urn** http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-60-8941-6

Esipuhe

Tämän kirjan tavoitteena on esittää yleiskuva Maan painovoimakentän[1] tutkimuksen nykytilasta, mukaan lukien ne geofysiikan osat, jotka liittyvät aiheeseen läheisesti. Yksi niistä on geodynamiikka eli muuttuvan Maan tutkimus. Kirjan taustalla on yli kaksi vuosikymmentä kestänyt opetustyöni kahdessa helsinkiläisessä yliopistossa: Teknillisellä korkeakoululla, joka on nykyisin osa Aalto-yliopistoa, ja Helsingin yliopistolla. Kirja edustaa jokseenkin pohjoismaista perspektiiviä varsin globaaliin aiheeseen. Esitystapaan vaikuttaa myös tekijän oma tutkimus gravimetrisen geoidimäärityksen alalla. Vaikka aiheesta löytyy jo erinomaisia oppikirjoja, toivon, että tämä teos löytää oman innokkaan lukijakuntansa.

Helsingissä 9. joulukuuta 2020

Martin Vermeer

[1] Kurssin alkuperäinen nimi Helsingin yliopistossa oli ”Maan painovoimakenttä”.

Kiitokset

Kiitokset monille opiskelijoille ja kollegoille vuosien saatossa saaduista hyödyllisistä kommenteista ja korjausehdotuksista. Tekstin muutaman vuoden takainen englanninnos aiheutti laajoja parannuksia, joista kiitokset sekä ulkomaisille opiskelijoille että Aalto-yliopiston pedagogiselle koulutusohjelmalle.

Kiitoksia Olivier Francisille kuvasta 11.8.

Muutama karttakuva piirrettiin Generic Mapping Toolsin avulla (Wessel ym., 2013).

Kielentarkistuksesta vastasi pätevästi Sanna Karppinen, Skarppi Kirjoituspalvelut. Liisa Vermeer antoi myös arvokkaita kielihuomautuksia. Tarja Paalanen suunnitteli kannen. Laura Mure ja Matti Yrjölä auttoivat julkaisemistyössä.

Tämä sisältö lisensoidaan lisenssillä *Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen* (CC BY 4.0), lukuunottamatta tekstissä mainitut tai muuten ilmeiset poikkeukset.

Sisältö

Luvut

1. Gravitaatioteorian perusteita 1
2. Laplacen yhtälö ja sen ratkaisuja 41
3. Legendren funktiot ja pallofunktiot 57
4. Normaalipainovoimakenttä 87
5. Painovoimakentän anomaaliset suureet 109
6. Geofysikaaliset reduktiot 127
7. Korkeusjärjestelmät 161
8. Stokesin yhtälö ja muut integraaliyhtälöt 189
9. Spektraalimenetelmät, FFT 229
10. Tilastolliset menetelmät 253
11. Gravimetriset mittalaitteet 295
12. Geoidi, keskimerenpinta ja meritopografia 323
13. Satelliittialtimetria ja satelliittipainovoimamissiot 343
14. Vuorovesi, ilmakehä ja maankuoren liikkeet 377
15. Maan painovoimakentän tutkimus 393

A. Kenttäteoria ja vektorianalyysi lyhyesti 397
B. Funktioavaruudet 415
C. Miksi FFT toimii? 431
D. Helmertin kondensaatio 435

E. Laplacen yhtälö pallokoordinaateissa 445

Esipuhe **i**

Taulukot **xi**

Kuvat **xii**

Lyhenteet **xvii**

1. Gravitaatioteorian perusteita **1**

1.1 Yleistä 1
1.2 Kahden massan välinen gravitaatio 3
1.3 Pistemäisen kappaleen potentiaali 5
1.4 Pallon muotoisen kuoren potentiaali 6
1.5 Vetovoiman laskeminen potentiaalista 9
1.6 Kiinteän kappaleen potentiaali 11
1.7 Esimerkki: Massaviivan potentiaali 13
1.8 Laplacen ja Poissonin yhtälöt 15
1.9 Mittainvarianssi 17
1.10 Yksinkertainen massatiheyskerros 18
1.11 Kaksinkertainen massatiheyskerros 19
1.12 Gaussin divergenssilause 21
1.13 Greenin lauseet 28
1.14 Chaslesin lause 31
1.15 Reuna-arvotehtävät 34
Olenko ymmärtänyt tämän? 35
Harjoitus 1–1: Maan ydin 37
Harjoitus 1–2: Ilmakehä 37
Harjoitus 1–3: Gaussin divergenssilause 37

2. Laplacen yhtälö ja sen ratkaisuja **41**

2.1 Laplacen yhtälön luonne 41

2.2 Laplacen yhtälö suorakulmaisissa koordinaateissa . . . 43
2.3 Laplacen yhtälö napakoordinaateissa 48
2.4 Pallo-, geodeettiset ja ellipsoidiset koordinaatit 50
2.5 Laplacen yhtälö pallokoordinaateissa 53
2.6 Riippuvuus korkeudesta 54
Olenko ymmärtänyt tämän? 55

3. Legendren funktiot ja pallofunktiot 57
3.1 Legendren funktiot 57
3.2 Pallofunktiokehitelmän symmetriaominaisuudet . . . 64
3.3 Legendren funktioiden ortogonaalisuus 67
3.4 Matalan asteluvun pallofunktiot 69
3.5 Funktion hajottaminen asteosuuksiin 71
3.6 Eri suureiden spektraaliesitykset 72
3.7 Usein käytetyt pallofunktiokehitelmät 75
3.8 Ellipsoidifunktiot 77
Olenko ymmärtänyt tämän? 82
Harjoitus 3–1: Pallofunktiokehitelmän vaimennus korkeuden mukaan 82
Harjoitus 3–2: Pallofunktioiden symmetriat 83
Harjoitus 3–3: Pallofunktioiden etumerkkialueet 85
Harjoitus 3–4: Pakonopeus 85

4. Normaalipainovoimakenttä 87
4.1 Normaalikentän perusajatus 87
4.2 Keskipakoisvoima ja sen potentiaali 89
4.3 Tasapotentiaalipinnat ja luotiviivat 91
4.4 Luonnolliset koordinaatit 96
4.5 Normaalipotentiaali ellipsoidisissa koordinaateissa . . 97
4.6 Normaalipainovoima vertausellipsoidin pinnalla . . . 99
4.7 Numeeriset arvot ja laskentakaavat 100
4.8 Normaalipotentiaali pallofunktiokehitelmänä 103
4.9 Häiriöpotentiaali 105

Olenko ymmärtänyt tämän? 107
Harjoitus 4–1: Somiglianan ja Pizzettin yhtälö 108
Harjoitus 4–2: Keskipakoisvoima 108

5. Painovoimakentän anomaaliset suureet **109**
5.1 Häiriöpotentiaali, geoidin korkeus ja luotiviivan poikkeamat 109
5.2 Painovoimahäiriöt 113
5.3 Painovoima-anomaliat 115
5.4 Painovoima-anomalioihin käytetyt yksiköt 117
5.5 Fysikaalisen geodesian reuna-arvotehtävä 118
5.6 Telluroidikuvaus ja ”kvasigeoidi” 120
5.7 Ilma-anomaliat 121
Olenko ymmärtänyt tämän? 124
Harjoitus 5–1: Painovoima-anomalioiden spektri 124
Harjoitus 5–2: Luotiviivan poikkeamat ja geoidin kaltevuus . 125
Harjoitus 5–3: Painovoima-anomalia ja geoidin korkeus . . . 125

6. Geofysikaaliset reduktiot **127**
6.1 Yleistä 127
6.2 Bouguer-anomaliat 128
6.3 Maastoefektit ja maastokorjaus 132
6.4 Bouguer-palloanomaliat 138
6.5 Helmertin kondensaatio 140
6.6 Isostasia 142
6.7 Isostaattiset reduktiot 150
6.8 ”Isostaattinen geoidi” 152
Olenko ymmärtänyt tämän? 158
Harjoitus 6–1: Painovoima-anomalia 158
Harjoitus 6–2: Bouguer-reduktio 159
Harjoitus 6–3: Maastokorjaus ja Bouguer-reduktio 159
Harjoitus 6–4: Isostasia 160

7. Korkeusjärjestelmät **161**
7.1 Vaaitus, ortometriset korkeudet ja geoidi 161
7.2 Ortometriset korkeudet 163
7.3 Normaalikorkeudet 166
7.4 Erotus geoidin korkeuden ja korkeusanomalian välillä 173
7.5 Erotus ortometristen korkeuksien ja normaalikorkeuksien välillä 175
7.6 Ortometristen korkeuksien tarkka laskenta 176
7.7 Normaalikorkeuksien tarkka laskenta 178
7.8 Korkeuksien laskentaesimerkki 179
7.9 Ortometrinen korjaus ja normaalikorjaus 181
7.10 Tulevaisuuden näkymä: suhteellisuusteoreettinen vaaitus 183
Olenko ymmärtänyt tämän? 186
Harjoitus 7–1: Ortometristen korkeuksien laskenta 186
Harjoitus 7–2: Normaalikorkeuksien laskenta 186
Harjoitus 7–3: Erotus ortometrisen korkeuden ja normaalikorkeuden välillä 187

8. Stokesin yhtälö ja muut integraaliyhtälöt **189**
8.1 Stokesin yhtälö ja Stokesin integraaliydin 189
8.2 Esimerkki: Stokesin yhtälö napakoordinaateissa 193
8.3 Luotiviivan poikkeamat ja Vening Meineszin yhtälöt . 198
8.4 Poissonin integraaliyhtälö 199
8.5 Painovoima-anomalioita ulkoavaruudessa 202
8.6 Painovoima-anomalian pystygradientti 204
8.7 Painovoimareduktiot geoidimäärityksessä 209
8.8 Poistamis-entistämismenetelmä 215
8.9 Ydinfunktion modifikaatio 217
8.10 Edistyneitä ydinfunktion modifikaatioita 220
8.11 Blokki-integrointi 222
8.12 Paikallisen vyöhykkeen vaikutus 223

Olenko ymmärtänyt tämän? 226
Harjoitus 8–1: Stokesin yhtälö lähialueella 226

9. Spektraalimenetelmät, FFT **229**
9.1 Stokesin yhtälö konvoluutiona 229
9.2 Integrointi FFT:llä 232
9.3 Ratkaisu leveys- ja pituusasteissa 235
9.4 Data-alueen reunustaminen ja ikkunointi 241
9.5 Geoidimallin laskenta FFT:llä 243
9.6 FFT:n käyttö muissa yhteyksissä 245
9.7 Maastokorjausten laskenta FFT:llä 247
Olenko ymmärtänyt tämän? 250

10. Tilastolliset menetelmät **253**
10.1 Epävarmuuden rooli geofysiikassa 253
10.2 Lineaariset funktionaalit 254
10.3 Tilastotiede Maan pinnalla 255
10.4 Painovoimakentän kovarianssifunktio 258
10.5 Pienimmän neliösumman kollokaatio 261
10.6 Painovoima-anomalioiden prediktio 273
10.7 Kovarianssifunktio ja astevarianssit 275
10.8 Kovarianssien kasautumislaki eri suureiden välillä . . 279
10.9 Globaalit kovarianssifunktiot 284
10.10 Kollokaatio ja spektraalinäkökohta 285
Olenko ymmärtänyt tämän? 289
Harjoitus 10–1: Ennustusvarianssi 290
Harjoitus 10–2: Hirvosen kovarianssiyhtälö ja prediktio . . . 290
Harjoitus 10–3: Painovoima-anomalioiden prediktio 291
Harjoitus 10–4: Painovoima-anomalioiden prediktio (2) . . . 292
Harjoitus 10–5: Kovarianssien kasautuminen 292
Harjoitus 10–6: Kaulan sääntö painovoima-anomalioille . . . 293
Harjoitus 10–7: Maanalaiset massapisteet 294

11. Gravimetriset mittalaitteet **295**
11.1 Historia . . . 295
11.2 Relatiivinen eli jousigravimetri . . . 297
11.3 Absoluuttinen eli ballistinen gravimetri . . . 304
11.4 Verkkohierarkia gravimetriassa . . . 309
11.5 Suprajohtava gravimetri . . . 311
11.6 Painovoimamittaus ja ilmakehä . . . 312
11.7 Ilmagravimetria ja GNSS . . . 315
11.8 Painovoimagradientin mittaus . . . 318
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . 320
Harjoitus 11–1: Absoluuttinen gravimetri . . . 321
Harjoitus 11–2: Jousigravimetri . . . 321
Harjoitus 11–3: Ilmanpaine ja painovoima . . . 322

12. Geoidi, keskimerenpinta ja meritopografia **323**
12.1 Peruskäsitteet . . . 323
12.2 Geoidimallit ja kansalliset korkeusdatumit . . . 325
12.3 Geoidi ja postglasiaalinen maannousu . . . 326
12.4 Meritopografian määritys . . . 330
12.5 Globaali meritopografia ja lämmönkuljetus . . . 331
12.6 Merenpinnan globaali käyttäytyminen . . . 334
12.7 Merenpintayhtälö . . . 336
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . 340
Harjoitus 12–1: Coriolisvoima ja merivirtaus . . . 341
Harjoitus 12–2: Maan vajoaminen ja maannousun mekanismi 342

13. Satelliittialtimetria ja satelliittipainovoimamissiot **343**
13.1 Satelliittialtimetria . . . 343
13.2 Risteyskohtatasoitus . . . 348
13.3 Satelliittiradan valinta . . . 357
13.4 *In-flight*-kalibrointi . . . 364
13.5 *Retracking* . . . 364
13.6 Merentutkimus satelliittialtimetrian avulla . . . 366

13.7 Satelliittipainovoimamissiot . . . 368
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . 372
Harjoitus 13–1: Altimetria ja risteyskohtatasoitus . . . 374
Harjoitus 13–2: Satelliittirata . . . 375
Harjoitus 13–3: Keplerin kolmas laki . . . 375

14. Vuorovesi, ilmakehä ja maankuoren liikkeet 377
14.1 Teoreettinen vuorovesi . . . 377
14.2 Vuorovesipotentiaalin aiheuttama deformaatio . . . 383
14.3 Vuoroveden pysyvä osa . . . 386
14.4 Korkeusjärjestelmien väliset vuorovesikorjaukset . . . 387
14.5 Meren ja ilmakehän kuormitus maankuoreen . . . 389
Olenko ymmärtänyt tämän? . . . 390
Harjoitus 14–1: Pysyvä vuorovesi . . . 391

15. Maan painovoimakentän tutkimus 393
15.1 Kansainvälinen tutkimus . . . 393
15.2 Eurooppalainen tutkimus . . . 394
15.3 Pohjoismainen tutkimus . . . 395
15.4 Suomalainen tutkimus . . . 395
15.5 Oppikirjat . . . 396

A. Kenttäteoria ja vektorianalyysi lyhyesti 397
A.1 Vektorilaskenta . . . 397
A.2 Skalaari- ja vektorikenttiä . . . 401
A.3 Integraalit . . . 408
A.4 Aineen jatkuvuus . . . 412

B. Funktioavaruudet 415
B.1 Abstrakti vektoriavaruus . . . 415
B.2 Fourier'n funktioavaruus . . . 416
B.3 Sturmin ja Liouvillen differentiaaliyhtälöt . . . 420
B.4 Legendren polynomit . . . 426

B.5 Pallofunktiot 426
Olenko ymmärtänyt tämän? 429
Harjoitus B–1: Fourier'n kantafunktioiden ortonormaalius . . 429

C. Miksi FFT toimii? 431

D. Helmertin kondensaatio 435
D.1 Topografian ulkoinen potentiaali 436
D.2 Topografian sisäinen potentiaali 437
D.3 Kondensaatiokerroksen ulkoinen potentiaali 439
D.4 Helmertin kondensaation kokonaispotentiaali 439
D.5 Dipolimenetelmä 442

E. Laplacen yhtälö pallokoordinaateissa 445
E.1 Johtaminen 445
E.2 Ratkaiseminen 448

Kirjallisuutta 451

Hakemisto 471

Taulukot

3.1 Legendren polynomeja 58
3.2 Legendren liitännäisfunktioita 60
3.3 Puoliaallonpituudet eri aste- ja järjestysluvuille 64
3.4 Pintapallofunktion kartan piirtäminen 66
3.5 EGM96 kertoimet ja keskivirheet 78
3.6 Toisen lajin Legendren funktioita 79

4.1 GRS80-normaalipotentiaalin pallofunktiokertoimia . . . 104

5.1 Painovoiman vaihtelujen suuruusluokat 118

8.1 Stokesin yhtälö kahdessa ulottuvuudessa, octave-koodi . 197
8.2 Painovoima-anomalian pystygradientin ydinfunktion johtaminen 206

13.1 Altimetriasatelliitteja kautta aikojen 344
13.2 Satelliitin korkeuden laskeminen sen kiertoajasta 364

14.1 Teoreettisen vuoroveden eri periodeja 382

Kuvat

1.1 Gravitaatio on universaalinen 2
1.2 Pallon ohut kuori koostuu renkaista 7
1.3 Potentiaalin ja vetovoiman riippuvuus etäisyydestä . . . 9
1.4 Kaksinkertainen massatiheyskerros 20
1.5 Gaussin divergenssilauseen graafinen selostus 22
1.6 Pieni suorakulmainen laatikko 24
1.7 Kahdeksan yksikön kuutio 26
1.8 Greenin kolmas lause ulkoiselle pisteelle 29
1.9 Greenin kolmas lause sisäiselle pisteelle 31
1.10 Greenin kolmas lause kappaleen ulkoavaruudelle 32
1.11 Rautamalmikappale 38

2.1 Kentän vaimennus korkeuden mukaan 47
2.2 Kentän pystysuuntainen siirto, kommutoiva kaavio . . . 47
2.3 Pallokoordinaattien määritelmä 51
2.4 Geodeettisten koordinaattien määritelmä 52

3.1 Muutama Legendren polynomi 58
3.2 Legendren liitännäisfunktioita 60
3.3 Eri pallofunktioiden etumerkit Maan pinnalla 62
3.4 Pintapallofunktiot karttoina 63
3.5 Monopoli, dipoli ja kvadrupoli 70
3.6 Kentän säteittäissiirto, kommutoiva kaavio 74

4.1 Maan normaalipainovoimakenttä . . . 88
4.2 Gravitaatio ja keskipakoisvoima . . . 89
4.3 Tasapotentiaalipintojen kaarevuus . . . 93
4.4 Luotiviivan kaarevuus . . . 94
4.5 Luonnolliset koordinaatit . . . 96
4.6 Meridiaaniellipsi ja leveysastetyypit . . . 99
4.7 Normaalikentän potentiaali päiväntasaajan yläpuolella . 103

5.1 Geoidiundulaatiot ja luotiviivan poikkeamat . . . 110
5.2 Suomen geoidimalli vuodesta 1984 . . . 111
5.3 Painovoima- ja normaalipainovoimakentän tasapotentiaalipintoja . . . 113
5.4 Eri vertauspinnat painovoimamittauksessa . . . 115
5.5 Painovoiman ilma-anomalioita Etelä-Suomessa . . . 123

6.1 Bouguer-laatan vetovoima . . . 129
6.2 Bouguer-laatta topografian approksimaationa . . . 131
6.3 Eri anomaliatyyppien käyttäytyminen vuoristossa . . . 132
6.4 Maastokorjattuja Bouguer-anomalioita Etelä-Suomessa . 133
6.5 Maastokorjauksen laskeminen prismamenetelmällä . . . 135
6.6 Bouguer-anomalian laskennan vaiheet . . . 136
6.7 Erikoinen maaston muoto . . . 136
6.8 Helmertin kondensaatio ja painovoimakenttä . . . 141
6.9 Friedrich Robert Helmert . . . 142
6.10 Isostasia ja luotiviivojen taipuminen . . . 143
6.11 Prattin ja Hayfordin isostaattinen hypoteesi . . . 144
6.12 Airyn ja Heiskasen isostaattinen hypoteesi . . . 145
6.13 Isostaattisen kompensaation suureita . . . 145
6.14 Isostasian nykykäsitys . . . 149
6.15 Isostaattisia painovoima-anomalioita Etelä-Suomessa . . 151
6.16 Isostaattinen reduktio kahtena pintatiheyskerroksena . . 155
6.17 Maaston muoto . . . 159

7.1 Vaaituksen periaate 161
7.2 Korkeuden pääkiintopiste Helsingin Kaivopuistossa . . . 164
7.3 Vaaitut korkeudet ja geopotentiaaliluvut 165
7.4 Päijänne: vesi virtaa ”ylöspäin” 166
7.5 Mihail Sergejevitš Molodenski 168
7.6 Molodenskin oivalluksen todistuksen graafinen aasinsilta 171
7.7 Geoidi, kvasigeoidi, telluroidi ja topografia 172
7.8 Valohilakello 185

8.1 Gravimetrisen geoidimäärityksen periaate 190
8.2 Stokesin yhtälön integroinnin geometria 191
8.3 Stokesin ydinfunktio 192
8.4 Stokesin ydinfunktio ympyrällä 196
8.5 Painovoima-anomalioiden ja geoidikorkeuksien simulaatio 198
8.6 Legendren polynomien generoivan funktion geometria . 199
8.7 Poissonin ydinfunktio painovoima-anomalioille 205
8.8 Jäännösmaastomallinnus (RTM) 214
8.9 Poistamis-entistamismenetelmä kommutoivana kaaviona 216
8.10 Modifioituja Stokesin ydinfunktioita 219
8.11 Simpsonin integroinnin solmupistepainot kahdessa ulottuvuudessa 224

9.1 Karttaprojektiokoordinaatit paikallisessa tangenttitasossa 230
9.2 FFT-menetelmän kommutoiva kaavio. 234
9.3 ”Ikkunointi” 25 % 243
9.4 FFT-muunnoksen esimerkkikuvia 244
9.5 Suomen FIN2000-geoidi 246

10.1 Geosentrinen kulmaetäisyys ja atsimuuttikulma 259
10.2 Hirvosen kovarianssifunktio kahdessa ulottuvuudessa . 267
10.3 Pienimmän neliösumman kollokaatio, esimerkki 268
10.4 Pienimmän neliösumman kollokaation laskuesimerkki . 270

10.5 Globaalit kovarianssifunktiot astevariansseina 286
10.6 Kehämäinen geometria 288

11.1 Jean Richer'n raportti 296
11.2 Autograv CG-5 jousigravimetri 297
11.3 Jousigravimetrin toimintaperiaate 300
11.4 Astatisoinnin idea 303
11.5 Ballistisen absoluuttigravimetrin toimintaperiaate 305
11.6 FG5-tyyppinen absoluuttinen gravimetri 306
11.7 Atomigravimetrin toiminta-ajatus 309
11.8 Kansainvälinen absoluuttigravimetrien vertailu 310
11.9 Suprajohtavan gravimetrin toimintaperiaate 311

12.1 Postglasiaalisen maannousun mekanismi 329
12.2 Fennoskandian 63. pohjoisen leveyspiirin painovoimalinja 330
12.3 Meritopografian ja merivirtausten välinen yhteys 333
12.4 GOCEn tuottama meritopografiakartta 334
12.5 Merenpintayhtälö 336
12.6 Merenpinnan nousu viimeisen jääkauden jälkeen 339

13.1 TOPEX/Poseidon- ja Jason-satelliittien tulokset 346
13.2 Satelliittialtimetria mittausmenetelmänä 347
13.3 Eräs risteyskohtien yksinkertainen geometria 350
13.4 Satelliittialtimetrian ratageometria, esimerkki 355
13.5 Keplerin rata-alkiot 358
13.6 Aurinkosynkronisen kiertoradan mekanismi 360
13.7 Varjottoman kiertoradan geometria 361
13.8 Satelliittiradan esimerkki 362
13.9 Altimetrian paluupulssin analyysi 365
13.10 Jään tilavuus Pohjoisella jäämerellä 367
13.11 Maan painovoimakentän määritys GPS-rataseurannan avulla 369
13.12 GRACE-satelliittien perusidea 370

13.13 GRACE-mission tulokset 371
13.14 Maan painovoimakentän määritys GOCE:n avulla 373
13.15 Satelliittialtimetrian ratojen geometria, esimerkki 375

14.1 Teoreettinen vuorovesi 378
14.2 Teoreettisen vuoroveden pääkomponentit 383
14.3 Pysyvän vuoroveden eri osat 387

A.1 Ulkoinen tulo eli vektoritulo 400
A.2 Keplerin toinen laki 401
A.3 Gradientti 404
A.4 Divergenssi 405
A.5 Roottori 406
A.6 Stokesin roottorilause 410
A.7 Gaussin divergenssilause 413

B.1 Askelfunktion Fourier'n analyysi 419

E.1 Gaussin divergenssilause sovellettuna koordinaattilinjojen mukaiseen tilavuusalkioon 446

Lyhenteet

ABCDEFGIJKLMNOPRSTUVW

A

ACS Advanced Camera for Surveys, Hubblen avaruusteleskoopin laite 2

AGU American Geophysical Union 394

B

BGI *Bureau Gravimétrique International*, Kansainvälinen gravimetrinen toimisto 123, 133, 151, 393, 394

BVP boundary-value problem, reuna-arvotehtävä 34

C

CHAMP Challenging Minisatellite Payload for Geophysical Research and Applications 76, 247, 368, 369

D

DMA Defense Mapping Agency (Yhdysvallat) 75

DORIS Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite, ranskalainen satelliittipaikannusjärjestelmä 344, 345

DTM digital terrain model, digitaalinen maastomalli 134

E

EGM2008 Earth Gravity Model 2008 63, 76, 117, 123, 133

EGM96 Earth Gravity Model 1996 75, 76, 78

EGU European Geosciences Union 394

ENSO El Niño Southern Oscillation 323, 346
ESA European Space Agency, Euroopan avaruusjärjestö 2, 334, 344, 345, 371

F

FAS Ranskan tiedeakatemian (*Académie des sciences*) jäsen 425
FFT Fast Fourier Transform, nopea Fourier'n muunnos 15, 152, 196, 212, 217, 232, 234, 236, 237, 239, 241–245, 247, 250, 251, 285, 288, 326, 431, 432
FGI Finnish Geospatial Research Institute, aiemmin Finnish Geodetic Institute, Geodeettinen laitos 395
FIN2000 geoidimalli (Suomi) 245, 246, 325, 326
FIN2005N00 geoidimalli (Suomi) 245, 395
FRAS Fellow of the Royal Astronomical Society 296
FRS Fellow of the Royal Society (of London) 4, 17, 223, 295, 296, 382, 383, 425
FRSE Fellow of the Royal Society of Edinburgh 17, 382, 411, 425

G

GDR geophysical data record 348, 364
GFZ *Geoforschungszentrum* (Potsdam, Saksa), Saksan geotieteiden tutkimuskeskus 368
GIA glacial isostatic adjustment 327, 338–340
GNSS Global Navigation Satellite Systems, sisältää amerikkalaisen GPS:n lisäksi myös muiden maiden satelliittipaikannusjärjestelmät, kuten venäläinen GLONASS ja eurooppalainen Galileo 114, 128, 185, 243, 245, 315, 316, 326, 327, 330, 344, 348, 364, 367, 372, 385, 386, 390, 395
GOCE Geopotential and Steady-state Ocean Circulation Explorer 76, 247, 286, 318, 333, 334, 368, 371–373
GPS Global Positioning System 70, 101, 171, 315, 320, 344, 368, 369
GRACE Gravity Recovery And Climate Experiment 76, 247, 369–371
GRAVSOFT Geopotentiaalin laskentaohjelmisto, pääosin Tanskassa kehitetty 244, 245
GRS80 Geodetic Reference System 1980 6, 101, 104, 108, 110, 117, 245, 314, 326, 327
GWR20 GWR Instrumentsin rakentama suprajohtava gravimetri 312

I

IAG International Association of Geodesy, Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio 245, 311, 393, 394

ICET International Center for Earth Tides 394

ICGEM International Center for Global Earth Models 394

IDEMS International Digital Elevation Model Service 394

IGeC International Geoid Commission (vanhentunut) 394

IGeS International Geoid Service (vanhentunut) 393

IGETS International Geodynamics and Earth Tide Service 311

IGFS International Gravity Field Service 393, 394

IMGC-02 kuljetettava absoluuttinen nousu-ja-pudotus -tyyppinen gravimetri, rakentajana *Istituto di Metrologia «G. Colonnetti»*, Torinossa Italiassa sijaitsevan tutkimuslaitoksen *Istituto Nazionale di Ricerca Metrologican* entinen nimi 307

IOC Initial Operating / Operational Capability 320

ISG International Service for the Geoid 393, 394

IUGG International Union of Geodesy and Geophysics, Kansainvälinen geodeettis-geofysikaalinen unioni 393

J

J_2 maapallon dynaaminen litistyneisyys (”gravitaatiokentän litistyneisyys”) 77, 101, 104, 359, 374

Jason amerikkalais-ranskalais-eurooppalainen altimetriasatelliittisarja, TOPEX/Poseidonin seuraajat 344–346, 360, 374

JHU Johns Hopkins University 2

K

KKJ Kartastokoordinaattijärjestelmä (Suomi) 122

L

LAGEOS LAser GEOdynamic Satellite 358

Lego™ ”*Leg Godt*”, suomeksi ”leiki hyvin”, tanskalainen leikkikalujen tavaramerkki 25

LLR Lunar laser ranging, laseretäisyysmittaus Kuuhun 304

LSC least-squares collocation, pienimmän neliösumman kollokaatio 272

M

Mf Moon, fortnightly tide, Kuu, puolikuukausittainen vuorovesi 382

N

N2000 korkeusjärjestelmä (Suomi) 163, 166, 245, 325
N60 korkeusjärjestelmä (Suomi) 162, 163, 245, 325
NAP *Normaal Amsterdams Peil*, korkeusjärjestelmä (länsi-Eurooppa) 163
NASA National Aeronautics and Space Administration (Yhdysvallat) 2
NAVD88 North American Vertical Datum 1988 163
NC normal correction, normaalikorjaus 182, 183
NGA National Geospatial-Intelligence Agency (Yhdysvallat, aiemmin NIMA) 75, 393
NIMA National Imagery and Mapping Agency (Yhdysvallat, aiemmin DMA) 75
NKG *Nordiska Kommissionen för Geodesi*, Pohjoismainen geodeettinen komissio 395
NKG2004 geoidimalli (Pohjoismaat) 395
NKG2015 geoidimalli (Pohjoismaat) 395
NN normaalinolla, korkeusjärjestelmä (Suomi) 163
NOAA National Oceanic and Atmospheric Administration (Yhdysvallat) 334

O

OC orthometric correction, ortometrinen korjaus 181, 182
OSU Ohio State University, Columbus, Ohio, Yhdysvallat 76

P

ppb parts per billion, miljardisosa 118
ppm parts per million, miljoonasosa 118
PRARE Precise Range And Range-Rate Equipment, ei käytössä 344
PRS President of the Royal Society 3, 120, 144, 411

R

RTM residual terrain modelling, jäännösmaastomallinnus 213–215, 226

S

SI *Système international d'unités*, kansainvälinen yksikköjärjestelmä 11, 36, 101,

117, 118, 124

SK-42 Neuvostoliiton vertausjärjestelmä, tunnetaan myös nimellä Krasovsky 1940 -vertausellipsoidi 102

SLR satellite laser ranging, laseretäisyysmittaus satelliitteihin 344, 357

SRAL Synthetic Aperture Radar Altimeter 345

Ssa Sun, semi-annual tide, Aurinko, puolivuotuinen vuorovesi 382

SST satellite-to-satellite tracking 370

STScI Space Telescope Science Institute 2

SWH significant wave height, merkitsevä aallonkorkeus 347, 348

T

TC terrain correction, maastokorjaus 132, 134, 135, 137, 138, 248–250

TKK Teknillinen korkeakoulu, nykyisin osana Aalto-yliopistoa 396

TOPEX/Poseidon Topography Experiment / Poseidon, amerikkalais-ranskalainen altimetriasatelliitti xix, 324, 344–346, 360, 374

U

UCO University of California Observatories 2

VW

WGS84 World Geodetic System 1984 70, 101

Gravitaatioteorian perusteita

1

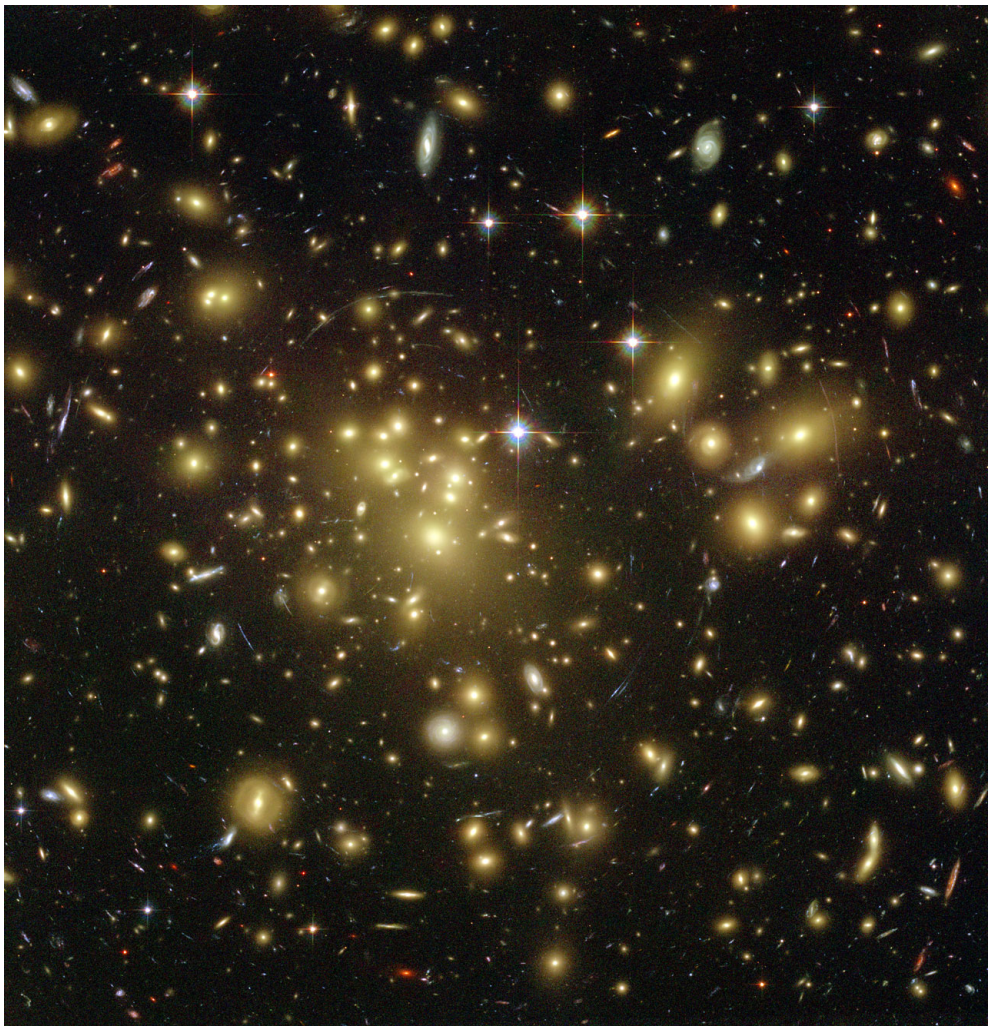
1.1 Yleistä

Tässä luvussa esitetään Newtonin gravitaatioteorian perusteet. Intuitiivisesti gravitaatioteoria on helpointa ymmärtää ”kaukovaikutuksen” (engl. *action at a distance*, lat. *actio ad distans*) ilmiönä, jossa kahden massan välinen voima on verrannollinen massojen suuruuteen ja kääntäen verrannollinen massojen välisen etäisyyden neliöön. Tämä on Newtonin yleisen gravitaatiolain kaikille tuttu ilmaisumuoto.

Olemassa on myös vaihtoehtoinen mutta samanarvoinen esitystapa, *kenttäteoria*, joka kuvailee gravitaatiota avaruuden kautta etenevänä ilmiönä, kenttänä. Etenemistä ilmaisevat *kenttäyhtälöt*. Kenttäteorian lähestymistapa ei ole yhtä intuitiivinen, mutta se on tehokas teoreettinen apuväline[1]. 1

Tässä luvussa tutustutaan kenttäteoriassa keskeiseen *gravitaatiopotentiaalin* käsitteeseen. Käymme läpi myös yksinkertaisen ja kaksinkertaisen *massatiheyskerroksen* aiheuttamat, teoreettisesti mielenkiintoiset

[1] Asialla on myös filosofinen puoli. Monelle, esimerkiksi Leibnizille, idea voimasta, joka hyppää kappaleesta toiseen tyhjän avaruuden kautta, oli mahdoton ajatus. Monet yrittivät selittää gravitaatiota — ja myös sähkömagnetismia ym. — ”maailmaneetterin” avulla. Vasta suhteellisuusteorian myötä levisi käsitys, että fysikaalisen teorian ei tarvitsekaan tyydyttää ennakkoluuloamme siitä, mikä on niin sanotusti järkevä selitys — niin kauan kuin se vain esittää fysikaaliset ilmiöt korrektisti.



KUVA 1.1. Gravitaatio on universaalinen. Hubblen avaruusteleskoopin kuvaama gravitaatiolinssi, galaksijoukko Abell 1689 etäisyydellä 2,2 miljardia valovuotta. Benitez ym. (2003).
Kiitokset: NASA, N. Benitez (JHU), T. Broadhurst (The Hebrew University), H. Ford (JHU), M. Clampin (STScI), G. Hartig (STScI), G. Illingworth (UCO / Lick Observatory), ACS Science Team ja ESA.

potentiaalikentät. Niiden sovelluksista, sekä teoriassa että käytännössä, mainittakoon isostasia ja Helmertin kondensaatio, joita molempia tarkastellaan myöhemmissä luvuissa.

Tutustumme keskeisiin *integraalilauseisiin*, kuten Gaussin ja Greenin lauseet, joiden avulla voidaan päätellä koko potentiaalikenttä avaruudessa vain tietyllä pinnalla annettujen kenttäarvojen perusteella. Muut vastaavat esimerkit ovat Chaslesin lause ja Dirichletin ongelman ratkaisu.

Luvuissa 2 ja 3 näitä potentiaaliteorian perusteita sovelletaan Maan gravitaatiokentän spektraaliesityksen, *pallofunktiokehitelmän*, johtamiseen.

Aluksi johdamme suurehkon määrän matemaattisia yhtälöitä, kuten tunnettuja integraaliyhtälöitä. Kyse on valitettavasti välttämättömästä pohjatyöstä. Yhtälöt eivät kuitenkaan ole itsetarkoitus, eikä niitä kannata opetella ulkoa. Yritä mieluummin ymmärtää niiden logiikka ja miten näihin tuloksiin on historiallisesti päädytty, sekä hankkia itsellesi ”sormituntumaa” teorian luonteesta.

1.2 Kahden massan välinen gravitaatio

Maan painovoimakentän tutkimus alkaa sopivasti Isaac Newtonin[2] [2] yleisestä gravitaation laista:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{\ell^2}. \tag{1.1}$$

F on kappaleiden 1 ja 2 välinen vetovoima, m_1 ja m_2 ovat kappaleiden massat ja ℓ on niiden välinen etäisyys. Massat oletetaan pistemäisiksi. Vakio G, *universaalinen gravitaatiovakio*, on arvoltaan

$$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}.$$

G:n arvon määritti ensimmäistä kertaa Henry Cavendish[3] käyttämällä [3]

---

[2] Sir Isaac Newton PRS (1642–1727) oli englantilainen yleisnero, joka matematisoi tähtitieteen ja suuren osan geofysiikkaa pääteoksessaan *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* eli ”Fysiikan matemaattiset perusteet”.

herkkää torsiovaakaa eli kiertoheiluria (Cavendish, 1798).

Olkoon m pieni kappale eli koemassa, esimerkiksi satelliitti, ja M suuri massa, kuten planeetta tai Aurinko. Silloin $m_1 = M$ voidaan kutsua *vetäväksi* massaksi ja $m_2 = m$ *vedetyksi* massaksi, ja saadaan

$$F = G\frac{mM}{\ell^2}.$$

Newtonin liikelain mukaan

$$F = ma,$$

jossa a on kappaleen m gravitaatiokiihtyvyys. Tästä seuraa

$$a = G\frac{M}{\ell^2}.$$

Tästä yhtälöstä suure $m = m_2$ on kadonnut. Kyseessä on Galilein kuuluisa havainto, jonka mukaan *kaikki kappaleet putoavat yhtä nopeasti*[4] niiden massasta riippumatta. Tämä tunnetaan myös Einsteinin[5] ekvivalenssiperiaatteena.

Sekä voima F että kiihtyvyys a ovat samansuuntaisia kappaleita yhdistävän viivan kanssa. Siksi kirjoitetaan yhtälö 1.1 usein *vektorimuotoon*, jolla on suurempi ilmaisukyky:

$$\mathbf{a} = -GM\frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{\ell^3}, \tag{1.2}$$

jossa vedetyn ja vetävän massan kolmiulotteiset paikkavektorit määritellään seuraavasti suorakulmaisissa koordinaateissa[6]:

[3] Henry Cavendish FRS (1731–1810) oli brittiläinen luonnontieteilijä rikkaasta aatelissuvusta. Hän teki uraauurtavaa työtä myös kemiassa. Hän oli erittäin ujo, ja kuuluisa neurologi Oliver Sacks retrodiagnosoi hänelle Aspergerin oireyhtymän (Sacks, 2001).

[4] Ainakin tyhjiössä. Apollo-astronautit esittivät vaikuttavasti, miten höyhen ja vasara putoavat Kuun pinnalla yhtä nopeasti! YouTube, Hammer vs. Feather.

[5] Albert Einstein (1879–1955) oli saksanjuutalainen teoreettinen fyysikko. Hän loi erityisen ja yleisen suhteellisuusteorian, sovelsi viimeksi mainittua kosmologiaan ja teki uraauurtavaa työtä kvanttiteorian parissa, teoria joka hän ei kuitenkaan koskaan täysin hyväksynyt.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$

jossa yksikkövektorien kolmikko $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ on euklidisen avaruuden *ortonormaali kanta*[7].

$$\ell = \|\mathbf{r} - \mathbf{R}\| = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} \tag{1.3}$$

on massojen välinen etäisyys Pythagoraan lauseen mukaisesti laskettuna.

Vektoriyhtälössä 1.2 oleva miinusmerkki kertoo, että voiman suunta on päinvastainen kuin vektorin $\mathbf{r} - \mathbf{R}$ suunta. Tämä vektori on vedetyn massan m paikka vetävän massan M paikasta laskettuna. Toisin sanoen tämä kertoo, että kyseessä on *vetovoima* eikä työntövoima.

1.3 Pistemäisen kappaleen potentiaali

Gravitaatiokenttä on erikoinen kenttä: mikäli se on stationaarinen eikä siis ajasta riippuvainen, se on *konservatiivinen*. Tämä merkitsee, että kappale, joka liikkuu kentän sisällä suljettua reittiä pitkin, ei ole matkan suoritettuaan menettänyt eikä voittanut energiaa. Tämän ansiosta voi kiinnittää jokaisen kentän pisteelle yksiselitteisesti ”tarran”, johon voi merkitä yksikkö- eli koemassan energiamäärän, jonka se on voittanut tai menettänyt matkustaessaan sovitusta *lähtöpisteestä* kyseiseen pisteeseen. Tarraan kirjoitettua arvoa kutsutaan *potentiaaliksi*.

Huomaa, että lähtöpisteen valinta on *mielivaltainen*. Tähän merkittävään asiaan palataan myöhemmin.

Pistemäisen kappaleen M näin määritelty *potentiaalifunktio* on

$$V = \frac{GM}{\ell}, \qquad \ell = \|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|. \tag{1.4}$$

[6] Vektorin kirjoitustapana käytetään joko muotoa $\vec{v}$ (nuolta kirjaimen yläpuolella) tai $\boldsymbol{v}$-kirjainta (lihavoituna). Tässä käytetään mahdollisuuksien mukaan lihavointia.

[7] Tämä merkitsee, että $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\| = 1$ ja $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \rangle = 0$, jossa normin määritelmä on $\|\mathbf{a}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \rangle}$, ja $\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle$ on avaruuden vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ *skalaaritulo*.

Vakiolla GM on maapallon tapauksessa (GRS80-järjestelmän mukainen, konventionaalinen) arvo

$$GM_{\oplus} = 3{,}986\,005 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}.$$

Tämän hetken paras mittauksiin perustuva arvo on hieman tarkempi:

$$GM_{\oplus} = 3{,}986\,004\,418\,(8) \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}.$$

Suluissa oleva luku (8) on mittausarvon epävarmuus viimeisen annetun desimaalin yksiköissä. Suhteellinen epävarmuus on siis $2 : 10^9$.

1.4 Pallon muotoisen kuoren potentiaali

Voimme kirjoittaa yhtälön 1.4 perusteella laajan kappaleen M potentiaalin seuraavaan muotoon:

$$V(\mathbf{r}) = G\int_M \frac{dm(\mathbf{R})}{\ell} = G\int_M \frac{dm(\mathbf{R})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{R}\|}. \tag{1.5}$$

Tämä on integraali kappaleen massa-alkioiden dm yli, jossa jokainen massa-alkio sijaitsee omalla paikallaan $\mathbf{R}$. Potentiaali V lasketaan paikalla $\mathbf{r}$ ja etäisyys $\ell = \|\mathbf{r}-\mathbf{R}\|$.

Johdamme nyt ohuen pallon muotoisen kuoren potentiaalin yhtälön, katso kuva 1.2, jossa olemme laittaneet pallon keskipiste origoksi O.

Koska kapean rinkulan, leveys $b \cdot d\theta$, ympärysmitta on $2\pi b \sin\theta$, on sen pinta-ala

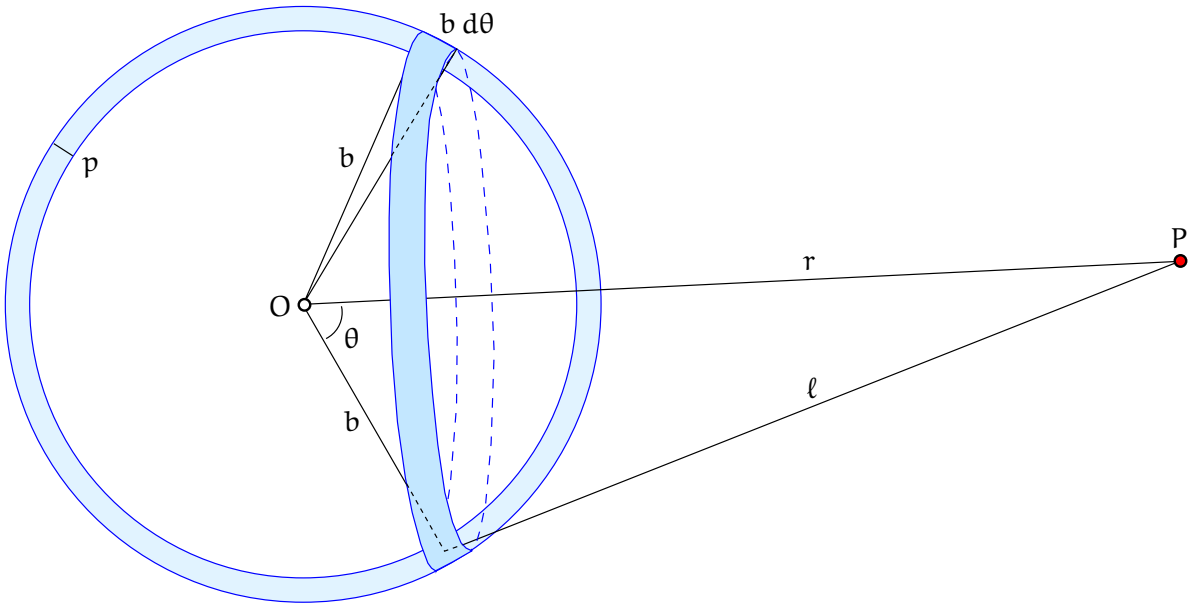
$$(2\pi b \sin\theta)\,(b \cdot d\theta)\,.$$

Olkoon kuoren paksuus p (pieni) ja sen ainetiheys ρ. Saamme rinkulan kokonaismassaksi

$$2\pi p \rho b^2 \sin\theta\, d\theta.$$

Koska rinkulan jokainen piste on samalla etäisyydellä ℓ pisteestä P, voimme kirjoittaa rinkulan potentiaaliksi pisteessä P:

$$V_P = \frac{2\pi G p \rho b^2 \sin\theta\, d\theta}{\ell}.$$



KUVA 1.2. Pallon ohut kuori koostuu renkaista.

Kosinisäännön avulla,

$$\ell^2 = r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta, \tag{1.6}$$

saadaan yhtälön 1.5 avulla koko kuoren potentiaaliksi

$$V_P = 2\pi G\rho p b^2 \int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta}}.$$

Tämän integraalin laskemiseksi muutetaan integrointimuuttuja θ:sta ℓ:ksi. Differentioimalla yhtälö 1.6 saadaan

$$\ell\, d\ell = rb\sin\theta\, d\theta,$$

ja muistamalla, että $\ell = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta}$, saadaan

$$V_P = 2\pi G\rho p b^2 \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{d\ell}{rb}.$$

Siinä tapauksessa, että piste P on kuoren ulkopuolella, ovat muuttujan ℓ integrointirajat $\ell_1 = r - b$ ja $\ell_2 = r + b$, ja pisteen P potentiaaliksi saadaan

$$V_P = 2\pi G\rho p b^2 \left[\frac{\ell}{rb}\right]_{\ell=r-b}^{\ell=r+b} = \frac{4\pi G\rho p b^2}{r}.$$

Koska koko kuoren massa on $M_b = 4\pi b^2 \rho p$, seuraa, että kuoren potentiaali on *sama kuin sen keskipisteessä* O *olevan samansuuruisen massan potentiaali*:

$$V_P = \frac{GM_b}{r},$$

jossa r on laskentapisteen P etäisyys pallon keskipisteestä O. Nähdään, että tämä on identtinen yhtälön 1.4 kanssa.

8 Pallon kuoren aiheuttama vetovoima, tarkemmin *kiihtyvyys*, on[8]

$$\mathbf{a}_P = \nabla V|_P = -4\pi G\rho p b^2 \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O}{r^3} = -GM_b \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O}{r^3},$$

jossa $r = \|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O\|$. Tämä tulos on identtinen samanmassaisen, pisteessä O sijaitsevan, pistemassan aiheuttaman kiihtyvyyden kanssa, yhtälö 1.2.

Siinä tapauksessa, että piste P on kuoren sisäpuolella, $\ell_1 = b - r$ ja $\ell_2 = b + r$, ja yllä oleva integraali muuttuu seuraavaksi:

$$V_P = 2\pi G\rho p b^2 \left[\frac{\ell}{rb}\right]_{\ell=b-r}^{\ell=b+r} = 4\pi G\rho p b.$$

Kuten nähdään, tämä on *vakio* eikä riipu pisteen P paikasta. Siksi $\nabla V_P = 0$ ja vetovoima potentiaalin gradienttina häviää.

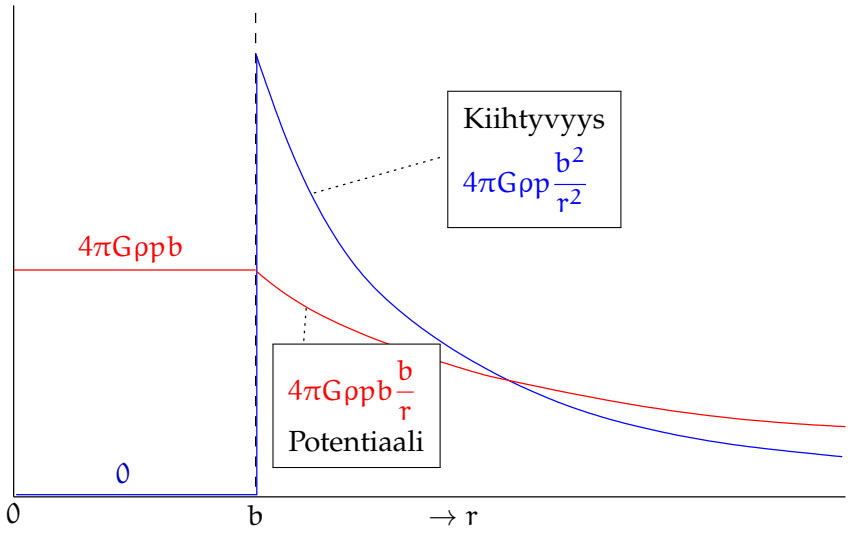
Lopputulos on, että pallon muotoisen kuoren vetovoiman suuruus on, kuoren ulkopuolella,

$$a = \|\mathbf{a}\| = \frac{GM}{r^2},$$

jossa M on kuoren kokonaismassa ja $r = \|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O\|$ havaintopisteen etäisyys kuoren keskipisteestä. Vetovoima häviää kuoren sisällä.

Kuvassa 1.3 on piirretty potentiaalin ja vetovoiman — tarkemmin kiihtyvyyden, joka on vetovoima per massayksikkö — käyrät. Jos kappale koostuu monesta sisäkkäisestä pallon kuoresta, kuten melko tarkasti maapallo ja useimmat taivaankappaleet, osallistuvat kappaleen

[8] Tässä käytetään ∇ (nabla) -operaattoria, josta lisää osiossa 1.5.



KUVA 1.3. Potentiaalin ja vetovoiman riippuvuus etäisyydestä r pallokuoren keskipisteestä.

sisäisen vetovoiman muodostukseen vain ne massakerrokset, jotka ovat havaintopisteen "sisäpuolella", siis lähempänä keskipistettä. Vetovoima on sama kuin silloin, jos kerrosten koko massa olisi keskitetty kappaleen keskipisteeseen. Tapausta, jossa massatiheysjakauma kappaleen sisällä riippuu ainoastaan etäisyydestä sen keskipisteestä eikä leveys- tai pituusasteesta, kutsutaan *isotrooppiseksi* tiheysjakaumaksi.

1.5 Vetovoiman laskeminen potentiaalista

Kuten yllä argumentoitiin, on potentiaali V *polkuintegraali*. Kääntäen voidaan potentiaalista laskea gravitaation kiihtyvyysvektorin komponentit *differentioimalla* $V(x, y, z)$ *paikan suhteen* eli soveltamalla *gradientti-operaattoria*, joka on vektorioperaattori:

$$\mathbf{a} = \nabla V = \operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{1.7}$$

Tässä symboli ∇ (nabla) on usein käytetty *osittaisdifferentiaalioperaattori*

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Kuten ennen, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ on euklidisen avaruuden keskenään kohtisuorien yksikkövektorien *ortonormaali kanta*. Vektorit ovat samansuuntaisia (x, y, z)-akseleiden kanssa.

Kokeillaan tätä differentiointia massapisteen M potentiaalikentän tapauksessa. Sijoita yllä olevat potentiaalin V ja etäisyyden ℓ yhtälöt 1.3 ja 1.4[9] :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \ell}\frac{\partial \ell}{\partial x} = GM \cdot -\frac{1}{\ell^2} \cdot \frac{x - X}{\ell} = -GM\frac{x - X}{\ell^3}.$$

Vastaavasti lasketaan y- ja z-komponentit:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -GM\frac{y - Y}{\ell^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -GM\frac{z - Z}{\ell^3}.$$

Nämä ovat gravitaation kiihtyvyys- eli vetovoimavektorin komponentit, kun kentän lähde on yksi massapiste M. Tässä konkreettisessa tapauksessa yllä annettu vektoriyhtälö 1.7 siis pätee:

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} V = \nabla V.$$

Huomautus Fysikaalisessa geodesiassa — toisin kuin fysiikassa — potentiaali lasketaan aina positiiviseksi, jos vetävä massa M on positiivinen, kuten tiettävästi aina on. Kuitenkin kappaleen m *potentiaalienergia* massan M kentässä V on negatiivinen! Tarkemmin esitettynä kappaleen m potentiaalienergia on

$$E_{pot} = -Vm.$$

---

[9] Yhtälöstä

$$\ell = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} = \left((x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2\right)^{1/2}$$

seuraa ketjusäännön avulla

$$\frac{\partial \ell}{\partial x} = \frac{\partial\left((x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2\right)^{1/2}}{\partial\left((x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2\right)} \cdot \frac{\partial (x - X)^2}{\partial x} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left((x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2\right)^{-1/2} \cdot 2(x - X) = \frac{x - X}{\ell}.$$

Gravitaation kiihtyvyysvektoria kutsutaan lyhyemmin *gravitaatio-* eli *vetovoima*vektoriksi.

1.6 Kiinteän kappaleen potentiaali

Seuraavaksi tutkitaan *kiinteää kappaletta*, jonka massa on jakautunut avaruudessa eikä sitä siis ole keskitetty yhteen pisteeseen. Esimerkiksi maapallon massajakauma avaruudessa voidaan kuvata aineen *tiheysfunktiolla* ρ:

$$\rho(x, y, z) = \frac{dm(x, y, z)}{d\mathcal{V}(x, y, z)},$$

jossa dm on massa-alkio ja $d\mathcal{V}$ vastaava avaruuden tilavuusalkio. ρ:n dimensio on tiheys ja yksikkö SI-järjestelmässä $^{kg}/_{m^3}$.

Koska gravitaation kiihtyvyys 1.7 on lineaarinen lauseke potentiaalissa V ja voima- tai kiihtyvyysvektorit voidaan summata lineaarisesti, seuraa siitä, että myös kappaleen kokonaispotentiaali saadaan summaamalla kaikki sen osien potentiaalit yhteen. Esimerkiksi n massapisteen kokoelman potentiaali on

$$V(\mathbf{r}) = G \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\ell_i} = G \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\mathbf{R}_i)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i\|},$$

josta saadaan gravitaation kiihtyvyys yksinkertaisesti soveltamalla gradienttilausetta 1.7.

Kiinteän kappaleen potentiaali saadaan vastaavasti korvaamalla summa integraalilla seuraavalla tavalla[10]: [10]

$$V = G \iiint_{\text{kappale}} \frac{dm}{\ell} = G \iiint_{\text{kappale}} \frac{\rho}{\ell} d\mathcal{V}. \tag{1.8}$$

Symboli ρ integraalin sisällä merkitsee aineen tiheyttä tilavuusalkion $d\mathcal{V}$ paikalla. Suure $\ell = \|\mathbf{r} - \mathbf{R}\| = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$ on

[10] Valitettavasti potentiaalille ja tilavuudelle käytetään lähes samoja symboleja V ja $\mathcal{V}$.

potentiaalin laskentapisteen ja vetävän massa-alkion välinen etäisyys. Selvemmin:

$$V(x,y,z) = G \iiint_{\text{kappale}} \frac{\rho(X,Y,Z)}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}}\,dX\,dY\,dZ.$$

Kuten edellä näytettiin massapisteiden tapauksessa, on myös kiinteän kappaleen potentiaalin V ensimmäinen derivaatta paikan suhteen eli *gradientti*,

$$\operatorname{grad} V = \nabla V = \mathbf{a}, \tag{1.9}$$

kappaleen vetovoiman aiheuttama kiihtyvyysvektori. Tämä pätee yleisesti.

1.6.1 Käyttäytyminen äärettömyydellä

Jos kappale on äärellisen kokoinen — toisin sanoen kokonaan ϵ-säteisen, origoa ympäröivän pallon sisällä — ja sen tiheyskin on kaikkialla rajallinen, seuraa, että

$$\|\mathbf{r}\| \to \infty \quad\Longrightarrow\quad V(\mathbf{r}) \to 0,$$

koska kolmioepäyhtälön mukaan

$$\ell = \|\mathbf{r}-\mathbf{R}\| \geqslant \|\mathbf{r}\| - \|\mathbf{R}\| \geqslant \|\mathbf{r}\| - \epsilon$$

ja siis

$$\|\mathbf{r}\| \to \infty \quad\Longrightarrow\quad 1/\ell \to 0.$$

Gravitaation kiihtyvyyden kaikille kolmelle komponentille, siis myös vektorisuureen pituusarvolle, pätee sama:

$$\|\mathbf{r}\| \to \infty \quad\Longrightarrow\quad \|\nabla V\| \to 0.$$

Tulosta voi vielä tarkentaa: jos $\|\mathbf{r}\| \to \infty$, on taas kolmioepäyhtälön mukaan

$$\ell = \|\mathbf{r}-\mathbf{R}\| \leqslant \|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{R}\| \leqslant \|\mathbf{r}\| + \epsilon,$$

ja siis

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}\|+\epsilon} \leqslant \frac{1}{\ell} \leqslant \frac{1}{\|\mathbf{r}\|-\epsilon} \implies \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\frac{1}{1+\epsilon/\|\mathbf{r}\|} \leqslant \frac{1}{\ell} \leqslant \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\frac{1}{1-\epsilon/\|\mathbf{r}\|}.$$

Näemme taas notaatiolla $r = \|\mathbf{r}\|$, että

$$r \to \infty \implies 1/\ell \to 1/r\,.$$

Kun sijoitetaan tämä integraaliin 1.8, seuraa, että suurille etäisyyksille $r \to \infty$:

$$V = G\iiint_{\text{kappale}} \frac{\rho}{\ell}\,d\mathcal{V} \approx \frac{G}{r}\iiint_{\text{kappale}} \rho\,d\mathcal{V} = \frac{GM}{r},$$

jossa M, tiheyden integraali kappaleen tilavuuden yli, on juuri sen *kokonaismassa*. Tästä nähdään, että suurella etäisyydellä äärellisen kokoisen kappaleen M kenttä on *lähes identtinen* sen kentän kanssa, joka aiheutuu pistemassasta, jonka massa on sama kun kappaleen *kokonaismassa*. Tämän tärkeän havainnon teki jo Newton. Ilmiön ansiosta voimme aurinkokunnan taivaanmekaniikassa käsitellä Aurinkoa ja planeettoja[11] massapisteinä, vaikka tiedetään, että ne eivät sitä ole.

1.7 Esimerkki: Massaviivan potentiaali

Pystyasennossa olevalla massaviivalla, jonka lineaarinen massatiheys on yksi, on potentiaali

$$V(x,y,z) = G\int_0^H \frac{1}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}}\,dZ, \tag{1.10}$$

jossa (X,Y) on massaviivan paikka tasossa, (x,y,z) on potentiaalin laskentapisteen paikka, ja massaviiva ulottuu merenpinnalta $Z = 0$ korkeudelle $Z = H$.

[11] Ainoa merkittävä poikkeus ovat planeettojen ja niiden kuiden väliset voimat sekä planeetan litistyneisyyden että vuorovesi-ilmiön takia.

Kirjoitetaan ensin $\Delta x = X - x$, $\Delta y = Y - y$ ja $\Delta z = Z - z$, ja potentiaalista tulee

$$V(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = G \int_{-z}^{H-z} \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} \, d(\Delta z).$$

Integraalifunktio on

$$\ln\left(\Delta z + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\right)$$

ja integrointirajojen sijoitus antaa

$$V = G \ln \frac{H - z + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (H-z)^2}}{-z + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + z^2}}.$$

Kehitetään tämä Taylorin sarjaksi muuttujassa H pisteen $H = 0$ ympäri: yhtälön 1.10 ensimmäinen derivaatta on

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{G}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (H-z)^2}} = \frac{G}{\ell}$$

jossa $\ell(H) = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (H-z)^2}$. Toinen derivaatta saadaan ketjusäännön avulla:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial H^2} = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{G}{\ell}\right) = G \cdot \frac{\partial \ell^{-1}}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial \ell}{\partial H} = \\ = G \cdot -\ell^{-2} \cdot \tfrac{1}{2}\ell^{-1} \cdot 2\,(H-z) = -G\frac{H-z}{\ell^3}.$$

Kolmas derivaatta, laskettu samalla tavalla:

$$\frac{\partial^3 V}{\partial H^3} = -G\frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{H-z}{\ell^3}\right) = G\left(\frac{3\,(H-z)^2}{\ell^5} - \frac{1}{\ell^3}\right) = \\ = G\frac{3\,(H-z)^2 - \ell^2}{\ell^5},$$

ja niin edelleen. Taylorin kehitelmä on

$$V = \underbrace{V|_{H=0}}_{0} + \overbrace{G\frac{1}{\ell_0}}^{\partial_H V|_{H=0}} H + \overbrace{\tfrac{1}{2}G\frac{z}{\ell_0^3}}^{\partial_H^2 V|_{H=0}} H^2 + \overbrace{\tfrac{1}{6}G\frac{3z^2 - \ell_0^2}{\ell_0^5}}^{\partial_H^3 V|_{H=0}} H^3 + \cdots, \qquad (1.11)$$

jossa $\ell_0 = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}$, siis tässä kehitelmässä käytetyt derivaattojen arvot saadaan sijoittamalla $H = 0$.

Kysymys Miten voisimme käyttää tätä tulosta kokonaisen, realistisen maaston eli topografian gravitaatiopotentiaalin laskemiseen?

Vastaus Tässä kehitelmässä kertoimet $1/\ell_0$, $\frac{1}{2}\, z/\ell_0^3$, ..., kuten ℓ_0, riippuvat vain koordinaattien *erotuksista* $\Delta x = X - x$ ja $\Delta y = Y - y$, massaviivan paikan (X, Y) ja laskentapaikan (x, y) välillä — ja laskentapaikan korkeudesta z. Jos maasto on annettuna hilan muodossa, voidaan arvioida yllä oleva kehitelmä 1.11 termi kerrallaan annetulle z-arvolle ja kaikille mahdollisille $(\Delta x, \Delta y)$-arvopareille. Jos hilan koko on vaikkapa $N \times N$, tarvitaan vain N^2 laskutoimitusta jokaisen kertoimen laskemiseksi. Itse Taylorin kehitelmän evaluointi raa'alla laskentavoimalla *koko maastolle*, siis kaikille sekä maaston että laskentatason hilapisteille, vaatii sen jälkeen $N^2 \cdot N^2 = N^4$ laskutoimitusta, mutta ne ovat nyt yksinkertaisempia: kertoimet on jo esilaskettu. Ja raaka voima ei ole edes paras ratkaisu: kuten tulemme näkemään, voidaan yllä oleva *konvoluutio* laskea paljon nopeammin FFT:n (nopean Fourier'n muunnoksen) avulla.

Palaamme tähän aiheeseen laajemmin maastokorjauksen yhteydessä osioissa 6.3 ja 9.7.

1.8 Laplacen ja Poissonin yhtälöt

Geopotentiaalin *toinen derivaatta* paikan suhteen eli gravitaation kiihtyvyysvektorin ensimmäinen paikan derivaatta eli sen *divergenssi* on myös geofysikaalisesti mielenkiintoinen. Voidaan kirjoittaa:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \nabla \cdot \mathbf{a} \rangle = \langle \nabla \cdot (\nabla V) \rangle = \langle \nabla \cdot \nabla \rangle V = \\ = \Delta V = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V, \quad (1.12)$$

jossa

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \langle \nabla \cdot \nabla \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

[12] on tunnettu symboli nimeltä Laplacen[12] *operaattori*.

Massapistepotentiaalin yhtälöstä 1.4 voidaan osoittaa suorittamalla kaikki osittaisdifferentiaatiot 1.12, että

$$\Delta V = 0, \tag{1.13}$$

tunnettu *Laplacen yhtälö*. Tämä yhtälö pätee pistemassan ulkopuolella ja yleisemmin kaikkialla tyhjässä avaruudessa: kaikkien massojenhan voidaan limiitissä katsoa koostuvan pistemäisistä massa-alkioista. Tai yhtälössä 1.8 voidaan suoraan differentioida kolminkertaisen integraalimerkin sisällä käyttäen hyväksi sitä, että integraalin ja osittaisderivaatan vaihtaminen keskenään on sallittua, jos molemmat ovat olemassa.

Potentiaalikenttää, jolle Laplacen yhtälö 1.13 pätee, kutsutaan *harmoniseksi* kentäksi.

Siinä tapauksessa, että massatiheys ei ole kaikkialla nolla, saadaan toisenlainen yhtälö, jossa ρ on massatiheys:

$$\Delta V = -4\pi G\rho. \tag{1.14}$$

[13] Tätä yhtälöä kutsutaan *Poissonin*[13] *yhtälöksi*.

Yhtälöpari

$$\operatorname{grad} V = \mathbf{a}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{a} = -4\pi G\rho$$

tunnetaan gravitaatiokentän *kenttäyhtälöinä*. Niillä on samanlainen roo-
[14] li kuin sähkömagnetismissa Maxwellin[14] kenttäyhtälöillä. Toisin kuin

[12] Pierre-Simon markiisi de Laplace (1749–1827) oli ranskalainen matematiikan ja luonnontieteiden yleisnero. Hän on yksi niistä 72 ranskalaistiedemiehestä, insinööristä ja matemaatikosta, joiden nimet kaiverrettiin Eiffel-torniin, Eiffel Tower, 72 names.

[13] Siméon Denis Poisson (1781–1840) oli ranskalainen matemaatikko, fyysikko ja geodeetti, yksi Eiffel-tornin 72 nimestä, Eiffel Tower, 72 names.

Maxwellin yhtälöissä, yllä olevissa ei ole aikakoordinaattia mukana. Tästä syystä niiden avulla ei voida johtaa yhtälöä, joka kuvaa Maxwellin sähkömagneettisten aaltojen vastaavien gravitaatioaaltojen kulkua avaruudessa.

Nykyisin tiedetään, että yllä olevat ”Newtonin kenttäyhtälöt” ovat vain likimääräisiä ja että tarkempi teoria on Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria. Kuitenkin fysikaalisessa geodesiassa Newtonin gravitaatioteoria on yleensä riittävän tarkka, ja tulemme rajoittumaan siihen.

1.9 Mittainvarianssi

Potentiaalin tärkeä ominaisuus on, että jos siihen lisätään *vakio* C, mikään gravitaatioon liittyvä mitattavissa oleva suure ei muutu. Tämä on esimerkki niin kutsutusta mittainvarianssista (engl. *gauge invariance*).

Gravitaatio itse saadaan differentioimalla potentiaali: toimitus hävittää vakiotermin. Siksi potentiaalin määrittely on mielivaltainen: kaikki eri C:n valinnalla saadut potentiaalikentät V ovat samanarvoisia.

Havainnoistakin saadaan vain potentiaali*eroja*, kuten vaaitsijat hyvin tietävät.

Usein valittu potentiaalin määritelmä lähtee siitä, että jos $r = \|\mathbf{r}\| \to \infty$, silloin myös $V \to 0$, mikä on fysikaalisesti järkevä ja antaa yksinkertaisia yhtälöitä. Kuitenkin maanpäällisessä työssä järkevämpi vaihtoehto voi olla $V = 0$ keskimerenpinnan kohdalla — vaikka sekään ei ole ongelmaton.

Esimerkiksi Maan massalle $M_\oplus$ fysikaalisesti järkevä potentiaalin esitys on palloapproksimaatiossa

$$V = \frac{GM_\oplus}{r},$$

[14] James Clerk Maxwell FRS FRSE (1831–1879) oli skotlantilainen fyysikko ja sähkömagnetismin kenttäyhtälöiden keksijä. Hän löysi yhtälöiden aaltomaisen ratkaisun ja tunnisti *valon* sellaiseksi sen kulkunopeuden perusteella.

joka häviää äärettömyyteen $r \to \infty$, kun taas geodeettisesti järkevä esitys olisi

$$V = \frac{GM_\oplus}{r} - \frac{GM_\oplus}{R},$$

jossa $R = \|\mathbf{R}\|$ on maapallon säde. Jälkimmäinen potentiaali on nolla, siinä missä $r = R$, pallon muotoisen Maan pinnalla eli "merenpinnalla". Limiitissä $r \to \infty$ potentiaalin arvo on $-GM_\oplus/R$ eikä nolla.

1.10 Yksinkertainen massatiheyskerros

Jos kappaleen pintaan S levitetään massan "pinnoite" massatiheydellä

$$\kappa = \frac{dm}{dS},$$

saadaan potentiaaliksi integraaliyhtälö, joka on muuten samannäköinen kuin yhtälö 1.8, mutta *pintaintegraali*:

$$V = G \iint_{\text{pinta}} \frac{dm}{\ell} = G \iint_{\text{pinta}} \frac{\kappa}{\ell}\, dS. \tag{1.15}$$

Tässä taas ℓ on etäisyys potentiaalin laskentapisteen ja integroinnissa liikkuvan massa-alkion dm — tai pinta-alkion dS — välillä. Massa-pintatiheyden κ dimensio on $^{kg}/_{m^2}$, siis erilainen kuin tavallisen eli tilavuuden massatiheyden dimensio, joka on $^{kg}/_{m^3}$.

Tämä tapaus on teoreettisesti mielenkiintoinen, vaikkakin fysikaalisesti epärealistinen. Funktio V on näet kaikkialla jatkuva, myös pinnan S kohdalla. Kuitenkin jo sen ensimmäiset derivaatat paikan suhteen ovat epäjatkuvia. Tämä epäjatkuvuus ilmenee pinnan suhteen kohtisuorassa olevassa suunnassa, *normaaliderivaatassa*.

Tutkitaan yksinkertaista tapausta, jossa pallo, säde R, on pinnoitettu kerroksella, jonka pintatiheys on vakio κ. Laskemalla yllä oleva integraali 1.15 voidaan todistaa — monimutkaisesti, katso osio 1.4 — että ulkoinen potentiaali on sama, kuin jos pinnoitteen koko massa olisi pallon keskipisteessä. Myös osiossa 1.4 tuli todistetuksi, että pallon sisäinen potentiaali on vakio.

Siten ulkoinen vetovoima $(r > R)$, jossa r on laskentapisteen etäisyys pallon keskipisteestä, on

$$a_{ulk}(r) = G\frac{M}{r^2} = G\frac{\kappa \cdot 4\pi R^2}{r^2} = 4\pi G\kappa \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Sisäinen vetovoima $(r < R)$ on

$$a_{sis}(r) = 0.$$

Tämä merkitsee, että pallon pinnalla, $r = R$, vetovoima on *epäjatkuva*:

$$a_{ulk}(R) - a_{sis}(R) = 4\pi G\kappa.$$

Tässä symmetrisessä tapauksessa nähdään, että

$$a = \|\mathbf{a}\| = \frac{\partial V}{\partial n}, \tag{1.16}$$

jossa differentiointimuuttuja n edustaa normaalisuuntaa eli pintaan S nähden kohtisuorassa oleva suunta. Jos pinta S on potentiaalin V *tasapotentiaalipinta*, pätee yhtälö 1.16 yleisesti. Silloin vetovoimavektori — tarkemmin kiihtyvyysvektori — on kohtisuorassa pintaan S nähden ja sen suuruus on sama kuin potentiaalin normaaliderivaatta.

1.11 Kaksinkertainen massatiheyskerros

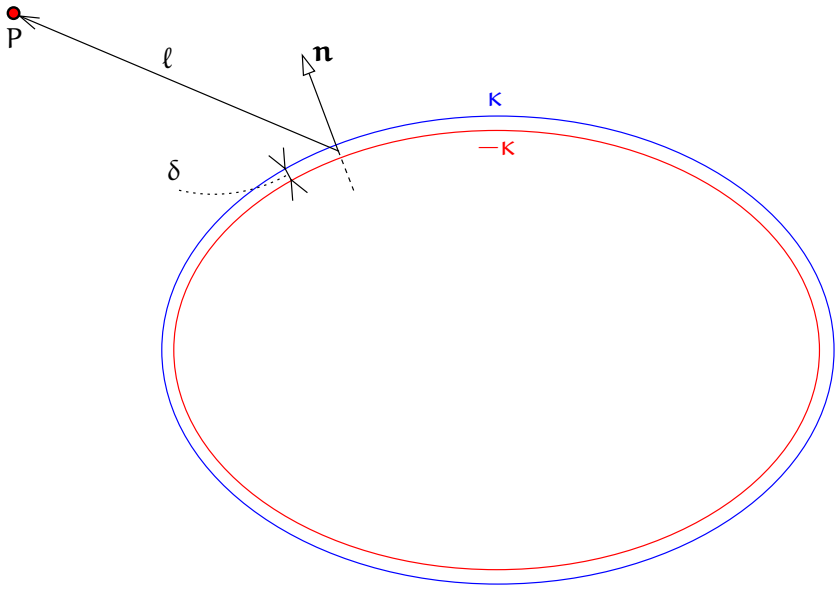
Kaksinkertainen massatiheyskerros voidaan tulkita *dipolitiheyskerroksek-si*. Kerroksen dipolit ovat orientoituneet pinnan normaalin suuntaan.

Jos dipoli koostuu kahdesta ”varauksesta” m ja $-m$ paikoilla $\mathbf{r}_1$ ja $\mathbf{r}_2$ siten, että niiden välinen sijaintierovektori on $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, on dipolin *momentti* $\mathbf{d} = m\,\Delta\mathbf{r}$, vektorisuure. Katso kuva 1.4.

Olkoon dipolikerroksen pintatiheys

$$\mu = \frac{d\mathcal{D}}{dS},$$

jossa $d\mathcal{D}$ on ”dipolikerrosalkio”. Tämä kerros voidaan katsoa kahden yksinkertaisen kerroksen yhdistelmäksi. Jos on positiivinen kerros



KUVA 1.4. Kaksinkertainen massatiheyskerros.

tiheydellä κ ja negatiivinen kerros tiheydellä $-\kappa$ ja niiden välinen etäisyys on δ, syntyy pienillä δ-arvoilla likimääräinen vastaavuus:

$$\mu \approx \kappa\delta. \tag{1.17}$$

Edellisen osion mukaan, yhtälö 1.15, kahden yksinkertaisen massatiheyskerroksen yhteenlaskettu potentiaali on

$$V = G \iint_{\text{pinta}} \kappa \left(\frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_2}\right) dS.$$

Suureiden ℓ_1, ℓ_2 ja δ välillä pätee seuraava yhteys (funktion $1/\ell$ Taylorin kehitelmä):

$$\frac{1}{\ell_1} = \frac{1}{\ell_2} + \delta \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) + \cdots,$$

jossa $\frac{\partial}{\partial n}$ on suureen derivaatta pinnan normaalisuuntaan.

Sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$V \approx G \iint_{\text{pinta}} \kappa\delta \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) dS = G \iint_{\text{pinta}} \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) dS. \tag{1.18}$$

Limiitissä, jossa δ on mielivaltaisen pieni ja κ vastaavasti suuri, tämä yhtälö, kuten yhtälö 1.17, pätee eksaktisti.

On helppo näyttää, että yllä oleva potentiaali ei ole jatkuva. Epäjatkuvuus tapahtuu pinnalla S. Tutkitaan taas yksinkertaisuuden vuoksi palloa, jonka säde on R ja jossa on kaksoiskerros vakiodipolitiheydellä μ.

Ulkoinen potentiaali ($r > R$, r etäisyys pallon keskipisteestä) on

$$V_{\text{ulk}} = G\mu \iint_{\text{pinta}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) dS = 0,$$

koska potentiaali on kahden samankeskisen ja samanmassaisen pallokuoren potentiaalien erotus.

Sisäinen potentiaali ($r < R$) on

$$V_{\text{sis}} = G\mu \iint_{\text{pinta}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) dS = G\mu \cdot 4\pi R^2 \left(-\frac{1}{R^2}\right) = -4\pi G\mu,$$

valitsemalla pintaintegraalin evaluointi- eli laskentapisteeksi pallon keskipiste ja käyttämällä aiemmin todettua seikkaa, että *yksinkertaisen* vakiotiheän massatiheyskerroksen peittämän pallon sisällä potentiaali on vakio.

Nyt limiitissä $r \to R$ tulos on erilainen ulkopuoliselle ja sisäpuoliselle potentiaalille. Ero on

$$V_{\text{ulk}}(R) - V_{\text{sis}}(R) = 4\pi G\mu.$$

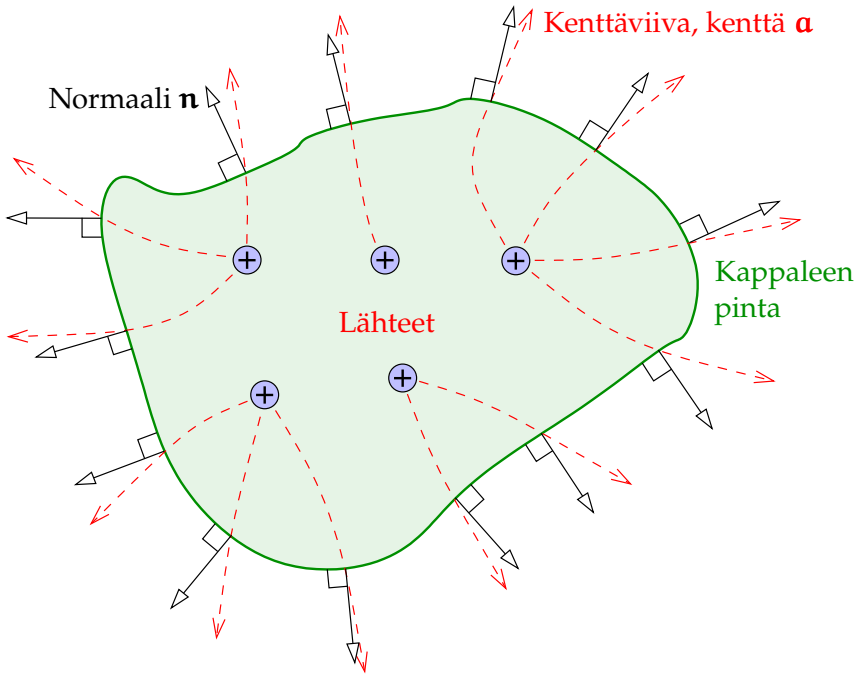
1.12 Gaussin divergenssilause

1.12.1 Esitys

Fysiikan kuuluisa Gaussin[15] divergenssilause on vektorimuodossa [15]

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\mathcal{V} = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle\, dS, \tag{1.19}$$

[15] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) oli saksalainen matemaatikko ja yleisnero. "*Princeps mathematicorum*".



KUVA 1.5. Gaussin divergenssilauseen graafinen selostus. *Kenttäviivan* käsite oli Michael Faraday'n oivallus. *Vuo* on skalaaritulo $\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle$.

jossa $\mathbf{n}$ on pinnan S ulkoinen normaali, nyt vektorina: vektorin pituus oletetaan $\|\mathbf{n}\| = 1$. $\partial\mathcal{V}$ on kappaleen $\mathcal{V}$ koko pinta.

Tämä lause pätee kaikille differentioitaville vektorikentille $\mathbf{a}$ ja kaikille "kunnollisille" kappaleille $\mathcal{V}$, joiden pinnalla $\partial\mathcal{V}$ on olemassa kaikkialla normaalisuunta $\mathbf{n}$. Toisin sanoen tämä ei ole gravitaation kiihtyvyysvektorin erikoisominaisuus, vaikka se pätee sillekin.

1.12.2 *Intuitiivisesti*

16 Huomautettakoon, että[16]

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \Delta V = -4\pi G\rho$$

[16] Olettaen, että vektorikentälle $\mathbf{a}$ potentiaali V on olemassa, katso osio A.4.

on *lähdefunktio*. Se edustaa, paljonko pinnan $\partial\mathcal{V}$ sisäpuolella olevassa osa-avaruudessa on gravitaatiokentän positiivisten ja negatiivisten ”lähteiden” ja ”nielujen” tiheyksiä (engl. *sources and sinks*).

Tilanne on analoginen nesteen virtauskuvion kanssa: positiiviset varaukset vastaavat pisteisiin, joista lisätään nestettä virtaukseen, negatiiviset varaukset[17] vastaavat ”nieluihin”, joiden kautta nestettä häviää. Vektori $\mathbf{a}$ on tässä vertauskuvassa virtauksen nopeusvektori, joka ”lähteiden” ja ”nielujen” puuttuessa täyttää ehdon $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$, mikä ilmaisee ainemäärän säilymisen ja kokoonpuristumattomuuden.

Toisaalta funktiota

$$\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle = \frac{\partial V}{\partial n}$$

kutsutaan usein vuofunktioksi (engl. *flux*), joka kertoo, paljonko kenttää ”vuotaa ulos” nestevirtauksen tavoin pinnan $\partial\mathcal{V}$ sisäiseltä avaruuden osalta.

Gaussin divergenssilause toteaa, että molemmat määrät ovat yhtä suuret: se on tavallaan *kirjanpitolause*, joka vaatii, että kaiken, mikä tuotetaan pinnan sisällä, $\operatorname{div}\mathbf{a}$, on tultava myös ulos pinnan kautta, $\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle$.

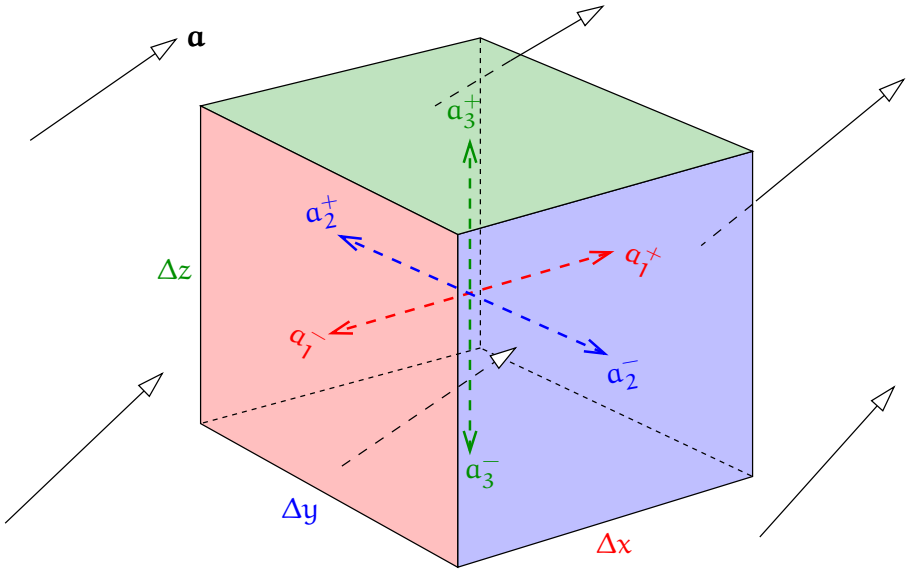
Kuvassa 1.5 on graafisesti selostettu, että ”lähteiden” summan kappaleen sisäisen avaruusosan yli, $\sum(+++\cdots)$, on oltava yhtä suuri kuin ”vuon” summa $\sum(\uparrow\uparrow\uparrow\cdots)$ koko sisäistä avaruusosaa rajoittavan reunapinnan yli.

1.12.3 *Gaussin divergenssilauseen potentiaaliversio*

Kirjoitetaan Gaussin divergenssilause hieman eri tavalla käyttämällä potentiaalia V gravitaatiovektorin sijasta:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta V \, d\mathcal{V} = \iint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\partial V}{\partial n} \, dS, \tag{1.20}$$

[17] Mutta gravitaation ”varaukset” eli massat ovat aina positiivisia.



KUVA 1.6. Pieni suorakulmainen laatikko.

jossa on tehty yllä annetut sijoitukset. Tässäkin näkyy kappaleen $\mathcal{V}$ pintaa tarkoittava kirjoitustapa $\partial\mathcal{V}$. Esitystavat 1.20 ja 1.19 yhdistävät yhtälöt 1.12 ja 1.9 potentiaalin V ja gravitaatiovektorin $\mathbf{a}$ välillä.

1.12.4 *Esimerkki 1: pieni laatikko*

Tutkitaan pientä suorakulmaista laatikkoa, jonka sivut ovat Δx, Δy ja Δz. Laatikko on niin pieni, että kenttä $\mathbf{a}(x, y, z)$ on sen sisällä lähes lineaarinen paikan funktio. Kirjoitetaan vektori $\mathbf{a}$ komponentteihin:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Nyt tilavuusintegraali

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\mathcal{V} \approx \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\right) \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \qquad (1.21)$$

kun taas pintaintegraali

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle\, dS \approx$$
$$\approx (a_1^+ - a_1^-)\, \Delta y\, \Delta z + (a_2^+ - a_2^-)\, \Delta x\, \Delta z + (a_3^+ - a_3^-)\, \Delta x\, \Delta y.$$

Tässä a_1^+ on komponentin a_1 arvo toisella tahkolla x-suunnassa ja a_1^- sen arvo toisella tahkolla ja niin edelleen. Esimerkiksi a_3^+ on komponentin a_3 arvo laatikon ylä- ja a_3^- alatahkossa. Laatikolla on tiettävästi kuusi tahkoa, tahko jokaisen kolmen koordinaattisuunnan "ylä- ja alavirrassa".

Silloin

$$a_1^+ - a_1^- \approx \frac{\partial a_1}{\partial x}\Delta x, \quad a_2^+ - a_2^- \approx \frac{\partial a_2}{\partial y}\Delta y, \quad a_3^+ - a_3^- \approx \frac{\partial a_3}{\partial z}\Delta z,$$

ja sijoittamalla nähdään, että

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V}\langle \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\rangle \,\mathrm{d}S &\approx \\ &\approx \frac{\partial a_1}{\partial x}\Delta x\cdot\Delta y\,\Delta z + \frac{\partial a_2}{\partial y}\Delta y\cdot\Delta x\,\Delta z + \frac{\partial a_3}{\partial z}\Delta z\cdot\Delta x\,\Delta y = \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,\end{aligned}$$

sama lauseke kuin 1.21. Tässä yksinkertaisessa tapauksessa Gaussin divergenssilause siis pätee.

Ilmeisimmin yhtälö pätee myös, jos näistä "Lego™-palikoista" rakennettaisiin suurempi kappale, koska eri palikoiden toisiinsa koskevat vastaavat pinnat ovat vastakkaisesti orientoituneet ja kumoavat toisiaan koko kappaleen pintaintegraalissa. Hieman vaikeampi on todistaa, että yhtälö pätee myös kappaleille, joilla on vinopintoja.

1.12.5 Esimerkki 2: Poissonin yhtälö pallolle

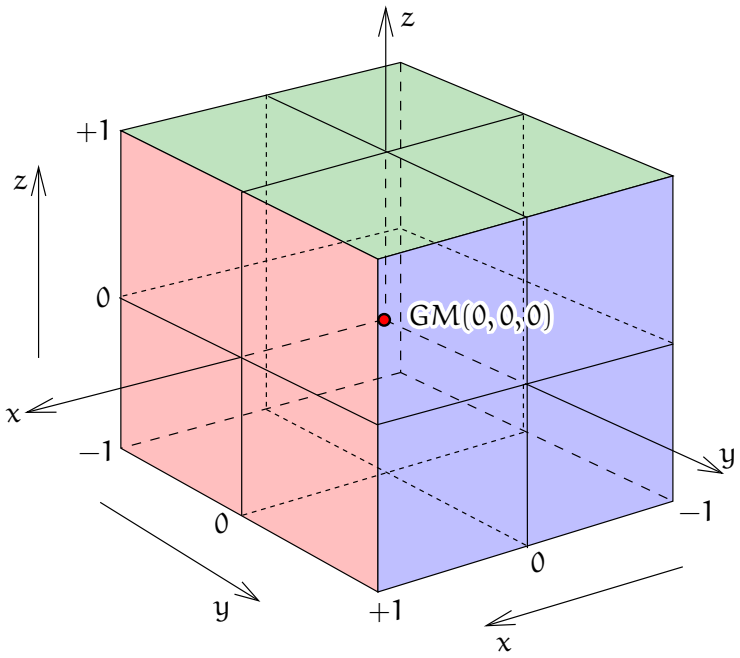
Poissonin yhtälön 1.14 mukaan

$$\Delta V = -4\pi G\rho. \tag{1.14}$$

Oletetaan pallo, säde R, jonka sisällä massitiheys ρ on vakio. Tilavuusintegraali pallon yli antaa

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta V \,\mathrm{d}\mathcal{V} = -4\pi G\rho \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V} = -4\pi G\rho\mathcal{V} = -4\pi GM, \tag{1.22}$$

jossa $M = \rho\mathcal{V}$ on pallon kokonaismassa.



KUVA 1.7. Kahdeksan yksikön kuutio.

Pallon pinnalla normaaliderivaatta on

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{GM}{r}\Big|_{r=R} = -\frac{GM}{R^2},$$

vakio, ja sen integraali pallon pinnan yli on

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\partial V}{\partial n}\, dS = -\frac{GM}{R^2}\cdot S = -\frac{GM}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = -4\pi GM. \tag{1.23}$$

Tulokset 1.23 ja 1.22 ovat identtisiä, kuten Gaussin divergenssilause 1.20 edellyttää.

1.12.6 Esimerkki 3: pistemassa kahdeksan yksikön kokoisessa kuutiossa

Katso kuva 1.7. Oletetaan, että on pistemassa kuution keskipisteessä, jonka suuruus on GM. Kuution sivutasot ovat koordinaattitasot $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ ja $z = \pm 1$. Silloin tilavuusintegraali on

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta V\, d\mathcal{V} = -4\pi GM \iiint_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{r})\, d\mathcal{V} = -4\pi GM,$$

jossa $\delta(\mathbf{r})$ on Diracin[18] deltafunktio avaruudessa, jolla on ääretön piikki origossa, jonka arvo on nolla muualla ja joka tuottaa arvoa 1 tilavuusintegraaleissa. [18]

Pintaintegraali on kuusi kertaa kuution yläpinnan integraali

$$\iint_{\text{yläpinta}} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle \, dS = -GM \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} dx \right) dy.$$

Integrointi koordinaatin x suhteen (suurissa suluissa oleva lauseke) antaa

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} dx = \left[\frac{x}{(y^2+1)\sqrt{x^2+y^2+1}} \right]_{-1}^{+1} = \\ = \frac{2}{(y^2+1)\sqrt{y^2+2}}.$$

Integrointi koordinaatin y suhteen antaa

$$\int_{-1}^{+1} \frac{2}{(y^2+1)\sqrt{y^2+2}} dy = \left[2 \arctan \frac{y}{\sqrt{y^2+2}} \right]_{-1}^{+1} = \\ = 4 \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = 4 \cdot \frac{\pi}{6} = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Summaamalla kaikki kuusi tahkoa yhteen saadaan

$$-6 \cdot GM \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} dx \right) dy = -6 \cdot GM \cdot \tfrac{2}{3}\pi = \\ = -4\pi GM,$$

sama tulos kuin yllä oleva tilavuusintegraali.

---

[18] Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) oli englantilainen kvanttifyysikko, elektronin relativistisen aaltoyhtälön löytäjä ja antiaineen teoreettinen keksijä. Hän oli fysiikan nobelisti 1933 yhdessä Erwin Schrödingerin kanssa. Hänen uskotaan myös olleen autismin kirjolla (Farmelo, 2011).

1.13 Greenin lauseet

Käytä Gaussin divergenssilausetta vektorikenttään

$$\mathbf{F} = U\,\nabla V.$$

Tässä U ja V ovat kaksi eri skalaarikenttää. Saadaan

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\mathbf{F}\,d\mathcal{V} &= \iiint_{\mathcal{V}} \langle \nabla\cdot(U\,\nabla V)\rangle\,d\mathcal{V} = \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} U\,\langle\nabla\cdot\nabla\rangle\,V\,d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}}\langle\nabla U\cdot\nabla V\rangle\,d\mathcal{V} = \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} U\,\Delta V\,d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\mathcal{V}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\mathcal{V}}\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\rangle\,dS = \iint_{\partial\mathcal{V}}\langle U\,\nabla V\cdot\mathbf{n}\rangle\,dS = \iint_{\partial\mathcal{V}} U\,\langle\nabla V\cdot\mathbf{n}\rangle\,dS = \\ = \iint_{\partial\mathcal{V}} U\frac{\partial V}{\partial n}dS.\end{aligned}$$

[19] Tulos on *Greenin*[19] *ensimmäinen lause*:

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} U\,\Delta V\,d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\mathcal{V} = \\ = \iint_{\partial\mathcal{V}} U\frac{\partial V}{\partial n}dS.\end{aligned}$$

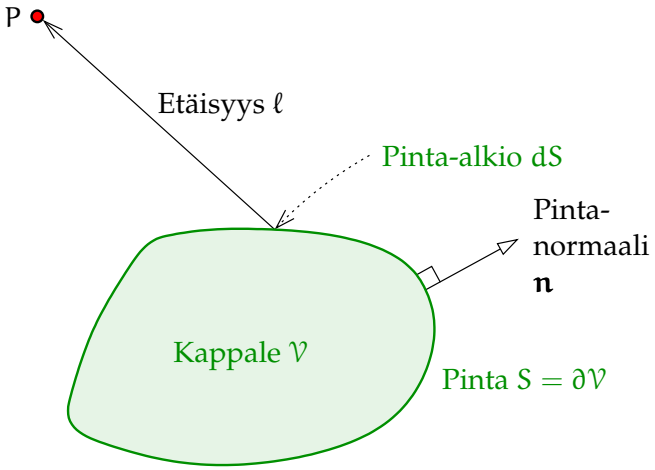
Yhtälö voidaan siivota, koska vasemman puolen toinen termi on *symmetrinen* skalaarikenttien U ja V keskinäisen vaihdon suhteen. Vaihdetaan siis U ja V keskenään ja vähennetään saadut yhtälöt toisistaan. Tulos on *Greenin toinen lause*:

$$\iiint_{\mathcal{V}}(U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,d\mathcal{V} = \iint_{\partial\mathcal{V}}\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS.$$

Oletamme kaikissa toimituksissa, että funktiot U ja V ovat ”hyvin käyttäytyviä”: esimerkiksi kaikki tarvittavat derivaatat ovat kaikkialla kappaleessa $\mathcal{V}$ olemassa.

---

[19] George Green (1793–1841) oli itseoppinut Nottinghamin lähellä myllärinä leipänsä ansainnut brittiläinen matemaattinen fyysikko. Hän keksi myös sanan ”potentiaali”. Green (1828); O'Connor ja Robertson (1998); Green's Windmill.



KUVA 1.8. Geometria Greenin kolmannen lauseen johtamiseksi, jos piste P on pinnan $\partial\mathcal{V}$ ulkopuolella.

Hyödyllinen erikoistapaus on se, jossa funktioksi U valitaan

$$U = \frac{1}{\ell},$$

jossa ℓ on etäisyys annetusta laskentapisteestä P. Tämä funktio U on hyväkäytöksinen kaikkialla *paitsi* pisteessä P, jossa sitä ei ole määritelty.

Siinä tapauksessa, että piste P on pinnan $\partial\mathcal{V}$ ulkopuolella, tulos, *Greenin kolmas lause*, saadaan nyt sijoittamalla (muista, että pinnan $\partial\mathcal{V}$ sisällä pätee $\Delta U = 0$):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{\ell}\Delta V \, d\mathcal{V} = \iint_{\partial\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\ell}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right)\right) dS.$$

Tämä tapaus on piirretty kuvassa 1.8.

Siinä tapauksessa, että piste P on pinnan $\partial\mathcal{V}$ sisäpuolella, laskenta mutkistuu jonkin verran. Tutustutaan siihen ovelaan tekniikkaan, joka tässä tapauksessa — kuten muissakin — auttaa.

Muodostetaan pieni ϵ-säteinen pallero $\mathcal{V}_2$ pisteen P ympäri; nyt voimme määrittää muodollisesti kappaleeksi $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$, ”reikäjuusto”, ja samalla sen pinnasta $\partial\mathcal{V}$ tulee kaksiosainen pinta, $\partial\mathcal{V} = \partial\mathcal{V}_1 + \partial\mathcal{V}_2$.

Nyt tilavuusintegraali voidaan kirjoittaa kahteen osaan:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{\ell}\Delta V \, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}_1} \frac{1}{\ell}\Delta V \, d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}_2} \frac{1}{\ell}\Delta V \, d\mathcal{V},$$

jossa toinen termi voidaan integroida pallokoordinaateissa:

$$\iiint_{\mathcal{V}_2} \frac{1}{\ell}\Delta V \, d\mathcal{V} \approx \Delta V_P \int_0^{\epsilon} 4\pi\ell^2 \frac{1}{\ell} d\ell = 2\pi\Delta V_P \epsilon^2,$$

mikä menee nollaan limiitissä $\epsilon \to 0$.

Ensimmäiseksi pintaintegraaliksi saamme Gaussin divergenssilauseen 1.20 avulla:

$$\iint_{\partial\mathcal{V}_2} \frac{1}{\ell}\frac{\partial V}{\partial n} dS = \frac{1}{\epsilon}\iint_{\partial\mathcal{V}_2} \frac{\partial V}{\partial n} dS = \frac{1}{\epsilon}\iiint_{\mathcal{V}_2} \Delta V \, d\mathcal{V} \approx \frac{1}{\epsilon}\Delta V_P \cdot \tfrac{4}{3}\pi\epsilon^3,$$

mikä myös menee nollaan kun $\epsilon \to 0$.

Toinen pintaintegraali (huomaa, että $\partial\mathcal{V}_2$:n normaali osoittaa sisäänpäin P:hen):

$$\iint_{\partial\mathcal{V}_2} V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) dS = \iint_{\partial\mathcal{V}_2} V \cdot -\left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right) dS \approx 4\pi\epsilon^2 \cdot \frac{1}{\epsilon^2}V_P = 4\pi V_P.$$

Yhdistämällä kaikki tulokset oikeilla etumerkeillään saadaan tapauksessa, jossa P on pinnan $\partial\mathcal{V}_1 \sim \partial\mathcal{V}$ sisäpuolella:

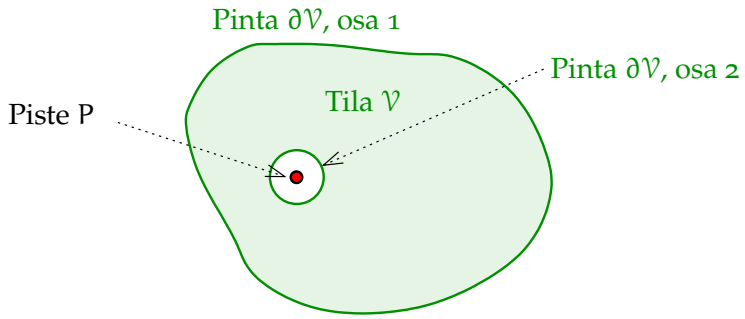
$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{\ell}\Delta V \, d\mathcal{V} = -4\pi V_P + \iint_{\partial\mathcal{V}}\left(\frac{1}{\ell}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right)\right) dS. \qquad (1.24)$$

Tämän jälkeen lienee intuitiivisesti selvää, ja siksi esitämme ilman todistusta, että

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{\ell}\Delta V \, d\mathcal{V} = -2\pi V_P + \iint_{\partial\mathcal{V}}\left(\frac{1}{\ell}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right)\right) dS$$

jos piste P on juuri kappaleen $\mathcal{V}$ reunapinnalla $\partial\mathcal{V}$. Tämä kuitenkin edellyttää normaaliderivaatan, ja erityisesti *normaalisuunnan*, olemassaoloa pisteessä P!

Geodesiassa on tyypillinen tilanne, että kappale $\mathcal{V}$, jonka tilavuuden yli halutaan laskea tilavuusintegraali, on *koko maapallon ulkopuolinen*



KUVA 1.9. Geometria Greenin kolmannen lauseen johtamiseksi, jos piste P on pinnan $\partial\mathcal{V}$ sisäpuolella.

avaruuden osa. Tässä tapauksessa on kätevästi $\Delta V = 0$ ja koko yllä esiintyvä tilavuusintegraali häviää.

Tulos 1.24 voidaan yleistää tähän tapaukseen, jossa $\mathcal{V}$ on koko avaruus pinnan $\partial\mathcal{V}$ ulkopuolella. Tämä yleistys tehdään valitsemalla pinnaksi $\partial\mathcal{V}$ kolmiosainen pinta $\partial\mathcal{V} = \partial\mathcal{V}_1 + \partial\mathcal{V}_2 + \partial\mathcal{V}_3$, jossa $\partial\mathcal{V}_3$ on suurisäteinen pallo sekä aineellisen kappaleen että pisteen P ympäri. Sen säteen annetaan jälkeenpäin *kasvaa* limiitissä *äärettömyyteen*, jolloin voidaan näyttää, että molemmat integraalit pinnan $\partial\mathcal{V}_3$ yli häviävät.

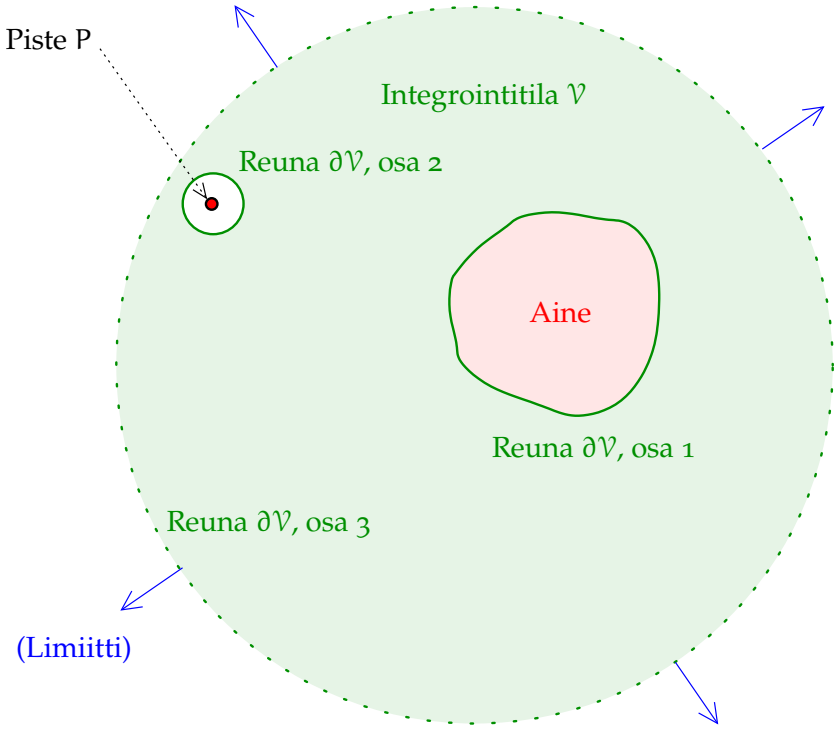
Lopputulos on — kun n on maanpinnan ulkoinen normaali:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{\ell}\Delta V \, d\mathcal{V} = -4\pi V_P - \iint_{\partial\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\ell}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right)\right) dS, \qquad (1.25)$$

Koska tässä limiitissä, jossa $\mathcal{V}$ on maapallon koko ulkopuolinen tyhjä avaruus, jossa $\Delta V = 0$, vasemmanpuoleinen tilavuusintegraali häviää ja voidaan ilmaista pisteen P potentiaaliarvo V_P kätevästi kaksitermisenä pintaintegraalina pinnan $\partial\mathcal{V}$ yli.

1.14 Chaslesin lause

Tutkitaan yllä kuvattua tapausta, jossa ”kappale” on pinnan $\partial\mathcal{V}$ ulkopuolinen avaruuden osa — käytännössä siis maapallon ulkopuolinen avaruus.



KUVA 1.10. Greenin kolmas lause kappaleen ulkoavaruudelle.

Yllä johdetusta Greenin lauseesta 1.25 voidaan johtaa *harmoniselle* funktiolle V (toisin sanoen $\Delta V = 0$) ulkoavaruudessa:

$$V_P = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\mathcal{V}} \frac{1}{\ell}\frac{\partial}{\partial n}V\,dS + \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\mathcal{V}} V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right)dS. \tag{1.26}$$

Tulkinta Mielivaltaisen pinnan ulkopuolinen, harmoninen potentiaali voidaan esittää pinnassa sijaitsevien, yksinkertaisen ja kaksinkertaisen massatiheyskerroksen summana.

Selostus Yksinkertaisen massakerroksen pintatiheys saadaan yhtälön 1.15 avulla,

$$\kappa = -\frac{1}{4\pi G}\frac{\partial}{\partial n}V, \tag{1.27}$$

ja kaksinkertaisen massakerroksen pintatiheys yhtälön 1.18 avulla,

$$\mu = \frac{V}{4\pi G}.$$

Jos ne sijoitetaan yhtälöön 1.26, saadaan

$$V_P = G \iint_{\partial\mathcal{V}} \left(\frac{\kappa}{\ell} + \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) \right) dS.$$

Siinä tapauksessa, että pinta $\partial\mathcal{V}$ on potentiaalin V tasapotentiaalipinta, siis $V = V_0$, seuraa, että yksinkertainen massatiheyskerros riittää, koska silloin

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) dS = V_0 \iint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) dS = 0.$$

Oikeanpuoleinen integraali häviää Gaussin divergenssilauseen perusteella. Syy tähän on, että funktio $1/\ell$, jossa ℓ on etäisyys pisteestä P, on *harmoninen* maapallon sisällä. Maapallon pinta on $\partial\mathcal{V}$.

Tämä on Chaslesin[20] lause eli myös Greenin vastaavan kerroksen lause (engl. *equivalent-layer theorem*). [20]

Lausetta käytetään hyväksi Molodenskin[21] teoriassa. Myös Maan painovoimakentän esittäminen maanalaisen massapistekerroksen avulla, esimerkiksi Vermeer (1984), voitaisiin perustella tämän lauseen avulla. [21]

Tapaus, jossa $\partial\mathcal{V}$ on tasapotentiaalipinta, toteutuu, jos kappale on nestemäinen ja hakeutuu itsestään tasapotentiaalipinnan muotoiseksi. Maaplaneettamme tapauksessa tämä pätee merenpinnalle. Myös sähköstaattisessa teoriassa johtimessa, jonka sisällä elektronit liikkuvat vapaasti, johtimen fyysinen pinta on tasapotentiaalipinta. Johtimen sähkövaraukset ovat aina sen ulkopinnalla[22]. [22]

Yhtälö 1.26, sijoituksella 1.27, yksinkertaistuu silloin seuraavaksi:

$$V_P = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\mathcal{V}} \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial n} V \, dS = G \iint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\kappa}{\ell} \, dS. \tag{1.28}$$

---

[20] Michel Chasles (1793–1880) oli ranskalainen matemaatikko ja geometrikko, yksi 72:sta joiden nimet kaiverrettiin Eiffel-torniin, Eiffel Tower, 72 names.

[21] Mihail Sergejevitš Molodenski (1909–1991) oli maineikas venäläinen fysikaalinen geodeetti.

[22] Sähköstaattisen potentiaalin on oltava myös johtimen sisällä vakio. Yksikin ylimääräinen elektroni kappaleen sisällä tekisi sen mahdottomaksi.

Yhtälö kertoo jo, että koko maapallon ulkopuolinen potentiaali voidaan laskea, jos vain Maan pinnalla — jonka muoto on oltava tiedossa arvon $1/\ell$ laskemista varten — on annettuna potentiaalin normaali- eli pystysuuntainen gradientti $\frac{\partial}{\partial n}V$. Tämä gradientti on gravitaation kiihtyvyys, suure, joka saadaan gravimetrisista havainnoista. Koko gravimetrinen geopotentiaalin määritys ("geoidimääritys") G. G. Stokesista lähtien perustuu tähän ajatukseen.

1.15 Reuna-arvotehtävät

Reuna-arvotehtävä (engl. *boundary-value problem*, BVP) on laskea potentiaali V annetun reunapinnan ulko- tai sisäpuolisessa avaruuden osassa reunapinnalla, esimerkiksi Maan pinnalla, annetuista potentiaaliin V liittyvistä arvoista. Yksinkertaisin reuna-arvotehtävä on *Dirichletin*[23] *tehtävä*: reunapinnalla on annettuna potentiaaliarvo V. Monimutkaisemmat reuna-arvotehtävät lähtevät potentiaalin *lineaarisista funktionaaleista*: reunalla on annettuna joku lineaarinen lauseke potentiaalissa V, esimerkiksi derivaatta tai derivaattojen lineaariyhdistelmä, yleisesti

$$L\{V\},$$

jossa $L\{\cdot\}$ on lineaarinen funktionaali, katso osio 10.2.

Dirichletin reuna-arvotehtävä *geodesiassa käytetyssä muodossa* on määrittää potentiaalikenttä V, jos sen arvot on annettu suljetulla pinnalla S ja V on *harmoninen* ($\Delta V = 0$) pinnan S ulkopuolella. Avaruuden tyhjiössä potentiaali on aina harmoninen, kuten todettiin jo aiemmin: massapisteen m_P potentiaali $V = Gm_P/\ell$ on harmoninen funktio kaikkialla paitsi itse pisteessä P — ja laaja kappale koostuu limiitissä monesta pistemassasta tai massa-alkiosta.

Yleisessä tapauksessa tämä on teoreettisesti haastava ongelma. Ratkaisun olemassaolo ja yksiselitteisyys on pystytty todistamaan hyvin

[23] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) oli saksalainen matemaatikko, joka tunnetaan myös lukuteoreetikkona.

yleisesti, katso Heiskanen ja Moritz (1967) sivu 18.

Pinnalla S annetuista potentiaalifunktion V arvoista voidaan siis laskea harmoninen funktio $V(x, y, z)$ koko avaruudessa pinnan ulkopuolella. Reuna-arvotehtävä on tehokas ja myös fysikaalisessa geodesiassa hyväksytty yleismenetelmä. On kuitenkin syytä huomauttaa, ettei pinnalla annetuista potentiaaliarvoista voida yksiselitteisesti ratkaista maapallon sisäistä massajakaumaa, joka tämän potentiaalin tuottaa.

Tämä on ilmeistä jo siinä yksinkertaisessa tapauksessa, jossa potentiaalin arvo on vakio pallon pinnalla. Jos lisäksi on annettu, että massajakauma on pallosymmetrinen, on tiheysprofiili säteen mukaan edelleen kokonaan auki. Kaikki massa voi olla pallon keskipisteessä keskitettynä tai ohuena kuorena juuri pallon pinnan alla tai jossain näiden äärivaihtoehtojen välissä. Ilman lisäinformaatiota, esimerkiksi seismisestä tutkimuksesta tai geofysikaalisista tiheysmalleista, emme voi ratkaista asiaa.

Myös yllä mainittu Chaslesin lause, yhtälö 1.26, ja sen erikoistapaus, yhtälö 1.28, ovat esimerkkejä tästä: lause kertoo, miten ulkopuolista potentiaalia voidaan kuvata kappaleen pinnalla olevan massajakauman tuottamana, vaikka *tiedämme*, että kentän lähde on koko kappaleen lävitse ulottuva massajakauma!

Tämä on perustavaa laatua oleva rajoitus kaikille menetelmille, jotka yrittävät saada tietoa Maan sisäisestä tilanteesta ainoastaan Maan pinnalla tai sen ulkopuolella tehdyistä *gravimetrisista* mittauksista.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Millä laitteella määritettiin vakio G? Miksi on vaikeaa saada tarkkaa arvoa tähän vakioon?
2) Miksi kaikki kappaleet putoavat massasta riippumatta samalla kiihtyvyydellä, vaikka raskaampi kappale tuntee vahvempaa gravitaation vetovoimaa?

3) Mikä on konservatiivinen voimakenttä?
   (a) Voimakenttä, jonka voima voidaan kirjoittaa yksiselitteisesti potentiaalin gradienttina.
   (b) Voimakenttä, jossa kappale, joka kulkee suljettua reittiä pitkin, ei voita eikä menetä energiaa.
   (c) Vetovoimakenttä, josta mikään kappale ei pääse pakoon.
   (d) Voimakenttä, jonka roottori häviää kaikkialla.
4) Homogeenisen, pallon muotoisen pikkuplaneetan pinnalla vapaan putoamisen kiihtyvyys on $1\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}^2}$. Mikä on vapaan putoamisen kiihtyvyys toisen pikkuplaneetan pinnalla, jos planeetta on muuten samanlainen, mutta sillä on kaksinkertainen läpimitta?
   (a) $0{,}25\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}^2}$
   (b) $1\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}^2}$
   (c) $2\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}^2}$
   (d) $4\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}^2}$
5) Mikä on harmoninen potentiaali?
6) Minkä *kertaluvun* differentiaaliyhtälö on Laplacen yhtälö?
7) Onko lineaarinen potentiaali, $V(x, y, z) = a + bx + cy + dz$ (a, b, c, d vakioita), harmoninen?
8) Jos edellisen kysymyksen potentiaali on gravitaatiopotentiaali, laske sen kiihtyvyysvektori.
9) Millä edellytyksellä on mahdollista esittää kappaleen ulkoista gravitaatiokenttää kappaleen pinnalla olevan yksinkertaisen massatiheyskerroksen tuottamana?
10) Dipolipintatiheys μ mainitaan osiossa 1.11. Mikä on suureen SI-yksikkö?

Harjoitus 1–1: Maan ydin

1) Johda yhtälö, joka antaa vetovoiman kiihtyvyyden g tiheydeltään homogeenisen pallon pinnalla. Annettuna on tiheys ρ ja säde R_{ydin}.
2) Maan rauta-nikkeliytimen keskitiheys on $11\,{}^{g}/_{cm^3}$ ja säde 3500 km. Laske ytimen pinnalla vallitseva vetovoiman kiihtyvyys g_{ydin}.
3) Mikä on vetovoima g ytimen keskipisteessä? Mitä yleistä voit sanoa geopotentiaalista tässä pisteessä? *Älä yritä laskea*!
4) Johda säteittäisen gravitaatiogradientin $\frac{\partial}{\partial r} g$ yhtälö tiheydeltään homogeenisen pallon pinnalla, jonka tiheys on ρ.

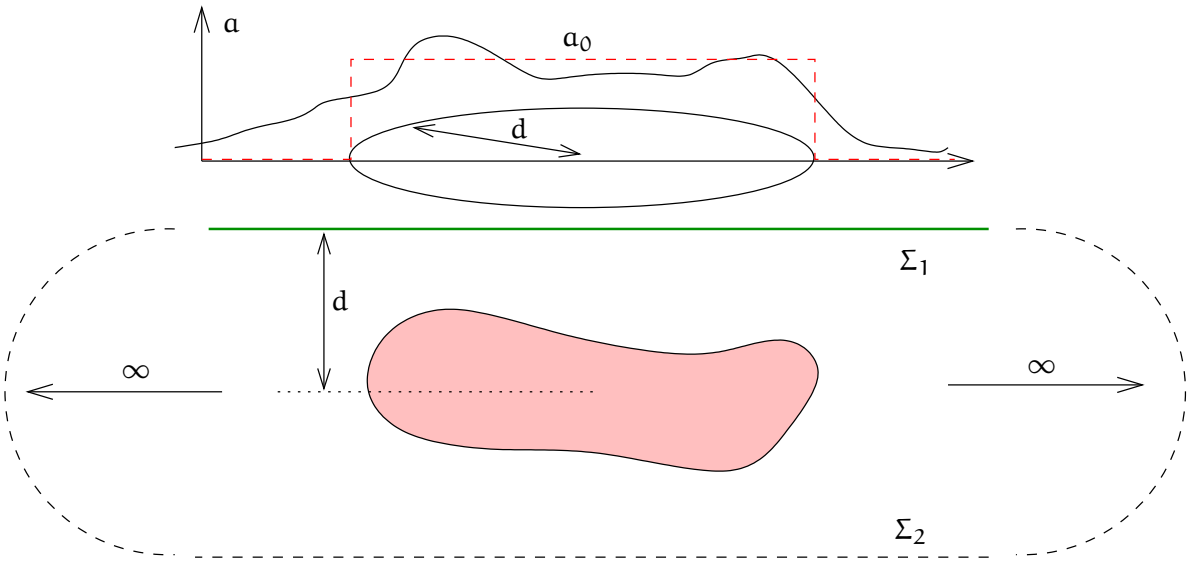
Harjoitus 1–2: Ilmakehä

1) Ilmakehän keskipaine on 1013,25 hPa (paineen yksikkö pascalin määritys on $\text{Pa} = {}^{N}/_{m^2}$). Maan pinnalla painovoima on $9{,}81\,{}^{m}/_{s^2}$. Laske ilmakehän keskimääräinen pintatiheys ohuena kerroksena κ yksiköissä ${}^{kg}/_{m^2}$.
2) Laske ilmakehän kokonaismassa käyttäen pallokuori-approksimaatiota. Voit ottaa sen säteeksi 6371 km.
3) Laske ilmakehästä lähtevä vetovoima ilmakehän ulkopuolella, sekä kiihtyvyysarvona että koko Maan painovoiman osamääränä.
4) Mikä on ilmakehästä lähtevä vetovoima ilmakehän sisällä?

Harjoitus 1–3: Gaussin divergenssilause

Maan alla on rautamalmin esiintymä, kuva 1.11. Esiintymä aiheuttaa maanpinnalla vetovoimavaikutuksen, joka on piirretty α-käyränä. Käytämme litteän Maan approksimaatiota.

Todellisen vetovoiman käyrä *approksimoidaan* yksinkertaisella funktiolla



KUVA 1.11. Rautamalmikappale.

$$a = \begin{cases} a_0 & \text{jos } s \leqslant d \\ 0 & \text{jos } s > d \end{cases}$$

(punainen katkoviiva), jossa s on etäisyys maanpinnalla malmiesiintymän suoraan yläpuolella olevasta pisteestä. Siis alue, jossa $a \neq 0$ muodostaa d-säteisen *kiekon* maanpinnalla.

1) Käyttäen yllä olevaa vetovoiman a approksimaatiota, laske pintaintegraali
$$\iint_{\Sigma_1} a \, dS,$$
jossa Σ_1 on maanpinta, katso kuva 1.11.

2) Gaussin divergenssilauseen mukaan
$$\iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \rangle \, dS + \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \rangle \, dS = \iiint_{\text{tilavuus}} \Delta V \, d\mathcal{V} = \\ = \iiint_{\text{tilavuus}} (-4\pi G \rho_{\text{rauta}}) \, d\mathcal{V} = -4\pi G M_{\text{kappale}},$$
jossa $\Sigma_1 + \Sigma_2$ on kaksilehtinen suljettu pinta kappaleen ympäri. Lehdet kohtaavat äärettömyydessä. $\mathbf{a}_1$ ja $\mathbf{a}_2$ ovat vetovoiman

vektorit Maan pinnalla ja pinnalla Σ_2, ja $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ ovat pintojen ulkoisia normaaleja.

Olettaen, että

$$\iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \rangle \, dS = \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \rangle \, dS = -\iint_{\Sigma_1} a \, dS,$$

laske GM_{kappale}. Ole huolellinen etumerkkien kanssa!

3) Olettaen, että malmiesiintymä on pallo syvyydellä d, laske GM Newtonin vetovoimalain avulla arvosta a_0 suoraan esiintymän yläpuolella maanpinnalla.

4) Vertaa tuloksia 2 ja 3 ja tee johtopäätöksiä. Onko yllä annettu funktio a hyvä approksimaatio?

Laplacen yhtälö ja sen ratkaisuja

2

2.1 Laplacen yhtälön luonne

Maan gravitaatiokentän tutkimuksen keskeinen yhtälö on *Laplacen yhtälö*,

$$\Delta V = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = 0.$$

Symbolia Δ kutsutaan *Laplacen operaattoriksi*. Joskus käytetään vaihtoehtoista kirjoitustapaa ∇^2.

Tutkittaessa gravitaatiota kenttänä Laplacen yhtälö on luonnollisempi valinta kuin Newtonin lähestymistapa. Newtonin yhtälöä käytetään, jos massajakauma on tiedossa: yhtälö antaa suoraan massojen aiheuttaman gravitaatiovoiman.

Laplacen yhtälö sen sijaan on osittaisdifferentiaaliyhtälö. Sen ratkaiseminen antaa gravitaatiokentän *potentiaalin* $V(x, y, z)$ koko avaruudessa tai sen osassa. Tästä potentiaalista voidaan laskea kentän vaikutus avaruudessa liikkuvaan kappaleeseen, siinä paikassa missä kappale on. Tämä on kaksivaiheinen prosessi. Käsitteellisesti uutta on, että tyhjälle avaruudelle kiinnitetään tietty ominaisuus, *kenttä*. Enää ei puhuta kaukovaikutuksesta suoraan kahden kappaleen välillä.

Laplacen yhtälön ratkaiseminen voi olla yleisessä tapauksessa vaikeaa. Lähestymistapa on yleensä se, että valitaan joku koordinaatisto: suorakulmainen (kuten yllä), pallo- tai lieriökoordinaatisto, toroidaali-

set koordinaatit tai mikä vain sopii parhaiten ongelman geometriaan. Sen jälkeen *muunnetaan* Laplacen yhtälö näihin koordinaatteihin, etsitään tiettyä muotoa olevia erikoisratkaisuja, ja kootaan lopuksi yleinen — tai ei-niin-yleinen — ratkaisu näiden erikoisratkaisujen lineaariyhdistelmänä eli *sarjakehitelmänä*.

Onneksi lineaaristen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoria on hyvin kehittynyt. Vastaavanlaisia teoreettisia ongelmia löytyy sähkömagneettisen kentän eli Maxwellin teoriassa ja kvanttimekaniikassa (Schrödingerin[1] yhtälö), nesteen- ja lämmönkuljetuksesta puhumattakaan.

[1]

Tärkeä havainto on, että Laplacen yhtälö on *lineaarinen*. Tämä merkitsee, että jos annettuna on kaksi ratkaisua

$$\Delta V_1 = 0, \qquad \Delta V_2 = 0,$$

silloin myös niiden lineaariyhdistelmät

$$V = \alpha V_1 + \beta V_2, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ovat kelvollisia ratkaisuja: $\Delta V = 0$. Tämä lineaarisuuden ominaisuus mahdollistaa yleisten ratkaisujen etsimisen perusratkaisujen lineaariyhdistelminä tai sarjakehitelminä.

Erikoisuus, joka myös erottaa Laplacen yhtälön Newtonin yhtälöstä, on, että se on *paikallinen* yhtälö, joka luonnehtii potentiaalikentän käyttäytymistä yhden pisteen pienessä ympäristössä. Kuitenkin ratkaisua etsitään kokonaiselta alueelta. Tavallinen lähestymistapa ratkaisua etsittäessä on *reuna-arvotehtävä*. Tämä merkitsee, että kentän arvojen ("reuna-arvojen") on oltava annettuina vain kiinnostuksen kohteena olevan avaruuden osan reunalla.

---

[1] Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961) oli saksalainen fyysikko ja kvanttiteoreetikko sekä hänen nimeään kantavan aineaaltojen aaltoyhtälön keksijä: asia, josta hän sai fysiikan Nobel-palkinnon vuonna 1933 yhdessä Paul Diracin kanssa. Hän on myös hyvin tunnetun, ei-havaitun kissan keksijä: kissa, joka on kahden mahdollisen kvanttitilan, elävän ja kuolleen, superpositiotilassa.

Esimerkiksi kentän arvot ovat annettuina Maan pinnalla. Tästä lasketaan kentän arvot ulkoavaruudessa, jossa Laplacen yhtälö pätee — kentän käyttäytyminen Maan sisällä jää tarkastelun ulkopuolelle. Ulkoisen potentiaalin kannalta tarkkaa massajakaumaa Maan sisällä ei tarvitse tietää — eikä sitä myöskään saada selville vain Maan pinnalla ja sen ulkopuolella tehtyjä mittauksia käyttäen.

2.2 Laplacen yhtälö suorakulmaisissa koordinaateissa

On opettavaista kirjoittaa ja ratkaista Laplacen yhtälö suorakulmaisissa koordinaateissa. Tapaus on analoginen pallokoordinaattien tilanteen kanssa, mutta matematiikka on paljon yksinkertaisempaa.

Oletetaan, että maanpinta eli merenpinta on z-koordinaatin tasopinta $z = 0$. Kirjoita

$$\Delta V = \Delta\big(V(x,y,z)\big) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\big(X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)\big),$$

jossa *kokeiluratkaisu*

$$V(x,y,z) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z).$$

Toisin sanoen kirjoitetaan kokeilumielessä V kolmen tekijäfunktion tulona, jossa jokainen tekijäfunktio riippuu vain yhdestä koordinaatista. Kyseessä on siis ”muuttujien erottaminen”. Realistinen potentiaalifunktio V ei tietenkään yleensä ole tätä muotoa. Voimme kuitenkin toivoa, että se voitaisiin esittää tämän muotoisten termien lineaariyhdistelmänä Laplacen yhtälön lineaarisuuden ansiosta.

Suorittamalla kaikki osittaisderivoinnit saadaan

$$YZ\frac{\partial^2}{\partial x^2}X + XZ\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y + XY\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z = 0.$$

Jako lausekkeella XYZ antaa

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y) + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) = 0.$$

Koska tämän on oltava totta koko avaruudessa eli *kaikille* arvojen yhdistelmille x, y ja z, seuraa, että *jokaisen termin on oltava vakio*. Jos ensimmäiseksi ja toiseksi vakioksi otetaan $-\omega_x^2$ ja $-\omega_y^2$, seuraa kolmanneksi vakioksi $\omega_x^2 + \omega_y^2$. Kirjoittamalla määritelmä ja tulos auki sekä siirtämällä nimittäjä toiselle puolelle saadaan

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) = -\omega_x^2 X(x), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) = -\omega_y^2 Y(y),$$

(syy negatiivisen vakion valinnalle selviää pian), sekä

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = \left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right) Z(z).$$

Nyt ratkaisu löytyy helposti ainakin ensimmäiselle kahdelle yhtälölle:
2 nehän ovat *harmoniset värähtelijät*, ja niiden perusratkaisut[2] ovat

$$X(x) = \exp\left(\pm i\omega_x x\right), \quad Y(y) = \exp\left(\pm i\omega_y y\right).$$

Z-yhtälön ratkaisu puolestaan on eksponentiaalinen:

$$Z(z) = \exp\left(\pm z\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}\right).$$

Nyt voidaan muodostaa perusratkaisuja avaruudessa:

$$V_{\omega_x\omega_y}(x, y, z) = \exp\left(i\left(\pm\omega_x x \pm \omega_y y\right) \pm z\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}\right).$$

Yleinen ratkaisu saadaan summaamalla termit $V_{\omega_x\omega_y}$ eri arvoilla ω_x ja ω_y eri kertoimilla.

Emme voi valita arvoparia (ω_x, ω_y) täysin vapaasti. Mitkä arvot ovat sallittuja, riippuu annetuista *reunaehdoista*.

Oletetaan, että sekä x- että y-suunnassa maailman koko on L (”kenkä-
3 laatikkomaailma[3]”). Yksinkertaistetaan asiaa hieman olettamalla, että

[2] Vaihtoehtoiset perusratkaisut ovat $X(x) = \sin\omega_x x$, $X(x) = \cos\omega_x x$ jne. Ne ovat samanarvoisia esitettyjen kanssa, koska $\exp(i\omega_x x) = \cos\omega_x x + i\sin\omega_x x$ ja $\exp(-i\omega_x x) = \cos\omega_x x - i\sin\omega_x x$.

kenkälaatikkomaailmamme reunapinnoilla ovat voimassa *reunaehdot*

$$V(0,y,z) = V(L,y,z) = V(x,0,z) = V(x,L,z) = 0.$$

Silloin seuraa, että ainoat parit (ω_x, ω_y), jotka antavat laatikkoon sopivan ratkaisun, ovat

$$\omega_x = \frac{\pi j}{L}, \quad \omega_y = \frac{\pi k}{L}, \qquad j,k \in \mathbb{Z},$$

ja ainoat sopivat funktiot ovat sinifunktioita. Ratkaisuksi saadaan siis

$$V_{jk}(x,y,z) = \sin\left(\pi j \frac{x}{L}\right) \sin\left(\pi k \frac{y}{L}\right) \exp\left(\pm\pi\sqrt{(j^2+k^2)}\frac{z}{L}\right).$$

Tämä yksittäinen ratkaisu voidaan nyt yleistää kertomalla sopivilla kertoimilla ja summaamalla eri indeksiarvojen $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ ja $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ yli.

Voidaan kuitenkin huomauttaa, että termit, joilla $j = 0$ tai $k = 0$, häviävät aina, ja että termit, jotka sisältävät $j = +n$ ja $j = -n$ tai $k = +n$ ja $k = -n$, $n \in \mathbb{N}$, ovat (etumerkkiä vaille) identtisiä. Siksi käytännössä summataan arvojen $j = 1, 2, \ldots$ ja $k = 1, 2, \ldots$ yli.

Erilaiset reunaehdot antavat hieman erilaisia yleisratkaisuja. Kuitenkin niiden yleinen muoto on aina sama.

Yleisestä ratkaisusta saatava nollatason $z = 0$ kehitelmä on Fourier'n[4] sinikehitelmä: [4]

$$V(x,y,0) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \nu_{jk} \overbrace{\sin\left(\pi\frac{jx}{L}\right)\sin\left(\pi\frac{ky}{L}\right)}^{V_{jk}(x,y)}, \tag{2.1}$$

jossa ν_{jk} ovat Fourier'n kertoimia, ja lausekkeet

$$V_{jk}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sin\left(\pi\frac{jx}{L}\right)\sin\left(\pi\frac{ky}{L}\right)$$

[3]... vaikka tosimaailman kenkälaatikot ovat harvemmin neliön muotoisia.

[4]Joseph Fourier (1768–1830) oli ranskalainen matemaatikko ja fyysikko sekä joidenkin mukaan myös ilmastotutkija. Hän oli yksi Eiffel-tornin 72 nimestä, Eiffel Tower, 72 names.

ovat kaksiulotteisia kantafunktioita maanpinnalla, tasolla $z = 0$.

Viittaamme osioon B.2.2 liitteessä B, jossa kuvataan, miten yksinkertaisen funktion Fourier'n analyysi ja synteesi tehdään ja miten Fourier'n kehitelmä approksimoi alkuperäistä funktiota termien määrän kasvaessa.

Täydellinen kolmiulotteinen kehitelmä on taas

$$V(x,y,z) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{v_{jk}\sin\left(\pi\frac{jx}{L}\right)\sin\left(\pi\frac{ky}{L}\right)}^{v_{jk}(x,y)} \exp\left(\pm\pi\sqrt{j^2+k^2}\frac{z}{L}\right). \quad (2.2)$$

z-lausekkeen sisällä voi olla joko positiivinen tai negatiivinen etumerkki! Tietysti se ratkaisu, jolla on positiivinen etumerkki menee $\to \infty$, kun $z \to \infty$, mikä ei ole ulkoavaruudessa fysikaalisesti realistista.

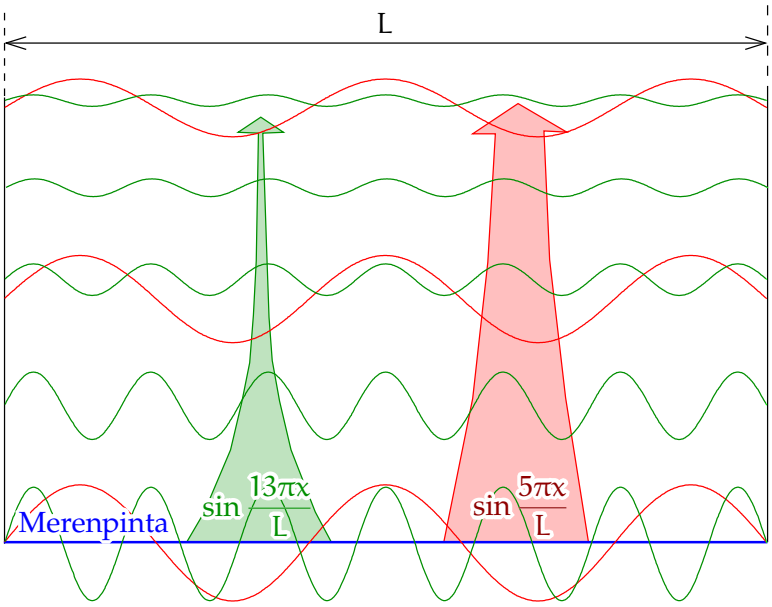
Huomaa myös, että $V(x,y,0)$ ja v_{jk} edustavat *samaa gravitaatiokenttää* kahdella olennaisesti erilaisella tavalla: avaruusdomeenissa ja spatiaalisessa taajuus- eli aaltolukudomeenissa. Molempien informaatiosisältö on sama. Ne voidaan muuntaa toisikseen käyttämällä suoraa ja käänteistä Fourier'n muunnosta $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}^{-1}$.

Itse asiassa funktion $V(x,y,0)$ informaatiosisältö on periaatteessa sama kuin funktion $V(x,y,z)$ millä tahansa tasolla z: yhden tason potentiaalin tunteminen merkitsee — Laplacen yhtälön kautta — potentiaalin tuntemista kautta avaruuden.

Vedetään yhtälöt 2.1 ja 2.2 vielä yhteen kommutoivaksi kaavioksi 2.2.

Tämän lopputulema on, että kentän V siirto-operaatio pystysuunnassa nollatasosta tasoon z, joka avaruusdomeenissa ei ole helppoa, on yksinkertainen — niin yksinkertainen kuin kertolasku — taajuusdomeenissa[5]. Sama pätee myös pallokoordinaateissa, jolloin taajuusdomeeni merkitsee pallofunktiokehitelmän kertoimia, kuten tulemme näkemään.

[5] Syy tähän on, kuten tulemme myöhemmin esittämään laajemmin, että pystysuuntainen siirto-operaatio on *konvoluutio*.



KUVA 2.1. Harmonisen kentän Fourier-aaltoilun eksponentiaalinen vaimennus korkeuden mukaan. Suorakulmainen geometria, yksiulotteinen vaakasuunnassa. Pitkät aallot (pienet aaltoluvut, punainen) vaimentuvat hitaammin kuin lyhyet aallot (vihreä): korkeus toimii siis alipäästösuodattimena.

Avaruusdomeeni		Taajuusdomeeni
$V(x,y,0)$	$\xrightarrow{\text{Fourier } \mathcal{F}}$	ν_{jk}
$\downarrow$ (vaikea)		$\times$ (helppo) $\downarrow$
$V(x,y,z)$	$\xleftarrow{\text{Käänteinen Fourier } \mathcal{F}^{-1}}$	$\nu_{jk}\exp\left(-\pi\sqrt{j^2+k^2}\frac{z}{L}\right)$

KUVA 2.2. Harmonisen kentän V pystysuuntainen siirto avaruus- ja taajuus- eli aaltolukudomeeneissa, kommutoiva kaavio. Suorakulmainen geometria.

2.3 Laplacen yhtälö napakoordinaateissa

Napakoordinaateissa, kaksiulotteisesti, Laplacen yhtälö on

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Suoritamme tähän samanlaisen muuttujien erottamisen kuin osiossa 2.2. Kirjoita ensin

$$V(\alpha, r) = A(\alpha)\, R(r)$$

ja jaa sitten yllä oleva yhtälö kahteen eri yhtälöön, toinen funktiolle $R(r)$ ja toinen funktiolle $A(\alpha)$. Sijoitus antaa

$$A(\alpha)\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{A(\alpha)}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{R(r)}{r^2}\frac{\partial^2 A(\alpha)}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Kerro lausekkeella $r^2/A(\alpha)\, R(r)$:

$$\left(\frac{r^2}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{A(\alpha)}\frac{\partial^2 A(\alpha)}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Molempien termien on taas oltava vakioita:

$$r\left(r\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) - k^2\, R(r) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A(\alpha)}{\partial \alpha^2} + k^2 A(\alpha) = 0.$$

Tässä vakion k^2 etumerkki on valittu niin, että $A(\alpha)$ saa jaksollisen ratkaisun. Sellainen yleinen ratkaisu olisi

$$A_k(\alpha) = a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha,$$

jossa, koska kulman α periodi on 2π, k:n on oltava ei-negatiivinen kokonaisluku: $k = 0, 1, 2, \ldots$. Negatiiviset k-arvot eivät anna erilaisia ratkaisuja, koska

$$a_k \cos k\alpha = a_k \cos(-k\alpha), \qquad b_k \sin k\alpha = -b_k \sin(-k\alpha).$$

Toinen, funktion $R(r)$ yhtälö, on vaikeampi ratkaista. Koeratkaisu on potenssikaava:

$$R(r) = r^q.$$

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned} r\left(rq\left(q-1\right)r^{q-2} + qr^{q-1}\right) - k^2 r^q &= 0 \\ \implies \quad q^2 - k^2 &= 0 \\ \implies \quad q^2 &= k^2. \end{aligned}$$

Tämä toimii positiivisille $q = 2, 3, \ldots$ ja negatiivisille $q = -1, -2, \ldots$ Arvolle $q = 1$ saadaan

$$r - k^2 r = 0 \quad \implies \quad k^2 = 1 = q^2.$$

Arvolle $k = 0$ löytyy, paitsi triviaali vakioratkaisu, ei-triviaali ratkaisu $R(r) = \ln r$:

$$r\left(r \cdot -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\right) - k^2 \ln r = 0 \quad \implies \quad k = 0.$$

Näin saadaan yleinen ratkaisu

$$R_k(r) = \begin{cases} 1 \ \text{ tai } \ \ln r & \text{jos } k = 0, \\ r^k \ \text{ tai } \ r^{-k} & \text{jos } k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Nähdään, että jos vaaditaan, että ratkaisu on olemassa origossa $r = 0$, tarvitaan *ensimmäiset* ratkaisut, tuloksena

$$V^{\text{sis}}(\alpha, r) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right),$$

mutta jos halutaan, että ratkaisu on olemassa — tai ainakin käyttäytyy hyvin — äärettömyydessä[6] $r \to \infty$, tarvitaan *toiset* ratkaisut, 6

$$V^{\text{ulk}}(\alpha, r) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} \left(a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right). \qquad (2.3)$$

Samanlaisuus kolmiulotteisen eli pallokoordinaattien tapauksen kanssa on selvästi nähtävissä.

[6] Itse asiassa $\lim_{r\to\infty} V^{\text{ulk}} \to \infty$ mutta $\lim_{r\to\infty} \frac{\partial}{\partial r} V^{\text{ulk}} = 0$.

2.4 Pallo-, geodeettiset ja ellipsoidiset koordinaatit

Fysikaalisessa geodesiassa käytämme geometrisia ja fysikaalisia käsitteitä rinnakkain. Esimerkiksi pisteen koordinaatit voidaan antaa muodossa (X, Y, Z), joka on periaatteessa geometrinen — lukuun ottamatta fysikaalista olettamusta, että koordinaatiston origo on Maan massakeskipiste.

Koska maapallo ei ole tarkasti ottaen pallo, vaan litistynyt pyörähdysellipsoidi, maantieteellisiä koordinaatteja ei voida käyttää ikään kuin ne olisivat pallokoordinaatteja. Koska maapallo on litistynyt huomattavasti (noin 0,3 %), ero on merkittävä. Pallokoordinaattien (ϕ, λ, r) yhteys suorakulmaisiin koordinaatteihin (X, Y, Z) on seuraava:

$$\begin{aligned} X &= r\cos\phi\cos\lambda, \\ Y &= r\cos\phi\sin\lambda, \\ Z &= r\sin\phi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

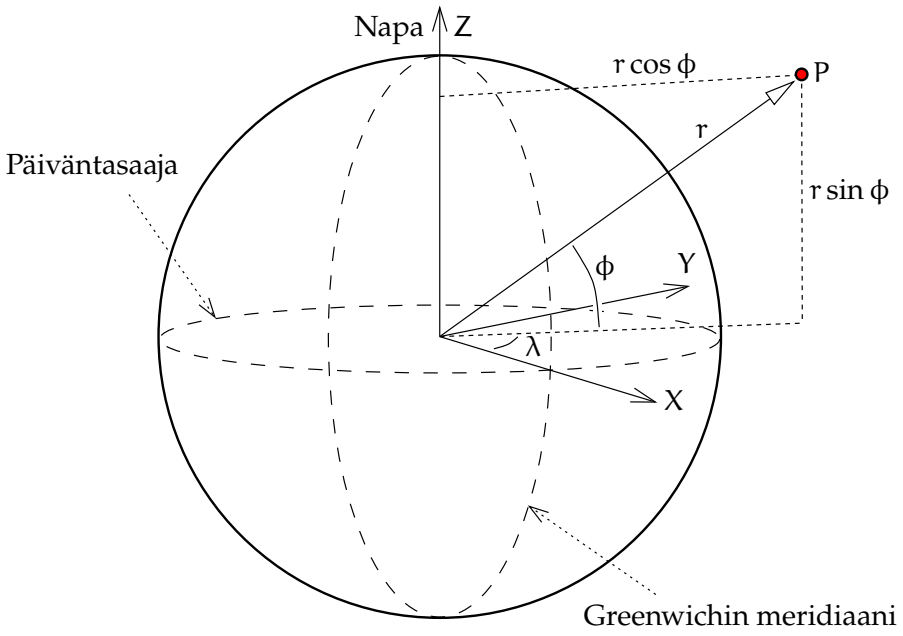
Tässä ϕ on geosentrinen leveysaste, λ on (tavallinen — geosentrinen, geodeettinen tai maantieteellinen, kaikki kolme ovat samoja) pituusaste ja r on etäisyys Maan keskipisteestä. X-akseli osoittaa Greenwichin meridiaanin suuntaan. Katso kuva 2.3.

Maan pinnalla nämä pallokoordinaatit eivät ole kovin käyttökelpoisia Maan litistyneisyyden takia, mutta avaruudessa pallokoordinaatteja käytetään paljon. Maan päällä käytetään useimmiten *geodeettisia* — eli maantieteellisiä — koordinaatteja (φ, λ, h):

$$\begin{aligned} X &= (N + h)\cos\varphi\cos\lambda, \\ Y &= (N + h)\cos\varphi\sin\lambda, \\ Z &= \left(N + h - e^2 N\right)\sin\varphi, \end{aligned} \tag{2.5}$$

jossa

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}. \tag{2.6}$$



KUVA 2.3. Pallokoordinaattien määritelmä.

Yhtälön 2.6 määrittämä suure N on vertausellipsoidin länsi-itäsuunnan eli *poikittainen* kaarevuussäde. Yhtälössä a on käytetyn vertausellipsoidin päiväntasaajasäde, b on napasäde,

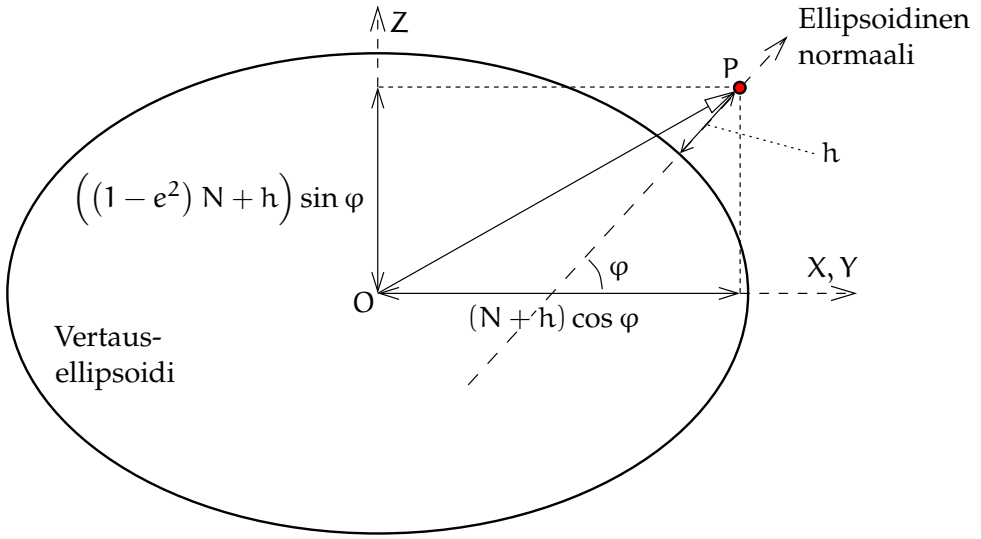
$$e^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^2 - b^2}{a^2} \tag{2.7}$$

on *ensimmäisen eksentrisyyden* neliö[7], ja yhtälöissä 2.5 h on pisteen korkeus vertausellipsoidista, katso kuva 2.4.

Suorakulmaisten koordinaattien konvertointi geodeettisiksi käy helpoimmin iteratiivisesti, vaikka suljettujakin kaavoja löytyy kirjallisuudesta.

Pallokoordinaatit ja geodeettiset eli maantieteelliset koordinaatit eroavat huomattavasti toisistaan. Leveysasteessa ero on suurimmillaan 11 kaariminuuttia eli lähes 20 kilometriä. Maksimi saavutetaan leveysasteilla $\pm 45°$.

[7] Parametri liittyy Maan litistyneisyyteen f yhtälön $e^2 = 2f - f^2$ kautta.



KUVA 2.4. Geodeettisten koordinaattien määritelmä.

Teoreettisessa työssä käytetään myös *ellipsoidisia koordinaatteja* (β, λ, u). Koordinaattia β kutsutaan redukoiduksi leveysasteeksi. Yhteys suorakulmaisiin koordinaatteihin on

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{u^2 + E^2}\cos\beta\cos\lambda, \\ Y &= \sqrt{u^2 + E^2}\cos\beta\sin\lambda, \\ Z &= u\sin\beta. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Jos Maa-ellipsoidin isoakselin puolikas on a ja sen pikkuakselin puolikas b, seuraa tästä, että $E^2 = a^2 - b^2$. Yhtälö 2.7 kertoo, että $E^2 = a^2e^2$. Ensimmäinen eksentrisyys e on *meridiaaniellipsin* eksentrisyys, ja $E = ae$ on tämän ellipsin kahden polttopisteen etäisyys Maan keskipisteestä. Polttopisteet sijaitsevat keskipisteen molemmilla puolilla päiväntasaajan tasossa. Yhtälöt 2.8 kertovat, että kaikilla meridiaanitason ellipseillä $u =$ vakio eri arvoille u on samat kaksi poltopistettä: ne ovat *konfokaalisia*. Katso kuva 4.6.

Huomautamme vielä — katso Heiskanen ja Moritz (1967) kuva 1-14 — että käyrät $\beta =$ vakio kuvaavat *hyperbeleitä*, joilla on samat polttopisteet.

2.5 Laplacen yhtälö pallokoordinaateissa

Laplacen yhtälö muunnettuna pallokoordinaatteihin on (geometrinen todistus, katso liite E):

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0, \quad (2.9)$$

jossa ϕ on (geosentrinen) leveysaste eli latitudi, λ on pituusaste eli longitudi ja r on etäisyys origosta eli Maan keskipisteestä.

Emme johda tässä yhtälön ratkaisua muuttujien erottamisella, koska se on suhteellisen monimutkainen. Se löytyy osiosta E.2 ja kirjallisuudesta (Heiskanen ja Moritz, 1967, osio 1-9). Merkittävää on, että ratkaisu on hieman saman näköinen kuin aiemmin esitetty ratkaisu suorakulmaisissa koordinaateissa, osio 2.2. Laplacen yhtälön perusratkaisut ovat

$$V_n^{\text{sis}}(\phi,\lambda,r) = r^n Y_n(\phi,\lambda), \quad V_n^{\text{ulk}}(\phi,\lambda,r) = \frac{Y_n(\phi,\lambda)}{r^{n+1}}, \qquad n = 0,1,\ldots, \quad (2.10)$$

joista ensimmäinen on epäfysikaalinen ulkoavaruudessa, koska toisin kuin todellinen geopotentiaali nämä lausekkeet kasvavat äärettömiksi kun $r \to \infty$.

Yllä olevissa yhtälöissä funktiot $Y_n(\phi,\lambda)$ ovat *pintapallofunktioita*, kun taas funktiot $V_n(\phi,\lambda,r)$ ovat *avaruuspallofunktioita*. Jälkimmäiset ovat *harmonisia* kaikkialla muualla avaruudessa paitsi origossa (2.10, oikeanpuoleinen yhtälö) tai äärettömyydessä (vasemmanpuoleinen yhtälö).

Funktiot Y_n, nimeltään *Laplacen pallofunktiot*, ovat

$$Y_n(\phi,\lambda) = \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\,(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,. \quad (2.11)$$

Funktiot P_{nm} ovat *Legendren funktioita*, joista kerrotaan myöhemmin lisää. Lausekkeen 2.11 avulla ja käyttämällä toista fysikaalisesti realistista

vaihtoehtoa yhtälöistä 2.10 saadaan seuraava ratkaisu eli *sarjakehitelmä* ulkoavaruuden potentiaalille V:

$$V(\phi,\lambda,r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\,(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,. \tag{2.12}$$

Kertoimia a_{nm} ja b_{nm} kutsutaan pallofunktiokehitelmän kertoimiksi, lyhyesti *spektraalikertoimiksi*. Yhdessä ne esittävät funktiota V, hieman samalla tavalla kuin Fourier'n kertoimet v_{jk} tekevät suorakulmaisissa koordinaateissa yhtälössä 2.2. Indeksejä n ja m kutsutaan *asteluvuksi* ja *järjestysluvuksi* (engl. *degree and order*).

Tulemme käyttämään skaalatuille funktioille Y_n/R^{n+1} usein hieman vapaampaa kirjoitustapaa. Esimerkiksi jos kehitetään häiriöpotentiaali T pallofunktioihin, käytetään kirjoitustapaa $T_n(\phi,\lambda)$ sen pintapallofunktioille. Samalla tavalla $\Delta g_n(\phi,\lambda)$ on painovoima-anomalian Δg asteluvun n pintapallofunktio, ja niin edelleen. Silloin pätee Maan pinnalla $r = R$ (*asteosuushajotelma*):

$$T(\phi,\lambda,R) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\phi,\lambda), \qquad \Delta g(\phi,\lambda,R) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(\phi,\lambda),$$

ja niin edelleen.

2.6 Riippuvuus korkeudesta

Yllä olevista yhtälöistä 2.10 nähdään, että eri asteluvuilla n funktiolla $V_n(\phi,\lambda,r)$ on eri riippuvuus etäisyydestä r Maan keskipisteestä eli vastaavasti korkeudesta $H = r - R$, jossa R on maapallon eli merenpinnan säde. Riippuvuus on

$$V_n(\phi,\lambda,r) = \frac{Y_n(\phi,\lambda)}{r^{n+1}}.$$

Merenpinnalla on

$$V_n(\phi,\lambda,R) = \frac{Y_n(\phi,\lambda)}{R^{n+1}} \stackrel{\text{def}}{=} V_n(\phi,\lambda).$$

Voimme siis kirjoittaa

$$V_n(\phi,\lambda,r) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} V_n(\phi,\lambda) = \left(\frac{R+H}{R}\right)^{-(n+1)} V_n(\phi,\lambda) =$$
$$= \left(1+\frac{H}{R}\right)^{-(n+1)} V_n(\phi,\lambda) \approx \exp\left(-\frac{H}{R}(n+1)\right) V_n(\phi,\lambda).$$

Näemme, että potentiaalin vaimennus korkeuden mukaan on *eksponentiaalinen* ja asteluku n on eksponentissa, kuten oli myös aaltoluku suorakulmaisessa geometriassa, katso yhtälö 2.2 ja kuva 2.1. Analogia pelaa.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Millä olennaisella tavalla Laplacen yhtälön lähestymistapa eroaa Newtonin lähestymistavasta?
2) Miten Laplacen yhtälön lineaarisuus auttaa löytämään ratkaisuja?
3) Miten muuttujien erottaminen toimii?
4) Miksi Laplacen yhtälön ratkaiseminen vaatii reunaehtoja?
5) Näytä yhtälöiden 2.8 avulla, että meridiaanitason $Y = 0$ käyrille $u =$ vakio käyrän pisteen $\begin{bmatrix} \sqrt{u^2+E^2}\cos\beta & 0 & \sin\beta \end{bmatrix}^T$ ja polttopisteiden $\begin{bmatrix} \pm E & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ välisten etäisyyksien *summa* on vakio (ja että käyrät siis ovat konfokaalisia ellipsejä), ja että käyrille $\beta =$ vakio näiden etäisyyksien *erotus* on vakio (ja että käyrät siis ovat konfokaalisia hyperbeleitä). Katso kuva 4.6.

Legendren funktiot ja pallofunktiot

3

3.1 Legendren funktiot

Yhtälöissä 2.11 ja 2.12 funktiot P ovat *Legendren*[1] *funktioita*, jotka pulpahtavat esiin aina, kun Laplacen kaltainen yhtälö ratkaistaan pallokoordinaateissa. Niiden laskemiseen on käytettävissä erilaisia tehokkaita niin sanottuja rekursiivisia algoritmeja, kuten seuraava, joka on algoritmi vain tavallisille Legendren polynomeille $P_n = P_{n0}$:

$$nP_n(t) = -(n-1)\,P_{n-2}(t) + (2n-1)\,tP_{n-1}(t). \tag{3.1}$$

Vastaavanlaisia yhtälöitä löytyy myös funktioille P_{nm}, $m > 0$. On jopa valinnan varaa, vaikka useimmat yhtälöt ovat mutkikkaita. Niiden ohjelmoinnissa on varottava, etteivät kertomat mene yli laidan. Jo 30:n kertoma 30! on suurempi luku kuin tietokoneet osaavat käsitellä 64-bittisinä kokonaislukuina — luvusta 360:n kertoma 360! puhumattakaan, johon ei edes riitä standardi 64-bittinen liukulukuformaatti. Toisin kuin sanotaan, Heiskasen ja Moritzin (1967) yhtälö 1-62 *ei* suoraan kelpaa tietokonekäyttöön!

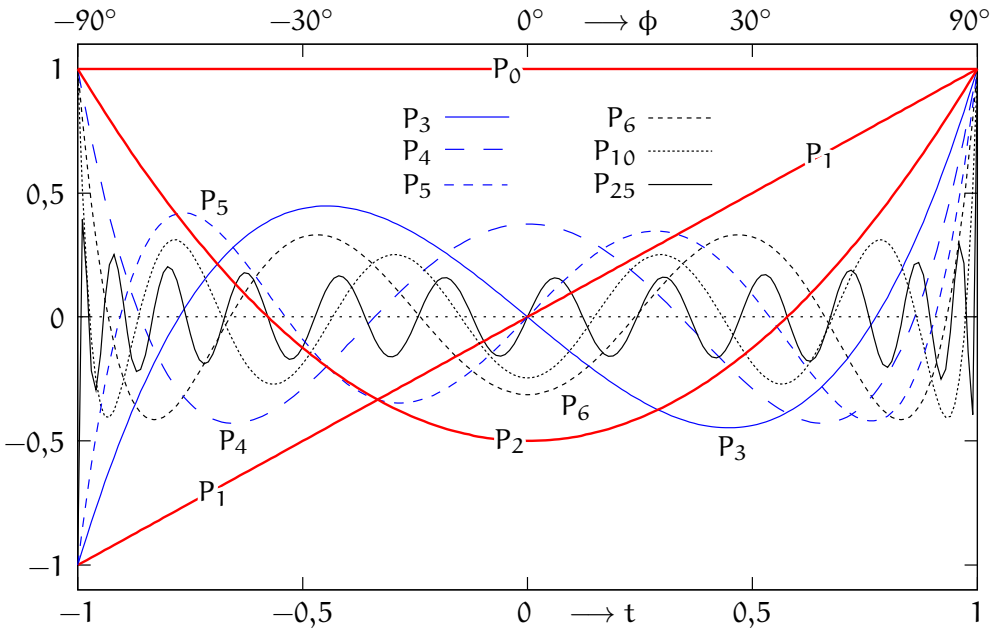
[1] Adrien-Marie Legendre (1752–1833) oli ranskalainen matemaatikko ja tunnettu työstään lukuteoriassa, tilastotieteessä ja elliptisten funktioiden saralla. Hän keksi Gaussista riippumatta pienimmän neliösumman menetelmän. Hänen nimensä löytyy Eiffel-tornista, Eiffel Tower, 72 names.

TAULUKKO 3.1. Legendren polynomeja. $t = \sin\phi$.

t:n funktiona	Ilmaistuna sineihin ja kosineihin
$P_0(t) = 1$	$P_0(\sin\phi) = 1$
$P_1(t) = t$	$P_1(\sin\phi) = \sin\phi$
$P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$	$P_2(\sin\phi) = -\frac{3}{4}\cos 2\phi + \frac{1}{4}$
$P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$	$P_3(\sin\phi) = -\frac{5}{8}\sin 3\phi + \frac{3}{8}\sin\phi$
$P_4(t) = \frac{1}{8}\left(35t^4 - 30t^2 + 3\right)$	$P_4(\sin\phi) = \frac{35}{64}\cos 4\phi - \frac{5}{16}\cos 2\phi + \frac{9}{64}$
$P_5(t) = \frac{1}{8}\left(63t^5 - 70t^3 + 15t\right)$	
$P_6(t) = \frac{1}{16}\left(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5\right)$	

Ensimmäiset Legendren polynomit luetteloidaan taulukossa 3.1. Tätä korkeampia polynomeja tarvitaan käsilaskennassa harvoin.

Vertailun vuoksi, myös Fourier'n *kantafunktiot* (kuten, monimutkai-



KUVA 3.1. Muutama Legendren polynomi $P_0(t), \ldots, P_{25}(t)$ argumentin $t = \sin\phi$ funktioina.

semmalla tavalla, myös sinit ja kosinit yhdessä!)

$$F_j(x) = \exp\left(2\pi i j \frac{x}{L}\right),$$

jossa $i^2 = -1$, voidaan laskea rekursiivisesti:

$$F_{j+1}(x) = F_j(x) \cdot F_1(x).$$

3.1.1 *Legendren polynomien ominaisuudet*

- Parilliset polynomit, joiden asteluku n on parillinen, ovat peilisymmetrisiä origon $\phi = t = 0$ eli päiväntasaajan tason kautta: $P_n(-t) = P_n(t)$, eli vastaavasti $P_n\big(\sin(-\phi)\big) = P_n(\sin\phi)$. Tämä merkitsee, että niiden arvot samalla leveysasteella päiväntasaajan molemmin puolin ovat identtisiä. Parittomat polynomit ovat taas antisymmetrisiä: $P_n(-t) = -P_n(t)$ eli $P_n\big(\sin(-\phi)\big) = -P_n(\sin\phi)$, eli niiden arvot samalla leveysasteella päiväntasaajan pohjois- ja eteläpuolella ovat vastakkaisia.
- Kuvasta 3.1 nähdään, että polynomit $P_n(t)$ menevät koko välillä $t \in [-1, 1]$ eli $\phi \in [-90°, 90°]$ tarkasti n kertaa nollan läpi.
- Kun päätepisteiden $t = \pm 1$, $\phi = \pm 90°$ arvot ovat ± 1, seuraa, että on tarkasti $n + 1$ ”etumerkkiväliä” eli avoimia välejä, joilla polynomin arvot ovat joko yksinomaan positiivisia tai yksinomaan negatiivisia.

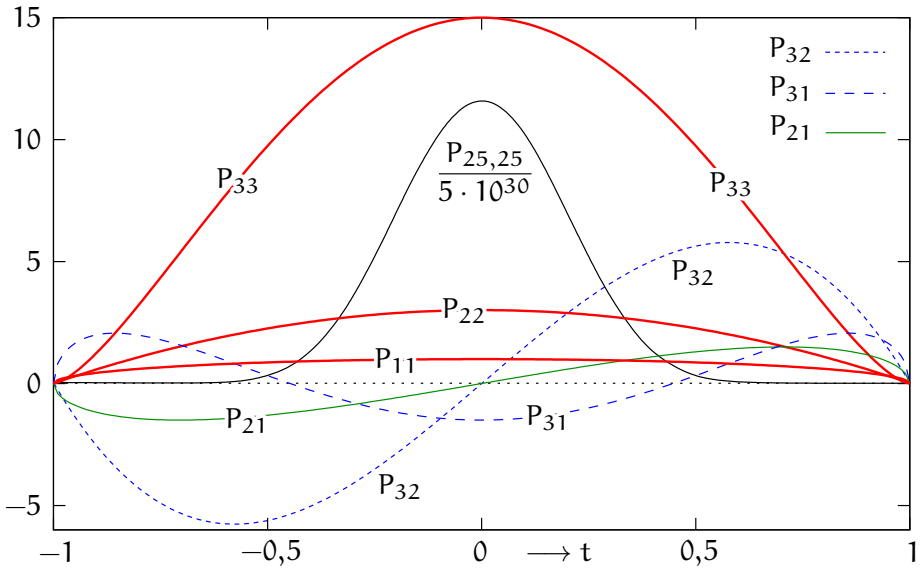
3.1.2 *Legendren liitännäisfunktioiden ominaisuudet*

Legendren liitännäisfunktioista P_{nm}, $m \neq 0$ esitetään esimerkkeinä muutama taulukossa 3.2.

Eräs niitä määrittelevä yhtälö on

$$P_{nm}(t) = \left(1 - t^2\right)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}. \tag{3.2}$$

- Myös Legendren liitännäisfunktiot ovat joko peilisymmetrisiä origon eli päiväntasaajan tason kautta, $P_{nm}(-t) = P_{nm}(t)$ eli



KUVA 3.2. Legendren liitännäisfunktioita. Huomaa äärimmäisen erilainen mittakaava funktiolle $P_{25,25}$, katso yhtälö 3.8.

vastaavasti $P_{nm}\big(\sin(-\phi)\big) = P_{nm}(\sin\phi)$, tai antisymmetrisiä, $P_{nm}(-t) = -P_{nm}(t)$ eli $P_{nm}\big(\sin(-\phi)\big) = -P_{nm}(\sin\phi)$, riippuen asteluvun n ja järjestysluvun m lukuarvoista.

- Kuva 3.2 antaa uskoa, että polynomit $P_{nm}(t)$ menevät välillä $t \in [-1, 1]$ eli $\phi \in [-90°, 90°]$ tarkasti $n - m$ kertaa nollan läpi. Tämä pitää tosiaankin paikkansa.

TAULUKKO 3.2. Legendren liitännäisfunktioita.

t:n funktiona	Trigonometrisena funktiona
$P_{11}(t) = \sqrt{1-t^2}$	$P_{11}(\sin\phi) = \cos\phi$
$P_{21}(t) = 3t\sqrt{1-t^2}$	$P_{21}(\sin\phi) = 3\sin\phi\cos\phi$
$P_{22}(t) = 3\left(1-t^2\right)$	$P_{22}(\sin\phi) = 3\cos^2\phi$
$P_{31}(t) = \frac{3}{2}\left(5t^2-1\right)\sqrt{1-t^2}$	$P_{31}(\sin\phi) = \frac{3}{2}\left(5\sin^2\phi - 1\right)\cos\phi$
$P_{32}(t) = 15t\left(1-t^2\right)$	$P_{32}(\sin\phi) = 15\sin\phi\cos^2\phi$
$P_{33}(t) = 15\left(1-t^2\right)^{3/2}$	$P_{33}(\sin\phi) = 15\cos^3\phi$

- Kun myös päätepisteiden $t = \pm 1$, $\phi = \pm 90°$ arvot ovat nolla, seuraa, että on tarkasti $n - m + 1$ ”etumerkkiväliä”.

3.1.3 *Pintapallofunktiot*

Lähtien yhtälöstä 2.11 voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} Y_n(\phi,\lambda) &= \\ &= \sum_{m=0}^{n} \left(a_{nm} P_{nm}(\sin\phi) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\sin\phi) \sin m\lambda \right) = \\ &= \sum_{m=-n}^{n} \nu_{nm} Y_{nm}(\phi,\lambda), \end{aligned}$$

jossa nyt m kulkee $-n$:stä $+n$:ään. Tässä

$$Y_{nm}(\phi,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} P_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda & \text{jos } m \geqslant 0, \\ P_{n|m|}(\sin\phi)\sin|m|\lambda & \text{jos } m < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\nu_{nm} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a_{nm} & \text{jos } m \geqslant 0, \\ b_{n|m|} & \text{jos } m < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

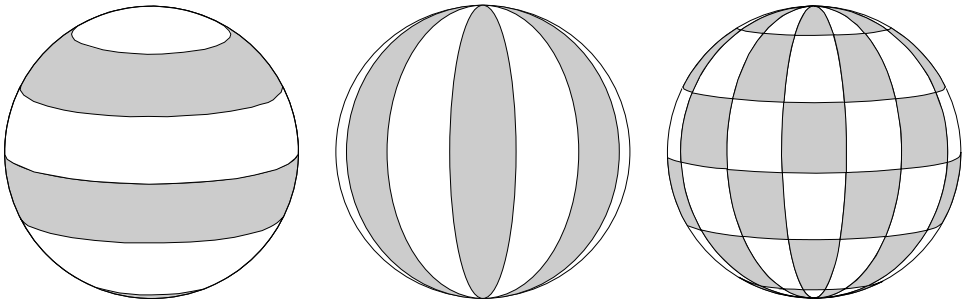
Nämä ovat *asteluvun* n *ja järjestysluvun* m *pintapallofunktiot.*

Pintapallofunktioita, kuten myös avaruuspallofunktioita, löytyy kolmenlaisia:

Zonaalisia eli vyöhykefunktioita $m = 0$. Funktiot riippuvat vain leveysasteesta.

Sektoriaalisia eli sektorifunktioita $m = n$. Funktioiden *etumerkki* vaihtelee vain pituus- eikä leveysasteen mukaan. Funktiot itse kuitenkin riippuvat sekä leveys- että pituusasteesta!

Tesseraalisia eli ruutufunktioita $0 < m < n$. Funktiot, joiden etumerkki vaihtelee sekä leveys- että pituusasteen mukaan, muodostavat pallon pintaan ”shakkilautamaisen” kuvion, jos positiiviset arvot maalataan valkoisiksi ja negatiiviset harmaiksi (lat. *tessera*: tiili mosaiikin tekoon).



(a) Vyöhykefunktioita: $P_{50}(\sin\phi)$

(b) Sektorifunktioita: $P_{66}(\sin\phi)\cos 6\lambda$

(c) Ruutufunktioita: $P_{11,6}(\sin\phi)\cos 6\lambda$

KUVA 3.3. Eri pallofunktioiden etumerkit Maan pinnalla. Valkoinen positiivinen, harmaa negatiivinen. Funktiot "aaltoilevat" sini- tai kosinifunktioiden tavoin.

Jokainen funktio menee välillä $\sin\phi \in [-1,+1]$ tarkasti $n-m$ kertaa nollan läpi. Jokainen funktio on joko symmetrinen tai antisymmetrinen origon kautta ϕ:n tai $t = \sin\phi$:n funktiona.

Pallofunktiot edustavat siis eräänlaista aaltoilmiötä. Ne eivät kuitenkaan ole varsinaisia aaltofunktioita (sinuksia ja kosinuksia), yhteys näihin on vähintään mutkikas. On kuitenkin mielekästä puhua niiden *aallonpituudesta*.

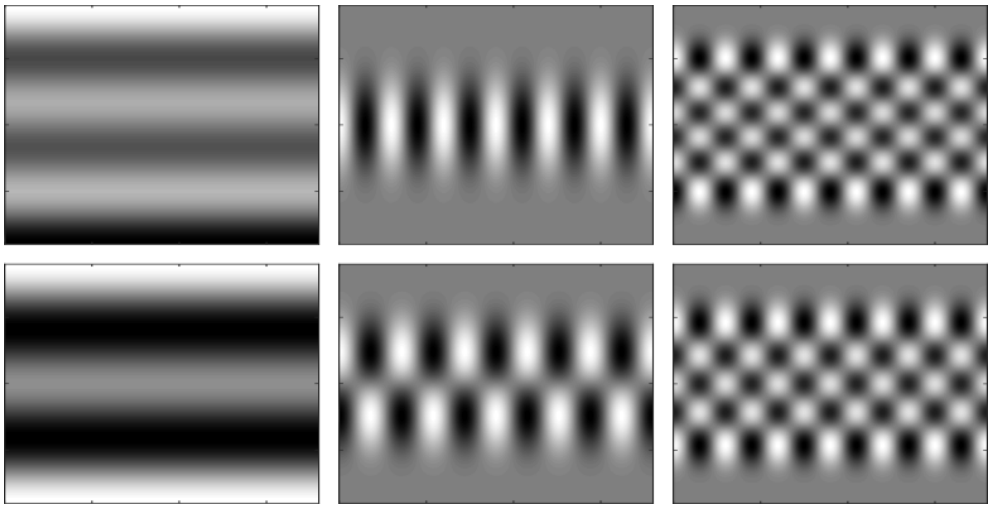
Kuvassa 3.3 näkyy, miten eri pallofunktioiden etumerkit käyttäytyvät Maan pinnalla — ja sen yläpuolella. Tämä on perspektiivikuva, eivätkä kaikki valkoiset ja harmaat alueet näy!

Yhtälössä 2.11 esiintyvät lausekkeet $\cos m\lambda$ ja $\sin m\lambda$ menevät koko ympyrällä eli päiväntasaajalla, $0° \leqslant \lambda < 360°$ eli $0 \leqslant \lambda < 2\pi$, tarkasti $2m$ kertaa nollan läpi. "Puoliaallonpituus" on siis

$$\frac{2\pi R}{2m} = \pi\frac{R}{m},$$

jossa R on maapallon säde.

Samanlainen kaava pätee myös funktioille $P_{nm}(\sin\phi)$: kun funktio menee nollan läpi $n-m$ kertaa navasta napaan välillä $-90° < \phi < 90°$



Kuva 3.4. Pintapallofunktiot karttoina. Vaaka-akseli $\lambda \in [0, 360°) = [0, 2\pi)$, pystyakseli $\phi \in [-90°, 90°] = [-\pi/2\,, \pi/2]$. Kuvatut funktiot ovat

$$\begin{matrix} P_{50}(\sin\phi) & P_{66}(\sin\phi)\cos 6\lambda & P_{11,6}(\sin\phi)\cos 6\lambda \\ P_{40}(\sin\phi) & P_{65}(\sin\phi)\cos 5\lambda & P_{10,6}(\sin\phi)\cos 6\lambda \end{matrix}.$$

eli $-\pi/2 < \phi < \pi/2$, seuraa, että tässäkin tapauksessa edustava puoliaallonpituus on

$$\frac{\pi R}{n - m}.$$

Jos sijoitetaan tähän eri järjestysluvun m ja lausekkeen $n - m$ arvot, saadaan tuloksena taulukko 3.3.

Tämä taulukko antaa myös pallofunktiokehitelmällä saavutettavaa *erotuskykyä*, eli kuinka yksityiskohtaisesti kehitelmä voi kuvata Maan painovoimakenttää. Nykyisin käytettävissä olevat kehitelmät, kuten EGM2008-malli, menevät asteluvulle $n = 2159$ asti. Niiden luoman geopotentiaalikuvan ”terävyys” on siis 9 km. Satelliittiratahäiriöistä johdetut mallit menevät usein vain asteluvulle 20 saakka, jolloin näkyvät vain mantereen kokoiset — suuruusluokkaa 1000 km — yksityiskohdat. Toisaalta kokeelliset *topografian* pallofunktiokehitelmät menevät jopa asteluvulle 10 800 saakka (Balmino ym., 2012).

TAULUKKO 3.3. Puoliaallonpituudet pallofunktioiden eri aste- ja järjestysluvuille.

m tai $n-m$	Puoliaallonpituus (km)	Asteina
10	2000	18°
40	500	$4^\circ{,}5$
180	111	1°
360	55	$30' = 0^\circ{,}5$
1800	11	$6' = 0^\circ{,}1$
10 800	1,85	$1' = 0^\circ{,}017$

3.2 Pallofunktiokehitelmän symmetriaominaisuudet

Toistetaan tässä pallofunktiokehitelmä:

$$V(\phi,\lambda,r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\,(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,. \tag{2.12}$$

3.2.1 Riippuvuus leveysasteesta ϕ

Nähdään, että riippuvuus leveysasteesta ϕ toimii pelkästään Legendren funktion $P_{nm}(\sin\phi)$ kautta. Tämä funktio voi olla pohjoisen ja eteläisen pallonpuoliskon välisen peilisymmetrian kannalta joko *symmetrinen* tai *antisymmetrinen* argumentissa ϕ. Tämä merkitsee, että joko (symmetrinen tapaus)

$$P_{nm}(\sin\phi) = P_{nm}\big(\sin(-\phi)\big)$$

tai (antisymmetrinen tapaus)

$$P_{nm}(\sin\phi) = -P_{nm}\big(\sin(-\phi)\big).$$

Vastaavasti se merkitsee, että kun $t = \sin\phi$, pätee joko (symmetrinen tapaus)

$$P_{nm}(t) = P_{nm}(-t)$$

tai (antisymmetrinen tapaus)

$$P_{nm}(t) = -P_{nm}(-t).$$

Kumpi tapaus pätee, riippuu molempien, n ja m, arvoista. Asian ratkaisemiseksi tutki vaikkapa yhtälöä 3.2:

$$P_{nm}(t) = \left(1 - t^2\right)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}. \tag{3.2}$$

Tarvitaan vastaus pariin kysymykseen:

1) Millä asteluvun n arvoilla polynomi $P_n(t)$ on symmetrinen, millä arvoilla antisymmetrinen argumentissa t? Tämän ratkaisemiseksi voi tutkia polynomien rekursiivista laskenta-algoritmia, yhtälö 3.1. Tiedämme jo, että $P_0(t) = 1$ on symmetrinen ja $P_1(t) = t$ on antisymmetrinen. Muiden n-arvojen sääntö saadaan rekursiivisesti tai voit luntata taulukosta 3.1.
2) Millä tavalla *differentiointi* $\frac{d}{dt}$ vaikuttaa funktion symmetrisyyteen tai antisymmetrisyyteen?

Kertominen lausekkeella $\sqrt{1 - t^2} = \cos\phi$ ei muuta mitään, koska tämä kerroin on itse symmetrinen argumentissa t tai ϕ.

Jos halutaan, että kehitelmä 2.12 on *peilisymmetrinen* pohjoisen ja eteläisen pallonpuoliskon välillä, tulee asettaa nollaksi ne kertoimet a_{nm}, b_{nm}, joiden vastaava P_{nm} on antisymmetrinen. Silloin ne termit häviävät sarjakehitelmästä. Jäljelle jäävät silloin kertoimet ja termit, joiden vastaava P_{nm} on symmetrinen.

Taulussa 3.4 annetaan koodipätkä octave-skriptauskielellä mielivaltaisen pintapallofunktion piirtämiseksi ja sen symmetriaominaisuuksien arvioimiseksi silmämääräisesti. Älä luule, vaan kokeile.

3.2.2 *Riippuvuus pituusasteesta λ*

Tämä riippuvuus toimii ”Fourier’n kantafunktioiden“ $\cos m\lambda$ ja $\sin m\lambda$ kautta. Mielenkiintoisin ominaisuus tässä on *pyörähdyssymmetria*: muuttuuko pallofunktiokehitelmä 2.12, kun pituusaste λ muuttuu?

TAULU 3.4. Pintapallofunktion kartan piirtäminen. Huomaa, että tässä käytetty octaven Legendren liitännäisfunktioiden koodi sisältää ylimääräisen kertoimen $(-1)^m$, joten yhtälön 3.2 verrattuna kaiken parittoman järjestysluvun funktioilla on päinvastainen etumerkki.

```
% Pintapallofunktioiden piirtäminen
phi=linspace(-90,90,72);
lab=linspace(0,360,144);
[f,l]=meshgrid(phi,lab);
n=5; m=-3;
leg=legendre(n,sin(phi.*pi./180));
if m >= 0
cs=cos(m.*lab.*pi./180);
else
cs=sin(abs(m).*lab.*pi./180);
end
v=leg(abs(m)+1,:)'*cs;
contourf(l,f,v')
xlabel('Pituusaste', 'FontSize', 16)
ylabel('Leveysaste', 'FontSize', 16)
str=sprintf('Pintapallofunktio n=%d, m=%d', n, m)%
title(str, 'FontSize', 20)
axis ([0 360 -90 90])
colorbar()
print('legendre2D.jpg','-djpg')
```

Näemme heti, että on olemassa riippuvuutta pituusasteesta λ, jos kertoimista $a_{nm}, b_{nm}, m \neq 0$ yksikin eroaa nollasta. Saadakseen aikaan pyörähdyssymmetriaa kaikkien kerrointen a_{nm} ja b_{nm} arvoille $m > 0$ tulee nollata: $a_{11} = b_{11} = a_{21} = b_{21} = a_{22} = b_{22} = \cdots = 0$.

Jäljelle jäävistä kertoimista voimme sanoa, että jos $m = 0$, sin $m\lambda = 0$ identtisesti, siis kertoimet $b_{00}, b_{10}, b_{20}, \ldots$ ovat yksinkertaisesti ilman merkitystä. Niiden arvot saavat olla mitä vain, mukaan lukien nolla. Kertoimet $a_{00}, a_{10}, a_{20}, \ldots$ taas *ovat* merkityksellisiä, koska jos $m = 0$, silloin $\cos m\lambda = 1$ identtisesti. Näin saamme *pyörähdyssymmetrisenä*

kehitelmänä

$$V(\phi, \lambda, r) = V(\phi, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} a_n P_n(\sin\phi),$$

jossa $P_n \stackrel{\text{def}}{=} P_{n0}$ ovat tutut Legendren polynomit, ja $a_n \stackrel{\text{def}}{=} a_{n0}$.

3.3 Legendren funktioiden ortogonaalisuus

Legendren *polynomit* ovat *ortogonaalisia*: integraali — muodollisesti vektoreiden skalaaritulo — on

$$\langle P_n \cdot P_{n'} \rangle_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{+1} P_n(t)\, P_{n'}(t)\, dt = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & \text{jos } n = n', \\ 0 & \text{jos } n \neq n'. \end{cases} \tag{3.5}$$

Tämä ortogonaalisuus on vain yksi esimerkki yleisemmästä tavasta katsoa funktioita ja funktioiden integraaleja. Kyseessä on hyödyllinen analogia vektoriavaruuden kanssa, katso liite B.

Voimme kirjoittaa vaihtoehtoisesti, *yksikköpallon* σ pinnalla ja käyttäen parametrisointia[2] (ψ, α) kulmaetäisyyden ja atsimuutin mukaan, katso kuva 10.1:

$$\begin{aligned} \iint_\sigma P_n(\cos\psi)\, P_{n'}(\cos\psi)\, d\sigma &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_n(\cos\psi)\, P_{n'}(\cos\psi) \sin\psi\, d\psi\, d\alpha = \\ &= -2\pi \int_{+1}^{-1} P_n(t)\, P_{n'}(t)\, dt = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_n(t)\, P_{n'}(t)\, dt, \end{aligned}$$

jossa $t = \cos\psi$ ja yksikköpallon pinta-alkio $d\sigma = \sin\psi\, d\psi\, d\alpha$, jossa taas $\sin\psi$ on (ψ, α)-koordinaattien *Jacobin*[3] *determinantti*. Siis pätee

[2] Tämä parametrisointi voidaan katsoa leveys- ja pituusastekoordinaatistoksi: leveysaste on $90° - \psi = \frac{1}{2}\pi - \psi$, pituusaste on α.

$$\left\langle P_n \cdot P_{n'} \right\rangle_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \iint_\sigma P_n(\cos\psi)\, P_{n'}(\cos\psi)\, d\sigma = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2n+1} & \text{jos } n = n', \\ 0 & \text{jos } n \neq n', \end{cases} \tag{3.6}$$

jossa ψ on kulmaetäisyys integrointipisteestä parametrisoinnin (ψ, α) origoon $\psi = 0$. Yhtälö 3.6 kertoo, että Legendren polynomit ovat keskenään ortogonaalisia, jos funktioiden vektoritulo on määritetty yksikköpallon σ pintaintegraalina.

Vaihtoehtoisesti voimme määrittää myös *täysin normalisoituja* Legendren polynomeja

$$\overline{P}_n(\cos\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2n+1} P_n(\cos\psi). \tag{3.7}$$

Nyt modifioitu skalaaritulo — tulon keskiarvo yksikköpallon pinnan yli — on

$$\left\langle \overline{P}_n \cdot \overline{P}_{n'} \right\rangle_{\overline{\sigma}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma \overline{P}_n(\cos\psi)\, \overline{P}_{n'}(\cos\psi)\, d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{jos } n = n', \\ 0 & \text{jos } n \neq n', \end{cases}$$

[4] jolloin polynomit ovat *ortonormaaleja*[4]. Samanlaisia täysin normalisoituja Legendren *liitännäisfunktioita* on olemassa, katso Heiskanen ja Moritz 1967, sivu 31:

$$\overline{P}_{nm}(\cos\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2\,(2n+1)\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos\psi), \qquad m \neq 0. \tag{3.8}$$

Tässä tapauksessa ortonormaalit funktiot ovat yhtälön 3.3 funktiot normalisoituina:

$$\overline{Y}_{nm}(\psi, \alpha) = \begin{cases} \overline{P}_{nm}(\cos\psi)\cos m\alpha & \text{jos } m \geqslant 0, \\ \overline{P}_{n|m|}(\cos\psi)\sin|m|\,\alpha & \text{jos } m < 0. \end{cases}$$

[3] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) oli saksalainen matemaatikko, joka tunnetaan elliptisten funktioiden tutkimuksestaan.

[4] Ja myös

$$\left\langle \overline{P}_n \cdot \overline{P}_{n'} \right\rangle_{\overline{t}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \overline{P}_n(t)\, \overline{P}_{n'}(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{jos } n = n', \\ 0 & \text{jos } n \neq n', \end{cases}$$

taas tulon keskiarvo integrointivälin yli.

Vastaava skalaaritulo on

$$\langle \overline{Y}_{nm} \cdot \overline{Y}_{n'm'} \rangle_{\overline{\sigma}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \overline{Y}_{nm}(\psi, \alpha)\, \overline{Y}_{n'm'}(\psi, \alpha)\, d\sigma = \\ = \begin{cases} 1 & \text{jos } n = n' \text{ ja } m = m', \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

3.4 Matalan asteluvun pallofunktiot

Pistemassan potentiaalikenttä on (yhtälö 1.4):

$$V = \frac{GM}{r}.$$

Potentiaalikehitelmän 2.12 asteluvun $n = 0$ vastaava termi on

$$V_0(\phi, \lambda, r) = \frac{1}{r} a_{00} P_{00}(\sin\phi) = \frac{1}{r} a_{00} P_0(\sin\phi) = \frac{a_{00}}{r},$$

josta

$$a_{00} = GM.$$

Siis a_{00} edustaa origossa sijaitsevan massapisteen tai pallosymmetrisen massajakauman voimakenttää. Korkeammat pallofunktiokertoimet ovat ”häiriöitä” tämän päälle.

Ensimmäisen asteen kerrointen kehitelmä on seuraavan näköinen:

$$V_1(\phi, \lambda, r) = \frac{1}{r^2} \left(a_{11} \cos\phi \cos\lambda + b_{11} \cos\phi \sin\lambda + a_{10} \sin\phi \right).$$

Kirjoita tämä vektorimuotoon käyttämällä sijaintivektorin lauseketta

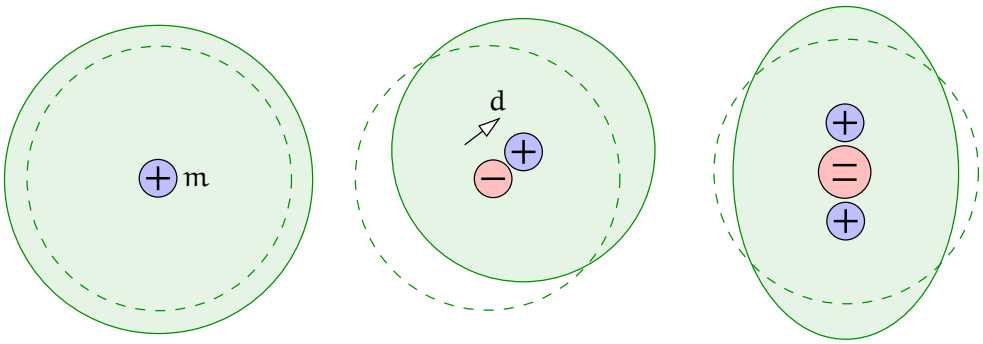
$$\mathbf{r} = (r \cos\phi \cos\lambda)\, \mathbf{i} + (r \cos\phi \sin\lambda)\, \mathbf{j} + (r \sin\phi)\, \mathbf{k}$$

— jossa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ on euklidisen avaruuden ortonormaali kanta — tuloksena

$$V_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} \langle (a_{11}\mathbf{i} + b_{11}\mathbf{j} + a_{10}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r} \rangle.$$

Dipolin potentiaalikenttä on

$$V(\mathbf{r}) = \frac{G}{r^3} \langle \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} \rangle,$$



KUVA 3.5. Monopoli, dipoli ja kvadrupoli Maan keskuksessa sekä niiden vaikutukset geoidiin.

jossa $\mathbf{d}$ on dipolimomentti. Vertailemalla saa

$$a_{11}\mathbf{i} + b_{11}\mathbf{j} + a_{10}\mathbf{k} = G\mathbf{d},$$

siis ensimmäisen asteluvun $n = 1$ pallofunktiokertoimet edustavat Maan gravitaatiokentän *dipolimomenttia*.

Jokaisen maapallomme massa-alkion dm voidaan katsoa koostuvan

- *monopolista* koordinaattijärjestelmän origossa, suuruus dm
- *dipolista*, suuruus $\mathbf{r}\,dm$, jossa $\mathbf{r}$ on massa-alkion sijaintivektori.

Silloin voimme laskea koko maapallon dipolimomentin integroimalla:

$$\mathbf{d}_\oplus = \iiint_\oplus \mathbf{r}\,dm = \iiint_\oplus \rho\mathbf{r}\,d\mathcal{V} = \iiint_\oplus \rho\,d\mathcal{V} \cdot \frac{\iiint_\oplus \rho\mathbf{r}\,d\mathcal{V}}{\iiint_\oplus \rho\,d\mathcal{V}} = M_\oplus \cdot \mathbf{r}_{mkp},$$

jossa $\mathbf{r}_{mkp}$ on määritelmän mukainen maapallon *massakeskipisteen* paikka. Tästä seuraa, että jos valitsemme koordinaattijärjestelmämme niin, että origo on Maan massakeskipisteessä, pallofunktiokertoimet a_{11}, b_{11} ja a_{10} *häviävät*. Jos satelliittien liikeyhtälöt on formuloitu tietyssä koordinaattijärjestelmässä, kuten GPS-satelliittien tapauksessa WGS84-järjestelmässä, on järjestelmän origo automaattisesti Maan massakeskipisteessä, ja ensimmäisen asteluvun pallofunktiokertoimet ovat oikeasti nolla.

Sama logiikka pätee korkeammille pallofunktioiden asteluvuille. Asteluvun 2 kertoimet edustavat maapallon *kvadrupolimomenttia* — mikä vastaa sen hitaustensoria — ja niin edelleen.

3.5 Funktion hajottaminen[5] asteosuuksiin

Pintapallofunktioille on olemassa hyödyllinen integraaliyhtälö, jos vastaava funktio f pallon pinnalla on annettu. Yhtälö on Heiskasen ja Moritzin (1967) yhtälö 1-71, käyttämällä notaatiotamme $Y_n \to f_n$:

$$f_n(\phi,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_\sigma f(\phi',\lambda')\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma', \tag{3.9}$$

jossa ψ on geosentrinen kulmaetäisyys laskentapisteen (ϕ,λ) ja liikkuvan data- eli integrointipisteen (ϕ',λ') välillä, katso kuva 8.2. Tässä *asteosuusyhtälössä* 3.9 on tietty samanlaisuus projektio- eli kerroinlaskentayhtälön B.11 kanssa. Tässä ei kuitenkaan lasketa spektraalikertoimia, vaan "spektraaliosuusfunktioita" f_n.

Palautamme mieleen funktioiden f_n keskeisen ominaisuuden

$$f(\phi,\lambda) = f(\phi,\lambda,R) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\phi,\lambda)$$

pallon $r = R$ pinnalla.

Asteosuusyhtälön todistamiseksi valitaan ilman yleispätevyyden menetystä laskentapiste (ϕ,λ) koordinaattijärjestelmän "pohjoisnavaksi" eli $\phi = 90°$. Silloin $\phi' = 90° - \psi$. Kirjoittamalla yhtälön 2.12 tavoin:

$$f(\phi',\lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\cos\psi)\,(a_{nm}\cos m\lambda' + b_{nm}\sin m\lambda'),$$

sijoittamalla tämä asteosuusyhtälöön 3.9 ja käyttämällä hyväksi Le-

[5] Tai hajoittaminen, katso Kolehmainen (2008).

gendren funktioiden ortogonaalisuutta saadaan oikeaksi puoleksi:

$$I_R = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_\sigma f(\phi', \lambda')\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \\ = \frac{2n+1}{4\pi} a_{n0} \iint_\sigma P_n^2(\cos\psi)\, d\sigma'.$$

Seuraavaksi yhtälön 3.6 avulla

$$I_R = \frac{2n+1}{4\pi} a_{n0} \frac{4\pi}{2n+1} = a_{n0} = a_n.$$

Asteosuusyhtälön vasemmaksi puoleksi saadaan, koska oletetulla pohjoisnavalla $\phi = 90°$ ja siis $\sin\phi = 1$:

$$I_L = f_n(\phi, \lambda) = f_n(90°, \lambda) = \\ = \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(1)\,(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda) = P_{n0}(1)\, a_{n0} = a_n,$$

käyttämällä yhtälöä 2.11 ja

$$P_{n0}(1) = 1,$$
$$P_{nm}(1) = 0, \qquad m \neq 0.$$

Kun tämä pätee jokaiselle pisteelle (ϕ, λ), seuraa, että asteosuusyhtälö 3.9 on yleisesti tosi. Huomaa, että kerrointen a_n arvot riippuvat pisteen valinnasta!

3.6 Eri suureiden spektraaliesitykset

3.6.1 Potentiaali

Lähtien yhtälöstä 2.10 kirjoitamme geopotentiaalin V *spektraaliesityksen* avaruudessa:

$$V(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} V_n(\phi, \lambda), \tag{3.10}$$

jossa asteosuudet V_n ovat

$$V_n(\phi,\lambda) = \frac{Y_n(\phi,\lambda)}{R^{n+1}} = \\ = \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\,(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda) = \\ = \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{m=-n}^{n} \nu_{nm} Y_{nm}(\phi,\lambda).$$

Tässä kantafunktiot Y_{nm} on määritelty yhtälössä 3.3:

$$Y_{nm}(\phi,\lambda) = \begin{cases} P_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda & \text{jos } m \geqslant 0, \\ P_{n|m|}(\sin\phi)\sin|m|\,\lambda & \text{jos } m < 0, \end{cases}$$

ja kertoimet, yhtälö 3.4:

$$\nu_{nm} = \begin{cases} a_{nm} & \text{jos } m \geqslant 0, \\ b_{n|m|} & \text{jos } m < 0. \end{cases}$$

Maan pinnalla ($r = R$) tämä antaa

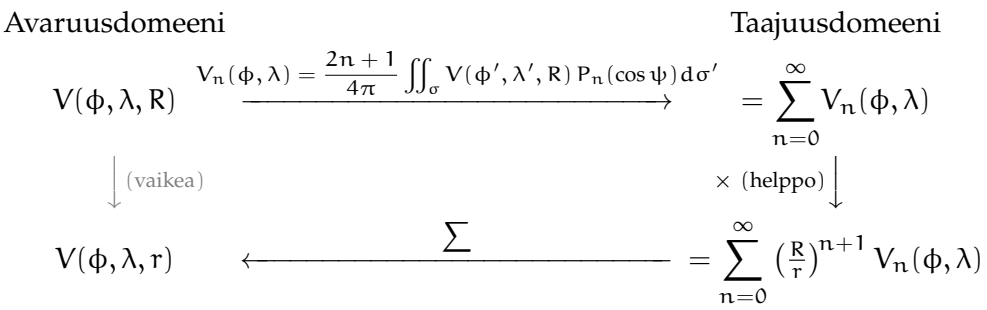
$$V(\phi,\lambda,R) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(\phi,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{m=-n}^{n} \nu_{nm} Y_{nm}(\phi,\lambda). \qquad (3.11)$$

Voimme yhdistää löytyneet yhteydet *kommutoivaksi kaavioksi* 3.6. Aivan kuten osiossa 2.2 suorakulmaiselle geometrialle, nähdään, että potentiaalifunktion V siirtäminen pallotasosta R tasoon $r = R + H$ on olennaisesti helpompaa taajuusdomeenissa — asteosuudet $V_n(\phi,\lambda)$ — kuin avaruusdomeenissa.

3.6.2 Gravitaatio

Neumannin[6] reuna-arvotehtävässä ratkaistaan funktio V, jonka normaaliderivaatta $\frac{\partial}{\partial n}V$ on annettu suljetulla pinnalla avaruudessa, esimerkiksi kappaleen pinnalla. [6]

[6] Carl Gottfried Neumann (1832–1925) oli saksalainen matemaatikko, joka tutki Dirichletin reuna-arvotehtävää.



KUVA 3.6. Harmonisen kentän V pystysuuntainen eli säteittäinen siirto avaruus- ja taajuus- eli astelukudomeeneissa. Pallogeometria.

Jos kappale on *pallo*, saa olettaa $\frac{\partial}{\partial n}V = \frac{\partial}{\partial r}V$ ja käyttää pallofunktiokehitelmiä. Differentioimalla yhtälö 3.10 saadaan

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} V_n(\phi,\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} V_n(\phi,\lambda).$$

Merenpinnalla tämä merkitsee

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{R} V_n(\phi,\lambda).$$

Jos kirjoitetaan myös merenpinnalla *gravitaatiolle*

$$g(\phi,\lambda,R) \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\phi,\lambda),$$

seuraa analogisesti, että

$$g_n(\phi,\lambda) = -\frac{n+1}{R} V_n(\phi,\lambda),$$

ja kääntäen, että

$$V_n(\phi,\lambda) = -\frac{R}{n+1} g_n(\phi,\lambda).$$

Tuloksena saadaan erään Neumannin tehtävän *ratkaisun spektraaliesitys*:

$$V(\phi,\lambda,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} V_n(\phi,\lambda) = -R\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{g_n(\phi,\lambda)}{n+1}. \quad (3.12)$$

Gravitaatiolle voi kirjoittaa analogisesti potentiaalin lausekkeen 3.11 kanssa:

$$g(\phi,\lambda,R) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\phi,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\sum_{m=-n}^{n} g_{nm}Y_{nm}(\phi,\lambda), \quad (3.13)$$

ja vertailu antaa johdonmukaisesti

$$g_{nm} = -\frac{n+1}{R}v_{nm}. \quad (3.14)$$

Tämä on mielenkiintoinen ja miettimisen arvoinen tulos:

1) Ensiksikin huomaa, kuinka yksinkertainen yhteys 3.14 potentiaalin v_{nm} ja gravitaation g_{nm} välillä on taajuusdomeenissa!
2) Toisekseen, jos käytettävissä on koko maapallon pinnalta gravitaation kiihtyvyyden mittausarvoja $g(\phi,\lambda)$, voisimme johtaa niistä asteosuusfunktiot $g_n(\phi,\lambda)$ aiemmin esitetyn menetelmän avulla. Sen jälkeen voimme saada ratkaisun yhtälön 3.12 avulla koko maapallon ulkopuoliselle geopotentiaalikentälle! Tämä on geopotentiaalin määrityksen — tai geoidimäärityksen — perusajatus spektraalinäkökulmasta.

3.7 Usein käytetyt pallofunktiokehitelmät

Tarjolla olevista globaaleista pallofunktiokehitelmistä mainittakoon jo vanhentunut malli EGM96. Sen kehittivät Ohion valtionyliopiston tutkijat käyttämällä hyvin laajaa, Yhdysvaltojen NIMAn (*National Imagery and Mapping Agency*, entinen *Defense Mapping Agency* DMA, nykyinen *National Geospatial-Intelligence Agency* NGA) keräämää maailmanlaajuista ja pääasiassa gravimetrista aineistoa. Tämä kehitelmä menee asteluvulle 360 saakka. Sen standardiesitystapa[7] on

[7]

$$V = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 + \sum_{n=2}^{360}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} \overline{P}_{nm}(\sin\phi)\left(\overline{C}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda\right)\right). \quad (3.15)$$

Tällainen esitystapa, jossa etumerkki ”+” on kehitelmän edessä, joka alkaa asteluvusta $n = 2$, ykkönen suluissa, mikä edustaa origossa olevaa, Maan kokonaismassan suuruista pistemassaa, ja kertoimet $\overline{C}$ ja $\overline{S}$ ovat dimensiottomia ja ”täysin normalisoituina”, on teollisuusstandardi globaalissa tutkimusyhteisössä, joka harjoittaa pallofunktiokehitelmien laskemista Maan gravitaatiokentän malleiksi. Uranuurtaja on ollut professori Richard H. Rapp Ohion valtionyliopistosta, ja siksi malleja kutsutaan usein OSU-malleiksi.

Yleensä näissä malleissa alemmat termit — $2 \leqslant n \leqslant 20$ — johdetaan pääasiallisesti satelliittiratojen häiriöiden analysoinnista. Siksi mallit ovat koordinaattijärjestelmässä, jonka origo on Maan massakeskipisteessä. Tämä selittää ensimmäisen asteluvun kerrointen puuttumisen, kuten aiemmin selostettiin.

Korkeammat kertoimet — $20 < n \leqslant 360$ — olivat ennen vuotta 2000 pääosin sekä painovoima-aineistojen (maa-alueet) että satelliittialtimetriadatan (valtameret) analyysin tulosta. Painovoimasatelliittien CHAMP, GRACE ja GOCE laukaisujen jälkeen ja niiden mittausten seurauksena on nykyisin ainakin astelukuväli $20 < n \leqslant 200$ avaruusgeodesian tuotos. Vieläkin korkeammat asteluvut tulevat edelleen maanpäällisestä datasta. Uudempi malli EGM2008 (Pavlis ym., 2012) pääsee jopa asteluvulle 2159 saakka.

Taulussa 3.5 annetaan EGM96-mallin ensimmäisiä ja viimeisiä kertoimia. EGM96 on tuorein ja paras pallofunktiomalli painovoimasatelliittimissioiden edeltävältä ajalta. Taulukoidut arvot ovat n, m, $\overline{C}_{nm}$, $\overline{S}_{nm}$ ja molempien kerrointen keskivirheet niiden laskennasta. Huomaa, että kaikki $\overline{S}_{n0}$ häviävät!

[7] Käytetyt symbolit ovat $a = a_\oplus$, joka merkitsee Maan vertausellipsoidin päiväntasaajasädettä eikä R, ja ϕ, joka merkitsee *geosentristä* leveysastetta. Koordinaatit (ϕ, λ, r) muodostavat pallokoordinaattijärjestelmän.

Joskus myös ei-normalisoituja kertoimia käytetään ja kirjoitetaan

$$V = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\left(J_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\sin m\lambda\right)\right). \tag{3.16}$$

Silloin kirjoitetaan $J_n \overset{\text{def}}{=} J_{n0}$. Kerroin J_2 on tärkein, maapallon litistyneisyyttä ilmaiseva Maan painovoimakentän pallofunktiokerroin. Yhtälöiden 3.7 ja 3.8 perusteella yhteys parametreihin $\overline{C}, \overline{S}$ on

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} J_{n0} \\ K_{n0} \end{Bmatrix} &= -\sqrt{2n+1}\begin{Bmatrix} \overline{C}_{n0} \\ \overline{S}_{n0} \end{Bmatrix}, \\
\begin{Bmatrix} J_{nm} \\ K_{nm} \end{Bmatrix} &= -\sqrt{2\,(2n+1)\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\begin{Bmatrix} \overline{C}_{nm} \\ \overline{S}_{nm} \end{Bmatrix}, \qquad m \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

3.8 Ellipsoidifunktiot

Laplacen differentiaaliyhtälö 1.13 voidaan kirjoittaa ja ratkaista pallokoordinaattien sijaan ellipsoidisiin koordinaatteihin. Tulos tunnetaan ellipsoidifunktiokehitelmänä[8] (engl. *ellipsoidal harmonics*). Menetelmää käytetään vähän, koska tarvittava matematiikka on monimutkaisempaa. Myös ellipsoidiset koordinaatit ovat lähinnä teoreettisesti kiinnostavia eivätkä geodesiassa laajassa käytössä.

Esitystapa on

$$\begin{aligned}
&V(\beta,\lambda,u) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)}P_{nm}(\sin\beta)\left(A^e_{nm}\cos m\lambda + B^e_{nm}\sin m\lambda\right),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

jossa $Q_{nm}(z)$ ovat *toisen lajin Legendren funktiot*, joista pieni näyte löytyy taulukosta 3.6. Vaikka yleinen argumentti z on kompleksinen, yhtälö

[8] Tämä kehitelmä pyörähdysellipsoidille eroaa Lamén funktioihin perustuvasta kehitelmästä, joka pätee kolmiakselisen ellipsoidin tapauksessa.

TAULU 3.5. EGM96-pallofunktiokehitelmän kertoimia ja keskivirheitä.

n	m	$\overline{C}_{nm}$	$\overline{S}_{nm}$	$\overline{C}_{nm}$:n keskivirhe	$\overline{S}_{nm}$:n keskivirhe
2	0	−0.484165371736E−03	0.000000000000E+00	0.35610635E−10	0.00000000E+00
2	1	−0.186987635955E−09	0.119528012031E−08	0.10000000E−29	0.10000000E−29
2	2	0.243914352398E−05	−0.140016683654E−05	0.53739154E−10	0.54353269E−10
3	0	0.957254173792E−06	0.000000000000E+00	0.18094237E−10	0.00000000E+00
3	1	0.904627768605E−06	0.248513158716E−06	0.13965165E−09	0.13645882E−09
3	2	0.904627768605E−06	−0.619025944205E−06	0.10962329E−09	0.11182866E−09
3	3	0.721072657057E−06	0.141435626958E−05	0.95156281E−10	0.93285090E−10
4	0	0.539873863789E−06	0.000000000000E+00	0.10423678E−09	0.00000000E+00
4	1	−0.536321616971E−06	−0.473440265853E−06	0.85674404E−10	0.82408489E−10
4	2	0.350694105785E−06	0.662671572540E−06	0.16000186E−09	0.16390576E−09
4	3	0.990771803829E−06	−0.200928369177E−06	0.84657802E−10	0.82662506E−10
4	4	−0.188560802735E−06	0.308853169333E−06	0.87315359E−10	0.87852819E−10
5	0	0.685323475630E−07	0.000000000000E+00	0.54383090E−10	0.00000000E+00
5	1	−0.621012128528E−07	−0.944226127525E−07	0.27996887E−09	0.28082882E−09
5	2	0.652438297612E−06	−0.323349612668E−06	0.23747375E−09	0.24356998E−09
5	3	−0.451955406071E−06	−0.214847190624E−06	0.17111636E−09	0.16810647E−09
5	4	−0.295301647654E−06	0.496658876769E−07	0.11981266E−09	0.11849793E−09
5	5	0.174971983203E−06	−0.669384278219E−06	0.11642563E−09	0.11590031E−09
6	0	−0.149957994714E−06	0.000000000000E+00	0.14497863E−09	0.00000000E+00
6	1	−0.760879384947E−07	0.262890545501E−07	0.22415138E−09	0.21957296E−09
6	2	0.481732442832E−07	−0.373728201347E−06	0.27697363E−09	0.28105811E−09
6	3	0.571730990516E−07	0.902694517163E−08	0.19432407E−09	0.18682712E−09
6	4	−0.862142660109E−07	−0.471408154267E−06	0.15229150E−09	0.15328004E−09
6	5	−0.267133325490E−06	−0.536488432483E−06	0.89838470E−10	0.87820905E−10
6	6	0.967616121092E−08	−0.237192006935E−06	0.11332010E−09	0.11518036E−09
⋮	⋮				
360	358	0.709604781531E−10	0.691761006753E−10	0.50033977E−10	0.50033977E−10
360	359	0.183971631467E−10	−0.310123632209E−10	0.50033977E−10	0.50033977E−10
360	360	−0.447516389678E−24	−0.830224945525E−10	0.50033977E−10	0.50033977E−10

3.18 antaa reaaliarvoisen tuloksen reaaliarvoisten kerrointen A^e_{nm}, B^e_{nm} tapauksessa.

Yllä olevan yhtälön 3.18 johtamisesta kiinnostuneet löytävät sen kirjasta Heiskanen ja Moritz (1967) osio 1-20 tai muista potentiaaliteorian oppikirjoista.

TAULUKKO 3.6. Toisen lajin Legendren funktioita.

$$Q_0(z) = \tfrac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}$$
$$Q_1(z) = \tfrac{1}{2}z\ln\frac{z+1}{z-1} - 1$$
$$Q_2(z) = \left(\tfrac{3}{4}z^2 - \tfrac{1}{4}\right)\ln\frac{z+1}{z-1} - \tfrac{3}{2}z$$
$$Q_3(z) = \left(\tfrac{5}{4}z^3 - \tfrac{3}{4}z\right)\ln\frac{z+1}{z-1} - \tfrac{5}{2}z^2 + \tfrac{2}{3}$$

$$(n+1)Q_{n+1}(z) - (2n+1)\,zQ_n(z) + nQ_{n-1}(z) = 0$$

$$Q_{nm}(z) = \left(1-z^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}Q_n(z)$$

3.8.1 *Kehitelmän skaalaus standardimuotoon*

Oletetaan, että origo on Maan massakeskipisteessä, jolloin $A^e_{10} \approx 0$, $A^e_{11} \approx 0$, $B^e_{11} \approx 0$.

Voidaan myös näyttää, että kehitelmässä 3.18 ensimmäinen kerroin on oltava

$$A^e_{00} = A^e_0 = \frac{GM_\oplus}{E}\arctan\frac{E}{b}$$

ja kehitelmä erikoistuneena pyörähdyssymmetriselle kentälle on

$$V^*(\beta,u) = \sum_{n=0}^{\infty} V^*_n(\beta,u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_n\left(i\frac{b}{E}\right)}A^{e*}_{n0}\,P_n(\sin\beta). \tag{3.19}$$

Myös

$$V_0(u) = V^*_0(u) = \frac{Q_0\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_0\left(i\frac{b}{E}\right)}\frac{GM_\oplus}{E}\arctan\frac{E}{b},$$

gravitaatiopotentiaali, joka liittyy kentän osuuteen, jonka ellipsoidinen asteluku on nolla.

Sijoituksilla (Heiskanen ja Moritz, 1967, sivu 66)

$$Q_0\left(i\frac{u}{E}\right) = -i\arctan\frac{E}{u}, \qquad Q_0\left(i\frac{b}{E}\right) = -i\arctan\frac{E}{b} \tag{3.20}$$

saadaan

$$V_0(u) = V^*_0(u) = \frac{GM_\oplus}{E}\arctan\frac{E}{u}. \tag{3.21}$$

Tämä vastaa pallofunktiokehitelmän ”keskeiskenttää” $GM_\oplus/r$, jonka avulla voidaan *skaalata* yhtälö 3.18 sijoittamalla yllä olevat identiteetit

3.20. Kertoimet tulee jakaa vakiolausekkeella

$$\frac{GM_\oplus}{E} \arctan\frac{E}{b},$$

kun keskeiskenttä, lauseke 3.21, siirretään kehitelmän ulkopuolelle. Tulos on

$$V(\beta,\lambda,u) = \frac{GM_\oplus}{E}\arctan\frac{E}{u}\cdot \\ \cdot\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\arctan\frac{E}{b}}{\arctan\frac{E}{u}}\frac{Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)}\overline{P}_{nm}(\sin\beta)\left(\overline{C}^{e}_{nm}\cos m\lambda+\overline{S}^{e}_{nm}\sin m\lambda\right)\right),$$

jossa olemme samalla siirtyneet täysin normalisoituihin kertoimiin $\overline{C}^{e}_{nm}$, $\overline{S}^{e}_{nm}$ ja Legendren funktioihin $\overline{P}_{nm}(\sin\beta)$.

Tämä on ellipsoidifunktiokehitelmä, joka vastaa standardimuotoista pallofunktiokehitelmää 3.15, jossa Maan kokonaismassa on sulkujen ulkopuolella ja kertoimet dimensiottomia. Tätä yhtälöä ei ole tiettävästi käytetty käytännön geopotentiaalilaskentaan missään.

3.8.2 *Rappin ja ellipsoidisen kehitelmän vastaavuus*

Voimme osoittaa pallofunktiokehitelmien 3.15 ja 3.16 sekä ellipsoidisen kehitelmän 3.18 vastaavuuden, jos Maan litistyneisyys $\to 0$ ja siis myös $b \to a$, $\beta \to \phi$ ja $u \to r$. Oletamme, että Heiskasen ja Moritzin (1967) yhtälö 1-112,

$$\lim_{E\to 0}\frac{Q_{nm}\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i\frac{b}{E}\right)} = \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$$

pätee. Sijoitus yhtälöön 3.18 antaa

$$V(u,\beta,\lambda) = V(r,\phi,\lambda) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_{nm}(\sin\phi)\left(A^{e}_{nm}\cos m\lambda + B^{e}_{nm}\sin m\lambda\right), \quad (3.22)$$

mikä identifioimalla $A^e_{00} = GM_\oplus/a$, $A^e_{10} = A^e_{11} = B^e_{11} = 0$ ja yhteyksien 3.17 kanssa saa kirjoittamaan

$$\begin{Bmatrix} A^e_{n0} \\ B^e_{n0} \end{Bmatrix} = -\frac{GM_\oplus}{a} \begin{Bmatrix} J_{n0} \\ K_{n0} \end{Bmatrix} = \frac{GM_\oplus}{a}\sqrt{(2n+1)} \begin{Bmatrix} \overline{C}_{n0} \\ \overline{S}_{n0} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} A^e_{nm} \\ B^e_{nm} \end{Bmatrix} = -\frac{GM_\oplus}{a} \begin{Bmatrix} J_{nm} \\ K_{nm} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{GM_\oplus}{a}\sqrt{2\,(2n+1)\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \begin{Bmatrix} \overline{C}_{nm} \\ \overline{S}_{nm} \end{Bmatrix}, \qquad m \neq 0.$$

Sijoitus yhtälöön 3.22 vahvistaa sen vastavuutta pallofunktioiden yhtälöiden 3.15 ja 3.16 kanssa.

3.8.3 *Ellipsoidifunktiokehitelmän käytön edut*

- Normaaligravitaatiopotentiaalin ilmaisu on tässä esitystavassa yksinkertainen, katso Heiskanen ja Moritz (1967) yhtälö 2-56. Saman kentän pallofunktiokehitelmä sen sijaan vaatii teoreettisesti äärettömän monta kerrointa — vaikka käytännössä vain 3–4. Kehitelmä kertoimiin J_6 tai J_8 saakka riittää.
- Litistyneella maapallolla suppenemiskäyttäytyminen on parempi. Tämä siksi, että Maan litistyneisyyden takia päiväntasaaja on noin 21 km kauempana Maan keskipisteestä kuin navat. Erityisesti korkean asteluvun pallofunktioilla on vaikeuksia supeta tehokkaasti yhtaikaa sekä napa- että päiväntasaaja-alueille. Tämä ongelma on pahin erittäin korkea-asteisille pallofunktiokehitelmille (esimerkiksi Wenzel, 1998). Jo asteluvun 360 pallofunktion puoliaallonpituus on vain 55 km!

3.8.4 *Ellipsoidifunktiokehitelmän käytön huono puoli*

Ellipsoidifunktiokehitelmän laskeminen on pallofunktiokehitelmää selvästi työläämpää ja siis kalliimpaa mitattuna tietokoneresursseissa.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä ovat asteluku ja järjestysluku pallofunktiokehitelmässä? Miten ne liittyvät kehitelmän *erotuskykyyn* Maan pinnalla?
2) Mitä pallofunktioiden tyyppejä on olemassa? Kuvaile niiden riippuvuutta leveys- ja pituusasteista.
3) Montako kertaa pintapallofunktio $Y_{nm}(\phi, \lambda)$ vaihtaa etumerkkiään, kun matkustetaan meridiaania pitkin etelänavalta pohjoisnavalle? Ja montako kertaa se vaihtaa etumerkkiään, kun matkustetaan maapallon ympäri päiväntasaajaa pitkin?
4) Mitä merkitsee sanonta, että funktiopari on keskenään ortogonaali? Anna kahden funktion välisen *skalaaritulon* mahdollinen määritelmä.
5) Miten pallofunktioiden vaimennus korkeuden mukaan käyttäytyy? Miksi painovoimasatelliitti, joka yrittää kartoittaa Maan painovoimakenttää suurella erotuskyvyllä, lentää mahdollisimman matalalla radalla?
6) Mitä asteosuusyhtälö kertoo?
7) Mitkä pallofunktiokertoimet liittyvät Maan massajakauman dipolimomenttiin? Miksi ne puuttuvat taulusta 3.5?

Harjoitus 3−1: Pallofunktiokehitelmän vaimennus korkeuden mukaan

Jos

$$V(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} V_n(\phi, \lambda),$$

voidaan kutsua

$$\frac{V_n(\phi, \lambda, r)}{V_n(\phi, \lambda)} = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$$

potentiaalin *vaimennuskertoimeksi* korkeuden mukaan.

Differentioimalla säteen r suhteen saadaan

$$\frac{\partial V_n(\phi,\lambda,r)}{\partial r} = -\frac{n+1}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} V_n(\phi,\lambda), \tag{3.23}$$

eli koska merenpinnalla vastaavasti

$$\left.\frac{\partial V_n(\phi,\lambda,r)}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{n+1}{R} V_n(\phi,\lambda), \tag{3.24}$$

seuraa, että *vetovoiman* vaimennuskerroin on lausekkeiden 3.23 ja 3.24 suhde:

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}.$$

1) Piirra *loglineaarinen grafiikka* sekä potentiaalin että vetovoiman vaimennuskertoimista arvoille $n = 0, 1, 2, \ldots, 100$ joko käsin tai koneellisesti. Valitse $R = 6378\,\text{km}$, $r = 7378\,\text{km}$ — korkeus 1000 km maanpinnan yläpuolella.
2) Tämän perusteella, jos satelliitti on 1000 km maanpinnan yläpuolella, millä asteluvulla n ovat vetovoiman kiihtyvyydet $\frac{\partial}{\partial r} V_n(\phi,\lambda,r)$ satelliitin korkeudella pienemmät kuin 1 % siitä, mitä ne ovat Maan pinnalla?
3) Millä asteluvulla n ne ovat pienemmät kuin $10^{-4}\times$ siitä, mitä ne ovat Maan pinnalla?

Harjoitus 3–2: Pallofunktioiden symmetriat

Katso yhtälö 2.12. Siinä $P_{nm}(\sin\phi) = P_{nm}(t)$ on *vain leveysasteen* ϕ *funktio.* Kun ϕ kulkee etelänavalta ekvaattorin kautta pohjoisnavalle, $-90° \leqslant \phi \leqslant +90°$, saavuttaa t arvot $-1 \leqslant t \leqslant +1$.

Legendren funktioille on olemassa suljettu lauseke 3.2:

$$P_{nm}(t) = \left(1-t^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t),$$

jossa $P_n(t)$ ovat tavallisia Legendren polynomeja:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^2-1\right)^n.$$

Voidaan havaita seuraavat ominaisuudet:

- Symmetrisen t-funktion differentiointi tuottaa antisymmetrisen funktion ja toisinpäin.
- funktio $(t^2 - 1)$ ja sen potenssit ovat symmetrisiä.
- Siis parillisille n-arvoille $P_n(t) = P_n(-t)$: P_n on *symmetrinen* pohjoisen ja eteläisen pallonpuoliskon välillä, ja parittomille n-arvoille $P_n(t) = -P_n(-t)$: P_n on *antisymmetrinen* pallonpuoliskojen välillä.
- Vastaavasti parillisille n, $P_n(\sin\phi) = P_n\big(\sin(-\phi)\big)$ ja parittomille n, $P_n(\sin\phi) = -P_n\big(\sin(-\phi)\big)$.

Kysymyksiä

1) Mikä on vastaava sääntö P_{nm}-funktioille, siis millä arvoilla n ja m se on symmetrinen ja millä arvoilla antisymmetrinen?
2) Täytä kaavio ($n = 0, \ldots, 5$, $m = 0, \ldots, n$) merkeillä joko 'S' (symmetrinen) tai 'A' (antisymmetrinen) jokaiselle lokerolle:

	$n=0$	1	2	3	4	5
$m=0$						
1						
2						
3						
4						
5						

3) Mikä on symmetrisyyden logiikka?
4) Jos kenttä on *peilisymmetrinen* pohjoisen ja eteläisen pallonpuoliskon välillä, siis $V(\phi, \lambda, r) = V(-\phi, \lambda, r)$, mitkä pallofunktiokertoimista a_{nm} ja b_{nm} putoavat pois sarjakehitelmästä? *Miksi*?

   Vihje: katso tämän luvun $P_{nm}(\sin\phi)$ esimerkkiyhtälöitä ja -graafeja ja yritä arvata yleinen sääntö. Sen jälkeen verifioit.
5) Sama kysymys, jos potentiaali on *pyörähdyssymmetrinen* Maan pyörähdysakselin ympärillä: $V(\phi, \lambda, r) = V(\phi, r)$.

Harjoitus 3–3: Pallofunktioiden etumerkkialueet

Osiossa 3.1 nähtiin, että Legendren liitännäisfunktioilla $P_{nm}(t)$ on tarkasti $n - m + 1$ etumerkkiväliä määrittelyvälillään $\phi \in [-90°, 90°]$. Voimme näyttää, että molemmat funktiot $\cos m\lambda$ ja $\sin m\lambda$ menevät $2m$ kertaa nollan läpi ja niillä on $2m$ etumerkkiväliä määrittelyvälillään $\lambda \in [0, 360°)$, jonka oletaan olevan suljettu kehä. Montako *etumerkkialuetta* — harmaita tai valkoisia, näkyvissä tai peitossa — on kuvassa 3.3 olemassa jokaiselle pintapallofunktiolle

$$Y_{nm}(\phi, \lambda) = \begin{cases} P_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda & \text{jos } m \geqslant 0, \\ P_{n|m|}(\sin\phi)\sin|m|\lambda & \text{jos } m < 0 \end{cases} \qquad ?$$

Harjoitus 3–4: Pakonopeus

1) Annettuna pallosymmetrinen planeetta, massa GM, säde R, jonka pinnalta tykki ampuu luoteja lentonopeudella v. Mikä on nopeuden v minimiarvo eli *pakonopeus*, jos halutaan, että luoti saavuttaa mielivaltaisen suuria etäisyyksiä poispäin planeetan pinnalta eikä koskaan enää putoa takaisin? Luodin liike-energia on $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$, jossa m on luodin massa.
2) Annettuna *kaksiulotteisessa geometriassa* ympyräsymmetrinen planeetta, massa GM, säde R. Planeetan gravitaatiokenttää esittää osion 2.3 mukainen potentiaali V. Minkä muotoinen V on ilmaistuna näissä parametreissa? Tee valistunut arvaus.
3) Ympyräplaneetan reunalla on taas tykki. Mitä voit sanoa nyt pakonopeudesta v? *Älä* yritä laskea sitä!

Normaalipainovoimakenttä

4

4.1 Normaalikentän perusajatus

Samalla tavalla kuin Maan muoto voidaan approksimoida pyörahdysellipsoidilla, voidaan Maan painovoimakenttä approksimoida kentällä, jonka eräs tasapotentiaalipinta on juuri pyörähdysellipsoidi eli *vertausellipsoidi*.

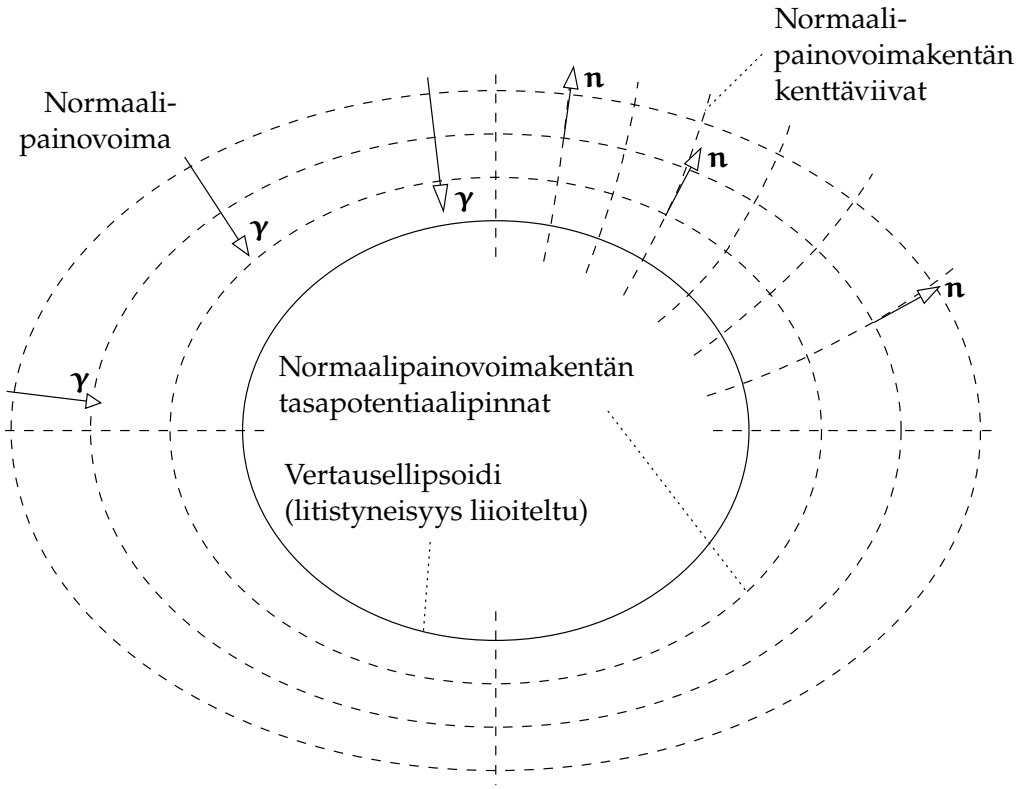
Tämä tuo mieleen loogisen ajatuksen: miksei määritellä keskenään yhteensopiva vertausellipsoidi ja malligeopotentiaali eli *normaalipotentiaali*, jonka eräs tasapotentiaalipinta vertausellipsoidi on? Sen jälkeen saadaan *painovoimakaava* normaalipotentiaalista ottamalla sen gradientti.

Tämän jälkeen voimme määritellä *anomaalisia* suureita, kuten häiriöpotentiaali ja painovoima-anomalia, jotka ovat keskenään yhteensopivia — ja numeerisesti paljon pienempiä.

Olkoon normaalipotentiaali $U(x, y, z)$. Silloin normaalipainovoima on

$$\gamma\,(x, y, z) = \|\boldsymbol{\gamma}\| = \|\nabla U\| = -\langle \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n} \rangle = -\frac{\partial U}{\partial n},$$

jossa $\frac{\partial}{\partial n}$ merkitsee differentiointia normaalikentän tasapotentiaalipinnan — sekin ellipsoidipinta — ulkoisen normaalin $\mathbf{n}$ suuntaan, katso kuva 4.1. Tämä suunta poikkeaa painovoimakentän tasapotentiaalipintojen normaalin eli *luotiviivan* suunnasta *luotiviivan poikkeaman* verran. Tämä luotiviivan poikkeama on myös hyvin pieni kulma.

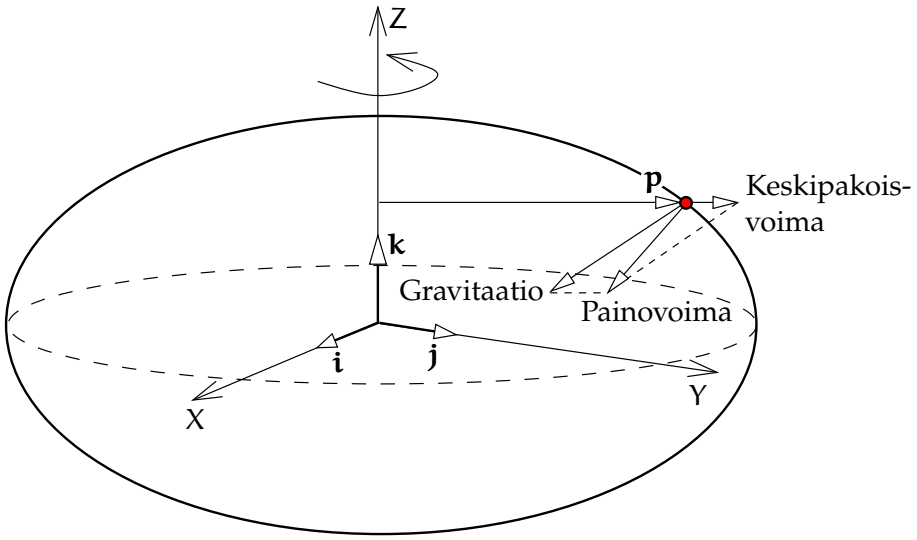


KUVA 4.1. Maan normaalipainovoimakenttä.

Seuraavassa osiossa nähdään, että Maan pyörähdysliikkeen aiheuttama näennäisvoima voidaan Maan mukana pyörivässä järjestelmässä kuvata *pyörähdyspotentiaalin* — keskipakoispotentiaalin — Φ avulla. Myös normaalipotentiaali U määritellään niin, että pyörähdyspotentiaali Φ on sen osa: normaalipotentiaali on *painovoimakentän* eikä *gravitaatiokentän* vertauspotentiaali. Jos käytetään normaali*gravitaatio*potentiaalille merkintää V^* — harvoin käytetty suure geodesiassa — normaali*painovoima*potentiaali eli *normaalipotentiaali* U on

$$U = V^* + \Phi,$$

jossa Φ on keskipakoispotentiaali. Siis V^*, kuten V, on määritelty eipyörivässä eli inertiaalisessa järjestelmässä, kun taas U, kuten W, on



KUVA 4.2. Gravitaatio ja keskipakoisvoima.

määritelty maapallon mukana pyörivässä (ei-inertiaalisessa) järjestelmässä. Samalla tavalla kuin sana *painovoima* viittaa maapallon mukana pyörivässä järjestelmässä toimivaan voimaan, inertiaalisessa järjestelmässä käytetään sanaa *gravitaatio* eli vetovoima.

4.2 Keskipakoisvoima ja sen potentiaali

Maan pyörähdysliike vaikuttaa painovoimakenttään. Inertiaalisessa vertausjärjestelmässä puhutaan gravitaatiosta ja gravitaatiopotentiaalista V, kun Maan pinnalla, ei-inertiaalisessa eli *mukana pyörivässä* järjestelmässä, puhutaan *painovoimasta* ja *painovoimapotentiaalista* W. Pyörähdysliikkeen ja sen keskipakoisvoiman takia kyse on eri asioista. Katso kuva 4.2.

Keskipakoisvoiman yhtälön johtamiseksi kirjoita ensin

$$\mathbf{p} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}.$$

Vektorit $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ muodostavat (X, Y, Z)-akseleiden kanssa samansuuntaisen ortonormaalin kannan. Seuraa, että

$$p = \|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \rangle} = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Nyt keskipakoisvoima — tarkemmin keskipakoiskiihtyvyys — on

$$\mathbf{f}_\omega = \omega_\oplus^2 \, \mathbf{p} = \omega_\oplus^2 \, (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}) \,, \tag{4.1}$$

jossa $\omega_\oplus$ on Maan pyörähdysnopeus radiaaneina aikayksikössä. Jos X ja Y ovat metreinä ja $\omega_\oplus$ radiaaneina sekunnissa, saadaan $\mathbf{f}_\omega$ yksikössä $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$.

Täällä Maan pinnalla painovoimamittaukset tehdään yleensä kojeella, joka on *levossa* Maan pintaan nähden: se seuraa maapallon pyörimisliikettä. Jos koje liikkuu, on keskipakoisvoiman lisäksi otettava huomioon
1 myös toinen näennäisvoima: coriolisvoima[1]. Myös nesteet — vesi ja ilma — tuntevat Maan pinnalla, jos ne ovat levossa, vain painovoimaa, joka sisältää keskipakoisvoiman. Virtaukset tuntevat tämän lisäksi myös coriolisvoiman, joka kääntää ne sivuun ja aiheuttaa tunnettuja pyörreilmiöitä valtamerillä ja ilmakehässä, kuten pyörremyrskyjä.

Keskipakoisvoima voidaan kuvata eräänlaisen potentiaalin gradientiksi. Jos kirjoitetaan *keskipakoispotentiaaliksi*

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 \left(X^2 + Y^2\right),$$

voidaan suoraan laskea gradientti

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_\omega = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial X}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\mathbf{k} = \\ = \tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 \cdot 2X \cdot \mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 \cdot 2Y \cdot \mathbf{j} + 0 = \omega_\oplus^2 \, (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}) \,,\end{aligned}$$

mikä vastaa yllä annettua keskipakoisvoimayhtälöä 4.1.

Jos gravitaatiopotentiaaliin V lisätään keskipakoispotentiaali Φ, tulos on *painovoimapotentiaali* eli *geopotentiaali* W:

$$W = V + \Phi.$$

---

[1] Gaspard-Gustave Coriolis (1792–1843) oli ranskalainen matemaatikko, fyysikko ja koneinsinööri. Hänen nimensä on kaiverrettu Eiffel-torniin, Eiffel Tower, 72 names.

Voimme johtaa keskipakoispotentiaalista Φ myös seuraavan yhtälön differentioimalla se kahdesti:

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = \langle \nabla \cdot \mathbf{f}_\omega \rangle = \frac{\partial}{\partial X}\omega_\oplus^2 X + \frac{\partial}{\partial Y}\omega_\oplus^2 Y + \frac{\partial}{\partial Z}0 = 2\omega_\oplus^2, \quad (4.2)$$

josta seuraa, Poissonin yhtälön 1.14 kanssa,

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega_\oplus^2, \quad (4.3)$$

geopotentiaalin eli painovoimapotentiaalin Poissonin yhtälö.

Ero gravitaation ja painovoiman välillä on olennainen. Gravitaatiovoima eli gravitaation kiihtyvyys $\mathbf{g}^* = \nabla V$ on pelkkä vetovoima, kun painovoiman kiihtyvyys $\mathbf{g} = \nabla W$ on gravitaation ja keskipakoisvoiman vektorisumma. Vetovoima ja keskipakoisvoima toimivat samalla tavalla: voima on verrannollinen koekappaleen massaan. Toisin sanoen kiihtyvyys on aina sama koekappaleen massasta riippumatta. Tämä on kuuluisa *ekvivalenssiperiaate* (Galilei, Einstein), joka on todettu tarkasti paikkansa pitäväksi. Erityisesti voidaan mainita unkarilaisen Loránd Eötvösin[2] neuvokkaat kokeet. [2]

Maan päällä olevat vesimassat, samoin kuin ilmakehä ja suunnattomasti pidemmällä aikaskaalalla Maan ”kiinteä” kallio, joka muodostaa vuoristoja ja valtameren syvänteitä, tottelevat painovoimaa tekemättä eroa vetovoiman ja keskipakoisvoiman välillä. Siksi merenpinta yhtyy noin metrin tarkkuudella geopotentiaalin W *tasapotentiaalipintaan*. Myös Maan päällä korkeudet mitataan tästä pinnasta eli *geoidista*. Geoidi on Gaussin mukaan ”Maan matemaattinen muoto”.

4.3 Tasapotentiaalipinnat ja luotiviivat

Painovoimapotentiaali eli *geopotentiaali* on vakio *tasapotentiaalipinnoilla*:

$$W(x, y, z) = \text{vakio}.$$

[2] Loránd paroni Eötvös de Vásárosnamény (1848–1919) oli unkarilainen fyysikko ja gravitaation tutkija.

Olkoon $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (x, y, z)-akseleiden suuntainen ortonormaali kanta. Silloin potentiaali muuttuu yksikkövektorin

$$\boldsymbol{e} = e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}$$

suuntaan seuraavasti:

$$\frac{\partial W}{\partial e} = e_1\frac{\partial W}{\partial x} + e_2\frac{\partial W}{\partial y} + e_3\frac{\partial W}{\partial z} = \langle \boldsymbol{e} \cdot \nabla W \rangle ,$$

joka on nolla, jos ja vain jos vektorit $\boldsymbol{e}$ ja ∇W ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden. Toisin sanoen potentiaali on stationaarinen vaan suuntiin, jotka ovat kohtisuoria Maan painovoimavektoria

$$\nabla W = \mathbf{g}$$

kohtaan.

Tasapotentiaalipinnat ja painovoimavektorit eli luotiviivat ovat aina kohtisuorassa toisiinsa nähden.

4.3.1 Tasapotentiaalipintojen kaarevuus

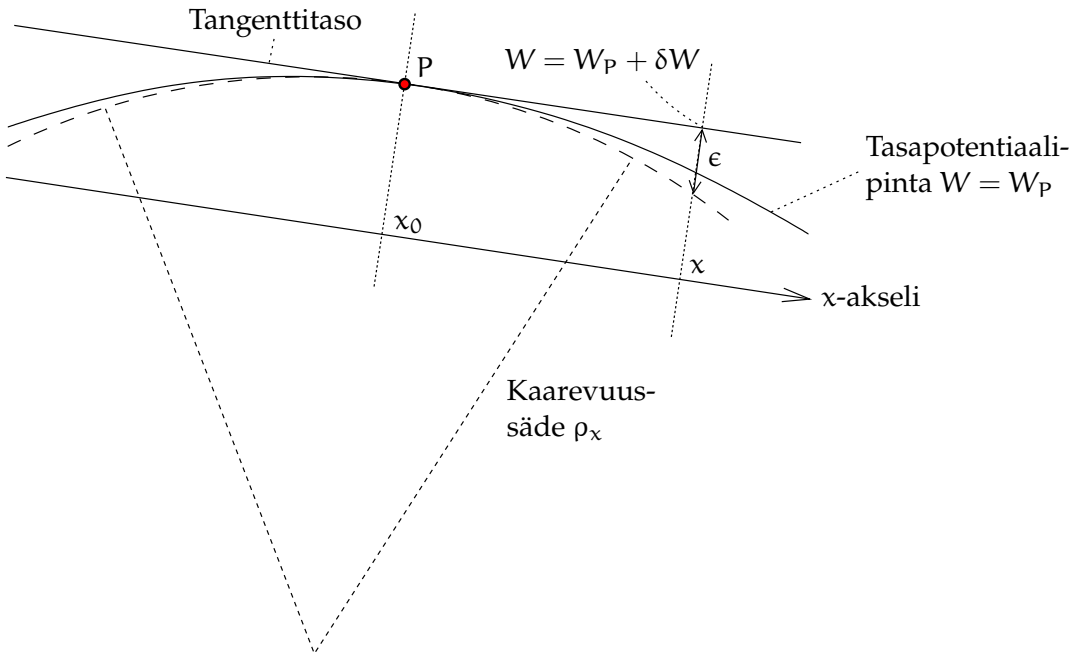
Taso, joka on pisteessä P samansuuntainen tasapotentiaalipinnan kanssa kutsutaan sen *tangenttitasoksi*, kuva 4.3. Jos tasapotentiaalipinnan paikallinen kaarevuus x-suunnassa on ρ_x ja pisteen P x-koordinaatti on x_0, voidaan kehittää pintojen välinen etäisyys Taylorin sarjaksi:

$$\epsilon \approx \frac{1}{2\rho_x}(x - x_0)^2 .$$

Tästä seuraa W-arvojen erotukseksi pintojen välillä ($g = \|\mathbf{g}\| = \|\nabla W\|$):

$$\delta W \approx -\epsilon g \approx -(x - x_0)^2 \frac{g}{2\rho_x}.$$

Differentioimalla (W on tässä geopotentiaali *tangentti- eli vaakatasolla*)
3 saadaan[3]



KUVA 4.3. Tasapotentiaalipintojen kaarevuus.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta W = \frac{\partial^2}{\partial x^2} W = \partial_{xx} W = -\frac{g}{\rho_x},$$

josta

$$\rho_x = -\frac{g}{\partial_{xx} W}.$$

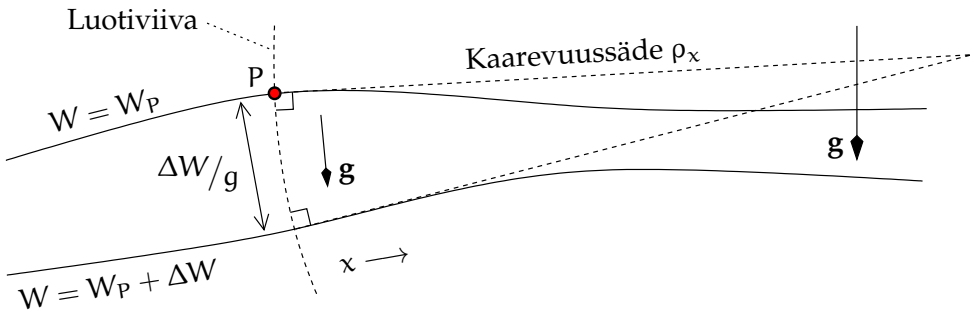
Määrittämällä kaarevuus x- ja y-suunnassa

$$K_x \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial_{xx} W}{g}, \quad K_y \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial_{yy} W}{g}, \tag{4.4}$$

saadaan keski- eli Germainin[4] kaarevuus, joka on useimmissa paikoissa positiivinen luku:

$$J = \frac{K_x + K_y}{2} = -\frac{\partial_{xx} W + \partial_{yy} W}{2g},$$

[3]Tässä käytetään kompaktia *Eulerin* osittaisderivaattien *kirjoitustapaa*, ∂_{xx}, ∂_{yy}, ∂_{zz}, joka on usein kätevä.



KUVA 4.4. Luotiviivan kaarevuus.

ja käyttämällä Poissonin yhtälöä 4.3,

$$\Delta W = \partial_{xx}W + \partial_{yy}W + \partial_{zz}W = -4\pi G\rho + 2\omega_\oplus^2,$$

saadaan

$$-2gJ + \partial_{zz}W = -4\pi G\rho + 2\omega_\oplus^2.$$

Käyttämällä

$$\partial_{zz}W = -\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial H},$$

jossa H on korkeuskoordinaatti, saadaan painovoiman pystygradientiksi (Heiskanen ja Moritz, 1967, yhtälö 2-20):

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega_\oplus^2,$$

Ernst Heinrich Brunsin löytämä yhtälö (Bruns, 1878, sivu 13).

4.3.2 *Luotiviivojen kaarevuus*

Luotiviivat ovat kaarevia, koska painovoima ei ole vakio vaakasuunnassa. Jos painovoima kasvaa vaakasuunnassa, myös tasapotentiaalipinnat

[4]Marie-Sophie Germain (1776–1831) oli nerokas ranskalainen matemaatikko, lukuteoreetikko ja elastisuuden tutkija. Hän kävi kirjeenvaihtoa Gaussin kanssa lukuteoriasta (Friedelmeyer, 2014) ja teki arvokasta pohjatyötä Fermat'n suuren lauseen todistusta varten. Hänen nimensä puuttuu Eiffel-tornista.

tulevat lähemmäksi toisiaan eivätkä ole samansuuntaisia. Tämä merkitsee, että luotiviivojen, jotka ovat kohtisuorassa kaikkiin tasapotentiaalipintohin nähden, on oltava kaarevia samaan suuntaan.

Tarkastellaan kahta tasapotentiaalipintaa, toinen potentiaalille W_P ja toinen potentiaalille $W_P + \Delta W$. Niiden välinen etäisyys on $\Delta H = {}^{\Delta W}/_{g}$. Koordinaatin x suuntainen pintojen välinen suhteellinen kallistus on

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta H(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta W}{g(x)}\right) = -\frac{\Delta W}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Jos lähtöetäisyys pintojen välillä on ΔH, tarvitaan matkaa

$$\rho_x = -\Delta H \Big/ \frac{\partial}{\partial x}\Delta H = -\left(\frac{\Delta W}{g}\right) \Big/ \left(-\frac{\Delta W}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x}\right) = g \Big/ \frac{\partial g}{\partial x}$$

saadakseen tangentit kohtaamaan, katso kuva 4.4. Luotiviivan kaarevuus on tämän käänteisluku sekä x- että y-koordinaatin suunnassa:

$$\kappa_x = \frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Voimme johtaa normaalipainovoimakentän kenttäviivojen eli *normaaliluotiviivojen* kaarevuuden samalla tavalla. Ero on kuitenkin, että painovoimalle vertausellipsoidin pinnalla löytyy yksinkertainen matemaattinen lauseke, esimerkiksi yhtälö 4.8. Hyvä approksimaatio on

$$\gamma(\varphi) \approx \gamma_a \cos^2\varphi + \gamma_b \sin^2\varphi.$$

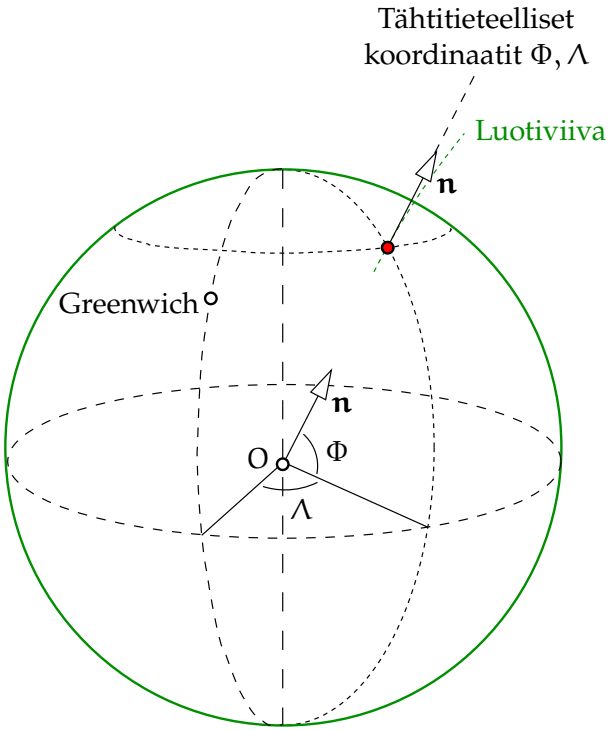
Ketjusäännön avulla

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{R}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} = \frac{1}{R}\left(-2\gamma_a \cos\varphi\sin\varphi + 2\gamma_b \sin\varphi\cos\varphi\right) = \\ = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{R}\sin 2\varphi.$$

Tämä merkitsee x- eli etelä-pohjoissuunnassa ja y- eli länsi-itäsuunnassa:

$$\kappa_x^* = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x} \approx \frac{1}{R}\frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}\sin 2\varphi, \quad \kappa_y^* = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0.$$

Tämä merkitsee myös, että normaaliluotiviivan suunta korkeudella h on $\varphi(h) = \varphi(0) + \kappa_x^* h$, jossa numeerisesti $\kappa_x^* = 0{,}171'' \,\mathrm{km}^{-1} \cdot \sin 2\varphi$ (Heiskanen ja Moritz, 1967, yhtälö 5-34).



KUVA 4.5. Luonnolliset koordinaatit Φ ja Λ. Näiden lisäksi tarvitaan luonnollinen korkeuskoordinaatti, esimerkiksi geopotentiaali W.

4.4 Luonnolliset koordinaatit

Ennen satelliittiaikakautta geosentrisiä koordinaatteja X, Y ja Z oli mahdotonta mitata suoraan. Nykyisin tämä on mahdollista, ja samalla saadaan korkeus h vertausellipsoidista, joka on puhtaasti geometrinen suure.

Aiemmin voitiin mitata vain kuvassa 4.5 näkyvä luotiviivan suunta sekä havaintopisteen ja keskimerenpinnan potentiaalien välinen ero. Luotiviivan suunta $\mathbf{n}$ mitattiin tähtitieteellisesti: tähtitieteellinen leveysaste on Φ ja pituusaste Λ. Kolmas koordinaatti, painovoimapotentiaalin ero $W(x, y, z) - W_0$ merenpinnan potentiaalin W_0 kanssa, määritettiin vaaitsemalla. Koordinaatteja Φ, Λ ja W kutsutaan *luonnollisiksi koordinaateiksi*.

Potentiaalin sijasta voidaan käyttää *ortometrista korkeutta* H. Sen määritelmä on helppo ymmärtää, jos kirjoittaa

$$\frac{\partial W}{\partial H} = -g \implies dH = -\frac{1}{g}dW \implies H_P = -\int_{W_0}^{W_P} \frac{1}{g(W)}dW, \quad (4.5)$$

jossa integraali otetaan pisteen P luotiviivaa pitkin. $\frac{\partial}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial n}$ on paikallinen tasapotentiaalipintojen normaalin eli luotiviivan suuntainen derivaatta. g on painovoiman kiihtyvyys luotiviivalla paikan — tai geopotentiaalitason — funktiona. Tässä ortometristen korkeuksien tapauksessa g on *todellinen*, kallion sisällä oleva painovoima, joka on paikan epälineaarinen funktio ja riippuu myös kallion tiheydestä. Määrittämisen hankaluus on ortometrisille korkeuksille ominaista. Tähän palataan myöhemmin (Heiskanen ja Moritz, 1967 luku 4).

Myös koordinaatit Φ, Λ ja H muodostavat luonnollisen koordinaattijärjestelmän.

4.5 Normaalipotentiaali ellipsoidisissa koordinaateissa

Olemme jo esittäneet yhtälöä 3.18, geopotentiaalin kehitelmä ellipsoidifunktioihin. Normaalipotentiaalilta U vaaditaan, että se on vakio vertausellipsoidin pinnalla $u = b$. Kehitetään keskipakoispotentiaali Φ ellipsoidifunktioihin. Saadaan

$$\begin{aligned}\Phi(\beta, u) = \tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 (x^2 + y^2) = \tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 (u^2 + E^2)\cos^2\beta = \\ = \tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 (u^2 + E^2)(1 - \sin^2\beta) = \\ = \tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 (u^2 + E^2)\left(-\tfrac{2}{3}P_2(\sin\beta) + \tfrac{2}{3}P_0(\sin\beta)\right) = \\ = -\tfrac{1}{3}\omega_\oplus^2 (u^2 + E^2)\left(P_2(\sin\beta) - P_0(\sin\beta)\right).\end{aligned}$$

Tämän lisäksi on yhtälön 3.19 perusteella pyörähdyssymmetriselle normaaligravitaatiopotentiaalille V^*:

$$V^*(\beta, u) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^*(\beta, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(i\frac{u}{E})}{Q_n(i\frac{b}{E})} A_{n0}^{e*} P_n(\sin\beta). \quad (3.19)$$

Nyt

$$U(\beta, u) = V^*(\beta, u) + \Phi(\beta, u).$$

Vertausellipsoidin pinnalla $u = b$ vaatimuksena on $U(\beta, b) = U_0$, mikä on mahdollinen vain, jos ($A_n^{e*} \stackrel{\text{def}}{=} A_{n0}^{e*}$):

$$\begin{aligned} U_0 &= A_0^{e*} + \tfrac{1}{3}\omega_\oplus^2 \left(b^2 + E^2\right) = A_0^{e*} + \tfrac{1}{3}\omega_\oplus^2 a^2, \\ 0 &= A_1^{e*}, \\ 0 &= A_2^{e*} - \tfrac{1}{3}\omega_\oplus^2 \left(b^2 + E^2\right) = A_2^{e*} - \tfrac{1}{3}\omega_\oplus^2 a^2, \\ 0 &= A_n^{e*}, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots. \end{aligned}$$

Suure U_0 on laskettavissa yksiselitteisesti, jos maapallon massa $GM_\oplus$ ja vertausellipsoidin mitat a ja b ovat tiedossa. Tulos, Heiskanen ja Moritz (1967) yhtälö 2-61, on

$$U_0 = \frac{GM_\oplus}{E} \arctan\frac{E}{b} + \tfrac{1}{3}\omega_\oplus^2 a^2. \tag{4.6}$$

Seuraa

$$A_0^{e*} = U_0 - \tfrac{1}{3}\omega_\oplus^2 a^2 = \frac{GM_\oplus}{E} \arctan\frac{E}{b}.$$

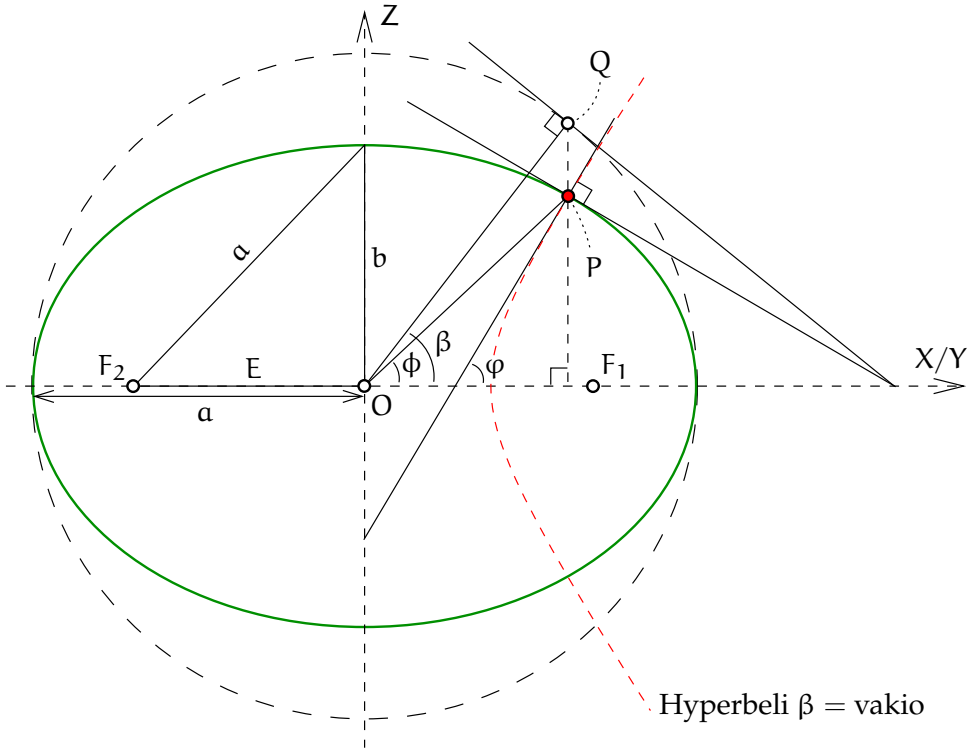
Painovoimakentän normaalipotentiaali U saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} U(\beta, u) = V^*(\beta, u) + \Phi(\beta, u) &= \overbrace{\frac{GM_\oplus}{E} \arctan\frac{E}{u}}^{V_0^*(u)} + \\ + \overbrace{\tfrac{1}{3}\omega_\oplus^2 a^2}^{A_2^{e*}} \frac{Q_2\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_2\left(i\frac{b}{E}\right)} &\overbrace{\left(\tfrac{3}{2}\sin^2\beta - \tfrac{1}{2}\right)}^{P_2(\sin\beta)} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 \left(u^2 + E^2\right)\cos^2\beta}^{\Phi(\beta,u)} = \\ &= C_0(u) + C_1(u)\sin^2\beta + C_2(u)\cos^2\beta, \end{aligned}$$

jossa C_0, C_1 ja C_2 ovat sopivia u:n funktioita. Funktio V_0^* on termi $n = 0$ kehitelmässä 3.19, yhtälö 3.21.

Vertausellipsoidin pinnalla ($u = b$), käyttäen $a^2 = b^2 + E^2$:

$$\begin{aligned} U(\beta, b) = \\ = \overbrace{\frac{GM_\oplus}{E} \arctan\frac{E}{b}}^{V_0^*(b)} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 a^2 \sin^2\beta - \tfrac{1}{6}\omega_\oplus^2 a^2}^{A_2^{e*}\,P_2(\sin\beta)} + \overbrace{\tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 a^2 \cos^2\beta}^{\Phi(\beta,b)} = \end{aligned}$$



KUVA 4.6. Meridiaaniellipsin geometria ja eri leveysastetyypit sekä polttopisteet F_1 ja F_2.

$$= \frac{GM_\oplus}{E} \arctan\frac{E}{b} + \tfrac{1}{3}\omega_\oplus^2 a^2,$$

vakio U_0 (yhtälö 4.6), kuten sopii ollakin!

4.6 Normaalipainovoima vertausellipsoidin pinnalla

Ilman todistusta mainittakoon, että *normaalipainovoimalle*, suureelle $\gamma = -\frac{\partial}{\partial h}U$, pätee vertausellipsoidin pinnalla seuraava yhtälö:

$$\gamma(\beta) = \frac{a\gamma_b \sin^2\beta + b\gamma_a \cos^2\beta}{\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}}. \tag{4.7}$$

Nähdään, että γ_a on normaalipainovoima päiväntasaajalla ($\beta = 0$) ja γ_b normaalipainovoima navoilla ($\beta = \pm 90°$).

Yhtälöt 2.5 ja 2.8 antavat

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{Z/b}{\sqrt{X^2+Y^2}/a} = \frac{a}{b}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{a}{b}\tan\phi$$

ja

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{Z/(1-e^2)\,N}{\sqrt{X^2+Y^2}/N} = \frac{1}{1-e^2}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{a^2}{b^2}\tan\phi,$$

jossa ϕ on *geosentrinen* leveysaste, katso yhtälöt 2.4. Tästä seuraa suoraan

$$\tan\beta = \frac{b}{a}\tan\varphi,$$

jossa leveyskulma φ on geodeettinen eli maantieteellinen leveysaste. Kulma β on edelleen *redukoitu leveysaste*. Nyt voidaan osoittaa (harjoitus!), että

$$\gamma(\varphi) = \frac{a\gamma_a\cos^2\varphi + b\gamma_b\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}. \tag{4.8}$$

5 Tämä on kuuluisa *Somiglianan ja Pizzettin*[5] yhtälö. Kyseiset geodeetit osoittivat ensimmäisinä, että ”ellipsoidinen” normaalipainovoimakenttä, jonka eräs tasapotentiaalipinta on vertausellipsoidi, on tarkasti olemassa ja että myös maantieteellisissä koordinaateissa painovoimakaava on suljettu lauseke leveysasteessa.

4.7 Numeeriset arvot ja laskentakaavat

Kun vertausellipsoidi on valittu, voidaan laskea sen vastaava normaalipotentiaali ja normaalipainovoima. Perussuureet ovat

a pyörähdysellipsoidin päiväntasaajasäde eli isoakselin puolikas

f litistyneisyys

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a-b}{a},$$

jossa b on napasäde eli pikkuakselin puolikas

[5] Carlo Somigliana (1860–1955) oli italialainen matemaatikko ja fyysikko. Paolo Pizzetti (1860–1918) oli italialainen geodeetti.

$\omega_\oplus$ Maan pyörähdysnopeus

$GM_\oplus$ Maan kokonaismassa, mukaan lukien ilmakehä.

Nykyisin käytetyin vertausellipsoidi normaalipotentiaaleineen on Geodetic Reference System 1980 eli GRS80:

$$a = 6\,378\,137\ \mathrm{m}, \qquad \omega_\oplus = 7\,292\,115 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1},$$
$$\frac{1}{f} = 298{,}257\,222\,101, \qquad GM_\oplus = 3\,986\,005 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2.$$

Oikeastaan f ei ole GRS80:n määrittelevä vakio, vaan käytetään vakiota J_2, joka on eräs gravitaatiokentän määrittelevä suure, katso yhtälö 3.16.

GPS-järjestelmän käyttämä WGS84 (World Geodetic System 1984) sisältää vertausellipsoidin, joka on *melkein* identtinen GRS80:n vertausellipsoidin kanssa.

Normaalipotentiaali on (Heikkinen, 1981), SI-järjestelmän yksiköissä:

$$\begin{aligned} U \approx\ & 62\,636\,860{,}8500 + \\ & + \left(\begin{array}{c} -9{,}780\,326\,77 - 0{,}051\,630\,75 \sin^2\varphi - \\ -0{,}000\,227\,61 \sin^4\varphi - 0{,}000\,001\,23 \sin^6\varphi \end{array} \right) h + \\ & + \left(\begin{array}{c} +0{,}015\,438\,99 \cdot 10^{-4} - 0{,}000\,021\,95 \cdot 10^{-4} \sin^2\varphi - \\ -0{,}000\,000\,10 \cdot 10^{-4} \sin^4\varphi \end{array} \right) h^2 + \\ & + \left(-0{,}000\,024\,22 \cdot 10^{-8} + 0{,}000\,000\,07 \cdot 10^{-8} \sin^2\varphi \right) h^3, \end{aligned} \tag{4.9}$$

ja normaalipainovoima (huomaa miinusmerkki: U on positiivinen ja vähenee ylöspäin):

$$\begin{aligned} \gamma = -\frac{\partial U}{\partial h} \approx\ & +9{,}780\,326\,77 + 0{,}051\,630\,75 \sin^2\varphi + \\ & + 0{,}000\,227\,61 \sin^4\varphi + 0{,}000\,001\,23 \sin^6\varphi + \\ & - \left(\begin{array}{c} +0{,}030\,877\,98 \cdot 10^{-4} - 0{,}000\,043\,90 \cdot 10^{-4} \sin^2\varphi - \\ -0{,}000\,000\,20 \cdot 10^{-4} \sin^4\varphi \end{array} \right) h + \\ & - \left(-0{,}000\,072\,65 \cdot 10^{-8} + 0{,}000\,000\,21 \cdot 10^{-8} \sin^2\varphi \right) h^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Tässä potentiaalin yksikkö on $\mathrm{m^2/s^2}$ ja painovoiman yksikkö $\mathrm{m/s^2}$. φ on geodeettinen leveysaste ja h on korkeus metreinä vertausellipsoidista. Tarkemmat yhtälöt löytyvät raportista Heikkinen (1981). Näissä yhtälöissä kerroin $9{,}780\,32\ldots\ \mathrm{m/s^2}$ on päiväntasaajan painovoima ja $-0{,}030\,87\ldots \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s^{-2}}$ on painovoiman pystygradientti päiväntasaajalla.

Muut vielä käytössä olevat, vaikkakin hitaasti väistyvät, painovoimakaavat ja vertausellipsoidit ovat Helmertin vuoden 1906 ellipsoidi, Krasovskyn ellipsoidi eli SK-42 Itä-Euroopan maissa, Kansainvälinen eli Hayfordin ellipsoidi (1924) ja sen painovoimakaava sekä Geodetic Reference System 1967.

4.7.1 Numeroesimerkki

Yhtälön 4.9 mukaan päiväntasaajan yläpuolella on normaalipotentiaali

$$U = 62\,636\,860{,}8500 - 9{,}780\,326\,77\,h + 0{,}015\,438\,99 \cdot 10^{-4}\,h^2 - \\ - 0{,}000\,024\,22 \cdot 10^{-8}\,h^3.$$

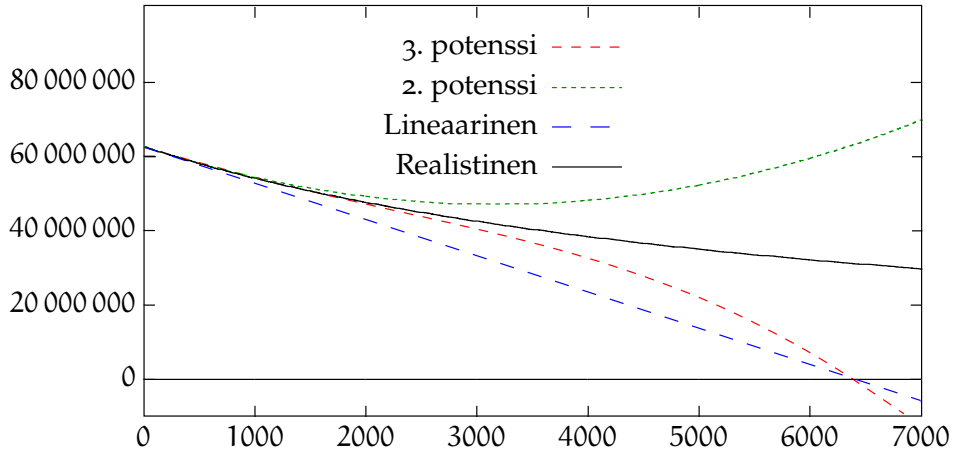
- Piirrä tämä funktio h-arvoille välillä 0–7000 km.
- Piirrä vertailun vuoksi neliöllinen versio, josta viimeinen termi on jätetty pois.

Kysymyksiä

1) Mikä on neliöllisen funktion minimi?
2) Kuinka realistinen tämä on fysikaalisesti?

Vastauksia

1) Katso kuva 4.7. Neliöllisen funktion minimi on korkeudella 3000 km. Kuutiollisella funktiolla ei ole minimiä.
2) Ei kovin realistinen: potentiaalin U (Maan mukana pyörivän järjestelmän normaalipotentiaali) stationaarisen pisteen tulisi sijaita noin 36 000 km korkeudella geostationaarisella radalla.



KUVA 4.7. Normaalikentän potentiaali päiväntasaajan yläpuolella. Korkeudet kilometreissä, potentiaali yksikössä m^2/s^2.

Tämä kertoo, että polynomiapproksimaatiota ei voida ekstrapoloida kovin pitkälle. Tässä tapauksessa ekstrapolointiväli on samaa luokkaa kuin Maan säde, eikä se enää toimi.

4.8 Normaalipotentiaali pallofunktiokehitelmänä

Ellipsoidisen gravitaatiokentän pallofunktiokehitelmä sisältää toisen asteen lisäksi korkeamman asteen pallofunktioita. Jos kirjoitetaan, kuten on tapana, potentiaali maapallon ulkopuolella seuraavaan muotoon (Heiskanen ja Moritz, 1967 yhtälö 2-39, myös yhtälö 3.16):

$$V(\phi,\lambda,r) = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\left(J_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\sin m\lambda\right)\right),$$

voidaan myös normaaligravitaatiopotentiaali V^* kirjoittaa muotoon

$$V^*(\phi,r) = \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - \sum_{\substack{n=2\\ \text{parillinen}}}^{\infty} J_n^*\left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\sin\phi)\right),$$

joka sisältää vain parillisia kertoimia $J_n^* \overset{\text{def}}{=} J_{n0}^*$, koska normaalikenttä

TAULUKKO 4.1. GRS80-normaalipotentiaalin pallofunktiokertoimia (Heikkinen, 1981; Heiskanen ja Moritz, 1967).

Ei-normalisoidut	Täysin normalisoidut
$J_2^* = J_{2,0}^* = 1082{,}63 \cdot 10^{-6}$	$\overline{J}_2^* = -\overline{C}_{2,0}^* = 484{,}166\,854\,896 \cdot 10^{-6}$
$J_4^* = J_{4,0}^* = -2{,}370\,912\,22 \cdot 10^{-6}$	$\overline{J}_4^* = -\overline{C}_{4,0}^* = -0{,}790\,304\,073 \cdot 10^{-6}$
$J_6^* = J_{6,0}^* = +0{,}006\,083\,47 \cdot 10^{-6}$	$\overline{J}_6^* = -\overline{C}_{6,0}^* = +0{,}001\,687\,251 \cdot 10^{-6}$
$J_8^* = J_{8,0}^* = -0{,}000\,014\,27 \cdot 10^{-6}$	$\overline{J}_8^* = -\overline{C}_{8,0}^* = -0{,}000\,003\,461 \cdot 10^{-6}$

on *symmetrinen* päiväntasaajan tasoon nähden.

6 GRS80:n normaaligravitaatiopotentiaalin kertoimet löytyvät[6] taulukosta 4.1. Korkeampia termejä ei yleensä tarvita. Täysin normalisoitujen ja ei-normalisoitujen kerrointen välillä on yhteys $J_n^* = \overline{J}_n^* \sqrt{2n+1}$.

Vertailun vuoksi: osiossa 4.5 osoitettiin, että saman kentän *ellipsoidifunktiokehitelmässä* vain kertoimet asteluvuille 0 ja 2 eroavat nollasta! Tämä on yksi syy miksi ellipsoidifunktioita ylipäänsä käytetään.

Normaalipainovoimapotentiaalikaavana voidaan käyttää ellipsoidifunktiomallin sijaan todellisen geopotentiaalin pallofunktiokehitelmän ensimmäisiä paria kolmea termiä. Silloin saadaan, kun otetaan keskipakoispotentiaali mukaan:

$$U = \frac{Y_0}{r} + \frac{Y_2(\phi,\lambda)}{r^3} + \tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 \left(X^2 + Y^2\right),$$

vastaava tasapotentiaalipinta $U = U_0$ on ”Brunsin sferoidi”, tai

$$U = \frac{Y_0}{r} + \frac{Y_2(\phi,\lambda)}{r^3} + \frac{Y_4(\phi,\lambda)}{r^5} + \tfrac{1}{2}\omega_\oplus^2 \left(X^2 + Y^2\right),$$

”Helmertin sferoidi”. Tässä $Y_0 \overset{\text{def}}{=} GM_\oplus$ ja funktiot $Y_2(\phi,\lambda)$ ja $Y_4(\phi,\lambda)$ otetaan todellisesta geopotentiaalista.

[6] Ne voidaan laskea myös Heiskasen ja Moritzin (1967) antamalla yhtälöllä 2-92:

$$J_{2n}^* = (-1)^{n+1} \frac{3\left(e^2\right)^n}{(2n+1)(2n+3)} \left(1 - n + 5n\frac{J_2}{e^2}\right),$$

lähtien arvoista J_2 ja e^2. Tulokset ovat samat kuin taulukon vasemmassa sarakkeessa.

Nämä yhtälöt on helppo laskea, mutta niiden tasapotentiaalipinnat eivät ole pyörähdysellipsoideja eivätkä edes pyörähdyssymmetrisiä. Ne ovat oikeastaan hyvin monimutkaisia pintoja (Heiskanen ja Moritz, 1967, osio 2-12)!

Kuitenkin geometrisessa geodesiassa käytetään aina vertausellipsoidia, joten kannattaa tehdä se myös fysikaalisessa geodesiassa.

4.9 Häiriöpotentiaali

Kirjoita painovoimapotentiaali

$$W = V + \Phi,$$

jossa Φ on keskipakoisvoiman potentiaali (katso yllä), ja normaalipotentiaali

$$U = V^* + \Phi.$$

Niiden välinen erotus on *häiriöpotentiaali*

$$T \stackrel{\text{def}}{=} W - U = V - V^*.$$

Sekä V että V^* voidaan kehittää pallofunktiokehitelmäksi. Jos kirjoitetaan painovoimapotentiaali

$$W = V + \Phi = \Phi + \\ + \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\left(J_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\sin m\lambda\right)\right),$$

ja normaalipotentiaali

$$U = \Phi + \frac{GM_\oplus}{r}\left(1 - \sum_{\substack{n=2 \\ \text{parillinen}}}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n^* P_n(\sin\phi)\right),$$

saadaan vähentämällä ne toisistaan häiriöpotentiaaliksi

$$T = W - U = -\frac{GM_\oplus}{r}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\left(\delta J_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\sin m\lambda\right)\right), \tag{4.11}$$

jossa

$$\begin{cases} \delta J_{n0} = J_{n0} - J_n^* & \text{jos } n \text{ parillinen,} \\ \delta J_{nm} = J_{nm} & \text{muuten.} \end{cases}$$

Yllä oleva yhtälö häiriöpotentiaalille T lyhennetään seuraavasti (Heiskanen ja Moritz, 1967, yhtälö 2-152):

$$T(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} T_n(\phi, \lambda), \tag{4.12}$$

jossa jokaisessa termissä asteosuudella T_n on sama dimensio kuin T, ja

$$T_n(\phi, \lambda) = -\frac{GM_\oplus}{a} \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi) \left(\delta J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda\right).$$

7 Nyt a-säteisen ”vertauspallon” pinnalla[7]:

$$T(\phi, \lambda) = T(\phi, \lambda, a) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\phi, \lambda),$$

josta nähdään, että vertaustasolla termit $T_n(\phi, \lambda)$ ovat todella häiriöpotentiaalin T tietyn asteluvun n *asteosuudet*.

Yllä olevista kehitelmistä puuttuvat termit $n = 0, 1$. Näistä $T_0(\phi, \lambda) = T_0$ on vakio — häiriöpotentiaalin maailmanlaajuinen keskiarvo — ja $T_1(\phi, \lambda)$ on dipolikentän muotoinen. Sen arvo on verrannollinen laskentapisteen geosentrisen paikkavektorin ja dipolivektorin välisen kulman kosiniin. Molemmat arvot häviävät, koska

- Normaalikentän olettama Maan kokonaismassa $GM_\oplus$ on realistinen.
- Koordinaattijärjestelmän origon oletetaan yhtyvän Maan massakeskipisteeseen.

Osiossa 3.4 löytyy asiasta lisää.

[7] Aiemmin tälle vertaussäteelle on käytetty palloapproksimaatiossa myös symbolia R.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä on normaalipainovoimakentän käytön perusajatus?
2) Mikä on ero painovoiman ja gravitaation välillä?
3) Kun annettuna on keskipakoispotentiaali

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\omega_{\oplus}^2 \left(X^2 + Y^2\right),$$

johda keskipakoiskiihtyvyys vektorina. (X, Y, Z) ovat vertauskehyksen suorakulmaiset koordinaatit. Kehys pyörii kulmanopeudella $\omega_{\oplus}$ Z-akselin ympäri.

4) Kuvassa 4.1 on piirretty normaalipainovoimakentän tasapotentiaalipinnat. Nähdään, että ne ovat päiväntasaajan yli kauempana toisistaan kuin napojen yli, koska normaalipainovoima päiväntasaajalla on pienempi kuin navoilla.
Millainen tilanne olisi normaali*gravitaatio*kentällä, eli ilman keskipakoisvoimaa? Selitä perustelusi.
5) Selosta luonnollisten koordinaattien idea.
6) Minkälainen oli M. Le Blancin ja C. F. Gaussin välinen suhde? Käytä Googlea.
7) Johda Somiglianan ja Pizzettin yhtälö 4.8 yhtälöstä 4.7. Mikä tekee yhtälöstä arvokkaan?
8) Mitkä ovat *Geodetic Reference System 1980* -järjestelmän määrittelevät parametrit?
9) Miksi normaalipotentiaalin pallofunktiokehitelmä sisältää vain pienen määrän termejä ja kertoimia?
10) Miksi normaalipotentiaalin pallofunktiokehitelmä ei sisällä termejä, joiden järjestysluku $m \neq 0$?
11) Miksi normaalipotentiaalin pallofunktiokehitelmä sisältää vain termejä, joiden asteluku n on parillinen?

Harjoitus 4−1: Somiglianan ja Pizzettin yhtälö

1) Annettuna on painovoima päiväntasaajalla γ_a ja navoilla γ_b. Mikä on painovoima geodeettisella leveysasteella $\varphi = 45°$? Johda lauseke, joka saa sisältää myös a:n ja b:n.
2) Mikä on painovoima redukoidulla leveysasteella $\beta = 45°$? Vertaa edellisen kanssa.
3) Annettuna on isoakselin puolikas a ja pikkuakselin puolikas b. Mitkä ovat saman paikan erityyppisten leveysasteiden (geodeettinen φ, geosentrinen ϕ ja redukoitu β) erotukset maksimissaan kaariminuutteina? Oleta, että maksimi tapahtuu leveysasteilla $\pm 45°$.
4) Laske sekä geodeettiselle että redukoidulle leveysasteelle 45° painovoiman numeeriset arvot GRS80-vertausellipsoidin tapauksessa. Paljonko ne eroavat toisistaan?

Harjoitus 4−2: Keskipakoisvoima

Annettuna on Maan pyörähdysnopeus yksikössä radiaanit sekunnissa: $\omega_\oplus = 7292\,115 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}$.

1) Laske (karkeasti) Maan pyörähdysliikkeen *keskipakoisvoima* Etelä-Suomen kohdalla ($\varphi = 60°$, $R = 6378\,\mathrm{km}$, Maa pallona). Mihin suuntaan voima osoittaa? Piirrä!
2) Miten suuri osa paikallisesta painovoimasta on keskipakoisvoima eli paljonko keskipakoisvoima muuttaa painovoimaa sekä kiihtyvyysarvona että prosentteina?
3) Laske yllä annetusta $\omega_\oplus$-arvosta maapallon pyörähdysaika tunteina ja minuutteina. Miksei se ole tarkasti 24^h?

Painovoimakentän anomaaliset suureet

5

5.1 Häiriöpotentiaali, geoidin korkeus ja luotiviivan poikkeamat

Ensimmäinen *anomaalinen suure*, josta puhuttiin jo, on ero todellisen painovoimapotentiaalin W ja normaalipainovoimapotentiaalin U välillä, niin sanottu *häiriöpotentiaali*:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} W - U.$$

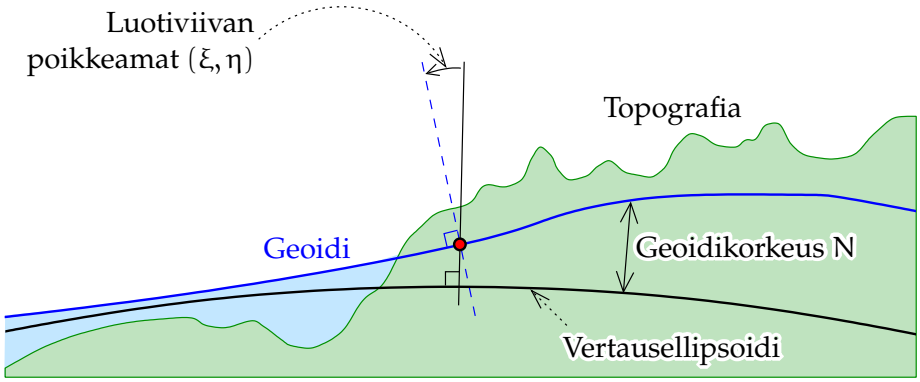
Kaikki muut anomaaliset suureet ovat häiriöpotentiaalin erilaisia funktioita, kuten geoidin korkeus N ja luotiviivan poikkeamat ξ ja η. Ne saadaan yleisesti vähentämällä toisistaan

- luonnollinen, Maan todelliseen painovoimakenttään liittyvä suure, ja
- vastaava Maan vertausellipsoidin normaalipainovoimakenttään liittyvä suure.

Esimerkiksi *luotiviivan poikkeamat*:

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi - \varphi, \quad \eta \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda - \lambda)\cos\varphi.$$

Tässä (Φ, Λ) ovat tähtitieteellinen leveys ja pituus, jotka yhdessä muodostavat paikallisen luotiviivan suunnan, ja (φ, λ) ovat geodeettinen



KUVA 5.1. Geoidiundulaatiot N ja luotiviivan poikkeamat ξ ja η.

leveys ja pituus, jotka samalla tavalla muodostavat normaalipainovoi-
[1] mavektorin eli ”normaaliluotiviivan” suunnan[1]. Katso kuva 5.1.

Geoidin korkeus eli *geoidiundulaatio* on

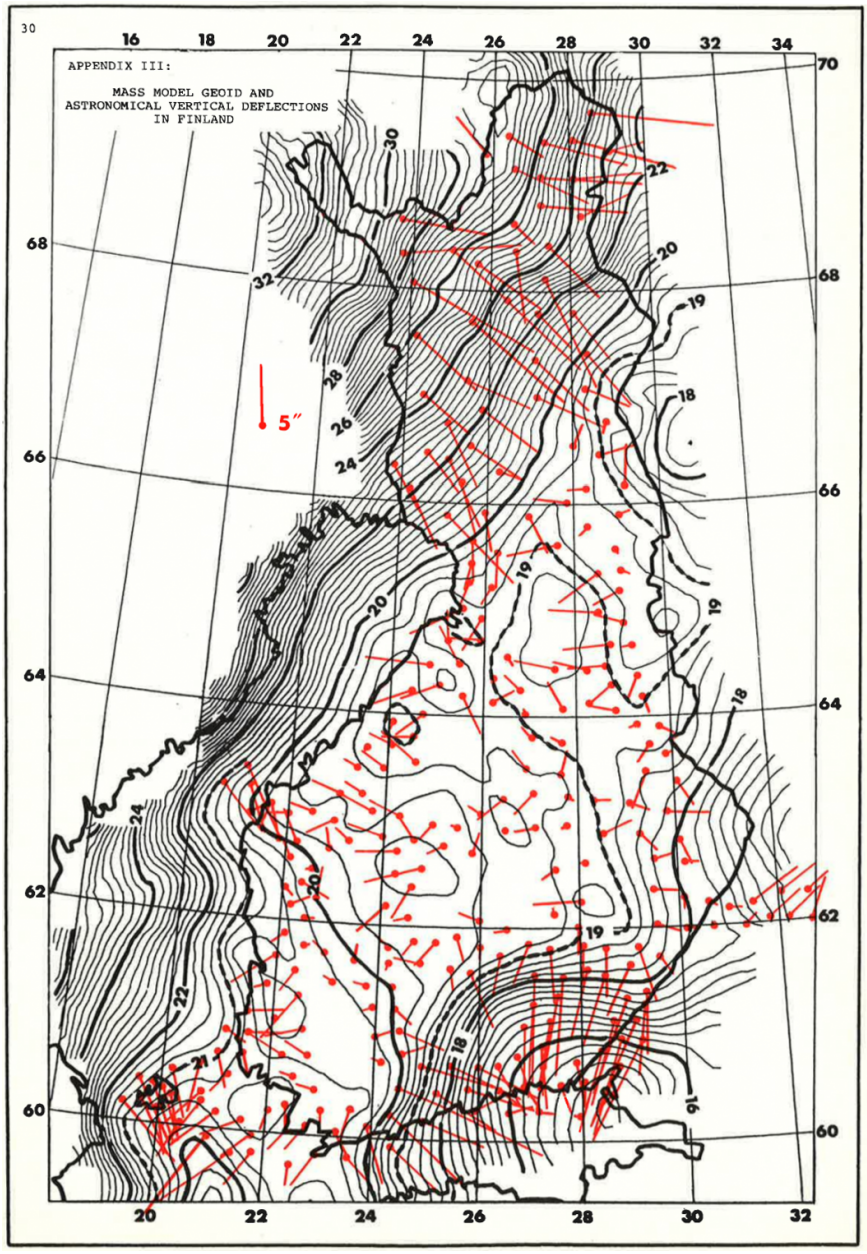
$$N \overset{\text{def}}{=} h - H,$$

jossa H on ortometrinen korkeus — laskettuna keskimerenpinnasta — ja h on korkeus vertausellipsoidista.

Luotiviivan poikkeamat ovat Suomessa muutaman kaarisekunnin (″) luokkaa ja geoidiundulaatiot välillä 15–32 m, jos käytetään vertauspintana GRS80-ellipsoidia. Vertailun vuoksi: maailmanlaajuisesti vaihtelu on −107 m:n ja +85 m:n välillä. Merenpinnan tasolla luotiviivan poikkeamat — yksikkönä radiaani — ovat geoidin korkeuksien vaakagradientteja. Katso kuvat 5.1 ja 5.2.

Vertausellipsoidille, esimerkiksi GRS80-ellipsoidille, on olemassa oma, matemaattisesti eksakti standardi- eli *normaalipainovoimakenttä,* jonka eräs tasapotentiaalipinta kyseinen vertausellipsoidi on. Tämän kentän avulla voi laskea jokaiselle painovoimakentän suureelle vastaavan normaalisuureen. Vähentämällä normaalisuure alkuperäissuureesta saadaan vastaava *anomaalinen* suure.

[1] Tämä olettaa, että Φ ja Λ ovat redukoituja merenpinnan tasolle luotiviivan kaarevuuden takia, osio 4.3.2, ja että φ ja λ ovat laskettuja vertausellipsoidilla.



KUVA 5.2. Suomen geoidimalli vuodesta 1984. Punaisella havainnoista lasketut luotiviivan poikkeamat (Vermeer, 1984).

Korkeuksille vertausellipsoidista löytyy lauseke, joka on analoginen ortometristen korkeuksien vastaavan lausekkeen 4.5 kanssa. Olkoon U

normaalipotentiaali ja γ normaalipainovoima[2]:

$$dU = -\gamma\, dh \quad \Longrightarrow \quad h_P = -\int_{U_0}^{U_P} \frac{1}{\gamma(U)} dU.$$

Pisteen P geoidin korkeus on nyt

$$\begin{aligned} N_P = h_P - H_P &= \int_{W_0}^{W_P} \frac{1}{g(W)} dW - \int_{U_0}^{U_P} \frac{1}{\gamma(U)} dU = \\ &= \int_{W_0}^{W_P} \frac{1}{g(W)} dW - \int_{W_0}^{W_P} \frac{1}{\gamma(U)} dU - \int_{W_P}^{U_P} \frac{1}{\gamma(U)} dU + \int_{W_0}^{U_0} \frac{1}{\gamma(U)} dU = \\ &= \int_{W_0}^{W_P} \frac{\gamma(W) - g(W)}{g(W)\,\gamma(W)} dW - \int_{W_P}^{U_P} \frac{1}{\gamma(U)} dU + \int_{W_0}^{U_0} \frac{1}{\gamma(U)} dU = \\ &= \int_0^{H_P} \frac{g(z) - \gamma(z)}{\gamma(z)} dz - \int_{W_P}^{U_P} \frac{1}{\gamma(U)} dU + \int_{W_0}^{U_0} \frac{1}{\gamma(U)} dU, \end{aligned} \tag{5.1}$$

uudelleen nimittämällä integrointimuuttuja $U \to W$ ja vaihtamalla se pituudeksi: $dW = -g\, dz$.

Yhtälössä 5.1 viimeinen termi häviää, jos oletetaan[3] $U_0 = W_0$. Ensimmäinen ja toinen termi ovat molemmat rippuvaisia pisteen P korkeudesta, mutta niiden erotus N_P ei ole. Siksi pisteen P sijaan käytetään sen projektiota P′ keskimerenpinnan — käytetyn korkeusjärjestelmän nollan — tasolle. Silloin myös ensimmäinen termi häviää: $H_{P'} = 0$. Siis

$$N_{P'} = -\int_{W_{P'}}^{U_{P'}} \frac{1}{\gamma(U)} dU \approx \frac{1}{\gamma_{P'}} (W_{P'} - U_{P'}) = \frac{T_{P'}}{\gamma_{P'}},$$

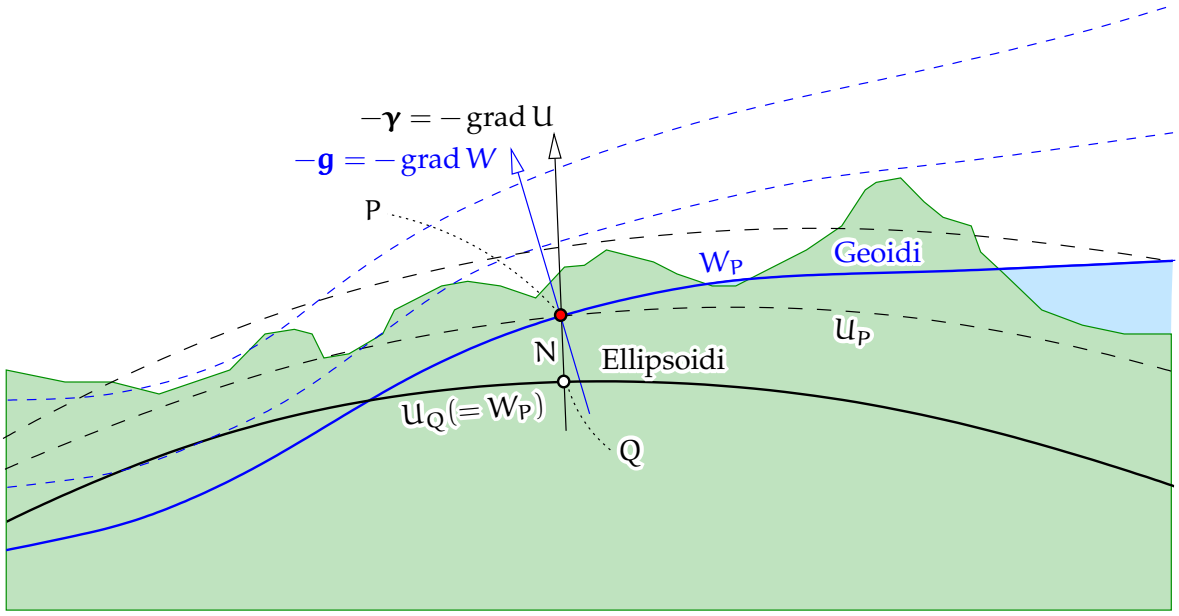
mihin olemme sijoittaneet $T = W - U$: häiriöpotentiaali. Kaikki suureet ovat nyt merenpinnan tasolla. Tiiviimmin:

$$N = \frac{T}{\gamma}. \tag{5.2}$$

Tämä on kuuluisa *Brunsin*[4] yhtälö (Heiskanen ja Moritz, 1967, yhtälö

[2] Tämä ei ole tarkasti totta, koska ”normaaliluotiviiva” ei ole sama kuin vertausellipsoidin normaali. Tehty virhe on pikkuruinen.

[3] Tämä ei ole itsestään selvää! Paikallisessa korkeusdatumissa nollapisteen potentiaali voi hyvinkin poiketa jopa metriä vastaavalla määrällä globaalin vertausellipsoidin normaalipotentiaalista.



KUVA 5.3. Painovoimakentän (W) ja normaalipainovoimakentän (U) tasapotentiaalipintoja.

2-144).

Tilannetta luonnehtii vieläkin paremmin kuva 5.3. Tässä kuvassa normaalipainovoimavektorin $\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{grad} U$ pituus on $\gamma = \|\boldsymbol{\gamma}\| = -\frac{\partial}{\partial h} U$, josta seuraa, yhtälön $T = W - U$ kanssa, että "vastaavien" pintojen $W = W_P$ ja $U = U_Q$ välinen etäisyys, kun $W_P = U_Q$, on

$$N \approx \frac{U_Q - U_P}{\gamma} = \frac{W_P - U_P}{\gamma} = \frac{T}{\gamma}.$$

5.2 Painovoimahäiriöt

Todellisen painovoiman ja normaalipainovoiman kiihtyvyysarvojen erotusta kutsutaan *painovoimahäiriöksi*,

$$\delta g \overset{\text{def}}{=} g - \gamma = \|\mathbf{g}\| - \|\boldsymbol{\gamma}\| \approx -\left(\frac{\partial W}{\partial H} - \frac{\partial U}{\partial h}\right),$$

[4] Ernst Heinrich Bruns (1848–1919) oli saksalainen matemaatikko ja matemaattinen geodeetti.

jossa differentioidaan W luotiviivaa pitkin ja U — hieman epätarkasti — vertausellipsoidin normaalia pitkin. Luotiviivan ja ellipsoidin pintanormaalin suunnat ovat itse asiassa hyvin lähellä toisiaan. Siksi hyvä approksimaatio on

$$\delta g \approx -\left(\frac{\partial W}{\partial H} - \frac{\partial U}{\partial H}\right) = -\frac{\partial T}{\partial H}.$$

Palloapproksimaatiossa saadaan

$$\delta g \approx -\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{5.3}$$

Häiriöpotentiaali T kehitettiin jo eri pallofunktioiden asteluvun osuuksiin, yhtälö 4.12, ja nyt saadaan differentioimalla r:n suhteen:

$$\delta g(\phi,\lambda,r) = -\frac{\partial T(\phi,\lambda,r)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\phi,\lambda)\right) =$$

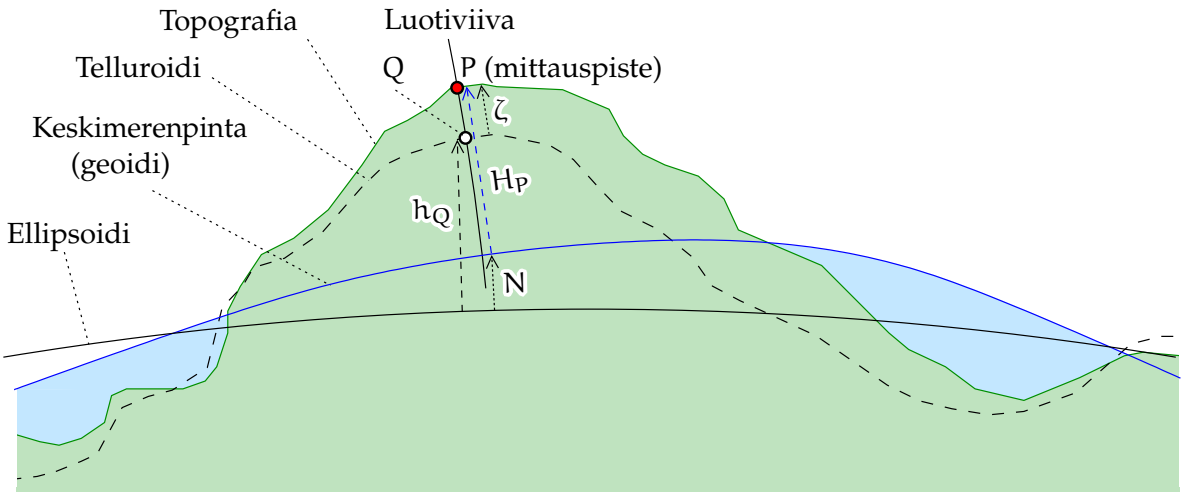
$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\phi,\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} T_n(\phi,\lambda), \tag{5.4}$$

ja merenpinnalla ($r = R$):

$$\delta g(\phi,\lambda,R) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{R} T_n(\phi,\lambda).$$

Tämä on painovoimahäiriön *spektraaliesitys* merenpinnalla eli R-säteisen maapallon pinnalla. Vertaussäteen R arvoksi voi ottaa Maan vertausellipsoidin päiväntasaajasäde $a = a_\oplus$.

Painovoimahäiriöitä voidaan määrittää havainnoista vain, jos on keino mitata pisteen P painovoimakiihtyvyyden g_P $\left(= -\frac{\partial}{\partial H} W\big|_P\right)$ lisäksi P:n *sijainti* avaruudessa suhteessa Maan keskipisteeseen, jotta voisi laskea normaalipainovoima $\gamma_P = -\frac{\partial}{\partial h} U\big|_P$ samassa pisteessä. Nykyisin tämä on jopa helppoa GNSS:n avulla. Ennen se ei kuitenkaan ollut mahdollista. Siksi painovoimahäiriöitä käytetään vähän. Niiden sijaan käytetään mieluummin painovoima-*anomalioita*, joista lisää seuraavassa osiossa.



KUVA 5.4. Vertausellipsoidi, keskimerenpinta (geoidi), telluroidi ja painovoimamittaus.

5.3 Painovoima-anomaliat

Normaalipainovoima lasketaan paikan *geodeettisten* koordinaattien (φ, λ, h) funktiona. Kuitenkin perinteisessä gravimetrian kenttätyössä ennen satelliittipaikannuksen aikakautta olivat saatavilla kartan geodeettiset koordinaatit φ ja λ, muttei tarkkaa korkeutta h vertausellipsoidista. Saatavilla oli korkeus H keskimerenpinnan (geoidin) yläpuolella määritettynä esimerkiksi valtakunnallisen vaaitusverkon kautta — tai pahimmassa tapauksessa ilmapuntarin avulla.

Tämä merkitsee, että vaikka todellinen painovoima g mitataan pisteessä P, jonka korkeus meren pinnasta on H_P, normaalipainovoima γ on pakko laskea *toisessa pisteessä* Q, jonka korkeus *vertausellipsoidista* on $h_Q = H_P$. Katso kuva 5.4.

Toisin sanoen pisteen P mitattu korkeus *keskimerenpinnasta* sijoitetaan raa'asti normaalipainovoimakaavaan, joka kuitenkin odottaa korkeutta *vertausellipsoidista*! Tätä erikoista piirrettä painovoima-anomalioiden määritelmässä voidaan kutsua "vapaan reunan reuna-arvotehtäväksi".

Sen mukaan johdetaan painovoima-anomalian lauseke seuraavasti:

$$\begin{aligned}\Delta g_P = g_P - \gamma_Q &= (g_P - \gamma_P) + (\gamma_P - \gamma_Q) = \\ &= -\left(\frac{\partial W}{\partial H}\Big|_P - \frac{\partial U}{\partial h}\Big|_P\right) + (\gamma_P - \gamma_Q) \approx \\ &\approx -\frac{\partial (W-U)}{\partial H}\Big|_P + (h_P - h_Q)\,\frac{\partial \gamma}{\partial H}\Big|_P = \\ &= -\frac{\partial T}{\partial H}\Big|_P + (h_P - H_P)\,\frac{\partial \gamma}{\partial H}\Big|_P = \\ &= -\frac{\partial T}{\partial H}\Big|_P + N_P\,\frac{\partial \gamma}{\partial H}\Big|_P = \left(-\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{T}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)\Big|_P,\end{aligned}$$

käyttämällä melkein kaikkia yllä olevia kaavoja. Tämä yhtälö,

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial H}T, \tag{5.5}$$

tunnetaan nimellä *fysikaalisen geodesian perusyhtälö* eli *fundamental equation of physical geodesy*. Se on *kolmannen reuna-arvotehtävän* reunaehto (Heiskanen ja Moritz, 1967, osio 1-17). Se antaa mahdollisuuden ratkaista T ulkoavaruudessa, jos Δg on annettu kaikkialla Maan pinnalla.

Jos oletetaan, että Maa on R-säteinen pallo ja että normaalipainovoimakenttä on pallosymmetrinen, voidaan approksimoida:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T, \tag{5.6}$$

jossa $r = R + H$ on etäisyys maapallon keskipisteestä.

Sijoittamalla tähän δg:n yhtälö 5.3 saadaan

$$\Delta g = \delta g - \frac{2}{r}T.$$

Sijoittamalla tähän spektraaliesitykset 3.10 (mutta T:lle) ja 5.4 δg:lle saadaan

$$\begin{aligned}\Delta g(\phi,\lambda,r) &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{r} - \frac{2}{r}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\phi,\lambda) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\phi,\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} T_n(\phi,\lambda) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\Delta g_n(\phi,\lambda),\end{aligned} \tag{5.7}$$

kirjoitustavalla

$$\Delta g_n(\phi,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n-1}{R} T_n(\phi,\lambda). \tag{5.8}$$

Tekijän $n-1$ läsnäolo näyttää, että painovoima-anomaliat eivät voi sisältää asteluvun $n=1$ osuuksia, vaikka T sisältäisi. Koordinaatiston origo kannattaa aina sijoittaa Maan massakeskipisteeseen, mutta jos näin ei tehdä, ainakaan painovoima-anomaliat eivät muutu.

Merenpinnalla $r=R$ saadaan

$$\Delta g(\phi,\lambda,R) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n(\phi,\lambda),$$

eli Δg_n ovat painovoima-anomalian Δg *asteosuudet*.

Havaitse, että termi $n=1$ puuttuu: $\Delta g_1 = 0$. Oletetaan myös, että $\Delta g_0 = -T_0/R = 0$, siis todellinen ulkoinen potentiaali on globaalina keskiarvona sama kuin normaalipotentiaali. Myös Maan kokonaismassa $GM_\oplus$ ja sen geoidin tilavuus[5] ovat normaalipotentiaalin olettama kokonaismassa ja vertausellipsoidin tilavuus. Oletus on enemmän tai vähemmän oikeutettu, koska $GM_\oplus$ on satelliittien avulla hyvin tarkasti määritettävissä ja määritettykin, ja modernit normaalipotentiaalimallit, kuten GRS80, perustuvat näihin määrityksiin[6].

5.4 Painovoima-anomalioihin käytetyt yksiköt

Painovoiman vaihtelujen suosittu mittayksikkö on *milligal*. Yhteys SI-järjestelmään on 1 mGal $= 10^{-5}$ m/s^2. Myös yksikköä µGal eli 10^{-8} m/s^2 käytetään. Nykykirjoissa käytetään myös suoraan yksikköjä µm/s^2 ja nm/s^2, jotka kuuluvat muodollisesti SI-järjestelmään. Kuitenkin milligallit

[5] Itse asiassa ilmakehä mutkistaa tätä asiaa.

[6] Kuitenkin GRS80:n päiväntasaajasäde on 6 378 137,0 m, kun uudemmat mallit, kuten EGM2008, antavat pienemmän arvon 6 378 136,3 m globaalin keskimerenpinnan keskisijainniksi. Tämä on hyvä huomioida käytettäessä mallia tuotantotyössä. Epävarmuus on edelleen desimetrin luokkaa.

TAULUKKO 5.1. Painovoiman vaihtelujen suuruusluokat.

Ilmiö	Koko painovoimasta	SI-yksiköissä	mGal
Koko painovoima	1	9,81	981 000
Paikallinen vaihtelu	$\pm 10^{-4}$	$\pm 10^{-3}$	± 100
Ero päiväntasaajan ja napojen välillä	0,5 %	0,05	5000
Ero merenpinnan ja 10 km korkeuden välillä	0,3 %	0,03	3000
Gravimetrin mittaustarkkuus	$\pm\, 10^{-8}$–10^{-7}	$\pm\, 10^{-7}$–10^{-6}	$\pm\, 0{,}01$–$0{,}1$

ja mikrogallit ovat tutumpia, ja lähellä maanpintaa niiden suuruus on vastaavasti noin 1 ppm (miljoonasosa) ja 1 ppb (miljardisosa) koko painovoimasta.

Taulukossa 5.1 on annettu muutama arvo ilmiöiden suuruusluokan hahmottamiseksi.

Suosittu painovoiman *gradientin* mittauksen yksikkö on eötvös, symboli E. SI-yksikössä se on $10^{-9}\ \mathrm{s}^{-2}$, mikä vastaa arvoa $10^{-4}\ {}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$. Maan pinnalla painovoiman pystygradientin $\frac{\partial}{\partial H} g$ arvo on keskimäärin noin $-0{,}3\ {}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}} = -3000$ E.

5.5 Fysikaalisen geodesian reuna-arvotehtävä

Kuten edellisessä osiossa selitettiin, painovoimamittaus on monimutkaisempaa kuin se, että mitataan vain suure $-\frac{\partial}{\partial H} W \approx -\frac{\partial}{\partial r} W$. Kun mitataan geopotentiaalin korkeussuuntainen derivaatta, se tehdään *paikalla, jota ei tarkasti tunneta*. Vaikka mittauspaikan korkeus tunnettaisiin merenpinnan yläpuolella, se ei vielä anna mittauspisteen sijaintia avaruudessa. Se riippuu näet myös merenpinnan eli *geoidin* paikasta avaruudessa, tarkemmin sen korkeudesta vertausellipsoidin ylä- tai alapuolella.

7 Näin päädytään kolmanteen reuna-arvotehtävään[7]. *Fysikaalisen geodesian reuna-arvotehtävä* on määrittää kappaleen ulkopuolinen potentiaali

[7] Kolmannen eli sekareuna-arvotehtävän yhteydessä mainitaan Victor Gustave Robi-

V, jos sen pinnalla on annettu lineaariyhdistelmä

$$c_1 V + c_2 \frac{\partial V}{\partial n},$$

jossa c_1 ja c_2 ovat sopivat kertoimet. Muuttuja n merkitsee tässä reunapinnan normaalin suuntaista differentiointia, käytännössä samaa kuin H tai r.

Fysikaalisessa geodesiassa on annettu seuraava lineaariyhdistelmä reunaehtona:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial H} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial H} T. \tag{5.5}$$

Nähdään, että $c_1 = -1$ ja $c_2 = \gamma^{-1}\frac{\partial}{\partial H}\gamma$. Tämä yhtälö on painovoima-anomalioiden määritelmä 5.5 ja se tunnetaan nimellä *fysikaalisen geodesian perusyhtälö*.

Taas palloapproksimaatiossa yhtälön 5.8 kääntäminen antaa

$$T_n(\phi, \lambda) = \frac{R}{n-1} \Delta g_n(\phi, \lambda).$$

Muista, että funktiot $\Delta g_n(\phi, \lambda)$ voidaan laskea asteosuusyhtälön 3.9 avulla, kun $\Delta g(\phi, \lambda)$ on tiedossa kaikkialla maapallolla.

Näin saadaan tämänkin reuna-arvotehtävän ratkaisu spektraaliesityksessä, joka siis pätee *koko* ulkoavaruudessa:

$$T(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\phi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{R}{n-1} \Delta g_n(\phi, \lambda) =$$

$$= \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \iint_{\sigma} \Delta g(\phi', \lambda', R)\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma'. \tag{5.9}$$

Tämä on juuri se reuna-arvotehtävä, joka syntyy, jos kaikkialla Maan pinnalla, merenpinta mukaan lukien, on annettu painovoima-anomalioita.

Integraaliyhtälö, joka vastaa yllä olevaa spektraaliyhtälöä 5.9, tunnetaan *Stokesin*[8] yhtälönä:

[8] nin (1855–1897), ranskalaisen matemaatikon, nimi. Silloin Dirichletin ongelma olisi ensimmäinen ja Neumannin ongelma toinen reuna-arvotehtävä.

$$T(\phi, \lambda, r) = \frac{R}{4\pi} \iint_\sigma S(\psi, r, R)\, \Delta g(\phi', \lambda', R)\, d\sigma',$$

jossa *Stokesin ydin* on

$$S(\psi, r, R) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi). \tag{5.10}$$

Osiossa 8.1 annetaan tämän funktion suljettu muoto 8.3 ja grafiikka tapaukselle $r = R$.

5.6 Telluroidikuvaus ja "kvasigeoidi"

Kun mitataan tähtitieteellinen leveys- ja pituusaste (Φ, Λ) sekä *tulkitaan* ne geodeettisiksi (ellipsoidisiksi, maantieteellisiksi) koordinaateiksi (φ, λ) ja samalla myös potentiaaliero $-(W - W_0)$ pisteen korkeuden h mitaksi vertausellipsoidista, suoritetaan tavallaan *kuvaus*. Tämä kuvaus lisää jokaiselle pisteelle P vastinpisteen Q, jonka *geodeettiset* koordinaatit ovat samat kuin pisteen P *luonnolliset* koordinaatit.

Tätä menettelytapaa kutsutaan *telluroidikuvaukseksi*. Telluroidi on pinta, joka seuraa Maan topografisen pinnan muotoja, mutta on kaikkialla topografian alapuolella määrällä ζ tai sen yläpuolella määrällä $-\zeta$, riippuen siitä, onko ζ positiivinen tai negatiivinen. Suuretta ζ kutsutaan *korkeusanomaliaksi*.

Telluroidikuvaus on tärkeä apuväline Molodenskin painovoimakenttäteoriassa. Se on kuitenkin aika abstrakti käsite. Voidaan sanoa, että telluroidi on Maan pinnan *malli*, joka saadaan olettamalla, että

- Maan todellinen potentiaalikenttä on normaalipotentiaali.
- Matemaattinen keskimerenpinta eli *geoidi* eli korkeudenmittausten lähtötaso yhtyy vertausellipsoidiin.

Toisin sanoen telluroidi on Maan topografisen pinnan malli, joka saadaan jos tulkitaan *vaaitut* korkeudet — tarkemmin, vaaituksesta saadut

[8] Sir George Gabriel Stokes PRS (1819–1903) oli irlantilaissyntyinen ja Cambridgessa toiminut, lahjakas matemaatikko ja fyysikko.

geopotentiaaliluvut — *normaalipotentiaalin* erotuksiksi vertausellipsoidin normaalipotentiaaliin verrattuna.

Käytännössä kutsutaan usein ζ-arvojen karttaa ”kvasigeoidin malliksi”. Kvasigeoidi on yleensä lähellä geoidia, paitsi vuoristossa, jossa poikkeamat voivat nousta yli metriin.

On kuitenkin muistettava, että korkeusanomalia ζ on määritelty *topografian pinnalle*, joka on monessa paikassa hyvin rosoinen. Tämä merkitsee, että kaikki topografian korkeuden vaihtelut heijastuvat myös tämän kvasigeoidin vaihteluiksi sillä tavalla, että kvasigeoidi *korreloi* vahvasti topografian pienten yksityiskohtien kanssa. Ei siis voida sanoa, että kvasigeoidin muoto ilmaisee ainoastaan Maan potentiaalikentän muotoa. Siinä sotketaan geopotentiaalin ja maastokorkeuden vaihtelut yhdeksi sopaksi.

Siksi kvasigeoidin käsite on onnettomasti valittu kompromissi, myönnytys ”vertauspinta-ajattelulle”, joka on oikeasti toimiva vain klassisen geoidikäsitteen puitteissa. Paras pitäytyä Molodenskin teorian puitteissa käsitteessä *korkeusanomalia*, joka on kolmiulotteinen funktio eli kenttä

$$\zeta(X, Y, Z) = \zeta(\varphi, \lambda, h).$$

5.7 Ilma-anomaliat

Jos mitataan painovoima g pisteessä P, jonka korkeus ”merenpinnan yläpuolella” on H ja jonka leveysaste on Φ, voidaan laskea painovoima-anomalia Δg pisteessä seuraavasti:

$$\Delta g \stackrel{\text{def}}{=} g - \gamma(\Phi, H),$$

jossa $\gamma(\Phi, H)$ on normaalipainovoima laskettuna sen muodollisen määritelmän mukaan, mutta korkeudella H ja leveysasteella Φ.

Näin määritellään *ilma-anomalioita* (engl. *free-air anomalies*).

Linearisoidaan tämä seuraavasti:

$$\Delta g = g - \gamma(\Phi, H) \approx g - \left(\gamma(\varphi, h) + (\Phi - \varphi)\,\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + (H - h)\,\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right) \approx$$
$$\approx g - \left(\gamma(\varphi, 0) + h\frac{\partial \gamma}{\partial h} + (H - h)\,\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right) = g - \gamma(\varphi, 0) - H\frac{\partial \gamma}{\partial h},$$

jossa teemme approksimaation, että normaalipainovoiman pystygradientti $\frac{\partial}{\partial h}\gamma$ on vakio[9].

Näin ollen ilma-anomaliat voidaan laskea yksinkertaisemmin. Normaalikentän painovoimakaava 4.10 antaa leveysasteelle 60°:

$$\gamma = 981\,917{,}838 - 0{,}308\,449\,4\,H + \cdots \text{ mGal}.$$

Siis lineaarisessa approksimaatiossa Maan pinnan lähellä painovoima heikkenee noin 0,3 mGal jokaista korkeuden metriä kohti. Tämä arvo on hyvä muistaa.

Likimääräinen yhtälö ilma-anomalioiden laskemiseksi on silloin

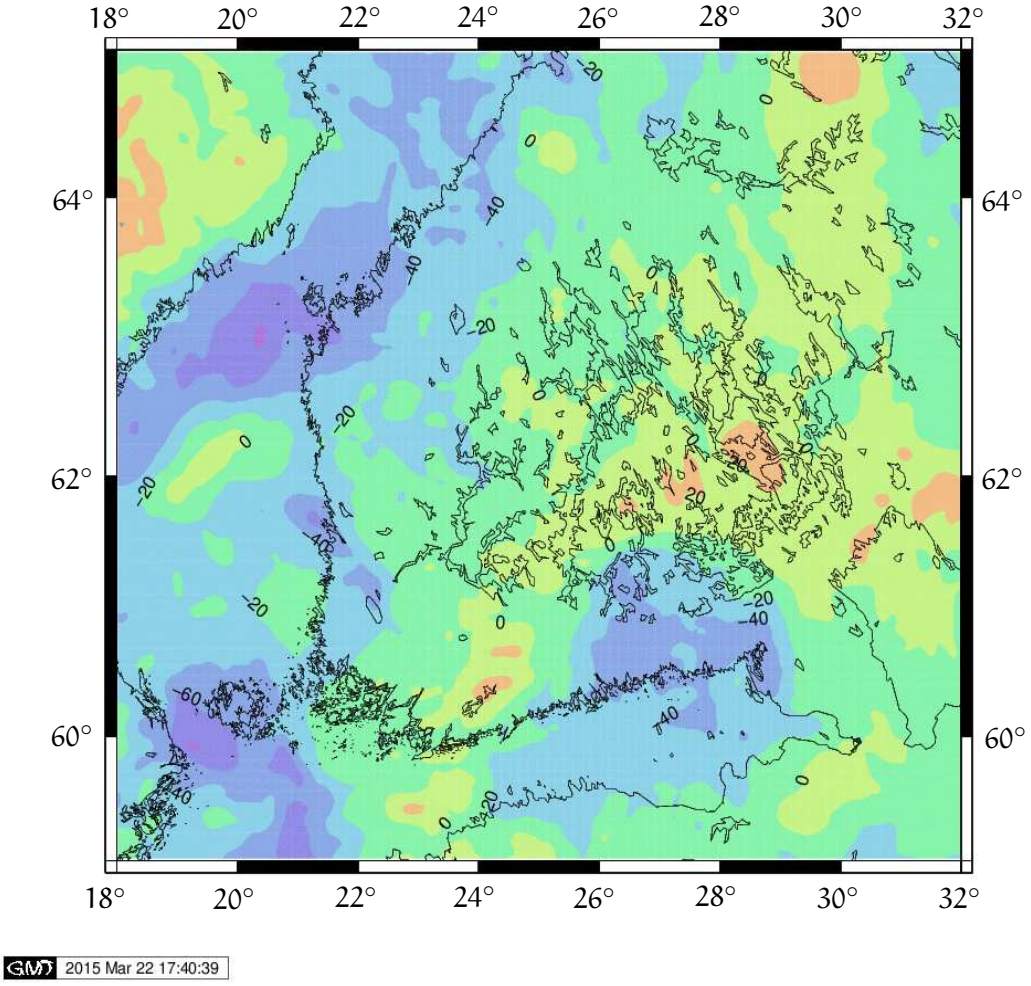
$$\Delta g_P = g_P - \gamma_0(\varphi) + 0{,}3084\,{}^{\text{mGal}}/_{\text{m}}\,H, \tag{5.11}$$

jossa $\gamma_0(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \gamma(\varphi, 0)$, normaalipainovoima merenpinnalla, on ainoastaan leveysasteen funktio. Suomen tapaisessa maassa yhtälö 5.11 on usein riittävän tarkka, vaikka myös alkuperäisen yhtälön 4.10 laskeminen on helppoa.

Ilma-anomalioita käytetään laajasti. Yleensä kun puhutaan painovoima-anomalioista, tarkoitetaan juuri ilma-anomalioita. Ne ilmaisevat maapallon ulkopuolista painovoimakenttää vuorineen ja laaksoineen.

---

[9] Tarkasti ottaen pitää huomioida, että leveysaste Φ ei välttämättä ole leveysaste geosentriseen vertausellipsoidiin nähden. Se voi olla tähtitieteellinen leveysaste tai leveysaste jossakin vanhassa kansallisessa koordinaattijärjestelmässä, joka käyttää epägeosentristä vertausellipsoidia, kuten Suomessa Kartastokoordinaattijärjestelmä KKJ ja Hayfordin ellipsoidi. Tämän aiheuttama virhe on kuitenkin pari kolme suuruusluokkaa pienempi kuin erotuksen $H - h$ aiheuttama efekti.



KUVA 5.5. Painovoiman ilma-anomalioita Etelä-Suomessa laskettuina pallofunktiokehitelmästä EGM2008. Data © Bureau Gravimétrique International (BGI) / International Association of Geodesy. Verkkopalvelu BGI, EGM2008.

Kysymyksiä

1) Jos painovoima merenpinnalla on $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, millä korkeudella painovoima häviää, laskettuna yllä mainitun painovoiman pystygradientin $-0{,}3\,\mathrm{mGal/m}$ mukaan?
2) Kuinka realistista tämä on fysikaalisesti?

Vastauksia

1) Jos gradientti on $-0{,}3\,^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$, tarvitaan $\left(9{,}81 \cdot 10^5 \middle/ 0{,}3\right)$ m = 3270 km saavuttaakseen arvo nolla.
2) Ei kovin realistista. Itse painovoimagradientti putoaa nopeasti alkuarvosta $-0{,}3\,^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$, kun siirrytään ylöspäin, ja siksi tämä lineaarinen ekstrapolointi on yksinkertaisesti väärin.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Miten luotiviivan poikkeamat ja geoidikorkeudet liittyvät toisiinsa?
2) Mikä on fysikaalisen geodesian perusyhtälö palloapproksimaatiossa?
3) Millä tavalla painovoimahäiriö eroaa painovoima-anomaliasta?
4) Mitä yksiköitä käytetään painovoima-anomalioiden ja painovoimagradientin mittaamiseksi? Miten ne liittyvät SI-järjestelmään?
5) Miten geoidikorkeus ja häiriöpotentiaali liittyvät toisiinsa?
6) Selosta telluroidikuvaus ja korkeusanomaliat.

Harjoitus 5−1: Painovoima-anomalioiden spektri

Käytä yhtälöä 5.8. Jos oletetaan, että painovoima-anomalioiden asteosuuksien Δg_n neliöllinen keskiarvo,

$$\|\Delta g_n\|_{\overline{\sigma}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g_n^2 \,(\phi, \lambda)\, d\sigma},$$

ei riipu valitusta asteluvusta n, miten samalla tavalla määritetty $\|T_n\|_{\overline{\sigma}}$ riippuu asteluvusta n?

Toisin sanoen, mitkä painovoimakentän asteluvut ovat suhteessa vahvimmin edustettuina häiriöpotentiaalissa ja mitkä asteluvut painovoima-anomalioissa?

Harjoitus 5–2: Luotiviivan poikkeamat ja geoidin kaltevuus

Jos maan luotiviivan poikkeamien etelä-pohjoiskomponentissa on yhden kaarisekunnin systemaattinen virhe, minkälaisen virheen se aiheuttaa geoidikorkeuksien erossa $N_2 - N_1$ pisteiden 1 ja 2 välillä, joiden etäisyys toisistaan on noin 1000 km etelä-pohjoissuunnassa? Katso kuvat 5.1 ja 5.2.

Harjoitus 5–3: Painovoima-anomalia ja geoidin korkeus

Eräässä paikassa Suomessa painovoima-anomalia (ilma-anomalia) on $\Delta g = 100\,\text{mGal} = 10^{-3}\,\text{m/s}^2$. Samassa paikassa häiriöpotentiaali T on $200\,\text{m}^2/\text{s}^2$.

1) Käyttämällä fysikaalisen geodesian perusyhtälöä 5.6:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T,$$

laske $\frac{\partial}{\partial r}T$ ja vertaa sitä suureen $2T/r$ kanssa. Oleta $r \approx R$. Kumpi termi, $\frac{\partial}{\partial r}T$ vai $2T/r$, dominoi?

2) Oleta, että piste on lähellä merenpintaa. Käyttämällä Brunsin yhtälöä

$$N = \frac{T}{\gamma},$$

jossa γ on keskimääräinen painovoima $9{,}81\,\text{m/s}^2$, laske pisteen geoidikorkeus N.

Geofysikaaliset reduktiot

6

6.1 Yleistä

Näimme, että integraaliyhtälöt, kuten *Greenin* kolmas lause 1.25, tarjoavat mahdollisuuden laskea Maan koko ulkopuolinen potentiaali sekä kaikki potentiaalista laskettavat suureet, kuten gravitaatiokiihtyvyyden, käyttämällä reunapinnalla havaittujen suureiden V tai $\frac{\partial}{\partial n}V$ — tai niiden lineaariyhdistelmän — arvoja. Edellytys on, että rajapinnan ulkopuolella ei ole massoja.

Greenin kolmas lause on vain yksi esimerkki monesta: jokainen integraalilause on erään *reuna-arvotehtävän* ratkaisu.

Reunapinnan valinnalle on kolme vaihtoehtoa:

1) Valitaan Maan topografinen pinta.
2) Valitaan keskimerenpinta, tarkemmin keskimerenpinnan lähellä oleva tasapotentiaalipinta eli *geoidi*.
3) Valitaan vertausellipsoidi.

- Vaihtoehdon 1 on kehittänyt etenkin Molodenskin (Molodenski ym., 1962) koulukunta entisessä Neuvostoliitossa. Menetelmän etuna on, että *painovoimareduktiota ei tarvita*, koska kaikki massat ovat jo reunapinnan sisällä. Haittana on, että topografian usein monimutkainen muoto on otettava huomioon, kun reuna-arvotehtävä formuloidaan ja ratkaistaan.

- Vaihtoehto 2 on klassinen geoidi- tai geopotentiaalimääritys. Tässä tapauksessa tarvitaan painovoimadatan *geofysikaalisia reduktioita*, koska Maan massoista osa on laskentapinnan ulkopuolella: ne on laskennallisesti poistettava tai siirrettävä pinnan sisäpuolelle. Vain silloin Laplacen yhtälö 1.13 pätee Maan ulkopuolisessa avaruudessa, kuten fysikaalisen geodesian reuna-arvotehtävä edellyttää, katso osio 5.5.

  Silloin saatu geopotentiaali- tai geoidiratkaisu ei ole enää alkuperäisen massajakauman potentiaali tai geoidi, vain *redukoidun* massajakauman. Tätä pintaa kutsutaan *kogeoidiksi*. Tarvitaan "palautusaskel", jossa määritetään ja peruutetaan tämän reduktiovaiheen vaikutus geopotentiaaliin ja geoidiin. Tätä vaikutusta kutsutaan "epäsuoraksi vaikutukseksi".

  Kirjallisuudessa tätä menetelmää kutsutaan myös poistamis-entistämis- eli *remove-restore*-menetelmäksi.

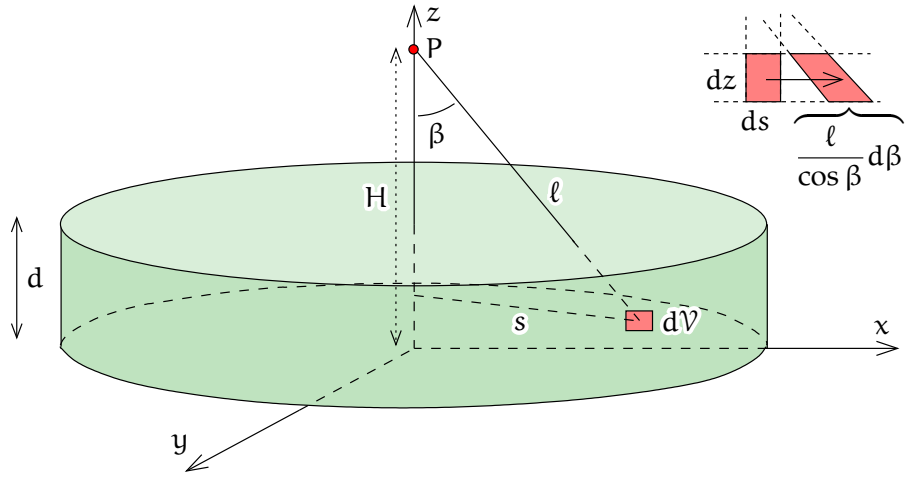
- Vaihtoehtoa 3 on käytetty harvoin, koska painovoimamittauksia ei ole ollut perinteisesti mahdollista tehdä absoluuttisesti, siis geosentrisesti tai vertausellipsoidin suhteen, tunnetussa paikassa. Nykyisin tämä onnistuu GNSS:n avulla: esimerkiksi Etelämantereella ja Grönlannin sisämaassa näin voisi tehdä, koska käytössä ei ole merenpintaan sidottua korkeusjärjestelmää.

  Odotettavissa on, että menetelmän suosio kasvaa, kun gravimetristen asemien korkeudet mitataan yhä enemmän suoraan GNSS:llä. Katso esimerkiksi Märdla (2017).

6.2 Bouguer-anomaliat

Ilma-anomaliat riippuvat topografiasta, koska itse painovoima sisältää topografisten massojen vetovoimavaikutuksen. Ilma-anomaliakartasta näkyy samoja pieniä yksityiskohtia kuin topografiasta. Yksi tapa poistaa topografian vaikutus on niin sanottu *Bouguer*[1]-reduktio.

[1]



KUVA 6.1. Bouguer-laatan vetovoima.

6.2.1 *Bouguer-reduktion laskenta*

Lasketaan homogeenisen laatan vaikutus painovoimaan. Oletetaan, että laatta on äärettömän kokoinen: paksuus d, ainetiheys ρ ja pisteen P korkeus H laatan alapinnasta. Katso kuva 6.1. Vetovoima pisteessä P, joka osoittaa symmetrian takia suoraan alaspäin, saadaan integroimalla. Laskettavalla tilavuusintegraalilla on tilavuusalkio

$$dV = ds \cdot dz \cdot s\, d\alpha$$

lieriökoordinaateissa (s, z, α). *Muunnetaan* tämä koordinaatteihin (β, z, α). Unohdetaan α ja tutkitaan pinta-ala-alkio (kuva 6.1, ylhäällä oikealla)

$$ds\, dz = \frac{\ell}{\cos\beta} d\beta\, dz,$$

jossa tarvittava Jacobin determinantti, $\ell/\cos\beta$, näkyy.

---

[1] Pierre Bouguer (1698–1758) oli ranskalainen hydrografiaprofessori, joka osallistui Maan muotoa koskevaan yhteiskunnalliseen keskusteluun. Vuosina 1735–1743 hän johti Perussa Etelä-Amerikassa Ranskan Tiedeakatemian astemittausta suorittavaa retkikuntaa samaan aikaan, kun De Maupertuis suoritti vastaavan Tornionlaakson astemittauksen Lapissa. Geodesian lisäksi hän harrasti myös tähtitiedettä.

Integroidaan:

$$a \overset{\text{def}}{=} \|\mathbf{a}\| = G\iiint \frac{\cos\beta}{\ell^2}\rho\,dV = G\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{d}\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta}{\ell^2}\cdot ds\,dz\cdot s\,d\alpha =$$
$$= G\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{d}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\beta}{\ell^2}\cdot\frac{\ell}{\cos\beta}d\beta\,dz\cdot s\,d\alpha =$$
$$= 2\pi G\rho\int_0^{d}\int_0^{\pi/2}\frac{s}{\ell}d\beta\,dz = 2\pi G\rho\int_0^{d}\left(\int_0^{\pi/2}\sin\beta\,d\beta\right)dz.$$

Tässä integraali

$$\int_0^{\pi/2}\sin\beta\,d\beta = \left[-\cos\beta\right]_0^{\pi/2} = 1,$$

ja lopputulos on

$$a = 2\pi G\rho d. \tag{6.1}$$

Tämä on Bouguer-laatan vetovoiman yhtälö. Sivutuloksena saadaan r-säteisen ympyrän muotoisen levyn vetovoima:

$$\int_0^{\beta_0(z)}\sin\beta\,d\beta = \left[-\cos\beta\right]_0^{\beta_0(z)} = 1-\cos\big(\beta_0(z)\big),$$

ja koko integraali

$$a = 2\pi G\rho\int_0^{d}\left(1-\frac{\overbrace{\frac{H-z}{\sqrt{(H-z)^2+r^2}}}^{\cos(\beta_0(z))}}{}\right)dz.$$

Integraalifunktio on

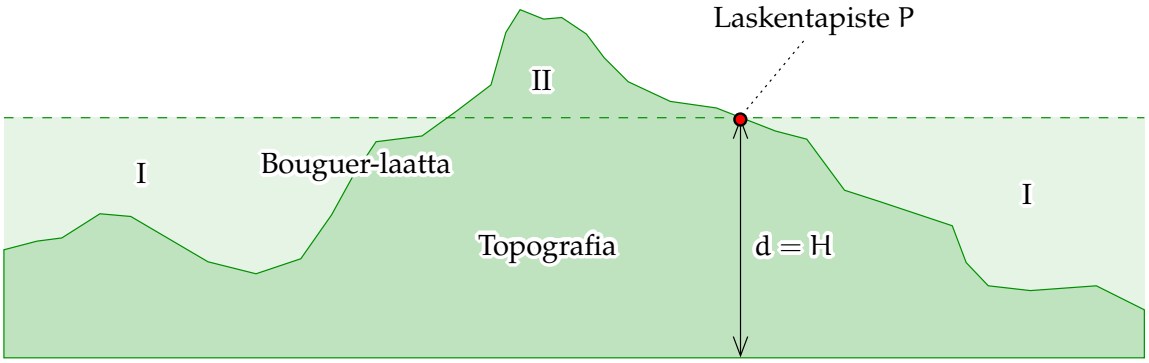
$$\int\frac{H-z}{\sqrt{(H-z)^2+r^2}}dz = -\sqrt{(H-z)^2+r^2}.$$

Integraalirajojen sijoitus antaa

$$\int_0^{d}\left(1-\frac{H-z}{\sqrt{(H-z)^2+r^2}}\right)dz = d+\sqrt{(H-d)^2+r^2}-\sqrt{H^2+r^2}.$$

Saadaan koko integraaliksi

$$a = 2\pi G\rho\left(d+\sqrt{(H-d)^2+r^2}-\sqrt{H^2+r^2}\right).$$



KUVA 6.2. Bouguer-laatta topografian approksimaationa.

Limiitissä $r \to \infty$, ja siis

$$\sqrt{(H-d)^2 + r^2} - \sqrt{H^2 + r^2} \to 0,$$

tämä on identtinen yhtälön 6.1 kanssa.

Bouguer-anomalioita lasketaan merenpinnan eli *geoidin* yläpuolella olevien maankuoren massojen vetovoiman poistamiseksi. Todellinen topografia *approksimoidaan* Bouguer-laatalla, katso kuva 6.2.

Ei ole sovittu tapa käsitellä meren peittämiä alueita:

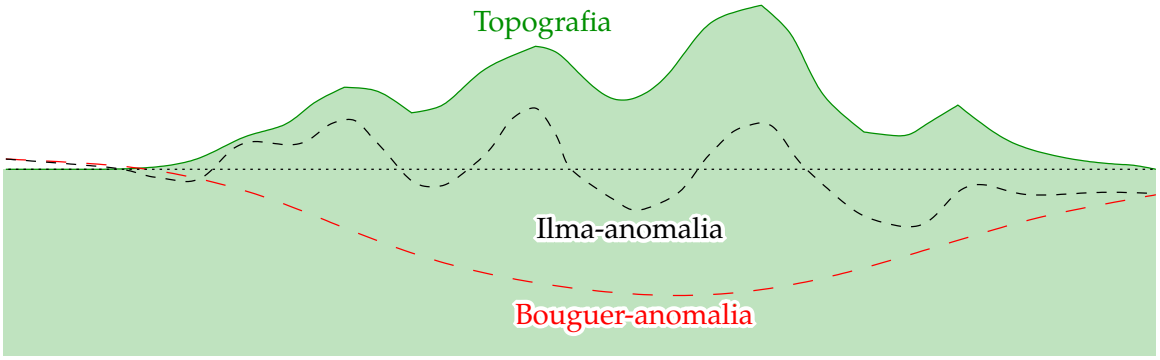
- Joillakin kartoilla on Bouguer-anomalioita maa-alueilla ja ilma-anomalioita merialueilla. Tämä on vaihtoehto, jos ei ole käytettävissä laadukasta syvyystietoa.
- Oikeampi tapa on korvata merivettä kallioisella Bouguer-laatalla, jonka paksuus on yhtä suuri kuin meren paikallinen syvyys eli *batymetria*.

Laskenta tapahtuu seuraavasti:

$$\Delta g_B = \Delta g_{FA} - 2\pi G\rho H = \Delta g_{FA} - 0{,}1119\,H, \tag{6.2}$$

jossa oletetaan laatan tiheydeksi usein käytetty maankuoren keskitiheyden arvo, $\rho = 2670\,\mathrm{kg/m^3}$. Sijoittamalla tähän yhtälö 5.11, saadaan

$$\Delta g_B = g_P - \gamma_0(\varphi) + (0{,}3084 - 0{,}1119)H = g_P - \gamma_0(\varphi) + 0{,}1965\,H. \tag{6.3}$$



KUVA 6.3. Eri anomaliatyyppien käyttäytyminen vuoristoisessa maastossa.

Suuretta Δg_B kutsutaan (yksinkertaiseksi) *Bouguer-anomaliaksi*.

Erotusta Bouguer-laatan vetovoiman ja todellisen topografian vetovoiman välillä kutsutaan *maastokorjaukseksi* TC (kuvassa 6.2 tilavuudet I ja II). Sen laskentaan palataan myöhemmin.

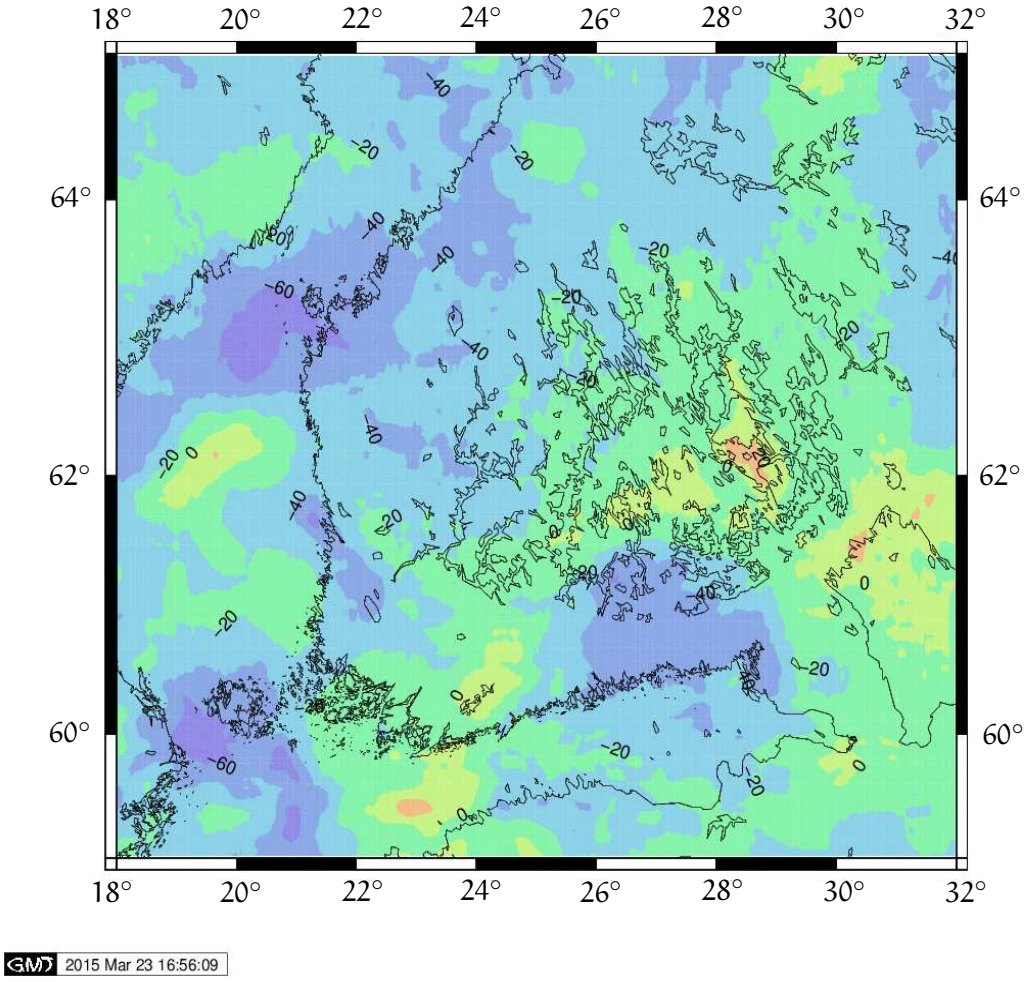
6.2.2 Ominaisuudet

Toisin kuin ilma-anomaliat, jotka vaihtelevat nollan molemmin puolin, Bouguer-anomaliat ovat *vahvasti negatiivisia* etenkin vuoristossa. Esimerkiksi jos vuoriston keskikorkeus on $\overline{H} = 1000\,\text{m}$, alueen Bouguer-anomaliat sisältävät *systematiikan* $1000 \times (-0{,}1119\,\text{mGal}) = -112\,\text{mGal}$, noin $-100\,\text{mGal}$ jokaista korkeuskilometriä kohti.

Bouguer-anomalioiden etuna on niiden pienempi vaihtelu paikasta toiseen. Siksi ne soveltuvat etenkin painovoima-arvojen *interpolointiin* ja *prediktioon*, tilanteissa joissa käytettävissä oleva gravimetrinen aineisto on maantieteellisesti harva. Tämä edellyttää, että topografian korkeudet tunnetaan paremmalla spatiaalisella tiheydellä.

6.3 Maastoefektit ja maastokorjaus

Yksinkertainen Bouguer-reduktio ei poista painovoima-anomalioista koko topografian vetovoimavaikutusta tarkasti. Kuvasta 6.2 näkyy, että tapahtuu kahdenlaisia virheitä:



KUVA 6.4. Maastokorjattuja Bouguer-anomalioita Etelä-Suomessa, laskettuna pallofunktiokehitelmästä EGM2008. Aineisto © Bureau Gravimétrique International (BGI) / International Association of Geodesy. Verkkopalvelu BGI, EGM2008. Kuvaan 5.5 sivulla 123 verrattuna Bouguer-anomaliat ovat vahvasti systemaattisesti negatiivisia, vaikka tämä on osittain postglasiaalisen isostaattisen epätasapainon aiheuttamaa ja näkyy myös ilma-anomaliakartalla. Bouguer-anomaliat ovat myös sileämpiä, vaikka sitä on tästä vaikeampi nähdä, koska Etelä-Suomi on aika tasainen.

- Tilavuuksien I vetovoima lasketaan mukaan, vaikka ne tilavuudet eivät sisällä ainetta.
- Tilavuuksien II vetovoima jätetään huomioimatta, vaikka tilavuudet sisältävät ainetta.

Molemmat virheet toimivat samaan suuntaan! Koska tilavuudet I ovat laskentapisteen P alapuolella, niiden vetovoima — jonka yksinkertainen Bouguer-reduktio korjaa pois — toimii alaspäin. Ja koska tilavuudet II ovat laskentapisteen yläpuolella, niiden vetovoima — jota ei yksinkertaisessa Bouguer-reduktiossa korjata pois — toimii ylöspäin. Tehty virhe on samansuuntainen kuin edellisessä tapauksessa.

Maastokorjaus on aina positiivinen.

Kirjoitetaan

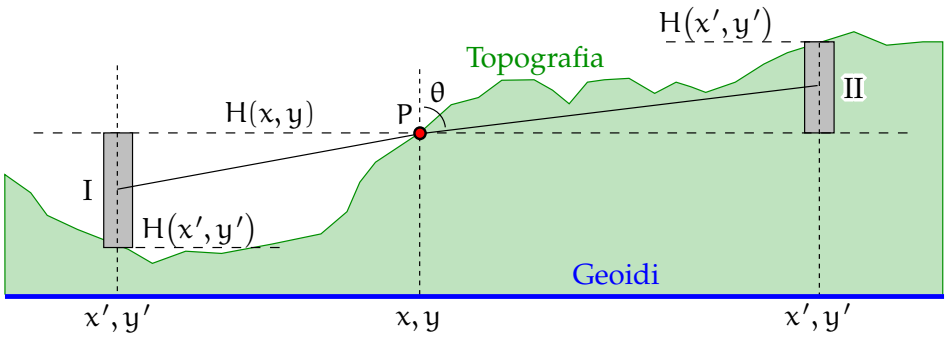
$$\Delta g'_B = \Delta g_B + TC,$$

jossa TC — "*terrain correction*" eli maastokorjaus — on positiivinen. Suuretta $\Delta g'_B$ kutsutaan maastokorjatuksi Bouguer-anomaliaksi.

Maastokorjaus lasketaan numeerisen integroinnin avulla. Kuvassa 6.5 näkyy *prismamenetelmä* ja miten molemmat prismat, I ja II, tuottavat positiivisen korjauksen, koska prisma I lisätään ja prisma II poistetaan laskennallisesti. Tarvitaan digitaalinen maastomalli, DTM, jonka on oltava varsinkin laskentapisteen ympäri erittäin tiheä: kokemuksen mukaan 500 m on suurin sallittu pisteväli Suomen kaltaisessa maastossa; vuoristossa tarvitaan jopa 50 m. Maastokorjauksen systemaattisen luonteen takia liian harvan digitaalisen maastomallin käyttö aiheuttaa jopa vakavia *systemaattisia virheitä* vajavaisesti korjatuissa painovoima-anomalioissa.

Maastokorjauksen laskennassa prismamenetelmällä käytetään seuraavaa yhtälöä, jossa oletuksina ovat maankuoren vakiotiheys ρ ja litteä Maa, suorakulmaisissa karttakoordinaateissa x, y:

$$TC(x,y) = \tfrac{1}{2} G\rho \int_{-D}^{+D}\int_{-D}^{+D} \frac{1}{\ell^3}\Big(H(x',y') - H(x,y)\Big)^2 \, dx'\, dy',$$



KUVA 6.5. Klassisen maastokorjauksen laskeminen prismamenetelmällä.

jossa

$$\ell = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + \left(\tfrac{1}{2}\big(H(x', y') - H(x, y)\big)\right)^2}$$

on etäisyys laskentapisteen

$$\begin{bmatrix} x & y & H(x, y) \end{bmatrix}^T$$

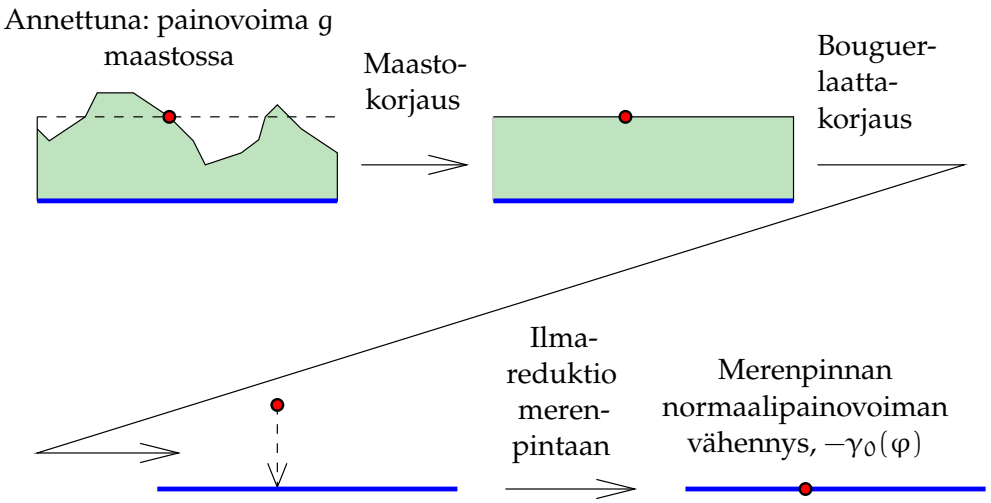
ja prisman keskiakselin keskipisteen

$$\begin{bmatrix} x' & y' & \tfrac{1}{2}\big(H(x', y') + H(x, y)\big) \end{bmatrix}^T$$

välillä. Tietenkin tämä on vain approksimaatio, mutta se toimii riittävän tarkasti maastossa, jossa kaltevuudet eivät yleensä ylitä 45°. Yllä olevassa integraalissa raja-arvo D on tavallisesti kymmeniä tai satoja kilometrejä. Jälkimmäisessä tapauksessa Maan kaarevuus alkaa jo vaikuttaa, mitä yhtälö ei ota huomioon.

Maastokorjauksen TC arvot vaihtelevat milligalin murto-osasta (Etelä-Suomessa) satoihin milligalleihin (korkeassa vuoristossa). Suomen käsivarressa maastokorjaukset voivat olla kymmeniä milligalleja.

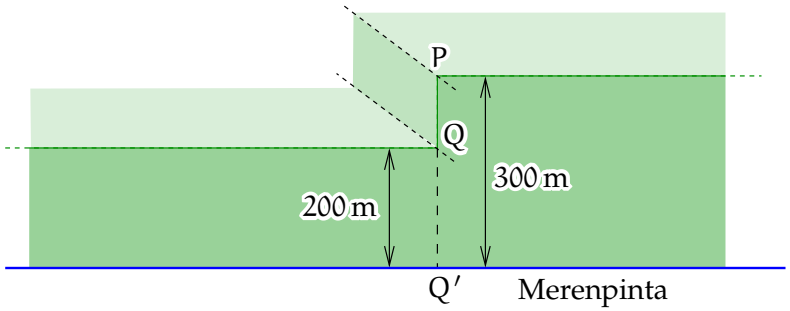
Kuvassa 6.6 esitetään Bouguer-anomalian laskennan vaiheet painovoimahavainnosta maastokorjauksen, Bouguer-laattakorjauksen ja ilmareduktion kautta.



KUVA 6.6. Bouguer-anomalian laskennan vaiheet. Reduktio merenpintaan käyttää painovoiman ilmagradientin standardiarvoa $-0{,}3084\,^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$, normaalipainovoiman pystygradienttia.

6.3.1 *Esimerkki: Maastokorjauksen soveltaminen erikoistapauksessa*

Annettuna on erikoinen maaston muoto, kuvassa 6.7 kolmiulotteisvaikutteisesti esitettynä. Korkeuserot ovat $\mathrm{PQ}' = 300\,\mathrm{m}$ ja $\mathrm{QQ}' = 200\,\mathrm{m}$. Kallion tiheys on maankuoren standarditiheys $2670\,^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{m}^3}$.



KUVA 6.7. Erikoinen maaston muoto. Pystysuora kallioseinämä kohdalla PQ on myös kartalla suora ja ulottuu molemmissa suunnissa äärettömyyteen.

Kysymyksiä

1) Laske pisteessä P maastokorjaus. Vihje: käytä Bouguer-laatan vetovoimakaavaa. Mikä on etumerkki?
2) Laske pisteessä Q maastokorjaus. Mikä on etumerkki?
3) Jos pisteessä P on annettuna, että ilma-anomalia on 50 mGal, paljonko on pisteen Bouguer-anomalia?
4) Jos pisteessä Q on annettuna, että Bouguer-anomalia on 22 mGal, paljonko on pisteen ilma-anomalia?

Vastauksia

1) Pisteen P maastokorjaus on painovoiman muutos, kun maasto täytetään pisteen vasemmalla puolella 300 metriin saakka. Tämä merkitsee *puolinaisen Bouguer-laatan*, paksuus 100 m, *lisäämistä* P:n tason alapuolelle. Vaikutus pystysuunnalle projisoituna on

$$\begin{aligned} \mathrm{TC} &= \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi G\rho \cdot H = \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}1119\,{}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}} \cdot 100\,\mathrm{m} = 5{,}595\,\mathrm{mGal}. \end{aligned}$$

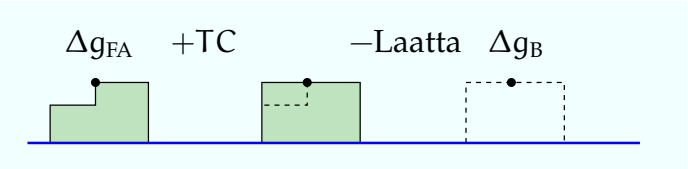
2) Pisteen Q maastokorjaus on painovoiman muutos, jos *otetaan pois* pisteen oikealla puolella ja sen yläpuolella oleva 100 m paksu *puolinainen Bouguer-laatta.* Sen pystysuuntainen painovoimavaikutus on, kuten yllä laskettu,

$$\mathrm{TC} = 5{,}595\,\mathrm{mGal},$$

ja koska pisteen Q tason *yläpuolella* oleva puolilaatta otetaan *pois*, on TC:n etumerkki taas positiivinen.

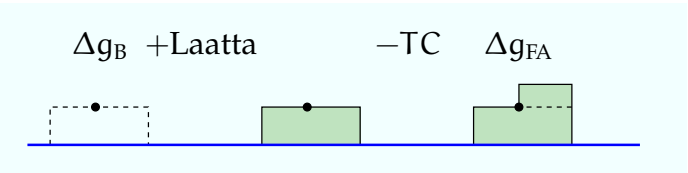
3) Ilma-anomaliasta Bouguer-anomaliaan:

$\Delta g_{\mathrm{FA}}(\mathrm{P})$	50,000 mGal
TC	+5,595 mGal
Bouguer-laatan poisto, 300 m	−33,570 mGal
$\Delta g_{\mathrm{B}}(\mathrm{P})$	22,025 mGal



4) Bouguer-anomaliasta ilma-anomaliaan:

$\Delta g_B(Q)$	22,000 mGal
Bouguer-laatan lisäys, 200 m	+22,380 mGal
TC:n poisto	−5,595 mGal
$\Delta g_{FA}(Q)$	38,785 mGal



6.4 Bouguer-palloanomaliat

Viime aikoina on laskettu myös *Bouguer-palloanomalioita*, esimerkiksi Balmino ym. (2012); Kuhn ym. (2009); Hirt ja Kuhn (2014). Tässä laskennassa koko maapallon topografia ja meren syvyydet eli *batymetria* otetaan huomioon pallogeometriassa. Maan litistyneisyys aiheuttaa laskennassa olematttoman pienen virheen. Bouguer-palloanomaliat eroavat Bouguer-laatta-anomalioista neljällä tavalla:

1) Bouguer-pallokuoren, paksuus H, vetovoima on $4\pi G\rho H$ eli kaksi kertaa vastaavan Bouguer-laatan vetovoima. Kuoren kaukainen osa tuottaa yhtä paljon vetovoimaa kuin laskentapisteen ympäristö!

2) Valtamerten syvyydet eli batymetria otetaan huomioon[2] korvaamalla merivettä maankuoren standardikalliolla. Tämä vaikuttaa anomalioihin *positiivisesti*.

[2] Näin voi tehdä myös Bouguer-laattakorjauksen yhteydessä, ja usein tehdäänkin.

3) Myös maapallon kaukaisten alueiden topografia- ja syvyystiedot otetaan huomioon realistisesti. Koska Maan pinnasta valtaosa on syvien valtamerten peitossa, aiheutuu *vahva positiivinen yleissystematiikka*, myös alavilla alueilla, joilla Bouguer-laattareduktio on tavallisesti pieni.

4) Myös maastokorjaus lasketaan nyt pallogeometriassa koko maapallon yli — vaikkakin vain topografialle. Siksi sääntö, jonka mukaan sen kaikki osuudet ovat positiivisia, ei enää päde: Abrehdary ym. (2016) raportoivat, että paikoissa lähellä paikallisen horisontin alapuolella olevia vuoristoja, pallomaastokorjaus voi olla niinkin negatiivinen kuin −200 mGal.

Laatta- ja pallo-Bouguer-anomalioiden välillä on olemassa suuri systemaattinen ero, joka on kuitenkin hyvin pitkäaaltoinen ja Australian kokoisella alueella lähes vakio: −18,6 mGal muutaman milligallin vaihteluvälin sisällä. Yksityiskohdat Bouguer-anomalioiden kartoissa ovat samannäköisiä (Kuhn ym., 2009).

Huvin vuoksi lasketaan globaalin ja täydellisen Bouguer-palloreduktion netto massaefekti. Mantereiden topografian keskikorkeus on 800 m, kun mantereiden kokonaispinta-ala on 29 % koko maapallon pinta-alasta. Valtamerten keskisyvyys on 3700 m, mikä vastaa täytettävää kalliota vastaavaa syvyyttä

$$3700 \times \frac{2670 - 1030}{2670}\,\mathrm{m} = 2272\,\mathrm{m},$$

jos maankuoren kallion oletettu tiheys on 2670 $\mathrm{kg/m^3}$, meriveden tiheys 1030 $\mathrm{kg/m^3}$ ja valtameren kokonaispinta-ala on 71 % koko maapallon pinta-alasta. Aluepainotettu summa on siis

$$(0{,}29 \times 800 - 0{,}71 \times 2272)\ \mathrm{m} = -1381\,\mathrm{m}.$$

Tulkinta Topografiaa ei ole tarpeeksi täyttämään valtamerta, silloinkaan jos saamme puristaa merivettä standardikallioksi. Jos yritämme tätä puskutraktorikoetta, meiltä jää uupumaan 1381 m nykymerenpintaan verrattuna.

Jos sen sijaan lisätään standardikalliota nykyiseen merenpintaan saakka — näinhän on Bouguer-palloreduktio määritelty — lisätään avaruudesta käsin havaittavaan Maan vetovoimaan määrä $4\pi G\rho \times 1381\,\mathrm{m} = 309\,\mathrm{mGal}$.

Maailmanlaajuinen keskimääräinen Bouguer-laattareduktio, kuten myös ero Bouguer-pallo- ja laattareduktioiden välillä maailmanlaajuisesti keskimäärin, on nyt puolet tästä arvosta eli $\approx 155\,\mathrm{mGal}$. Koska ilma-anomalioiden globaali keskiarvo on nolla, on globaali pallo-Bouguer-anomalioiden keskiarvo 309 mGal, ja positiivisuudesta valtaosa löytyy syvän valtameren yllä.

6.5 Helmertin kondensaatio

3 Usein käytetty, Friedrich Robert Helmertin[3] ehdottama keino poistaa geoidin ulkopuolisten massojen vaikutus on *kondensaatio*. Tässä menetelmässä kaikki mannermassat siirretään matemaattisesti suoraan alaspäin keskimerenpintaan yksinkertaiseksi massatiheyskerrokseksi

$$\kappa = \rho H,$$

jossa H on topografian korkeus merenpinnasta ja ρ sen keskimääräinen ainetiheys. Tämä massapintatiheys voidaan tulkita patsaan massaintegraaliksi:

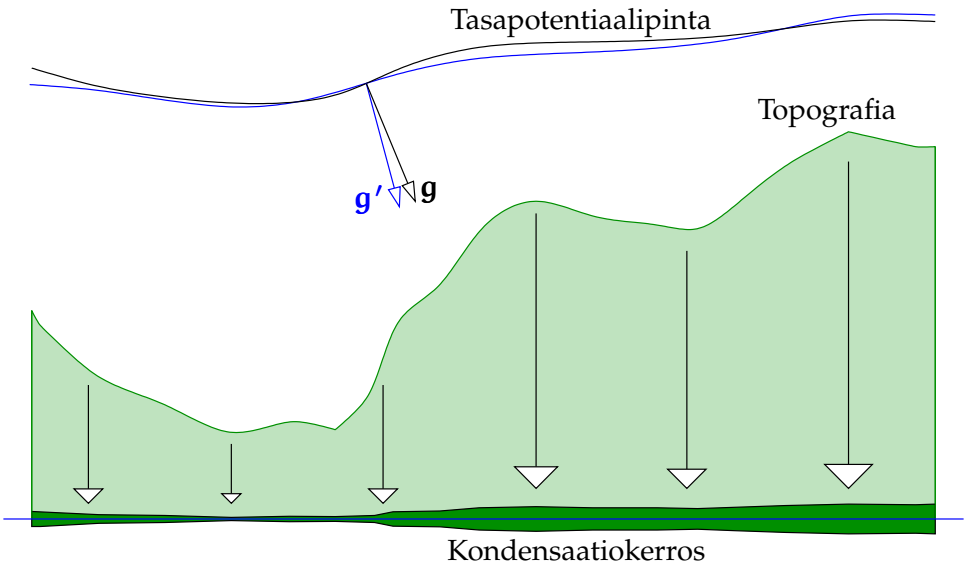
$$\kappa = \rho \int_R^{R+H} dz.$$

Pallon muotoisen Maan tapauksessa vastaava integraali on

$$\kappa = \rho \int_R^{R+H} \left(\frac{r}{R}\right)^2 dr = \rho \frac{1}{R^2} \left[\tfrac{1}{3} r^3\right]_R^{R+H} = \rho H \left(1 + \frac{H}{R} + \tfrac{1}{3}\frac{H^2}{R^2}\right), \quad (6.4)$$

jossa ymmärretään, että massaa siirretään patsaan poikkileikkauksesta, jonka pinta-ala on r^2/R^2 merenpintaan, jossa pinta-ala on 1.

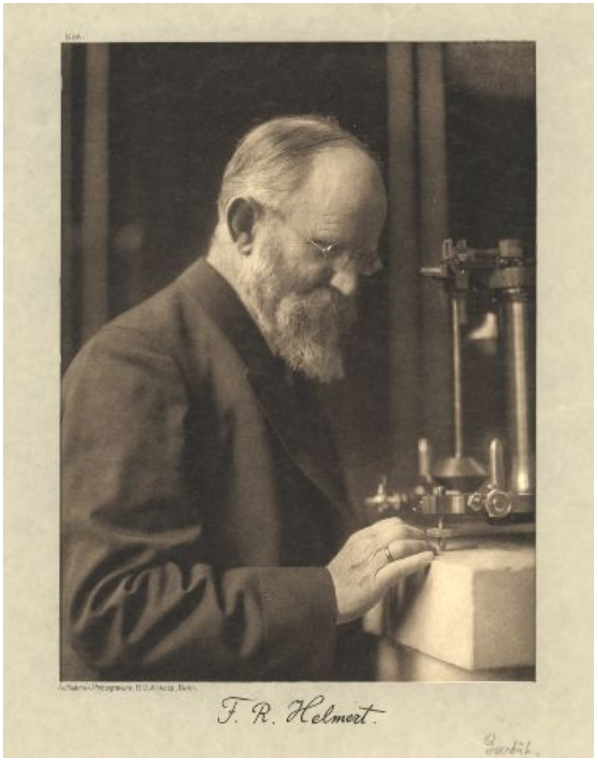
[3] Friedrich Robert Helmert (1843–1917) oli saksalaisgeodeetti sekä matemaattisen ja tilastollisen geodesian tutkija.



KUVA 6.8. Helmertin kondensaatio ja sen aiheuttamat muutokset painovoimakentässä.

Helmertin kondensaation etu Bouguer-reduktioon verrattuna on, että *massaa ei poisteta*. Bouguer-reduktiohan on topografisten massojen laajamittainen laskennallinen poisto. Siksi toisin kuin Bouguer-reduktiossa, Helmertin kondensaatiossa painovoima-anomaliat eivät muutu systemaattisesti.

Liitteessä D johdetaan sarjakehitelmät pallogeometriassa, jotka ilmaisevat topografian sekä ulkoista että sisäistä potentiaalia itse topografian $H(\phi, \lambda)$ ja sen eri potenssien "asteosuuksien" funktioina. Liitteessä laajahkosti esitettyä johtamistapaa käytetään Maan painovoimakentän teoriassa paljon topografian painovoimavaikutuksen mallintamiseksi. Teoriassa suppenemiskysymykset ovat vaikeita, vaikka emme tässä kiinnitä niihin erityistä huomiota.



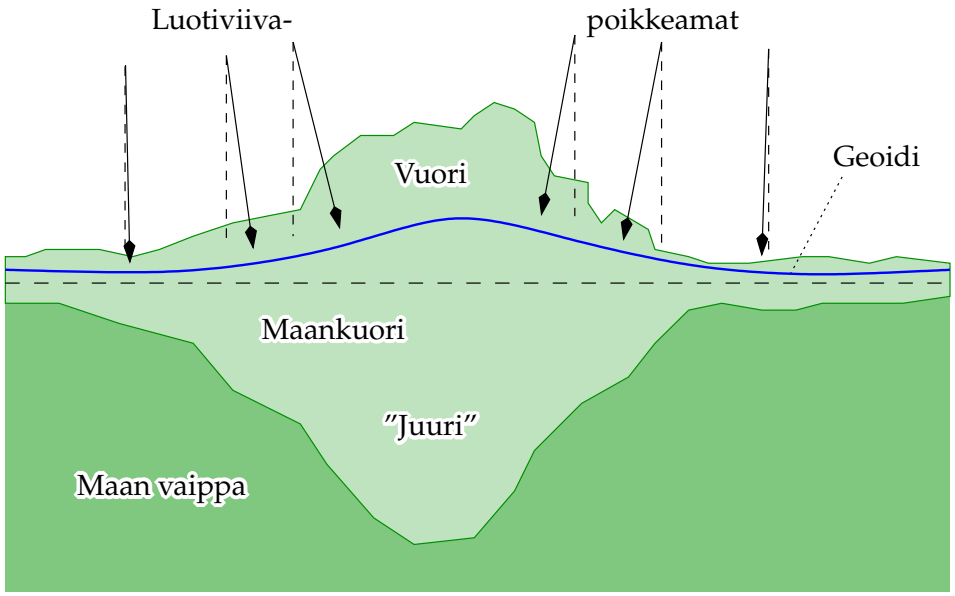
KUVA 6.9. Friedrich Robert Helmert. Humboldt University Berlin (2017).

6.6 Isostasia

6.6.1 Klassisia hypoteeseja

Jo 1700- ja 1800-luvun aikana, muun muassa Bouguer'n työn ansiosta Etelä-Amerikassa ja brittigeodeettien työn ansiosta Intian Himalajalla, oltiin tietoisia siitä, että vuoristot eivät ole vain kivikasoja maankuoren päällä. Vuoria ympäröivä painovoimakenttä, tarkemmin luotiviivan poikkeamat, voitiin selittää vain olettamalla, että jokaisen vuoriston alla on kevyemmästä kiviaineesta koostuva "juuri". Tämän juuren aiheuttajaksi arveltiin maankuoren lähes hydrostaattinen käyttäytyminen geologisella aikaskaalalla. Tätä hydrostaattisen tasapainon oletusta kutsuttiin *isostasiahypoteesiksi*, myös *isostaattiseksi kompensaatioksi*.

Silloin, toisin kuin nykyisin, ei vielä ollut mahdollista saada fysikaali-



KUVA 6.10. Isostasia ja luotiviivojen taipuminen vuoreen päin.

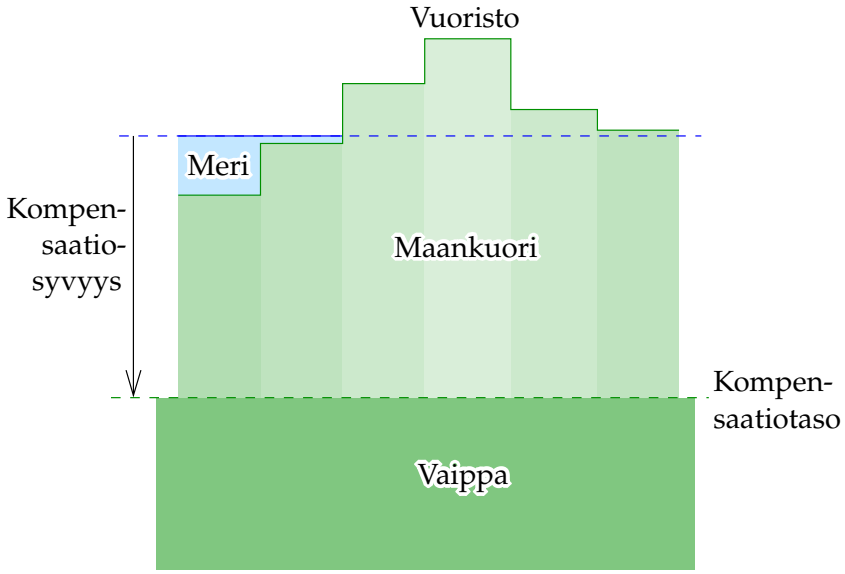
sin menetelmin eli seismologialla tarkkaa tai edes oikeaa kuvaa siitä, minkä muotoisia nämä vuoristojen juuret oikeasti ovat. Siksi kehiteltiin yksinkertaistettuja työhypoteesejä.

Yksi klassinen isostaattinen hypoteesi on Prattin ja Hayfordin hypoteesi. Sen ehdotti J. H. Pratt[4] 1800-luvun keskivaiheilla (Pratt, 1855, 1859, 1864), ja J. F. Hayford[5] kehitti laskentaan tarvittavat matemaattiset apuvälineet. Hypoteesin mukaan vuoren alla olevan ”juuren” ainetiheys vaihtelee vuoren korkeuden mukaan niin, että korkeimpien vuorten alla on kevyin materiaali, ja raja tämän kevyen juuriaineen ja tiheämmän Maan vaipan materiaalin välillä on vakiosyvyydellä. Tämä malli, jota nykyisin ei enää paljon käytetä, näkyy kuvassa 6.11.

Toinen klassinen isostaattinen hypoteesi on G. B. Airyn[6] käsialaa.

[4] John Henry Pratt (1809–1871) oli brittiläinen pappismies ja matemaatikko, joka toimi Kolkatassa Intiassa arkkidiakonina. Wikipedia, John Pratt.

[5] John Fillmore Hayford (1868–1925) oli yhdysvaltalainen geodeetti, joka tutki isostasiaa ja Maan muotoa.



KUVA 6.11. Prattin ja Hayfordin isostaattinen hypoteesi.

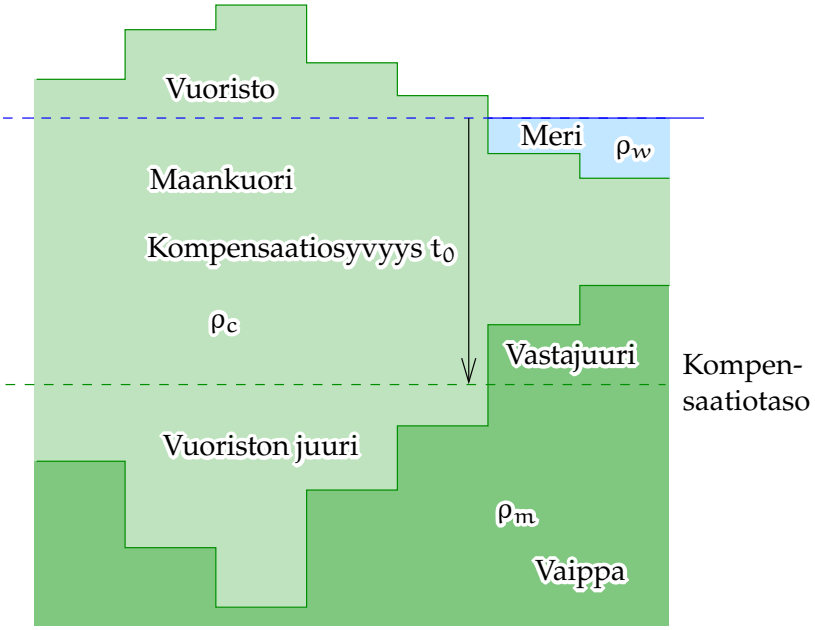
Koska V. A. Heiskanen[7] käytti sitä laajasti ja kehitti sen matemaattista muotoa, sitä kutsutaan Airyn ja Heiskasen malliksi. Tässä mallissa oletetaan, että ”juuren” ainetiheys on vakio ja että isostaattinen kompensaatio saadaan aikaan vaihtelemalla juuren uppoamissyvyyttä Maan vaippaan. Nykytietojen mukaan tämä vastaa paremmin sitä, mitä Maan sisällä todella tapahtuu. Tämä hypoteesi näkyy kuvassa 6.12.

6.6.2 *Laskentakaavoja*

Airyn isostaattinen hypoteesi olettaa, että aineen pystypylvään kokonaismassa on jokaisessa paikassa sama. Siis olkoon maankuoren tiheys ρ_c, vaipan tiheys ρ_m, meriveden tiheys ρ_w, meren syvyys d, kuoren

[6] George Biddell Airy PRS (1801–1892) oli englantilainen matemaatikko ja tähtitieteilijä, ”Astronomer Royal” 1835–1881.

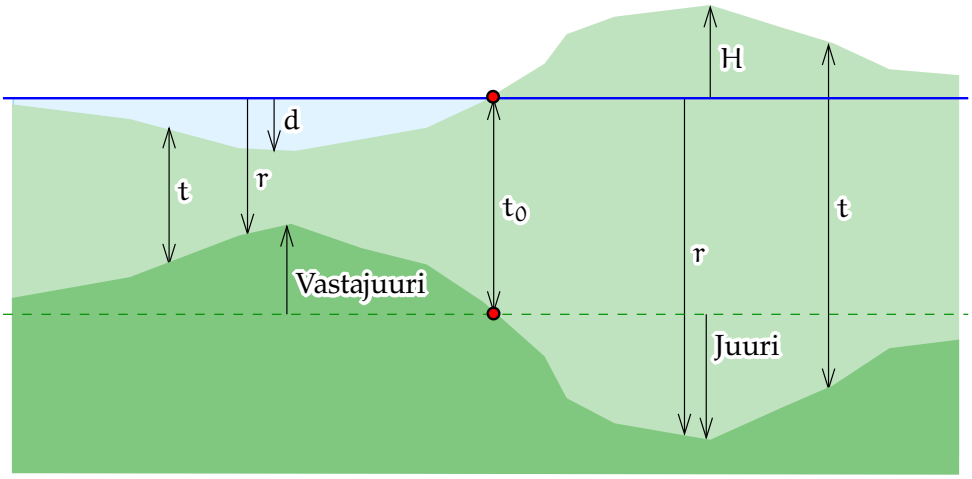
[7] Veikko Aleksanteri Heiskanen (1895–1971), ”*the great Heiskanen*” (Hermans, 2007) oli suomalainen geodeetti, joka toimi myös Ohiossa Yhdysvalloissa. Hänet tunnetaan isostasian ja maailman geoidin tutkimuksistaan (”Columbuksen geoidi”). Katso Kakkuri (2008).



KUVA 6.12. Airyn ja Heiskasen isostaattinen hypoteesi.

paksuus t ja topografian korkeus H. Saadaan

$$t\rho_c + d\rho_w - (t+d)\,\rho_m = c \quad \Longrightarrow \quad t = -\frac{d\,(\rho_m - \rho_w) + c}{\rho_m - \rho_c}$$



KUVA 6.13. Isostaattisen kompensaation suureita.

merellä ja

$$t\rho_c - (t - H)\,\rho_m = c \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{H\rho_m - c}{\rho_m - \rho_c}$$

mantereella. c on sopiva vakio[8]. Tässä on jätetty huomioimatta Maan kaarevuus ja käytetään ”litteän Maan mallia”.

Mantereen alla vuoriston juuren syvyys on

$$r = t - H = \frac{H\rho_m - c}{\rho_m - \rho_c} - \frac{H\rho_m - h\rho_c}{\rho_m - \rho_c} = \frac{H\rho_c - c}{\rho_m - \rho_c}.$$

Samoin meren alla

$$r = t + d = -\frac{d\,(\rho_m - \rho_w) + c}{\rho_m - \rho_c} + \frac{d\rho_m - d\rho_c}{\rho_m - \rho_c} = -\frac{d\,(\rho_c - \rho_w) + c}{\rho_m - \rho_c}.$$

Yhtälöissä vakio c on, ainakin isostaattisen tasapainon kannalta, mielivaltainen ja ilmaisee sitä tosiasiaa, että taso, josta lasketaan juuren syvyys — vähemmän tarkasti ”kuoren keskimääräinen paksuus” — voidaan valita mielivaltaisesti.

Eri lähestymistapa: c:n sijasta käytetään ”nollatopografian kompensaatiotasoa”, lyhyesti *kompensaatiosyvyys*, t_0, joka lasketaan yllä olevista yhtälöistä asettamalla $H = d = 0$:

$$t_0\,(\rho_c - \rho_m) = c.$$

Tästä saadaan mantereen alla juuren syvyydeksi

$$r = \frac{H\rho_c - t_0\,(\rho_c - \rho_m)}{\rho_m - \rho_c} = t_0 + H\frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c}, \tag{6.5}$$

ja meren alla

$$r = -\frac{d\,(\rho_c - \rho_w) + t_0\,(\rho_c - \rho_m)}{\rho_m - \rho_c} = t_0 - d\frac{\rho_c - \rho_w}{\rho_m - \rho_c}, \tag{6.6}$$

yhtälöt, jotka ovat jonkin verran yksinkertaisempia ja myös intuitiivisempia.

[8] Sen dimensio, maanpinnan painovoiman g kanssa kertomisen jälkeen, on *paine*: Arkhimedeen lain mukainen maankuoren ja meriveden patsaan paine vähennettynä syrjäytetyn vaippa-aineen patsaan paineella.

Vieläkin kolmas kirjoitustapa:

$$H\rho_c + (-r)(\rho_m - \rho_c) = c,$$
$$(-d)(\rho_c - \rho_w) + (-r)(\rho_m - \rho_c) = c.$$

Siis

$$\sum_{\text{rajapinnat}} (\text{poikkeama} \times \text{tiheyskontrasti}) = \text{vakio}.$$

Eri isostaattisten hypoteesien vaikutus painovoimaan on aika lailla samanlaista: painovoimamittausten perusteella hypoteeseja ei voi erottaa toisistaan. Hypoteesin valinnan vaikutus geoidiin on vahvempi.

6.6.3 Esimerkki: Norja

Etelä-Norjan *Hardangerin ylänkö* (*Hardangervidda*) on keskimäärin 1100 m merenpinnan yläpuolella. Se on kansallispuisto, suosittu turistikohde ja Euroopan laajin puolitasanko. Sen läpi kulkee *Bergensbanen*, joka on Pohjois-Euroopan korkein linjarautatie.

Norjanmeri on Atlantin valtameren osa Norjan rannikon edessä. Se ei kuulu mannerjalustaan ja on keskimäärin 2 km syvä.

Kysymyksiä

1) Kuinka syvällä Hardangerin ylängön juuri on kompensaatiotason t_0 alapuolella?
2) Paljonko on Norjanmeren vastajuuren negatiivinen syvyys saman kompensaatiotason suhteen?
3) Paljonko on Hardangerin ylängön juuren *suhteellinen* syvyys verrattuna lähellä olevaan Norjanmereen?

Vastauksia

1) Käytä yhtälöä 6.5, joka antaa

$$r - t_0 = H\frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} = \\ = 1100\,\text{m} \times \frac{2670\,\text{kg/m}^3}{(3370 - 2670)\,\text{kg/m}^3} = 4196\,\text{m}.$$

Tässä käytettiin standardiarvoja maankuoren ja Maan vaipan kallion tiheydeksi.

2) Käytä yhtälöä 6.6, joka antaa

$$r - t_0 = -d\frac{\rho_c - \rho_w}{\rho_m - \rho_c} = \\ = -2000\,\text{m} \times \frac{(2670 - 1030)\ \text{kg/m}^3}{(3370 - 2670)\ \text{kg/m}^3} = -4686\,\text{m},$$

jossa on lisäksi käytetty meriveden tiheyden standardiarvoa.

3) Syvyyskontrasti juuren ja vastajuuren välillä on $4196 - (-4686)$ m $= 8882$ m. Vertailun vuoksi Mount Everestin korkeus on 8848 m merenpinnan yläpuolella.

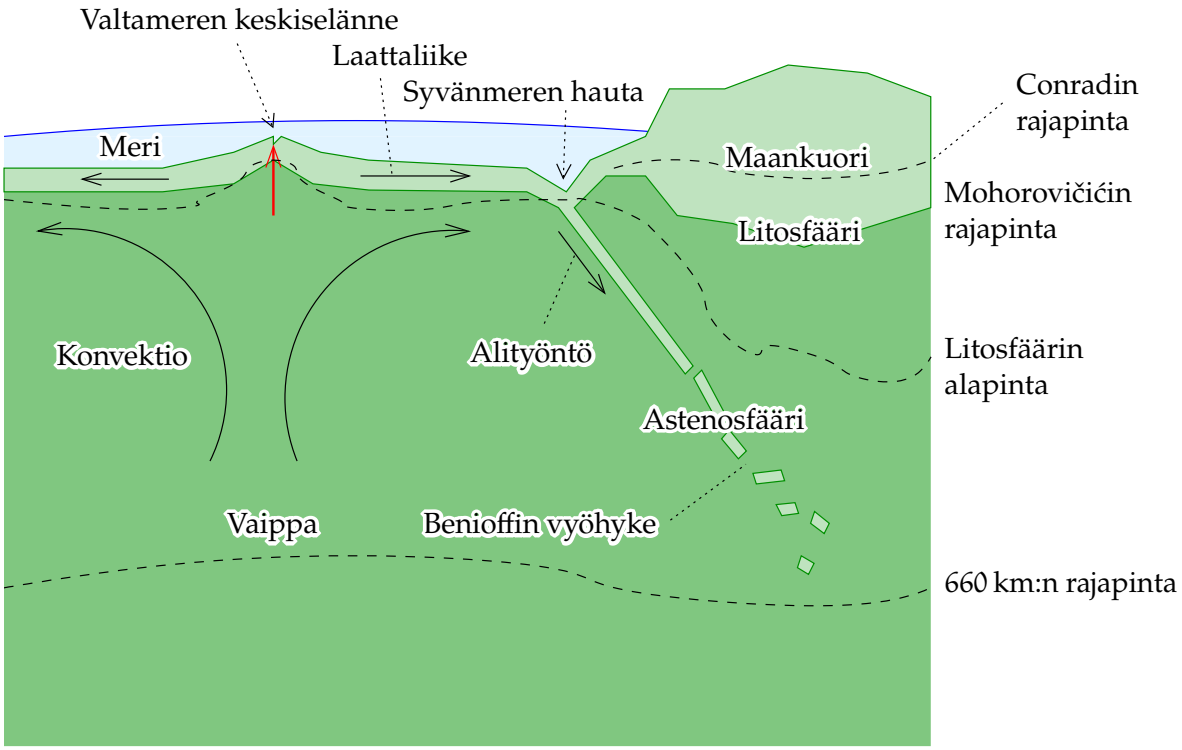
6.6.4 *Isostasian nykykäsitys*

Nykyisin meillä on paljon parempi käsitys Maan sisäisestä tilasta. Isostasian käsite on kuitenkin edelleen pätevä. Realistisemman ymmärryksen Maan sisäisestä rakenteesta antaa kuva 6.14.

Nykytutkimuksen tärkeä kiinnostuksen kohde on Maan jäämassojen, kuten mannerjäätiköiden, kasvamisen ja sulamisen vaikutus maankuoren pystyliikkeisiin. Tähän sisältyy sekä jäämassojen vaihtelun suora vaikutus että välillinen valtameren vesimassojen vaihtelun vaikutus. *Paleotutkimus* kohdistuu jääkausisyklin vaihteluihin, kun moderni jäätiköiden vetäytyminen, esimerkiksi Alaskassa ja Huippuvuorilla, aiheuttaa omaa, havaittavissa olevaa paikallisen maankuoren kohoamista. Lisää luvussa 12.

6.6.5 *Esimerkki: Fennoskandian maannousu*

Viime jääkauden maksimin aikana noin 20 000 vuotta sitten Fennoskandian päällä oli mannerjäätikkö, jonka paksuus oli maksimissaan 3 km.



KUVA 6.14. Isostasian ja laattatektoniikan nykykäsitys. Syvänmeren haudat ovat tiettävästi isostaattisessa epätasapainossa.

Kysymyksiä

1) Kuinka syvä oli jääkuorman jättämä lommo Maan pinnalla, olettaen että se oli isostaattisesti kompensoitu?
2) Tällä hetkellä maa nousee Fennoskandian keskellä siellä, missä jään paksuus oli suurimmillaan, nopeudella $10\,\mathrm{mm/a}$. Kauanko lommon häviäminen kestäisi tällä tahdilla?

Vastauksia

1) Oletetaan jään tiheydeksi $920\,\mathrm{kg/m^3}$. Jos ylävaipan tiheys on $3370\,\mathrm{kg/m^3}$, saamme lommon syvyydeksi

$$\Delta H = 3000\,\mathrm{m} \times \frac{920\,\mathrm{kg/m^3}}{3370\,\mathrm{kg/m^3}} = 819\,\mathrm{m}.$$

Huomaa, että jää syrjäyttää Maan vaipan ainetta ja maan-

kuori vain välittää kuormitusta! Katso kuva 12.1a.

2) Nousunopeudella $10\,\mathrm{mm/a}$ lommon häviäminen kestää $819\,\mathrm{m} \big/ 0{,}01\,\mathrm{m/a} = 81\,900$ vuotta. Osa tästä noususta on jo toteutunut viime jääkauden päättymisen jälkeen.

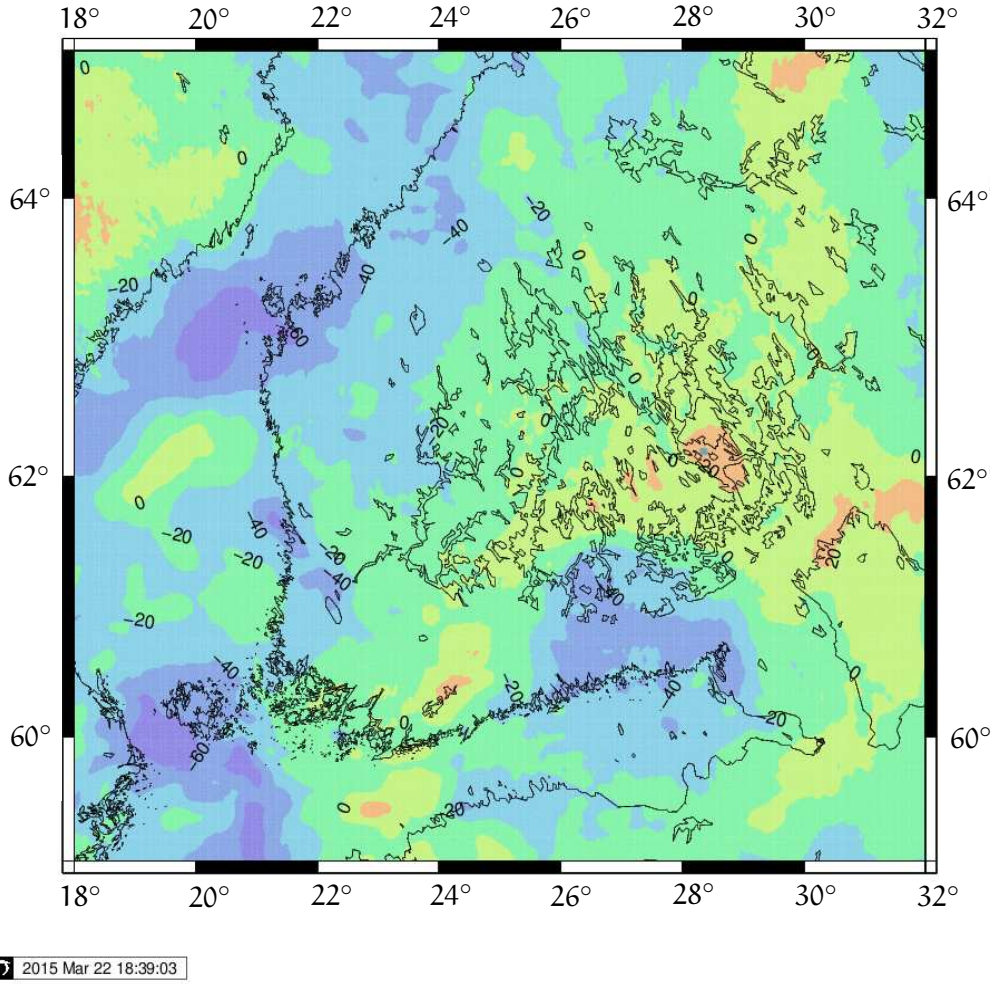
   Todellisuudessa nousu on tietenkin hidastunut huomattavasti ajan myötä ja tulee hidastumaan vastaisuudessakin.

6.7 Isostaattiset reduktiot

Sekä topografian että sen isostaattisen kompensaation laskennallista poistoa painovoimakentän mitatuista suureista kutsutaan *isostaattiseksi reduktioksi*. Sillä on kaksi tavoitetta:

- Poistamalla mahdollisimman paljon ”pinnallisia” efektejä painovoimakentältä jää sellainen kenttä, jossa vain Maan syvien kerrosten vaikutus on jäljellä. Tästä on hyötyä geofysikaalisessa tutkimuksessa.
- Nämä ”pinnalliset” efektit ovat yleensä myös hyvin paikallisia: spektraalikielellä hyvin *lyhytaaltoisia*. Poistamalla niitä saadaan jäännöskenttä, joka on sileämpi ja joka voidaan interpoloida eli *predikoida* paremmin. Tämä on tärkeää etenkin alueilla, joilla todellisesta mittausaineistosta on pulaa, kuten valtamerillä, aavikoilla ja napa-alueilla.

Isostaattiset painovoima-anomaliat eli ilma-anomaliat, joihin on sovellettu isostaattista reduktiota, ovat hyvin sileitä, kuten myös Bouguer-anomaliat: niiden *prediktio-ominaisuudet* ovat hyvät. Toisin kuin Bouguer-anomaliat, isostaattiset anomaliat ovat keskimäärin nolla. Niistä puuttuu se suuri systematiikka, joka tekee Bouguer-anomalioista vahvasti negatiivisia etenkin vuoristoalueilla, osio 6.2. Tämä johtuu tietysti siitä, että isostaattinen reduktio on vain massojen *siirtämistä* paikasta toiseen eikä massojen *poistamista*, kuten Bouguer-reduktion tapauksessa. Isostaattisessa reduktiossa vuoristosta siirtyy massaa sen alla



KUVA 6.15. Isostaattisia painovoima-anomalioita Etelä-Suomessa. Airyn ja Heiskasen hypoteesi, kompensaatiosyvyys 30 km. Data © Bureau Gravimétrique International (BGI) / International Association of Geodesy, *World Gravity Map* -hanke. Verkkopalvelu BGI, WGM2012. Paksun ja jäykän Fennoskandian kilven päällä topografian paikalliset yksityiskohdat eivät ole isostaattisesti kompensoituja ja kartta näyttää aika samanlaiselta kuin ilma-anomaliakartta 5.5 sivulla 123.

olevaan juureen, jonka massavaje on melko tarkasti sama kuin korkealle merenpinnan yläpuolelle nousevan vuoriston oma massa.

Isostaattisessa reduktiolaskennassa käytetyt reduktiomenetelmät ovat samanlaisia kuin muissa reduktioissa. Ne käsitellään myöhemmin: numeerinen integrointi avaruusdomeenissa — hilaintegrointi, pallokalottiintegrointi, pienimmän neliösumman kollokaatio, elementtimenetelmä ja niin edelleen — tai spektraalidomeenissa, esimerkiksi FFT ja *"Fast Collocation"*.

Käytetty *hypoteesi* on mielenkiintoisempi kysymys. Perinteisesti on käytetty Prattin tai Airyn hypoteeseja, jotka Hayford, Heiskanen ja Vening Meinesz[9] ovat kehittäneet kvantitatiivisiksi menetelmiksi. Uudempi kehityssuunta on käyttää oikeaa mittausdataa *seismisestä tomografiasta* Maan sisäisen rakenteen mallintamiseksi. Oikeiden mittaustietojen avulla, jos ne ovat luotettavia, pitäisi päästä parempiin tuloksiin.

6.8 "Isostaattinen geoidi"

Tutkitaan, miten "isostaattinen geoidi", tarkemmin *isostaattisen reduktion kogeoidi*, lasketaan. Isostaattinen reduktio on yksi menetelmävaihtoehto, jolla poistetaan laskennallisesti geoidin ulkopuoliset massat reunaarvotehtävän muodostamista varten geoidin pinnalla.

Voidaan näyttää (Heiskanen ja Moritz, 1967 sivu 142), että isostaattinen kogeoidi on mannerten alla jopa metrejä geoidin alapuolella. Toisin sanoen epäsuora vaikutus (*"restore"*-vaihe) on tätä luokkaa. Valtamerellä isostaattinen ko-geoidi on vastaavasti metrejä geoidin yläpuolella.

Koska yksi geoidimääritysmenetelmälle asetettava vaatimus on pieni epäsuora vaikutus, seuraa että isostaattiset menetelmät eivät liene parhaita mahdollisia, jos tarkoitus on laskea ulkoista potentiaalia edustava geoidi tai kvasigeoidi[10]. Heiskanen ja Moritz huomauttavat sivulla 152,

[9] Felix Andries Vening Meinesz (1887–1966) oli hollantilainen geofyysikko, geodeetti ja gravimetrikko. Hän laati yhdessä W. A. Heiskasen kanssa oppikirjan *The Earth and its Gravity Field* (1958).

[10] Tietenkin Bouguer-reduktio on vieläkin pahempi! Epäsuora vaikutus voi olla jopa satoja metrejä.

että epäsuora vaikutus on *"moderate"*.

Isostaattiset menetelmät soveltuvat kuitenkin hyvin Maan sisäisen rakenteen selvittämiseen, koska sekä topografia että sen aiheuttama painauma Maan vaippaan, isostaattinen kompensaatio, poistetaan laskennallisesti.

Tutkimus on osoittanut, että maapallon suuret topografiset piirteet ovat noin 85–90 % isostaattisesti kompensoituja (Heiskanen, 1960). Tämä on arvokas hypoteesi, jos muuta tietoa ei ole saatavilla.

Toinen syy, miksi isostaattinen geoidi on kiinnostava, on se, että Maan painovoimakenttä, josta vuoristojen vaikutus on poistettu kokonaan juurineen kaikkineen, voi paljastaa syvempien kerroksien fysikaalisia epätasapainoja ja niitä aiheuttavia prosesseja. Sellaisia prosesseja ovat etenkin konvektioliikkeet Maan vaipassa sekä Maan sulan ulkoytimen mahdollinen vaikutus näihin virtauksiin. Mielenkiintoisia korrelaatioita on löydetty vaipan konvektiokuvioiden, geoidin globaalin kuvion ja Maan magneettikenttää generoivien ytimen sähkövirtakuvioiden välillä (Wen ja Anderson, 1997; Prutkin, 2008; Kogan ym., 1985).

Isostaattinen reduktio koostuu kahdesta osasta:

- topografian laskennallinen poisto
- topografian isostaattisen kompensaation laskennallinen poisto.

On mahdollista laskea molemmat osat eksaktisti prismaintegrointimenetelmän avulla, katso osio 6.3. Tässä kuitenkin pyritään ymmärtämään asia laadullisesti. *Approksimoidaan* molemmat osat yksinkertaisilla massatiheyskerroksilla. Tiheys on esimerkiksi topografian tapauksessa $\kappa = \rho H$. Laitamme ensimmäisen kerroksen tasolle $H = 0$, ja toisen, jonka tiheys on

$$-\kappa \left(\frac{R}{R - D} \right)^2,$$

kompensaatiosyvyydelle D. Tämä valinta säilyttää maapallon kokonaismassan. Tilanne on esitetty — litteän Maan approksimaatiossa — kuvassa 6.16.

Seuraavassa käytetään ”generoivan funktion” yhtälöä 8.7,

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi),$$

yhdessä yksinkertaisen massatiheyskerroksen yhtälön 1.15 kanssa:

$$V = G\iint_{\text{pinta}} \frac{\kappa}{\ell}\, dS = GR^2 \iint_{\sigma} \frac{\kappa}{\ell}\, d\sigma.$$

Merenpinnan massatiheyskerroksen potentiaalikentäksi saadaan, kun myös laskentapiste sijoittuu merenpinnalle, siis $H = 0 \implies r = R$:

$$V_{\text{top}} = GR\iint_{\sigma} \kappa \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\psi)\, d\sigma$$

ja kun tiheyskerros on kompensaatiosyvyydellä (lähteiden taso $R - D$, laskentataso R):

$$\begin{aligned} V_{\text{komp}} &= \\ &= G(R-D)\iint_{\sigma}\left(-\kappa\left(\frac{R}{R-D}\right)^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R-D}{R}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi)\, d\sigma = \\ &= -GR\iint_{\sigma}\kappa\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R-D}{R}\right)^{n} P_n(\cos\psi)\, d\sigma, \end{aligned}$$

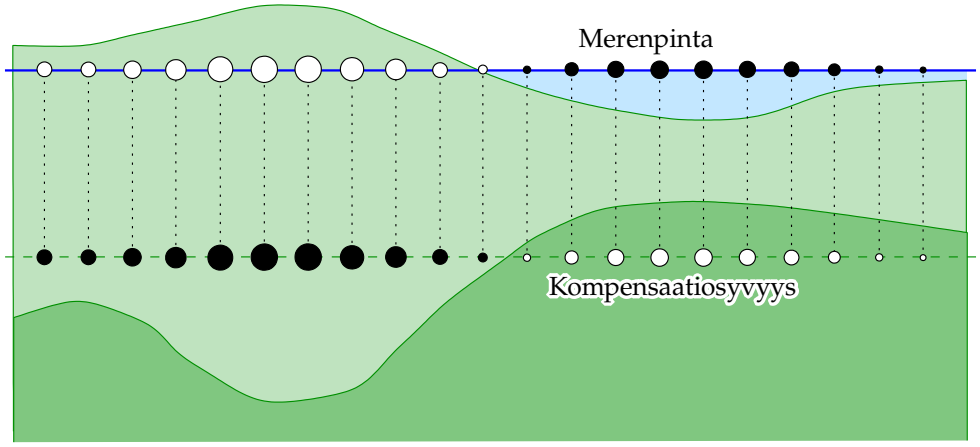
josta reduktion yhteisvaikutus on ($n = 0$ putoaa pois):

$$\begin{aligned} \delta V_{\text{iso}} &= -\left(V_{\text{top}} + V_{\text{komp}}\right) = \\ &= -GR\iint_{\sigma}\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{R-D}{R}\right)^n\right) P_n(\cos\psi)\, \sigma. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Tässä massan pintatiheys κ on

$$\kappa = \begin{cases} \rho_c H & \text{jos } H \geqslant 0, \\ (\rho_c - \rho_w) H & \text{jos } H < 0, \end{cases}$$

[11] siis korvataan merten syvyydet vastaavilla ”kuivilla” syvyyksillä[11]. Nyt



KUVA 6.16. Isostaattinen reduktio kahtena pintatiheyskerroksena.

käytämme taas asteosuusyhtälöä, Heiskanen ja Moritz (1967) yhtälö 1-71, eli yhtälöämme 3.9, seuraavassa muodossa:

$$\kappa_n(\phi,\lambda) \overset{\text{def}}{=} \frac{2n+1}{4\pi} \iint_\sigma \kappa(\phi',\lambda')\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma'.$$

Kertomalla molemmat puolet tekijällä

$$-\frac{4\pi GR}{2n+1}\left(1-\left(\frac{R-D}{R}\right)^n\right)$$

ja siirtämällä se integraalin sisään saadaan

$$-\frac{4\pi GR}{2n+1}\left(1-\left(\frac{R-D}{R}\right)^n\right)\kappa_n(\phi,\lambda) =$$
$$= -GR\iint_\sigma \kappa(\phi',\lambda')\left(1-\left(\frac{R-D}{R}\right)^n\right)P_n(\cos\psi)\, d\sigma'.$$

Summaus antaa yllä annetun lausekkeen 6.7:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi GR}{2n+1}\left(1-\left(\frac{R-D}{R}\right)^n\right)\kappa_n(\phi,\lambda) =$$

[11] Tämä toimii kuivalla maalla ja valtamerellä. Järvet, jäätiköt ja Kuolleenmeren tyyppiset alueet ovat mutkikkaampia.

$$= -GR \iint_\sigma \kappa(\phi', \lambda') \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{R-D}{R}\right)^n\right) P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \delta V_{iso}.$$

Seuraa

$$\delta V_{iso} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi GR}{2n+1} \left(1 - \left(\frac{R-D}{R}\right)^n\right) \kappa_n(\phi, \lambda) =$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} R \left(1 - \left(\frac{R-D}{R}\right)^n\right) 2\pi G \kappa_n =$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} R \left(1 - \left(\frac{R-D}{R}\right)^n\right) (A_B)_n .$$

Tässä on käytetty kirjoitustapaa $A_B = 2\pi G\kappa$. Tämä edustaa massatiheyskerrosta κ vastaavan Bouguer-laatan vetovoimaa ja sen asteosuudet ovat $(A_B)_n = 2\pi G\kappa_n$.

[12] Tutkitaan ensin osuutta[12] $1 < n \leqslant N \overset{\text{def}}{=} R/D$. Silloin, koska

$$\left(\frac{R-D}{R}\right)^n \approx 1 - \frac{nD}{R},$$

seuraava approksimaatio pätee:

$$\delta V_{iso} \approx -\sum_{n=1}^{N} \frac{2nD}{2n+1} (A_B)_n \approx -\sum_{n=1}^{N} D\,(A_B)_n \approx -D\widetilde{A}_B,$$

ja

$$\delta N_{iso} = \frac{\delta V_{iso}}{\gamma} \approx -\frac{D\widetilde{A}_B}{\gamma} \approx -\frac{DA_B}{\gamma}. \tag{6.8}$$

Tämä on *isostaattisen reduktion epäsuora vaikutus*.

[13] Sijoitetaan tähän realistisia arvoja. Olkoon Mohorovičićin[13] rajapinnan

[12] Astelukujen $n > R/D$ osuus on

$$\delta V_{iso} \approx -\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2R}{2n+1} (A_B)_n ,$$

jossa termit ovat pieniä ja putoavat nopeasti nollaan. Tällä astevälillä topografian ja sen kompensaation pintakerrosapproksimaatio ei ole enää realistinen, mutta siinä ei ole väliä kun näin lyhyet aallonpituudet eivät ole edes isostaattisesti kompensoituja.

syvyys keskimäärin $\sim 20\,\mathrm{km}$[14].

Maalla $H \approx 0{,}8\,\mathrm{km}$, Maan keskimääräinen topografian korkeus, ja saadaan $\delta N_{\mathrm{iso,\,maa}} \approx -1{,}8\,\mathrm{m}$.

Merellä $H \approx -3{,}7\,\mathrm{km}$ keskimäärin. Kerrotaan vielä suhdeluvun

$$\frac{\rho_c - \rho_w}{\rho_c} = \frac{2670 - 1030}{2670}$$

kanssa, veden huomioon ottamiseksi. Saadaan $\delta N_{\mathrm{iso,\,meri}} \approx +5{,}1\,\mathrm{m}$.

Toisin sanoen tämä efekti voi olla mittava.

Huomaa kuitenkin, että yllä oleva laskenta käytti vastaavan Bouguer-laatan vetovoimaa

$$A_B = \sum_{n=0}^{N} 2\pi G \kappa_n,$$

kun taas yhtälö 6.8 sisältää

$$\widetilde{A}_B = \sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{2n+1} 2\pi G \kappa_n \approx \sum_{n=1}^{N} 2\pi G \kappa_n,$$

josta nollannen asteen osuus κ_0 puuttuu. Toisin sanoin $\widetilde{A}_B$:n, ja näin ollen δN_{iso}:n, globaalinen keskiarvo mantereiden ja valtamerten yli olisi oltava nolla, koska oletettiin, että isostaattinen reduktio ei muuta Maan kokonaismassaa. Laskettujen arvojen keskiarvo on kuitenkin

$$\overline{\delta N}_{\mathrm{iso}} = 0{,}29 \cdot \delta N_{\mathrm{iso,\,maa}} + 0{,}71 \cdot \delta N_{\mathrm{iso,\,meri}} = 3{,}1\,\mathrm{m}.$$

Tämän korjausarvon kanssa saadaan

$$\delta N_{\mathrm{iso,\,maa}} \approx -1{,}8\,\mathrm{m} - 3{,}1\,\mathrm{m} = -4{,}9\,\mathrm{m},$$
$$\delta N_{\mathrm{iso,\,meri}} \approx +5{,}1\,\mathrm{m} - 3{,}1\,\mathrm{m} = +2{,}0\,\mathrm{m}.$$

[13] Andrija Mohorovičić (1857–1936) oli kroatialainen säätieteilijä ja modernin seismologian pioneereja.

[14] Mantereiden alla syvyys on 35 km ja valtamerien alla 7 km merenpohjasta (Encyclopaedia Britannica, Moho).

Nämä arvot ovat edustavia laajemmille manner- tai valtamerialueille, ja vain suunta-antavia. Tarkka laskenta on oltava numeerinen.

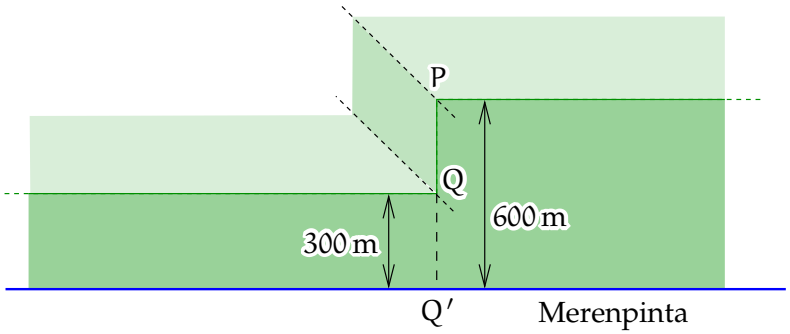
Yhtälö 6.8 on Bouguer-laatan vetovoiman A_B kautta *lineaarinen* korkeudessa H. Tämä merkitsee, että jokainen topografian kilometrin lisäys aiheuttaa noin $-2{,}2\,\mathrm{m}$ suureessa $\delta N_{\mathrm{iso,\,maa}}$, ja jokainen batymetrin kilometrin lisäys samalla tavalla $+1{,}4\,\mathrm{m}$ suureessa $\delta N_{\mathrm{iso,\,meri}}$. Voimme myös päätellä, että isostaattisen reduktion vaikutuksessa geoidiin – ainakin pitemmillä aallonpituuksilla $2\pi R/n$, pidempiä kuin kompensaatiosyvyys D — kaikki aallonpituudet ovat edustettuina spektrissä noin samassa suhteessa kuin itse topografiassa, ja efekti on itse asiassa verrannollinen topografiaan.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mitkä vaikutukset poistetaan laskennallisesti
   (a) yksinkertaisella Bouguer-reduktiolla?
   (b) maastokorjatulla Bouguer-reduktiolla?
   (c) isostaattisella reduktiolla?
2) Miksi maastokorjaus on aina positiivinen?
3) Miksi Bouguer-anomalioilla on hyvät interpolointiominaisuudet ja millä ehdoilla? Toisin sanoen, mitä lisäinformaatiota tarvitaan interpoloinnin yhteydessä?
4) Miten keksittiin, että vuoristoilla on juuret?
5) Selitä Prattin ja Hayfordin sekä Airyn ja Heiskasen isostaattiset hypoteesit.

Harjoitus 6−1: Painovoima-anomalia

Annettuna on piste P, jonka korkeus merenpinnasta on $H = 500\,\mathrm{m}$. Paikallinen painovoima on $g_P = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$. Paikan leveysasteella φ ja merenpinnalla laskettu normaalipainovoima on $\gamma_0(\varphi) = 9{,}820\,192\,\mathrm{m/s^2}$.



KUVA 6.17. Maaston muoto.

1) Laske pisteen P ilma-anomalia Δg.
2) Laske pisteen P Bouguer-anomalia ilman maastokorjausta Δg_B.

Harjoitus 6–2: Bouguer-reduktio

1) Piste P on 500 m merenpinnan yläpuolella. Sen ilma-anomalia on $\Delta g_{FA} = 25\,\text{mGal}$. Laske pisteen Bouguer-anomalia Δg_B. Unohda maastokorjaus.
2) Katso osio 6.2: Bouguer-anomaliat. Johda yhtälöt 6.2 ja 6.3 uudelleen olettamalla, että maankuoren keskitiheys on $\rho = 3370\,\text{kg/m}^3$.

Harjoitus 6–3: Maastokorjaus ja Bouguer-reduktio

Annettuna on maaston muoto, kuva 6.17.

Pystysuora kallioseinämä PQ on myös kartalla suora ja kulkee molemmissa suunnissa (”paperiin” ja ”paperista”) äärettömyyteen.

Korkeuserot: $PQ' = 600\,\text{m}$, $QQ' = 300\,\text{m}$.

1) Laske pisteessä P maastokorjaus.

   Vihje: käytä Bouguer-laatan vetovoiman yhtälö. Tässä on puolikas Bouguer-laatta, jonka vetovoima on vain puolet täyden laatan vetovoimasta.
2) Laske pisteessä Q maastokorjaus. *Mikä on etumerkki?*

3) Jos pisteessä P on annettuna, että ilma-anomalia on 60 mGal, paljonko on pisteen Bouguer-anomalia? Käytä täydellistä Bouguer-reduktiota.
4) Jos on annettuna, että pisteessä Q Bouguer-anomalia on 10 mGal, paljonko on pisteen ilma-anomalia?

Harjoitus 6−4: Isostasia

Oleta Airyn ja Heiskasen isostaattinen kompensaatio (kuva 6.12). Maankuoren tiheys $\rho_c = 2670\,\mathrm{kg/m^3}$, vaipan tiheys $\rho_m = 3370\,\mathrm{kg/m^3}$, siis kuoren ja vaipan välinen tiheyskontrasti on $700\,\mathrm{kg/m^3}$. Olkoon nollatopografiaa vastaavan rajapinnan *vertaustaso* −25 km, siis $t_0 = 25$ km.

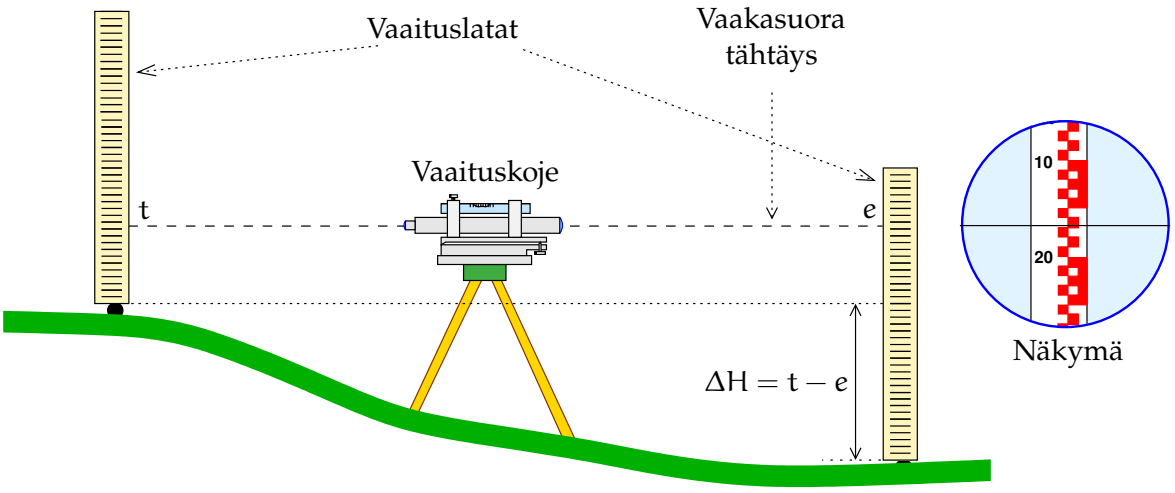
1) Laske 8 km korkean vuoren ”juuren” syvyys vertaustason −25 km alapuolella olettaen, että se on isostaattisesti kompensoitu.
2) Tulivuori Mauna Kea, Havaji, on 4 km merenpinnan yläpuolella, mutta sitä ympäröivä meri on 5 km syvä. Kuinka syvällä vertaustason alapuolella on Mauna Kean juuri?
3) Kuinka paljon ympäröivän meren ”vastajuuri” on vertaustason yläpuolella? Olkoon meriveden tiheys $1030\,\mathrm{kg/m^3}$.
4) Siis kuinka syvällä on Mauna Kean juuri *ympäristöönsä nähden*?

Korkeusjärjestelmät

7

7.1 Vaaitus, ortometriset korkeudet ja geoidi

Korkeuksia on perinteisesti määritetty *vaaitsemalla*. Vaaitus on menetelmä, jossa mitataan korkeuseroja vaaituskojeen ja kahden latan avulla. Vaaituskoje sisältää kaukoputken ja vesivaa'an, ja mittaustilanteessa kaukoputken optinen akseli eli tähtäysakseli osoittaa paikallisen horisontin suuntaisesti. Kahdelle mittauspisteelle asetetaan vaaituslatat ja luetaan mittauskaukoputken kautta niistä mittausarvot. Kahden arvon erotus antaa pisteiden välisen korkeuseron metreinä.



Kuva 7.1. Vaaituksen periaate.

Etäisyys vaaituskojeen ja lattojen välillä on 40–70 m, koska suuremmilla etäisyyksillä ilmakehän refraktio aiheuttaa liian suuria virheitä. Pidemmät etäisyydet mitataan toistamalla mittaus useammalla kojeasemalla ja välipisteellä.

Näin saadut korkeuserot ΔH eivät ole suoraan käyttökelpoisia. Kahden pisteen P ja Q välinen suoraan korkeuseroja ΔH summaamalla saatu "korkeusero" riippuu näet valitusta vaaitusmatkasta pisteestä P pisteeseen Q. Myös suljetun silmukan korkeuserojen summa $\sum_{\bigcirc} \Delta H$ *ei* (yleisesti) *häviä*.

Geometrinen korkeus ei ole konservatiivinen kenttä.

Siksi tarkkavaaituksessa muunnetaan korkeuserot aina *potentiaalieroiksi*: $\Delta W = -\Delta H \cdot g$, jossa g on paikallinen painovoima, joka joko mitataan tai — esimerkiksi Suomessa — interpoloidaan olemassa olevasta painovoimakartoitusmittausten tietokannasta. Potentiaalierojen summa suljetun silmukan ympäri *on aina nolla*: $\sum_{\bigcirc} \Delta W = 0$.

Mielivaltaisen maastopisteen P potentiaaliksi saadaan

$$W_P = W_0 - \sum_{\text{merenpinta}}^{P} (\Delta H \cdot g)\,,$$

jossa summaus suoritetaan merenpinnasta (potentiaali W_0) pisteeseen P. Suuretta

$$C_P = -(W_P - W_0) = \sum_{\text{merenpinta}}^{P} (\Delta H \cdot g)\,,$$

joka on positiivinen merenpinnan yläpuolella, kutsutaan pisteen P *geopotentiaaliluvuksi*.

W_0 on valtakunnallisen korkeusvertaustason geopotentiaali. Suomessa vanhan N60-järjestelmän vertaustaso on periaatteessa Helsingin sataman keskimerenpinta vuoden 1960 alussa, ja siksi järjestelmää kutsutaankin nimellä N60. Kuitenkin vertaustason tarkka realisaatio

on erikoispilari Helsingin observatorion puutarhassa Kaivopuistossa[1]. Suomen uuden korkeusjärjestelmän nimi on N2000, ja sen vertaustason realisaatio on pilari Metsähovin tutkimusasemalla. Käytännössä N2000-järjestelmän korkeudet ovat noin desimetrin tarkkuustasolla Amsterdamin NAP-datumin korkeuksia.

Muilla mailla on omat, samanlaiset, korkeusvertaus- eli datumipisteet: Venäjällä Kronstadt, Länsi-Euroopassa laajasti käytetty Amsterdam NAP, Etelä-Euroopassa vanha itävaltalais-unkarilainen satamakaupunki Trieste, Pohjois-Amerikassa NAVD88 (North American Vertical Datum 1988) datumipisteenä Pointe-au-Père[2] Rimouskissa Quebecissä Kanadassa, ja niin edelleen.

7.2 Ortometriset korkeudet

Kun halutaan luoda korkeusjärjestelmä, olisi kaikkein yksinkertaisinta käyttää alkuperäisiä geopotentiaalieroja merenpinnasta ja yllä määritettyjä geopotentiaalilukuja $C = -(W - W_0)$ suoraan korkeuslukuina. Psykologisesti ja käytännön kannalta se on kuitenkin hankalaa: ihmiset haluavat, että korkeudet ovat metreissä.

Geopotentiaaliluvuilla on selviä etuja: ne edustavat *energian määrää*, joka tarvitaan yhden massayksikön koemassan siirtämiseksi pisteeseen vertaustasosta. Neste — merivesi, ilma tai geologisella aikaskaalalla jopa peruskallio — virtaa aina alaspäin ja etsiytyy minimienergiatilaan.

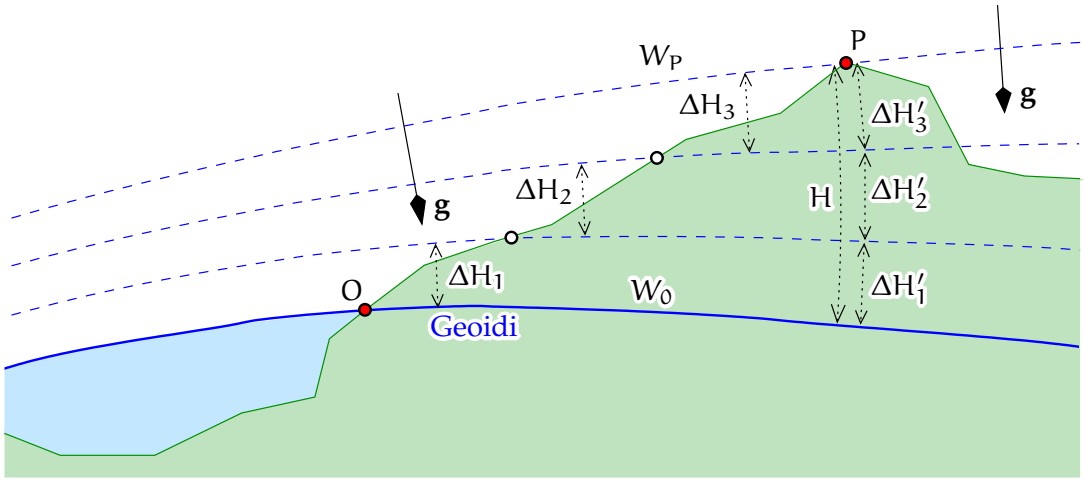
Suomessa, kuten monessa muussa maassa, käytössä ovat olleet jo pitkään *ortometriset korkeudet*. Ne ovat fysikaalisesti määritettyjä korkeuksia

[1] Kuitenkin pilariin kaiverrettu korkeusarvo on vieläkin vanhemman järjestelmän NN eikä N60:n vertauskorkeus. Tämän patsaan oikea N60-vertausarvo, 30,513 76 m, löytyy julkaisusta Kääriäinen (1966), sivu 49.

[2] Rimouskin kaupunginosa Pointe-au-Père nimettiin jesuiittapappi Isä Henri Nouvelin (1621?–1701?) mukaan. Hän palveli 40 vuotta Uuden Ranskan alkuperäisväestön parissa. Pointe-au-Père tunnetaan myös RMS *Empress of Ireland* -laivan haaksirikon paikkana vuonna 1914. Haverissa menehtyi yli tuhat matkustajaa.

KUVA 7.2. Korkeuden pääkiintopiste Helsingin observatorion puutarhassa Kaivopuistossa, Kääriäinen (1966). Teksti:

Suomen	*Utgångspunkt för*
tarkka-	*precisionsnivellementet*
vaakituksen	*i Finland*
pääkiintopiste	*30,4652 m öfver noll*
30,4652 m yli nollan	



KUVA 7.3. Vaaitut korkeudet ja geopotentiaaliluvut. Korkeus, joka saadaan summaamalla vaaitut korkeuserot, $\sum_{i=1}^{3} \Delta H_i$, ei ole oikea korkeus geoidista eli $\sum_{i=1}^{3} \Delta H_i'$ laskettuna luotiviivaa pitkin.

Geopotentiaalin *tasapotentiaalipinnat* eivät ole yhdensuuntaisia: siksi matka Maan pintaa pitkin voi hyvinkin viedä "ylöspäin", siis kasvaviin korkeuksiin geoidista, vaikka geopotentiaaliluku vähenee. Vesi voi siis "virrata ylöspäin".

Painovoimavektori $\mathbf{g}$ on kaikkialla kohtisuora tasapotentiaalipintoihin nähden, ja sen pituus on kääntäen verrannollinen pintojen väliseen etäisyyteen.

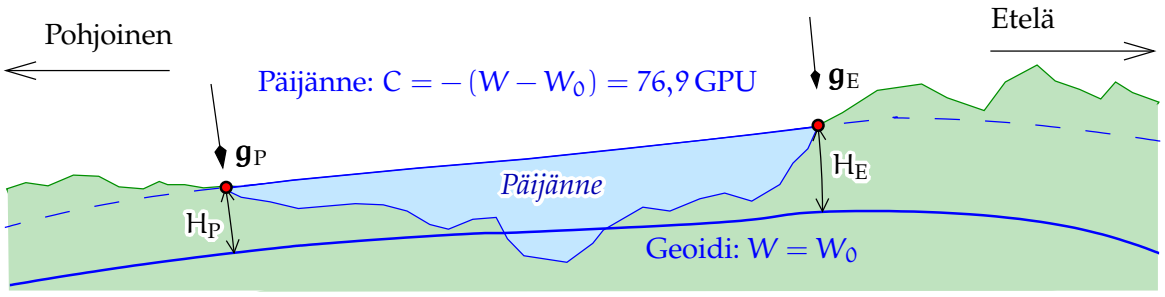
"keskimerenpinnan" eli *geoidin* yläpuolella. Katso kuva 7.3.

Klassinen *geoidi* on määritelmänsä mukaan

> *"Se Maan painovoimakentän tasapotentiaalipinta, joka yhtyy keskimäärin parhaiten keskimerenpintaan."*

Pisteen P ortometrinen korkeus H on määritelty korkeudeksi, joka saadaan *mittaamalla pisteen* P *etäisyys geoidista luotiviivaa pitkin*.

Tämä on hyvin fysikaalinen määritelmä, muttei kovin operationaalinen, koska emme (yleensä) pääse mittaamaan luotiviivaa pitkin maankuoren sisällä eikä geoidi edes näy siellä. Siksi ortometrisia korkeuksia



KUVA 7.4. Ortometrisissa korkeuksissa vesi voi joskus virrata "ylöspäin". Vaikka Päijänteen pohjois- ja eteläpäät ovat samalla geopotentiaalitasolla — 76,9 geopotentiaaliyksikköä keskimerenpinnan potentiaalia alempana — eteläpään ortometrinen korkeus H_E on suurempi kuin pohjoispään H_P, koska paikallinen painovoima g on pohjoisessa vahvempi kuin etelässä. Korkeusero on Päijänteen tapauksessa 8 mm (Jaakko Mäkinen, henkilökohtainen viesti). Normaalipainovoimakentän avulla laskettuna saadaan 6 mm. Loput 2 mm tulevat painovoima-anomalioiden erosta järven pohjois- ja eteläpään välillä.

lasketaan geopotentiaaliluvuista: jos pisteen P geopotentiaaliluku on C_P, lasketaan ortometrinen korkeus yhtälöllä

$$H = \frac{C_P}{\overline{g}},$$

jossa $\overline{g}$, *keskimääräinen painovoima luotiviivaa pitkin*, on

$$\overline{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g(z)\, dz,$$

ja z on luotiviivaa pitkin mitattu etäisyys geoidista. Koska $\overline{g}$:n yhtälö sisältää H:n, saadaan ratkaisu iteratiivisesti käyttämällä ensin karkeaa H:n arvoa. Iterointi suppenee nopeasti.

Tulemme näkemään, että tarkkojen ortometristen korkeuksien määrittäminen on hankalaa, etenkin vuoristossa.

7.3 Normaalikorkeudet

Suomessa käytetään tällä hetkellä N2000-korkeusjärjestelmän mukaisia *normaalikorkeuksia*. Kuten ortometriset korkeudet, ne ovat korkeuksia

keskimerenpinnasta. Keskimerenpinnan matemaattinen esitys on tässä tapauksessa *kvasigeoidi*. Merialueilla kvasigeoidi on identtinen geoidin kanssa. Manneralueilla se eroaa hieman geoidista ja vuoristossa ero voi olla huomattava.

7.3.1 Molodenskin teoria

Maineikas teoreetikko M. S. Molodenski (kuva 7.5) kehitti teorian, jossa pisteen korkeus ”keskimerenpinnasta” määritellään seuraavan yhtälön mukaan:

$$H^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{\overline{\gamma_{0H}}},$$

jossa $\overline{\gamma_{0H}}$ on keskimääräinen normaalipainovoima laskettuna nollatason (vertausellipsoidin) ja H^*:n välillä *ellipsoidista normaalia* pitkin. Laskentatapa on siis sama kuin ortometristen korkeuksien tapauksessa, mutta käytetään *normaalipainovoimakenttää* todellisen painovoimakentän sijaan.

Korkeudet ”merenpinnasta” annetaan käytännön syistä metreinä. Suurissa mantereen kokoisissa kolmioverkoissa korkeudet halutaan antaa laskennallisesta vertausellipsoidista metreinä, ja siksi myös korkeuksien merenpinnasta on oltava metreinä.

Molodenski ehdotti, että geoidin sijaan käytettäisiin *korkeusanomalioita*, joiden määritelmä on

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T}{\overline{\gamma_{Hh}}}, \tag{7.1}$$

jossa nyt $\overline{\gamma_{Hh}}$ on keskimääräinen normaalipainovoima topografian korkeudella. Tarkemmin ilmaistuna se on normaalipainovoiman keskiarvo ellipsoidista normaalia pitkin välillä $z \in [H^*, h]$, jossa H^* on pisteen normaalikorkeus ja h pisteen korkeus vertausellipsoidista. Parametri z on etäisyys vertausellipsoidista laskettuna ellipsoidista normaalia pitkin. T on pisteen häiriöpotentiaali.

Näiden oletusten perusteella Molodenski näytti, että

$$H^* + \zeta = h.$$

KUVA 7.5. Mihail Sergejevitš Molodenski (1909–1991), lähde tuntematon. Lisäkuvia ja taustainformaatiota Brovar ym. (2000).

Tämä yhtälö on hyvin samanlainen kuin ortometristen korkeuksien ja geoidin korkeuksien vastaava yhtälö

$$H + N = h.$$

Muutenkin ζ, *korkeusanomalia* eli myös ”kvasigeoidin korkeus”, on hyvin lähellä N:ää, ja vastaavasti H^* on lähellä H:ta.

7.3.2 *Molodenskin oivallus*

Molodenskin koulukunnan oivallus oli, että koska normaalipainovoima on luotiviivaa pitkin hyvin lähellä lineaarista paikan funktiota, voitaisiin määritellä korkeustyppi, joka olisi suoraan laskettavissa geopotentiaaliluvuista ja joka olisi yhteensopiva samalla tavalla määriteltyjen niin sanottujen korkeusanomalioiden sekä vertausellipsoidista laskettujen geometristen korkeuksien h kanssa.

Geometrinen korkeus h vertausellipsoidista voidaan kytkeä normaali-

painovoimakentän potentiaaliin U seuraavan integraaliyhtälön kautta:

$$U = U_0 - \int_0^h \gamma(z)\,dz.$$

Tässä U on normaalipotentiaali ja γ normaalipainovoima. U:n eräs tasapotentiaalipinta $U = U_0$ on samalla vertausellipsoidi. Muuttuja z on matka ellipsoidista sen paikallista normaalia pitkin[3].

[3]

Määrittelemällä

$$\overline{\gamma_{0h}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{h}\int_0^h \gamma(z)\,dz \tag{7.2}$$

saadaan

$$h = -\frac{U - U_0}{\overline{\gamma_{0h}}}.$$

Käyttämällä $W = U + T$ ja jakamalla suureella $\overline{\gamma_{0h}}$ saadaan

$$\frac{W - W_0}{\overline{\gamma_{0h}}} = \frac{T}{\overline{\gamma_{0h}}} - h$$

olettaen, että $W_0 = U_0$, vertausellipsoidin pinnan normaalipotentiaali.

Seuraavaksi voitaisiin määritellä

$$H^+ \overset{?}{=} -\frac{W - W_0}{\overline{\gamma_{0h}}}$$

uudeksi korkeustyypiksi ja

$$N^+ \overset{?}{=} h - H^+ = \frac{T}{\overline{\gamma_{0h}}}$$

vastaavaksi uudeksi geoidikorkeustyypiksi. Tässä on kuitenkin se kauneusvirhe, että jako suoritetaan normaalipainovoiman keskiarvolla laskettuna tasojen 0 ja h välillä. Tämä suure ei ole operationaalinen ilman keinoa määrittää korkeus h ellipsoidista.

Siksi tehdään seuraava parannus, joka hyödyntää sitä seikkaa, että $\gamma(z)$ on lähes lineaarinen funktio. Tämä merkitsee, että pystyderivaatta $\frac{d}{dz}\gamma$ on lähes vakio kyseessä olevalla korkeusvälillä.

---

[3] Tässä jätetään huomiotta, että normaalipainovoimavektori $\boldsymbol{\gamma}(z)$ ei ole arvoille $z \neq 0$ tarkasti samansuuntainen ellipsoidin normaalin kanssa: normaalipainovoimakentän kenttäviivojen eli normaaliluotiviivojen kaarevuus, osio 4.3.2.

Määritellään yhtälön 7.2 lisäksi:

$$\overline{\gamma_{0H}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{H^+} \int_0^{H^+} \gamma(z)\, dz, \qquad \overline{\gamma_{Hh}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{N^+} \int_{H^+}^{h} \gamma(z)\, dz.$$

Nyt

$$\overline{\gamma_{0H}} \approx \overline{\gamma_{0h}} - \tfrac{1}{2} N^+ \frac{d\gamma}{dz} \approx \overline{\gamma_{0h}} \left(1 + \frac{N^+}{R}\right), \tag{7.3}$$

$$\overline{\gamma_{Hh}} \approx \overline{\gamma_{0h}} + \tfrac{1}{2} H^+ \frac{d\gamma}{dz} \approx \overline{\gamma_{0h}} \left(1 - \frac{H^+}{R}\right). \tag{7.4}$$

R on Maan säde palloapproksimaatiossa: $\frac{d}{dz}\gamma \approx \frac{d}{dr}\gamma \approx -2\gamma/R$.

Seuraavaksi hyödynnetään myös, että sekä N^+/R että H^+/R ovat $\ll 1$, siis

$$\left(1 + \frac{N^+}{R}\right)^{-1} \approx \left(1 - \frac{N^+}{R}\right), \qquad \left(1 - \frac{H^+}{R}\right)^{-1} \approx \left(1 + \frac{H^+}{R}\right),$$

ja yhtälöiden 7.3, 7.4 ja yllä olevien suureiden H^+ ja N^+ määritelmien avulla,

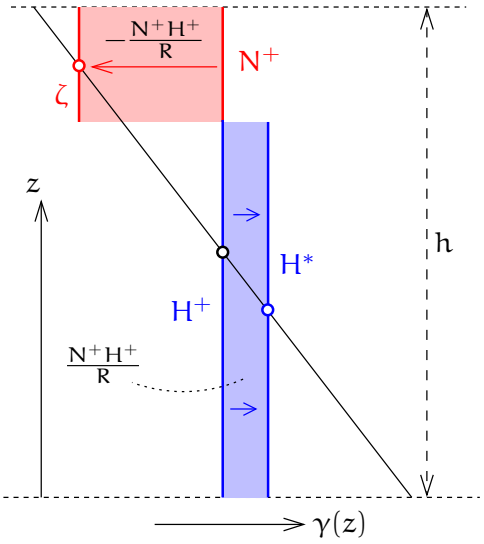
$$\zeta \overset{\text{def}}{=} \frac{T}{\overline{\gamma_{Hh}}} = \frac{T}{\overline{\gamma_{0h}}} \cdot \frac{\overline{\gamma_{0h}}}{\overline{\gamma_{Hh}}} \approx N^+ \left(1 + \frac{H^+}{R}\right) = N^+ + \frac{N^+ H^+}{R},$$

$$H^* \overset{\text{def}}{=} -\frac{W - W_0}{\overline{\gamma_{0H}}} = -\frac{W - W_0}{\overline{\gamma_{0h}}} \cdot \frac{\overline{\gamma_{0h}}}{\overline{\gamma_{0H}}} \approx H^+ \left(1 - \frac{N^+}{R}\right) = H^+ - \frac{N^+ H^+}{R}.$$

Koska jo muutenkin pienet korjaustermit N^+H^+/R kumoutuvat, saadaan lopuksi

$$H^* + \zeta = H^+ + N^+ = h. \tag{7.5}$$

Suure $\overline{\gamma_{0H}}$, ja siis myös normaalikorkeus H^*, voidaan, toisin kuin $\overline{\gamma_{0h}}$, laskea käyttämällä *ainoastaan* (vesi- tai trigonometrisesta) *vaaituksesta saatuja tietoja*, ilman että tarvitsee tuntea korkeutta vertausellipsoidista h. Tuo tieto edellyttäisi paikallisen geoidin tuntemista.

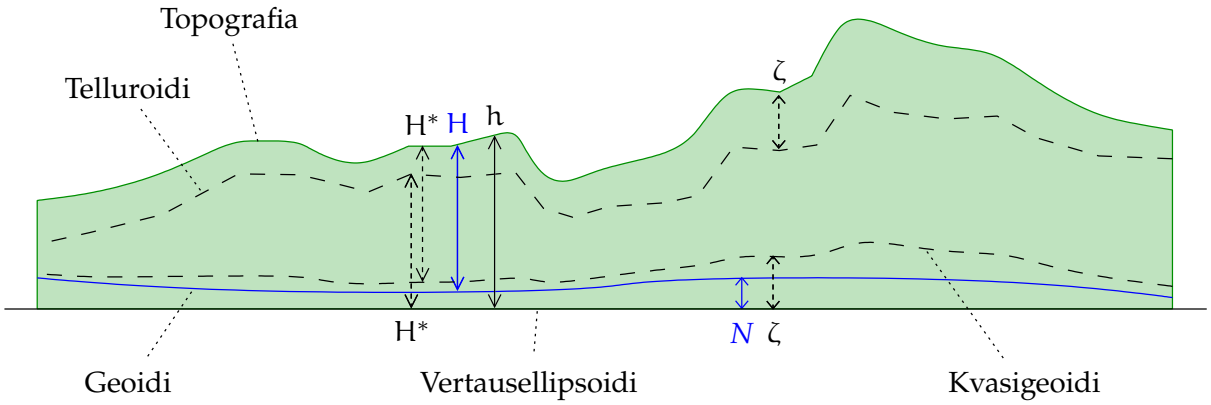


KUVA 7.6. Molodenskin oivalluksen todistuksen graafinen aasinsilta. Siniset ja punaiset alueet, jotka ovat yhtä suuria, edustavat korjaustermejä, jotka muuntavat suureen N^+ suureeksi ζ ja suureen H^+ suureeksi H^*. Siniset ja punaiset nuolet edustavat muunnosprosessia. Pallerot esittävät funktion $\gamma(z)$ keskiarvostamisvälien keskipisteet.

Tämä oli Molodenskin oivallus (Molodenski ym., 1962) jo vuonna 1945, kauan ennen globaalin paikannusjärjestelmän GPS:n tai maailmanlaajuisen geosentrisen vertausellipsoidin olemassaoloa. Silloin laskettiin mannerlaajuiset kolmioverkot, kuten Neuvostoliiton kolmioverkko, omilla alueellisesti määritetyillä vertausellipsoideillaan.

Korjaustermin N^+H^+/R suuruus on, kun globaalit geoidin korkeudet ovat maksimissaan 110 m, 17 mm jokaista maastokorkeuskilometriä kohti. Tämän termin käytön jälkeen jäävät virheet ovat mikroskooppisen pieniä, koska normaalipainovoima on todellisesta painovoimasta poiketen *erittäin lineaarinen luotiviivaa pitkin* — kuten yhtälöissä 7.3 ja 7.4 jo oletettiin.

Kuva 7.6 yrittää visualisoida yhtälöiden johtamista.



KUVA 7.7. Geoidi, kvasigeoidi, telluroidi ja topografia. Huomaa korrelaatio kvasigeoidin ja topografian välillä. Kuvattu on alue, jossa $N > 0$. Geoidin ja kvasigeoidin välinen etäisyys on liioiteltu.

7.3.3 *Normaalikorkeus ja korkeusanomalia*

Normaalikorkeus

$$H^* = \frac{C}{\overline{\gamma}} = -\frac{W - W_0}{\overline{\gamma}}, \tag{7.6}$$

jossa (rekursiivinen määritelmä!)

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma_{0H}} = \frac{1}{H^*}\int_0^{H^*} \gamma(z)\,dz.$$

Korkeusanomalia

$$\zeta = \frac{W - U}{\overline{\gamma_{Hh}}} = \frac{T}{\overline{\gamma_{Hh}}},$$

jossa

$$\overline{\gamma_{Hh}} = \frac{1}{\zeta}\int_{H^*}^{h} \gamma(z)\,dz.$$

Korkeusanomalia ζ, joka on muuten samanlainen suure kuin geoidin korkeus N, sijoittuu *topografian* eikä merenpinnan tasoon. Pintaa, joka muodostuu pisteistä, jotka ovat matkan H^* verran vertausellipsoidin yläpuolella ja siis etäisyyden ζ verran topografian ala- tai etäisyyden $-\zeta$ verran sen yläpuolella, kutsutaan *telluroidiksi*. Se on topografisen pinnan eräs kuvaus: pisteiden Q

joukko, joiden *normaalipotentiaali* U_Q on sama kuin topografian vastaavan pisteen P *oikea* geopotentiaali W_P. Katso kuva 5.4.

Usein myönnytyksenä vanhoihin tapoihin konstruoidaan pinta, joka on etäisyyden ζ verran vertausellipsoidin ylä- tai etäisyyden $-\zeta$ verran sen alapuolella. Tätä pintaa kutsutaan *kvasigeoidiksi*. Siltä puuttuu fysikaalinen merkitys: se ei ole tasapotentiaalipinta, vaikka merellä se yhtyy geoidiin. Sen lyhytaaltoiset muodot, toisin kuin geoidin, *korreloivat* topografian lyhytaaltoisten muotojen kanssa.

Korkeus ellipsoidista (oletus $U_0 = W_0$)

$$h = \frac{U - U_0}{\overline{\gamma_{0h}}},$$

jossa

$$\overline{\gamma_{0h}} = \frac{1}{h}\int_0^h \gamma(z)\,dz.$$

Yhteys kolmen suureen välillä on

$$h = H^* + \zeta.$$

Kaikessa kolmessa tapauksessa suure määritellään jakamalla potentiaaliero jonkinlaisella ”keskimääräisellä normaalipainovoimalla”, laskettuna sopivaa paikallisen luotiviivan segmenttiä pitkin. Korkeusanomalian ζ tapauksessa käytetään luotiviivan pätkää *korkealla topografian pinnan lähellä* tason H^* (telluroidin) ja tason h (topografian) välillä.

7.4 Erotus geoidin korkeuden ja korkeusanomalian välillä

Normaalikorkeudet ovat hyvin *operationaalisia*. Niitä käytetään aina ”kvasigeoidin” korkeuksien — oikeammin korkeusanomalioiden — ζ kanssa. Sen sijaan ortometrisia korkeuksia — esimerkiksi Helmertin korkeuksia H — käytetään aina geoidin korkeuksien N kanssa. Molempien, H ja N, laskemiseksi tarvitaan topografian massatiheys ρ, jonka

oletetaan usein olevan standardi vakioarvo ($2670\,\mathrm{kg/m^3}$) sekä paikallinen painovoiman pystygradientti, joksi yleensä oletetaan normaalipainovoiman pystygradientti ($-0{,}3084\,\mathrm{mGal/m}$).

Erotus korkeusanomalian ja geoidikorkeuden välillä lasketaan seuraavasti.

1) Ensin lasketaan erotus kvasigeoidin ja ”ilmageoidin” välillä. Ilmageoidi on harmonisesti alaspäin jatketun ulkoisen potentiaalin tasapotentiaalipinta. Jos T_{FA} on ulkoisen, harmonisesti alaspäin jatketun kentän häiriöpotentiaali, on sen ero topografian ja merenpinnan tasojen välillä:

$$T_{FA}(H) - T_{FA}(0) = \int_0^H \frac{dT_{FA}(z)}{dz} dz \approx -\Delta g_{FA} H, \tag{7.7}$$

ja käyttämällä Brunsin yhtälöä kahdesti, $\zeta = T(H)/\gamma = T_{FA}(H)/\gamma$ (korkeusanomalia eli kvasigeoidin korkeus) ja $N_{FA} = T_{FA}(0)/\gamma$ (”ilmageoidin” korkeus, FA = *Free Air*), saadaan[4]

$$\zeta - N_{FA} \approx -\frac{\Delta g_{FA} H}{\gamma}. \tag{7.8}$$

2) Näin on saatu erotus korkeusanomalioiden ja ilmageoidin korkeuksien välillä. Jää määritettäväksi ero ilmageoidin ja geoidin välissä.

   Approksimoidaan topografia Bouguer-laatalla. Silloin

   - Ilmageoidin N_{FA} tapauksessa tämän laatan paksuus on pisteen P korkeus H, sen takia, että ilmageoidi perustuu alaspäin jatkettuun ulkoiseen kenttään, mikä merkitsee, että myös Bouguer-laatan vetovoiman pisteessä P on jatkettava alaspäin eli se on otettava huomioon kokonaan.

     Koska laatan pintamassatiheys on $H\rho$, on sen *oletettu* vetovoima kaikkialla pisteen P luotiviivalla:

$$2\pi G \rho H. \tag{7.9}$$

[4] Tässä tehtiin approksimaatio, että γ on sama topografian ja merenpinnan tasolla.

- *Geoidikorkeuden* $N = T(0)/\gamma$ tapauksessa meidän on oltava fysikaalisesti realistisia: mielivaltaisessa pisteen P luotiviivan paikassa z Bouguer-laatasta osa on paikan alapuolella ja osa sen yläpuolella. Vetovoima on silloin vain

$$2\pi G\rho\, z - 2\pi G\rho\,(H - z) = 2\pi G\rho\,(2z - H)\,. \tag{7.10}$$

Integroimalla yhtälöiden 7.9 ja 7.10 välinen erotus yhtälön 7.7 tapaan saadaan

$$T(0) - T_{FA}(0) = 2\pi G\rho \int_0^H \big((2z - H) - H\big)\, dz = \\ = 2\pi G\rho \left[z^2 - 2Hz\right]_{z=0}^{z=H} = -2\pi G\rho H^2 = -A_B H,$$

jossa A_B on Bouguer-laatan vetovoima, jos laatan paksuus on H. Jakamalla yhtälö normaalipainovoimalla saadaan

$$N - N_{FA} = -\frac{A_B H}{\gamma}.$$

Vähentämällä tämä viimeinen tulos yhtälöstä 7.8 saadaan

$$\zeta - N = \frac{(-\Delta g_{FA} + A_B)\, H}{\gamma} = -\frac{\Delta g_B H}{\gamma}. \tag{7.11}$$

Katso myös Heiskanen ja Moritz (1967), sivut 327–328. Koska vuoristossa Bouguer-anomalia Δg_B on vahvasti negatiivinen, seuraa että kvasigeoidi on siellä aina geoidin *yläpuolella*: likimäärin yhtälöä 6.2 käyttäen:

$$\zeta - N \approx \frac{0{,}1119\,\mathrm{mGal/m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} H^2 \approx 10^{-7}\,\mathrm{m^{-1}} \cdot H^2.$$

Eli jos H on yksikössä km ja $\zeta - N$ yksikössä m:

$$\zeta - N \approx 0{,}1\,\mathrm{m/km^2} \cdot H^2.$$

7.5 Erotus ortometristen korkeuksien ja normaalikorkeuksien välillä

Geoidi on ortometristen korkeuksien lähtötaso. Siksi voimme kirjoittaa

$$h = H + N,$$

jossa h on korkeus vertausellipsoidista ja H on ortometrinen korkeus.

Toisaalta voimme palauttaa muistiin yhtälö 7.5:

$$h = H^* + \zeta,$$

jossa ζ on korkeusanomalia ja H^* on normaalikorkeus.

Saadaan yksinkertaisesti

$$H - H^* = \zeta - N = -\frac{\Delta g_B H}{\gamma}, \tag{7.12}$$

käyttäen yhtälöä 7.11.

7.6 Ortometristen korkeuksien tarkka laskenta

Ortometriset korkeudet ovat perinteinen tapa ilmaista korkeutta merenpinnan yläpuolella. Ortometriset korkeudet ovat korkeuksia todellisen geoidin — Maan sisällä sijaitsevan ja keskimerenpinnan kanssa keskimäärin samalla tasolla olevan ekivipotentiaalipinnan — yläpuolella.

Voidaan kirjoittaa

$$W = W_0 - \int_0^H g(z)\,dz,$$

jossa g on todellinen painovoima topografisten massojen sisällä. Tästä saadaan

$$H = \frac{C}{\overline{g}} = \frac{-(W - W_0)}{\overline{g}},$$

jossa keskimääräinen painovoima luotiviivaa pitkin on

$$\overline{g} = \frac{1}{H}\int_0^H g(z)\,dz.$$

Määritelmä on rekursiivinen: H esiintyy sekä vasemmalla että oikealla puolella. Tämä ei ole ongelma: sekä H että $\overline{g}$ saadaan iteroimalla. Suppeneminen on nopea.

Käytännössä ortometrinen korkeus lasketaan likimääräisellä kaavalla. Suomessa on pitkään käytetty *Helmertin ortometrisia korkeuksia*, jossa mitattu painovoima Maan pinnalla, $g(H)$, ekstrapoloidaan alaspäin käyttämällä arvioitua kalliomassojen sisäistä painovoiman pystygradienttia.

Oletetaan, että sen kallion ulkopuolinen standardiarvo, $-0{,}3084\,\mathrm{mGal/m}$ (ilmagradientti), kasvaa määrällä $0{,}2238\,\mathrm{mGal/m}$ (kaksinkertainen standarditiheyden $2670\,\mathrm{kg/m^3}$ Bouguer-laatan efekti): lopputulos on kallion sisäinen kokonaispainovoimagradientti, $-0{,}0846\,\mathrm{mGal/m}$.

Tätä kutsutaan *Prey*[5]*-reduktioksi*. Lopputuloksena saadaan seuraavat kaavat, joissa kerroin on *puolet* painovoimagradientista, siis keskimääräinen painovoima luotiviivaa pitkin on sama kuin luotiviivan keskipisteen painovoima: [5]

$$\overline{g} = g(H) - 0{,}0846\,\mathrm{mGal/m}\,\left(-\tfrac{1}{2}H\right) = g(H) + 0{,}0423\,\mathrm{mGal/m}\cdot H,$$

siis

$$H = \frac{C}{\overline{g}} = \frac{C}{g(H) + 0{,}0423\,\mathrm{mGal/m}\cdot H}\,, \tag{7.13}$$

jossa C on geopotentiaaliluku (potentiaaliero keskimerenpinnan kanssa) ja $g(H)$ painovoima Maan pinnalla. Katso myös Heiskanen ja Moritz (1967) sivut 163–167. Termi $0{,}0423\,\mathrm{mGal/m}\cdot H$ on tavallisesti *paljon pienempi* kuin $g(H)$, joka on noin $9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 981\,000\,\mathrm{mGal}$! Siis iterointi, jossa nimittäjä lasketaan ensin karkean H-arvon avulla, suppenee varsin nopeasti.

Helmertin korkeuksien käyttö ortometristen korkeuksien approksimaationa on epätarkka seuraavista syistä:

- Oletus, että painovoima muuttuu lineaarisesti luotiviivaa pitkin, ei pidä paikkaansa, erityisesti ympäröivän maaston vaikutuksen takia. Tarkassa ortometristen korkeuksien laskennassa tämän vaikutuksen laskemiseen tulisi käyttää riittävää määrää tukipisteitä luotiviivaa pitkin.
- Oletus, että painovoiman ilman pystygradientti on kaikkialla sama, $-0{,}3084\,\mathrm{mGal/m}$. Todellinen gradientti voi vaihdella hyvinkin $\pm 10\,\%$ tämän arvon ympärillä.

[5] Adalbert Prey (1873–1949) oli itävaltalainen tähtitieteilijä ja geodeetti sekä oppikirjojen laatija.

- Oletus, että kallion tiheys $\rho = 2670\,\mathrm{kg/m^3}$. Tiheyden todellinen arvo voi vaihdella hyvinkin $\pm 10\,\%$ tai enemmän tämän oletusarvon ympärillä.

Ensimmäinen approksimaatio, maastoefektin huomiotta jättäminen, voidaan korjata käyttämällä Niethammerin[6] menetelmää, katso Heiskanen ja Moritz (1967) sivu 167. Se edellyttää, että maasto otetaan vastaavasti huomioon myös geoidilaskussa.

[6]

Kolmas approksimaatio, tiheysongelma, voidaan poistaa sopimalla, että myös vastaavassa geoidin määrityksessä käytetään vakiotiheyttä $\rho = 2670\,\mathrm{kg/m^3}$. Saatu pinta ei silloin ole enää oikea geoidi, vaan "valegeoidi", jolle on vaikea keksiä sopivaa nimeä.

Toinen approksimaatio voitaisiin poistaa käyttämällä *todellista* painovoiman ilmagradienttia standardiarvon sijasta. Gradientin laskemiseen tarjoutuu osiossa 8.6 esitetty integraaliyhtälö.

Ortometristen korkeuksien tarkka laskenta on siis työlästä, yhtä työlästä kuin geoidin tarkka määritys ja samoista syistä. Onneksi eivuoristoisissa maissa Helmertin korkeudet ovat riittävän hyviä. Suomessa niitä laskettiin aikoinaan jopa käyttämällä ρ-arvoina "todellisia" maankuoren tiheyksiä geologisen kartan mukaan (Kääriäinen, 1966, sivu 32).

7.7 Normaalikorkeuksien tarkka laskenta

Tähän käytetään yhtälöä 7.6:

$$H^* = \frac{C}{\overline{\gamma}} = -\frac{W - W_0}{\overline{\gamma}}, \tag{7.6}$$

jossa normaalipainovoiman keskiarvo luotiviivaa pitkin on

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma_{0H}} = \frac{1}{H^*} \int_0^{H^*} \gamma(z)\, dz.$$

[6] Theodor Niethammer (1876–1947) oli sveitsiläinen tähtitieteilijä ja geodeetti, joka loi Sveitsin gravimetrisen runkoverkon.

Koska normaalipainovoima on varsin tarkasti lineaarinen z:n funktio, voimme kirjoittaa

$$\overline{\gamma} = \gamma_0 + \tfrac{1}{2} H^* \frac{\partial \gamma}{\partial z},$$

jossa $\frac{\partial}{\partial z}\gamma = -0{,}3084\,\mathrm{mGal/m}$ ja $\gamma_0(\varphi) \overset{\mathrm{def}}{=} \gamma(\varphi, 0)$ on normaalipainovoima laskettuna nollakorkeudella. Saadaan

$$\overline{\gamma} = \gamma_0 - 0{,}1542\,\mathrm{mGal/m} \cdot H^*.$$

Ratkaisu saadaan taas iteratiivisesti:

$$H^* = \frac{C}{\overline{\gamma}} = \frac{C}{\gamma_0 - 0{,}1542\,\mathrm{mGal/m} \cdot H^*} \tag{7.14}$$

jossa $\gamma_0(\varphi)$ on laskettavissa eksaktisti, kun paikallinen leveysaste φ on tiedossa. H^* on yhtälön molemmilla puolilla, mutta iteratiivinen ratkaisu suppenee nopeasti, koska nimittäjän ensimmäinen termi γ_0, noin $9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 981\,000\,\mathrm{mGal}$, on huomattavasti toista termiä $0{,}1542\,\mathrm{mGal/m} \cdot H^*$ suurempi.

Normaalikorkeuksien laskenta, toisin kuin ortometristen korkeuksien laskenta, ei ole altis maankuoren tiheyshypoteeseille. Se on kuitenkin riippuvainen valitusta normaalipainovoimakentästä eli vertausellipsoidista.

7.8 Korkeuksien laskentaesimerkki

Pisteellä P on potentiaaliero keskimerenpinnan kanssa $C = 5000\,\mathrm{m^2/s^2}$. Paikallinen painovoima on $g = 9{,}820\,000\,\mathrm{m/s^2}$.

Normaalipainovoima laskettuna nollakorkeudella pisteen P alapuolella on $\gamma_0 = 9{,}821\,500\,\mathrm{m/s^2}$.

Kysymyksiä

1) Laske pisteen P ortometrinen korkeus.
2) Laske pisteen P ilma-anomalia Δg_{FA}.
3) Laske pisteen P Bouguer-anomalia (ilman maastokorjausta) Δg_{B}.

4) Laske pisteen P normaalikorkeus.

5) Jos geoidin korkeus pisteen P kohdalla on $N = 25{,}000\,\mathrm{m}$, paljonko on *korkeusanomalia* (”kvasigeoidin korkeus”) ζ?

Vastauksia

1) Ensimmäinen yritys:

$$H^{(0)} = \frac{C}{g} = \frac{5000}{9{,}82}\,\mathrm{m} = 519{,}165\,\mathrm{m}.$$

Toinen yritys (yhtälö 7.13):

$$H^{(1)} = \frac{5000\,\mathrm{m^2/s^2}}{9{,}820\,000\,\mathrm{m/s^2} + 0{,}0423 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s^{-2}} \cdot 519{,}165\,\mathrm{m}} = \\ = 509{,}154\,\mathrm{m}.$$

Sen jälkeen millimetrit eivät enää muutu.

2) Ilma-anomalia on

$$\Delta g_{FA} = 9{,}820\,000\,\mathrm{m/s^2} - \\ - \left(9{,}821\,500 - 0{,}3084 \cdot 10^{-5} \cdot 509{,}154\right)\,\mathrm{m/s^2} = \\ = 7{,}023\,\mathrm{mGal}.$$

3) Bouguer-anomalia on (yhtälö 6.2):

$$\Delta g_B = \Delta g_{FA} - 0{,}1119\,\mathrm{mGal/m} \cdot H = -49{,}951\,\mathrm{mGal}.$$

4) Ensimmäinen yritys on taas

$$H^{*(0)} = \frac{C}{\gamma_0} = 509{,}087\,\mathrm{m}.$$

Toinen, yhtälö 7.14:

$$H^{*(1)} = \frac{5000\,\mathrm{m^2/s^2}}{9{,}821\,500\,\mathrm{m/s^2} - 0{,}1542 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s^{-2}} \cdot 509{,}087\,\mathrm{m}} = \\ = 509{,}128\,\mathrm{m},$$

myös lopullinen millimetritasolla.

5) Erotuskaava 7.12 antaa

$$\zeta - N = -\frac{\Delta g_B H}{\gamma} = 0{,}026\,\mathrm{m}.$$

Myös (tarkistus) $H - H^* = 0{,}026\,\mathrm{m}$. Eli

$$\zeta = N + 0{,}026\,\mathrm{m} = 25{,}026\,\mathrm{m}.$$

7.9 Ortometrinen korjaus ja normaalikorjaus

Käytännön ortometristen korkeuksien laskennassa lasketaan usein yhteen ensin vaaituksella mitatut korkeuserot (”lattalukemien erot”) ΔH pisteiden A ja B välillä *alustavaksi* eli raa’aksi korkeuseroksi

$$\sum_{\substack{i=A\\ \text{vaaituslinja}}}^{B-1} \Delta H_{i,i+1} \overset{\text{def}}{=} \sum_{A}^{B} \Delta H,$$

jonka jälkeen menetelmän epäeksaktisuus otetaan huomioon soveltamalla ”ortometrista korjausta” (OC):

$$H_B = H_A + \sum_{A}^{B} \Delta H + OC_{AB}.$$

Tosiasia, että kahden pisteen A ja B välinen ortometristen korkeuksien ero ei ole sama kuin vaaittujen korkeuserojen summa, on seurausta siitä, että painovoima ei ole kaikkialla sama.

Jos C_A, C_B ja ΔC ovat geopotentiaaliluvut pisteissä A ja B ja geopotentiaalierot vaaituslinjaa pitkin, pätee $C_B - C_A - \sum_A^B \Delta C = 0$, koska geopotentiaali on konservatiivinen kenttä. Jakaminen vakiolla γ_0 antaa

$$\frac{C_B}{\gamma_0} - \frac{C_A}{\gamma_0} - \sum_{A}^{B} \frac{\Delta C}{\gamma_0} = 0.$$

Toisaalta

$$OC_{AB} = H_B - H_A - \sum_{A}^{B} \Delta H = \frac{C_B}{\overline{g}_B} - \frac{C_A}{\overline{g}_A} - \sum_{A}^{B} \frac{\Delta C}{g},$$

jossa $\overline{g}_A$ ja $\overline{g}_B$ ovat painovoiman keskiarvoja pisteiden A ja B luotiviivoja pitkin ja g on painovoima vaaituslinjaa pitkin. Tässä lausekkeessa verrataan $\sum_A^B \Delta H$, naiivisti laskettu vaaittujen korkeuserojen summa, ja ortometristen korkeuksien erotus linjan päätepisteiden A ja B välillä laskettuna määritelmän mukaan.

Vähennys antaa

$$OC_{AB} - 0 = \left(\frac{C_B}{\overline{g}_B} - \frac{C_B}{\gamma_0}\right) - \left(\frac{C_A}{\overline{g}_A} - \frac{C_A}{\gamma_0}\right) - \sum_A^B \left(\frac{\Delta C}{g} - \frac{\Delta C}{\gamma_0}\right),$$

jossa

$$\begin{aligned}
\frac{C_B}{\overline{g}_B} - \frac{C_B}{\gamma_0} &= \left(\frac{\gamma_0 - \overline{g}_B}{\gamma_0}\right) \frac{C_B}{\overline{g}_B} = \left(\frac{\gamma_0 - \overline{g}_B}{\gamma_0}\right) H_B, \\
\frac{C_A}{\overline{g}_A} - \frac{C_A}{\gamma_0} &= \left(\frac{\gamma_0 - \overline{g}_A}{\gamma_0}\right) H_A, \\
\frac{\Delta C}{g} - \frac{\Delta C}{\gamma_0} &= \left(\frac{\gamma_0 - g}{\gamma_0}\right) \Delta H,
\end{aligned}$$

tuloksena *ortometrinen korjaus*

$$OC_{AB} = \sum_A^B \left(\frac{g - \gamma_0}{\gamma_0}\right) \Delta H + \left(\frac{\overline{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0}\right) H_A - \left(\frac{\overline{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0}\right) H_B, \quad (7.15)$$

identtinen Heiskasen ja Moritzin (1967) yhtälön 4-33 kanssa.

Vakion γ_0 valinta on mielivaltainen. On viisasta valita arvo läheltä keskimääräistä painovoimaa vaaituslinjan AB alueella, jolloin laskennassa liikkuvat luvut jäävät pieniksi.

Vastaavasti voidaan laskea myös *normaalikorjaus* (NC) normaalikorkeuksien laskennan yhteydessä. Lähdetään yhtälöstä

$$NC_{AB} = H_B^* - H_A^* - \sum_A^B \Delta H = \frac{C_B}{\overline{\gamma}_B} - \frac{C_A}{\overline{\gamma}_A} - \sum_A^B \frac{\Delta C}{g}, \quad (7.16)$$

josta, samalla tavalla kuin yllä, saa vähentämällä:

$$NC_{AB} = \sum_A^B \left(\frac{g - \gamma_0}{\gamma_0}\right) \Delta H + \left(\frac{\overline{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0}\right) H_A^* - \left(\frac{\overline{\gamma}_B - \gamma_0}{\gamma_0}\right) H_B^*. \quad (7.17)$$

Identtinen ensimmäinen termi yhtälöissä 7.15 ja 7.17 polveutuu termistä

$$\sum_{A}^{B} \frac{\Delta C}{g} = \sum_{A}^{B} \Delta H,$$

korkeuserojen ΔH naiivi summaus sekä ortometrisen korjauksen että normaalikorjauksen tapauksessa, mihin tämä yleinen korjauskäsite perustuu.

Yhtälö 7.16 antaa

$$H_B^* = H_A^* + \sum_{A}^{B} \Delta H + NC_{AB}.$$

Erilaista ortometrisen korjauksen ja normaalikorjauksen välillä on korkeuksien määritelmä: H:n sijasta H^* eli jaetaan normaalipainovoiman keskiarvolla luotiviivaa pitkin $\overline{\gamma}$ eikä todellisen painovoiman vastaavalla keskiarvolla $\overline{g}$.

*S*ekä ortometrinen korjaus 7.15 että normaalikorjaus 7.17 lasketaan kiintopisteväli kerrallaan: on tunnettava vaaitun korkeuseron ΔH lisäksi paikallinen painovoima g vaaituslinjaa pitkin. Lisäksi on tunnettava $g(H)$ tai $\gamma(0)$ molemmissa päätepisteissä, jotta voidaan laskea keskipainovoima $\overline{g}$ tai $\overline{\gamma}$ päätepisteiden luotiviivoja pitkin. Kaikki tämä onnistuu hyvin yllä mainittujen yhtälöiden avulla. Muista, että painovoima g vaaituslinjaa pitkin tarvitaan myös, jos halutaan redukoida yksittäiset vaaitut korkeuserot ΔH geopotentiaalilukueroiksi ΔC. Tämä reduktio on osana sekä ortometrisen korjauksen että normaalikorjauksen laskentaa.

7.10 Tulevaisuuden näkymä: suhteellisuusteoreettinen vaaitus

Yleisen suhteellisuusteorian mukaan kello kulkee sitä hitaammin, mitä syvemmällä se on massojen potentiaalikuopan sisällä. Tämä näkyy helpoiten tutkimalla pallosymmetrisen kentän Schwarzschildin[7] metriikka: [7]

$$
\begin{aligned}
&c^2\,d\tau^2 = \\
&= \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\,dt^2 - \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\phi^2+\cos^2\phi\,d\lambda^2\right) = \\
&\quad = \left(1-\frac{2W}{c^2}\right) c^2\,dt^2 - \left(1-\frac{2W}{c^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\phi^2+\cos^2\phi\,d\lambda^2\right),
\end{aligned}
$$

pallokoordinaateissa plus aika (ϕ, λ, r, t). Tässä näkyy, miten ominaisajan τ kulku hidastuu stationaarisen koordinaattiajan t (aika äärettömyydessä $r \to \infty$) verrattuna, kun geopotentiaali W kasvaa lähestyttäessä massaa. Hidastussuhde on

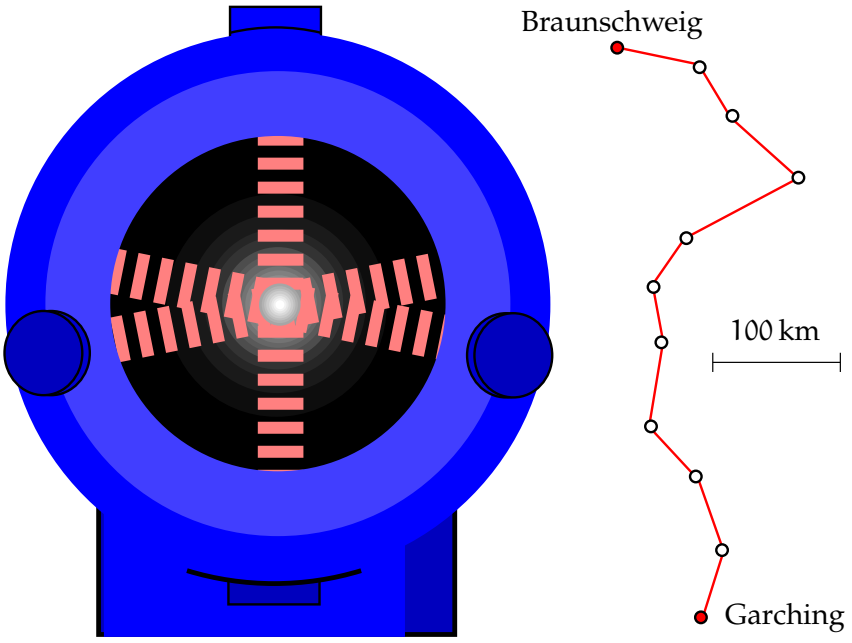
$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \sqrt{1-\frac{2W}{c^2}} \approx 1-\frac{W}{c^2}.$$

Nyt c^2, valon nopeuden neliö, on tavallisissa ihmisten yksiköissä valtavan iso luku: $10^{17}\,\mathrm{m^2/s^2}$. Tämä merkitsee, että potentiaalieron $1\,\mathrm{m^2/s^2}$ — mikä vastaa korkeuseroa 10 cm — mittaamiseksi tämän menetelmän avulla mittaustarkkuuden olisi oltava $1:10^{17}$. Perinteisemmät, mikroaaltoalueella toimivat atomikellot pystyvät tarkkuuksiin 10^{-12}–10^{-14} (Vermeer, 1983a). Uusille optisille kelloille tavoitteen pitäisi olla saavutettavissa, ja relativistinen vaaitus voisi toteutua.

Kello toimii sillä tavalla, että atomien äärimmäisellä jäähdytyksellä aikaansaama niin sanottu Bosen ja Einsteinin kondensaatti on vangittuna kuuden lasersäteen muodostamassa valohilassa: seisovien aaltojen sähkömagneettisessa kuviossa. Kellovärähtelyllä on eri taajuus. Bosen ja Einsteinin kondensaatille ominaista on, että kaikki atomit ovat tarkasti samassa kvanttitilassa — kuten fotonit toimivassa laserissa: niiden aineaallot ovat *koherentteja*. Tavallaan kaikki atomit toimivat yhdessä yhtenä virtuaalisena atomina. Kondensaatti voi koostua miljoonista atomeista.

---

[7] Karl Schwarzschild (1873–1916) oli saksalaisfyysikko, joka johti vuonna 1915 asepalveluksessa Venäjän rintamalla ollessaan ensimmäisenä Albert Einsteinin yleisen suhteellisuusteorian kenttäyhtälön suljetun pallosymmetrisen, ei-pyörivän ratkaisun, *Schwarzschildin metriikan*.



KUVA 7.8. Valohilakello: tulevaisuuden ultratarkka atomikello toimii optisella alueella. Oikealla, julkaisun Predehl ym. (2012) kokeen reitti.

Valitettavasti ei riitä, että aikaa osataan mitata äärimmäisen tarkasti vain yhdessä laboratoriossa. On osattava *verrata* eri atomikellojen tikitysnopeuksia yli maantieteellisten etäisyyksien. Tähänkin on löytynyt ratkaisu: olemassa olevat valokuitukaapelit, joita Internet ja puhelinliikenne käyttävät jo maailmanlaajuisesti, soveltuvat tähän pienin muutoksin. Muutokset koskevat kaapeleissa olevia välivahvistimia, jotka on sijoitettu noin 100 km:n välein. Vahvistimet pitää korvata modifioiduilla laitteilla (Predehl ym., 2012). Tällä huipputeknologian ja -tieteen ratkaisulla voidaan korvata sekä perinteisiä tarkkavaaitusverkkoja että GNSS-teknologiaan ja geoidimääritykseen perustuvia korkeusjärjestelmiä.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Miksi suoraan vaaituista korkeuseroista lasketut korkeudet eivät kelpaa korkeus*järjestelmäksi*?
2) Mikä on geopotentiaaliluku?
3) Mitkä ovat ortometrisia korkeuksia?
4) Mitkä ovat normaalikorkeuksia?
5) Mikä on klassinen geoidin määritelmä?
6) Mikä on korkeusanomalia?
7) Mikä on kvasigeoidi?
8) Miksi vesi voi joskus virrata ”väärään” suuntaan, niin sanotusti suurempaan korkeuteen?
9) Mikä on telluroidi?
10) Mitkä ovat ortometrinen korjaus ja normaalikorjaus?

Harjoitus 7−1: Ortometristen korkeuksien laskenta

Pisteen P potentiaaliero merenpinnan kanssa, $-(W - W_0)$, on $1000\,\mathrm{m^2/s^2}$. Painovoima pisteessä on $g_P = 9{,}820\,000\,\mathrm{m/s^2}$. Laske pisteen ortometrinen korkeus. Pyri millimetrin tarkkuuteen.

Harjoitus 7−2: Normaalikorkeuksien laskenta

Pisteessä P potentiaaliero merenpinnan kanssa on

$$-(W - W_0) = 5000\,\mathrm{m^2/s^2}.$$

Pisteen alapuolella merenpinnan tasolla normaalipainovoima on $\gamma_0 = 9{,}821\,500\,\mathrm{m/s^2}$. Laske pisteen normaalikorkeus.

Harjoitus 7−3: Erotus ortometrisen korkeuden ja normaalikorkeuden välillä

Pisteessä P Bouguer-anomalia on $\Delta g_B = -120\,\text{mGal}$. Pisteen ortometrinen korkeus on 1150 m.

1) Laske pisteen P normaalikorkeus.
2) Jos geoidikorkeus pisteessä P on $N = 21{,}75\,\text{m}$, laske pisteen korkeusanomalia ζ.

Stokesin yhtälö ja muut integraaliyhtälöt

8

8.1 Stokesin yhtälö ja Stokesin integraaliydin

Oletetaan, että Maa on pallon muotoinen. Sopivasti yhdistämällä osion 5.3 yhtälöitä saadaan merenpinnan tasolla

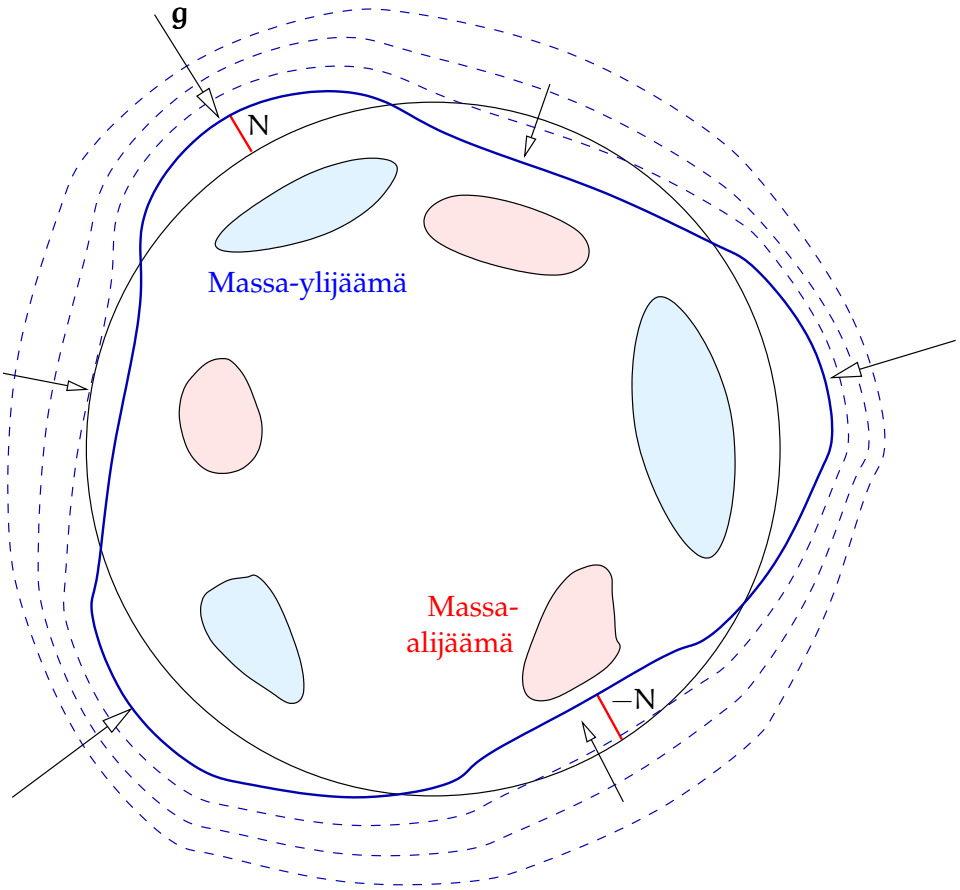
$$T = \sum_{n=2}^{\infty} T_n = R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta g_n}{n-1},$$

jossa $T_n = T_n(\phi, \lambda)$ ovat häiriöpotentiaalikentän $T = T(\phi, \lambda)$ ja $\Delta g_n = \Delta g_n(\phi, \lambda)$ painovoima-anomaliakentän $\Delta g = \Delta g(\phi, \lambda)$ asteosuudet. Summaus alkaa asteluvulta $n = 2$: asteluvuille $n = 0, 1$ oletetaan, että Δg_n häviävät, koska $\Delta g_0 \neq 0$ edustaa Maan kokonaismassan erotusta normaalikentän kokonaismassasta ja $\Delta g_1 \neq 0$ koordinaatiston origon poikkeamaa Maan massakeskipisteestä, katso osio 3.4.

Tämä on nyt Stokesin yhtälön *spektraalimuoto*.

Sijoittamalla tähän asteosuusyhtälö 3.9 saadaan integraaliyhtälö

$$\begin{aligned} T &= \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \iint_{\sigma} \Delta g(\phi', \lambda')\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \\ &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) \right) \Delta g(\phi', \lambda')\, d\sigma' = \\ &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi)\, \Delta g(\phi', \lambda')\, d\sigma', \quad (8.1) \end{aligned}$$



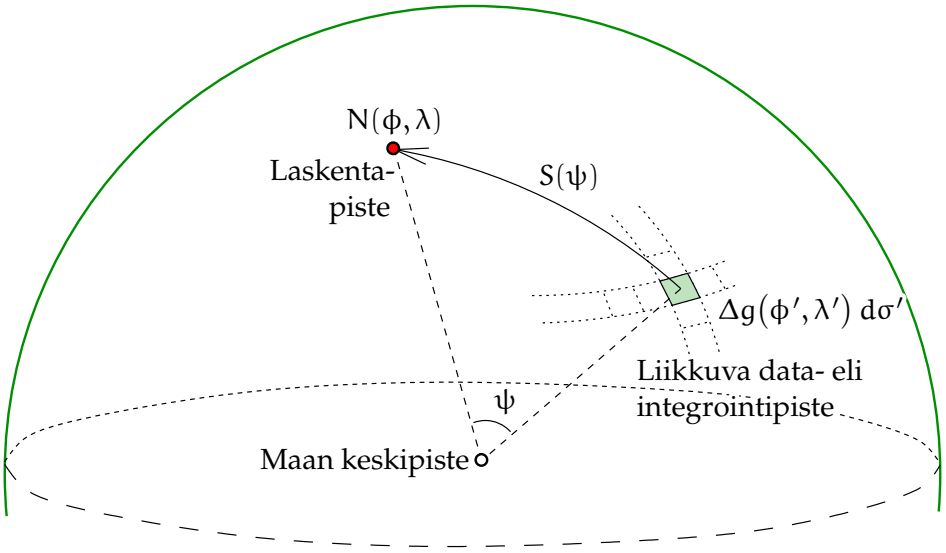
KUVA 8.1. Gravimetrisen geoidimäärityksen periaate.

jossa

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi),$$

Stokesin ydinfunktio. Kulma ψ on laskentapisteen ja liikkuvan datapisteen välinen geosentrinen kulmaetäisyys, katso kuva 8.2. Tämän yhtälön avulla voi maailmanlaajuisesta painovoima-aineistosta laskea jokaiselle maapallon pinnan pisteelle häiriöpotentiaalin T ja siitä *geoidin korkeuden* N Brunsin yhtälön 5.2, $N = T/\gamma$, mukaan. Tulos on

$$N(\phi,\lambda) = \frac{T(\phi,\lambda)}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi)\, \Delta g(\phi',\lambda')\, d\sigma', \qquad (8.2)$$



KUVA 8.2. Stokesin yhtälön integroinnin geometria.

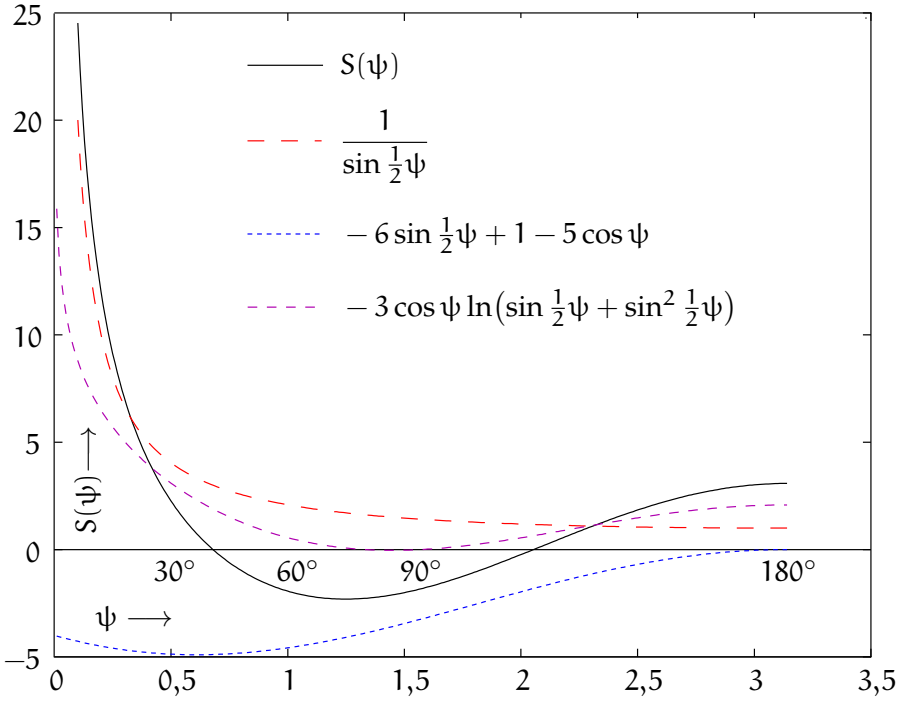
jossa (ϕ, λ) ja (ϕ', λ') ovat laskentapiste ja liikkuva piste (”datapiste”) sekä ψ on niiden välinen kulmaetäisyys. Yhtälö 8.2 on klassinen gravimetrisen geoidimäärityksen Stokesin integraaliyhtälö.

Yllä oleva on esimerkki integraaliyhtälöiden ja spektraalikehitelmien vastaavuudesta. Tästä löytyy muitakin esimerkkejä, kuten funktion $1/\ell$ spektraaliesitys eli yhtälö 8.7, Heiskanen ja Moritz (1967) yhtälö 1-81. Tietysti $1/\ell$ on myös integraaliyhtälön ydinfunktio, yhtälö 1.28. Yhtälöstä saa potentiaalin V, jos annettuna on yksinkertainen massatiheyskerros κ.

On olemassa myös Stokesin yhtälön versio *ulkoavaruudelle*. Se annettiin jo aiemmin, yhtälö 5.9. Sen ydinfunktion spektraalimuoto on yhtälö 5.10:

$$S(\psi, r, R) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi). \qquad (5.10)$$

Stokesin ydinfunktio Maan pinnalla esitetään kuvassa 8.3, jossa kulma ψ on radiaaneina ($1\,\text{rad} \approx 57^\circ,29578\ldots$). Käyrä laskettiin seuraavan suljetun lausekkeen avulla (Heiskanen ja Moritz, 1967, osio 2-16, yhtälö



KUVA 8.3. Stokesin ydinfunktio $S(\psi)$. Argumentti ψ on radiaaneina $[0, \pi)$. Kuva näyttää myös analyyttisen lausekkeen 8.3 kolme eri osaa eri asymptoottisine käyttäytymisineen.

2-164):

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\psi} - 6 \sin \tfrac{1}{2}\psi + 1 - 5 \cos \psi - \\ - 3 \cos \psi \ln\left(\sin \tfrac{1}{2}\psi + \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi\right). \quad (8.3)$$

Suljettu lauseke auttaa ymmärtämään paremmin, miten funktio käyttäytyy origon $\psi = 0$ lähellä: ensimmäinen termi $1/\sin \frac{1}{2}\psi$ menee äärettömyyteen, kun $\psi \to 0$. Seuraavat kolme termiä, $-6 \sin \frac{1}{2}\psi + 1 - 5 \cos \psi$, ovat kaikki rajallisia koko välillä $[0, \pi)$ ja arvo tapauksessa $\psi = 0$ on -4. Viimeinen ja samalla monimutkainen termi $-3 \cos \psi \ln\left(\sin \frac{1}{2}\psi + \sin^2 \frac{1}{2}\psi\right)$ menee *positiiviseen* äärettömyyteen, kun $\psi \to 0$, mutta logaritmin ansiosta paljon hitaammin.

8.2 Esimerkki: Stokesin yhtälö napakoordinaateissa

Osiossa 2.3 johdimme kaksiulotteisen napakoordinaattien Laplacen yhtälön yleisen ratkaisun. Alla kehitetään yksinkertainen laskentakehys kaksiulotteiselle gravimetriselle geoidimääritykselle, joka mahdollistaa yksinkertaisten numeeristen ratkaisujen laskemisen. Tavoitteena on saada näppituntumaa näihin asioihin.

Ensin johdetaan häiriöpotentiaali, painovoima-anomalia ja Stokesin integraaliydin ratkaisua varten yhtälöstä 2.3, olettaen että normaalipotentiaali on $U(r) = a_0 + b_0 \ln r$.

- Häiriöpotentiaali:

$$T(\alpha, r) = V^{\text{ulk}}(\alpha, r) - (a_0 + b_0 \ln r) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} \left(a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right).$$

- Normaalipainovoima:

$$\gamma(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{b_0}{r}.$$

- Normaalipainovoimagradientti:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = -\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{b_0}{r^2}.$$

- Painovoima-anomalia, yhtälö 5.5:

$$\Delta g(\alpha, r) = -\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial r} T = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{r} r^{-k} \left(a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right) - \\ - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} \left(a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right) = \\ = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{r} r^{-k} \left(a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right).$$

Näkyy että, jos kirjoitamme

$$T(\alpha, r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k T_k(\alpha), \quad T_k(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} R^{-k} \left(a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right),$$

seuraa, että

$$\Delta g(\alpha, r) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} \Delta g_k(\alpha),$$

$$\Delta g_k(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (k-1) R^{-(k+1)} \left(a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right),$$

ja kuten pallokoordinaattien tapauksessa

$$\Delta g_k(\alpha) = \frac{k-1}{R} T_k(\alpha). \tag{8.4}$$

Fourier'n teorian mukaan kantafunktiot $\cos k\alpha$ ja $\sin k\alpha$ ovat *ortonormaaleja* ympyrällä $r = R$, kun valitaan seuraava integraali skalaarituloksi:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos k\alpha \cos m\alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin k\alpha \sin m\alpha \, d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{jos } k \neq m, \\ 1 & \text{jos } k = m, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos k\alpha \sin m\alpha \, d\alpha = 0 \quad \text{aina.}$$

Tämä merkitsee, että saamme kehittää

$$\Delta g(\alpha, R) = \sum_{k=2}^{\infty} \Delta g_k(\alpha)$$

Fourier'n termeihinsä seuraavasti:

$$\Delta g_k(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (k-1) R^{-(k+1)} \left(a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right) =$$

$$= \overbrace{(k-1) R^{-(k+1)} a_k}^{A_k} \cos k\alpha + \overbrace{(k-1) R^{-(k+1)} b_k}^{B_k} \sin k\alpha.$$

Tämä antaa seuraavat Fourier'n kertoimet:

$$\begin{Bmatrix} A_k \\ B_k \end{Bmatrix} = (k-1) R^{-(k+1)} \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix}, \qquad k = 2, 3, \cdots$$

ja ympyrällä $r = R$ kehitelmä on

$$\Delta g(\alpha, R) = \sum_{k=2}^{\infty} \Delta g_k(\alpha) = \sum_{k=2}^{\infty} (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha)\,.$$

Sijoitukset

$$\left\{ \begin{array}{c} a_k \\ b_k \end{array} \right\} = \frac{R^{k+1}}{k-1} \left\{ \begin{array}{c} A_k \\ B_k \end{array} \right\}$$

antavat

$$\begin{aligned} T(\alpha, R) = \sum_{k=2}^{\infty} T_k(\alpha) = \sum_{k=2}^{\infty} R^{-k} (a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha) = \\ = \sum_{k=2}^{\infty} R^{-k} \left(\frac{R^{k+1}}{k-1} A_k \cos k\alpha + \frac{R^{k+1}}{k-1} B_k \sin k\alpha \right) = \\ = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R}{k-1} (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha)\,. \end{aligned}$$

Käyttäen Fourier'n kertoimien yhtälöt,

$$\left\{ \begin{array}{c} A_k \\ B_k \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(\alpha, R) \left\{ \begin{array}{c} \cos k\alpha \\ \sin k\alpha \end{array} \right\} d\alpha,$$

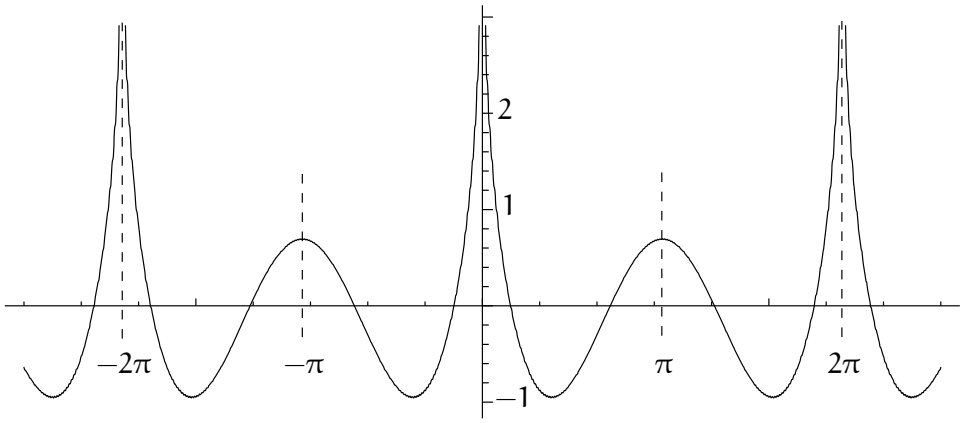
ja kosinin eroyhtälöä (Wolfram Demonstrations, Difference formula for cosine) saadaan

$$\begin{aligned} T(\alpha, R) = \frac{1}{\pi} \cdot \\ \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R}{k-1} \left(\cos k\alpha \int_0^{2\pi} \Delta g(\alpha', R) \cos k\alpha'\, d\alpha' + \sin k\alpha \int_0^{2\pi} \Delta g(\alpha', R) \sin k\alpha'\, d\alpha' \right) = \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R}{k-1} \int_0^{2\pi} \Delta g(\alpha', R) \cdot \cos\big(k\,(\alpha - \alpha')\big)\, d\alpha'. \end{aligned}$$

Määritellään Stokesin ydin tähän kaksiulotteiseen tilanteeseen:

$$N(\alpha) = \frac{T(\alpha, R)}{\gamma} = \frac{R}{\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \Delta g(\alpha', R)\, S(\alpha - \alpha')\, d\alpha',$$

$$\text{jossa} \quad S(\alpha - \alpha') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos\big(k\,(\alpha - \alpha')\big)}{k-1}.$$



Kuva 8.4. Stokesin ydinfunktio kaksiulotteisessa geometriassa ympyrällä $r = R$. Huomaa symmetria ja jaksollisuus. Vertaa pallokoordinaattien Stokesin ytimen kanssa, kuva 8.3.

Pienille arvoille $\alpha - \alpha'$ saa approksimoida (Wolfram Functions, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$):

$$S(\alpha - \alpha') = \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{\cos\big((k'+1)\,(\alpha-\alpha')\big)}{k'} \approx \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{\cos\big(k'\,(\alpha-\alpha')\big)}{k'} = \\ = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2\,(1-\cos(\alpha-\alpha'))}\right) \approx -\ln(\alpha-\alpha').$$

Abstraktimmin yhteys 8.4 voidaan kirjoittaa myös diskreetin Fourier'n muunnoksen ja sen käänteismuunnoksen avulla seuraavasti:

$$\mathcal{F}\{\Delta g\} = \frac{k-1}{R}\mathcal{F}\{T\} \quad \Longrightarrow \quad T = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{R}{k-1}\mathcal{F}\{\Delta g\}\right\}.$$

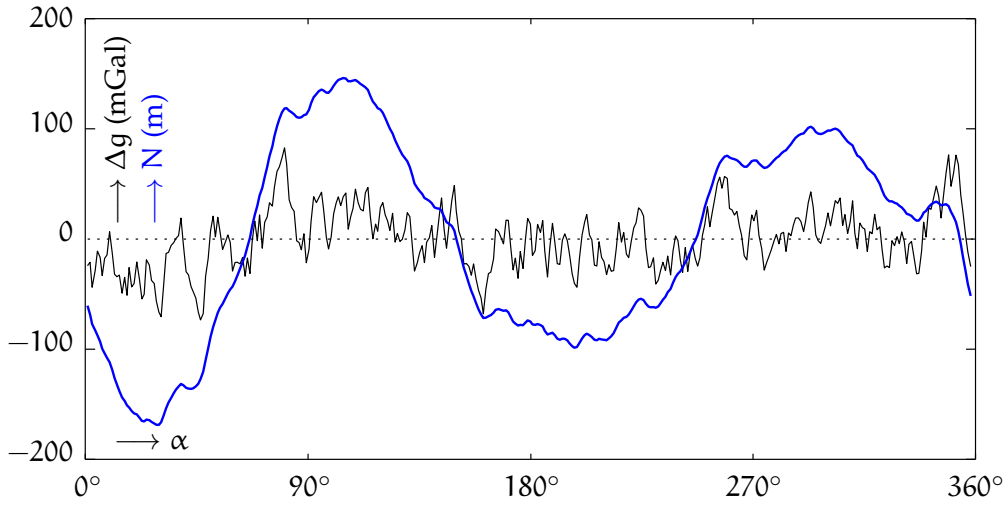
Tässä $\mathcal{F}\{f\}$ edustaa ympyrän spatiaalisen koordinaatin α funktion $f(\alpha)$ Fourier'n muunnosta spatiaalisen aaltoluvun (aaltoilujen määrä ympyrän ympäri) k funktioksi.

Tämän esitystavan hyvä puoli on, että se voi hyödyntää mitä tahansa standardia FFT-ohjelmakirjastoa, jossa on sekä itse Fourier'n muunnoksen $\mathcal{F}\{\cdot\}$ että sen käänteismuunnoksen $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ yhteensopivat versiot.

Lisää FFT:stä kerrotaan liitteessä C.

TAULU 8.1. Stokesin yhtälö kahdessa ulottuvuudessa, octave-koodi.

```
% Stokesin yhtälön emulaattori kahdessa ulottuvuudessa
R = 6378137;
g = 9.8;
ak(1:180) = 0.0;
bk(1:180) = 0.0;
dg(1:360) = 0.0;
T(1:360) = 0.0;
for i=1:359
% Gauss-Markov
  dg(i+1) = 0.8*dg(i) + 50*(rand()-0.5);
end
dgsum = 0.0;
for i=1:360
  % Pakota jaksollisuus
  dg(i) = dg(i) - (dg(360) - dg(1)) * (i/359);
  dgsum = dgsum + dg(i);
end
for i = 1:360
  % Pakota odotusarvo nolla
  dg(i) = dg(i) - dgsum/360;
  for k = 2:180
    ak(k) = ak(k) + dg(i) * cos(k*i*pi/180)/180;
    bk(k) = bk(k) + dg(i) * sin(k*i*pi/180)/180;
  end
end
dg(1:360) = 0.0;
for i=1:360
  for k = 2:180
    T(i) = T(i) + (ak(k)*cos(k*i*pi/180) + bk(k)*sin(k*i*pi/180))*R/(k-1);
    % Ilman astelukua yksi
    dg(i) = dg(i) + ak(k)*cos(k*i*pi/180) + bk(k)*sin(k*i*pi/180);
 end
end
hold on
plot(1:360, dg, 'b') plot(1:360, 0.00001*T/g, 'm')
print -dpdf stokes2D-out.pdf
```



KUVA 8.5. Painovoima-anomalioiden (Gaussin ja Markovin prosessi) ja geoidikorkeuksien (sininen) simulaatio kaksiulotteisesti ympyrällä. Huomaa molempien spektraalikäyttäytyminen.

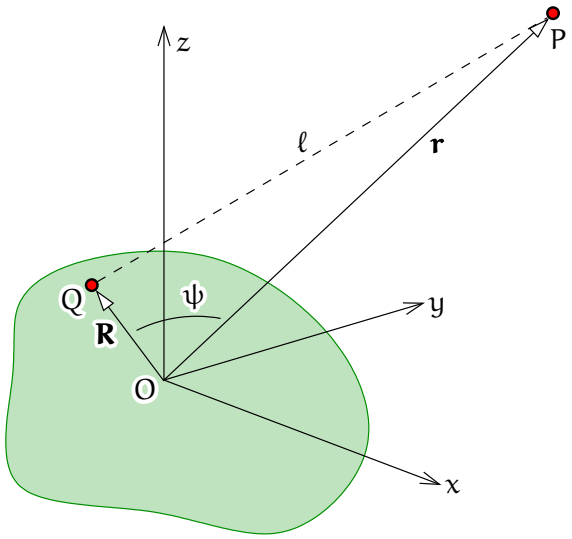
Kuva 8.5 näyttää simuloinnin tuloksen, jossa satunnaisesti generoituja painovoima-anomalioita ympyrällä $r = R$ on käytetty geoidikorkeuksien laskemiseksi samalla ympyrällä. Molemmat käyrät käyttäytyvät tilastollisesti melko realistisesti. Käytetty koodi löytyy taulusta 8.1.

8.3 Luotiviivan poikkeamat ja Vening Meineszin yhtälöt

Differentioimalla Stokesin yhtälö paikan suhteen saadaan luotiviivan poikkeamien komponenttien integraaliyhtälöt (Heiskanen ja Moritz, 1967, yhtälö 2-210′):

$$\begin{Bmatrix} \xi(\phi,\lambda) \\ \eta(\phi,\lambda) \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_\sigma \Delta g(\phi',\lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} d\sigma' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_\sigma \Delta g(\phi',\lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} \sin\psi \, d\alpha \, d\psi, \quad (8.5)$$



KUVA 8.6. Legendren polynomien generoivan funktion geometria.

jossa ξ ja η ovat etelä-pohjois- ja lansi-itäsuuntaiset luotiviivan poikkeamat. Yksikköpallon pinta-alkio on $d\sigma' = \sin\psi \, d\alpha \, d\psi$, jossa $\sin\psi$ on (ψ, α)-koordinaatien Jacobin determinantti.

Nämä yhtälöt johti ensimmäisenä hollantilainen geofyysikko F. A. Vening Meinesz. Kulma α on atsimuutti eli suuntakulma laskenta- eli evaluointipisteen (ϕ, λ) ja liikkuvan integrointi- eli datapisteen (ϕ', λ') välillä. Yhtälöt on paljon vaikeampi kirjoittaa spektraalimuotoon, koska ydinfunktiot ovat nyt myös atsimuuttisuunnan α funktioita eli *anisotrooppisia*.

Häiriöpotentiaali, painovoimahäiriö ja painovoima-anomalia ovat kaikki niin sanottuja *isotrooppisia* suureita: ne eivät riipu atsimuutista ja siksi spektraaliesityksessä niiden väliset muunnokset ovat vain asteluvun n funktioita.

8.4 Poissonin integraaliyhtälö

Katso kuva 8.6. Kappaleen piste Q on paikassa $\mathbf{R}$ ja havaintopiste P paikassa $\mathbf{r}$. Kahden paikkavektorin välinen geosentrinen kulmaetäisyys

eli kulmaetäisyys origosta katsottuna on ψ. Pisteiden P ja Q välinen etäisyys on ℓ.

Kun määritellään $R \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{R}\|$ ja $r \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{r}\|$, saa kirjoittaa (kosinisääntö):

$$\ell^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\psi. \tag{8.6}$$

Saa myös kirjoittaa funktion $1/\ell$ seuraavaksi kehitelmäksi (Heiskanen ja Moritz, 1967 yhtälö 1-81):

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\psi}} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi), \tag{8.7}$$

jossa r ja R ovat pisteiden P ja Q etäisyydet origosta O eli tavallisesti Maan keskipisteestä. Funktiota $1/\ell$ kutsutaan Legendren polynomien *generoivaksi funktioksi*.

Differentioimalla yhtälö 8.7 r:n suhteen saadaan

$$-\frac{r - R\cos\psi}{\ell^3} = -\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi).$$

Tämä kerrotaan $2r$:n kanssa:

$$-\frac{2r^2 - 2rR\cos\psi}{\ell^3} = -\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi).$$

Lasketaan yhteen tämä yhtälö ja yhtälö 8.7:

$$\frac{-2r^2 + 2rR\cos\psi + \ell^2}{\ell^3} = -\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi).$$

Sijoitetaan tähän ℓ^2 yhtälöstä 8.6:

$$\frac{-2r^2 + 2rR\cos\psi + \ell^2}{\ell^3} = \frac{R^2 - r^2}{\ell^3},$$

tuloksena, $-R$:n kanssa kerrottuna,

$$\frac{R\left(r^2 - R^2\right)}{\ell^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi). \tag{8.8}$$

Jos sovelletaan asteosuusyhtälöä 3.9 harmoniselle potentiaalikentälle V R-säteisen maapallon pinnalla:

$$V_n(\phi,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\iint_\sigma V(\phi',\lambda',R)\,P_n(\cos\psi)\,d\sigma',$$

sekä kentän spektraaliesitys avaruudessa 3.10:

$$V(\phi,\lambda,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} V_n(\phi,\lambda),$$

saadaan

$$\begin{aligned} V(\phi,\lambda,r) &= \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(2n+1)\iint_\sigma V(\phi',\lambda',R)\,P_n(\cos\psi)\,d\sigma' = \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma V(\phi',\lambda',R)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\psi)\right]d\sigma' = \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{R\left(r^2-R^2\right)}{\ell^3}V(\phi',\lambda',R)\,d\sigma' \end{aligned}$$

korvaamalla hakasulkeissa oleva lauseke yhtälöllä 8.8.

Näin on saatu *Poissonin* integraali harmonisen kentän V laskemiseksi maapallon pinnalla annetuista arvoista:

$$V_P = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{R\left(r^2-R^2\right)}{\ell^3}V_Q\,d\sigma_Q, \tag{8.9}$$

jossa ℓ on taas suoraviivainen etäisyys laskentapisteen P, jossa V_P lasketaan, ja pallon pinnalla olevan liikkuvan datapisteen Q (V_Q integraalin sisällä) välillä. Tässä yhtälössä pisteille on annettu symbolisia nimiä: laskentapisteen P koordinaatit ovat (ϕ,λ,r), ja datapisteen Q koordinaatit ovat (ϕ',λ',R).

Saman yhtälön kolmas kirjoitusmuoto, joka soveltuu käytettäväksi silloin, kun harmoninen funktio eli kenttä V ei ole varsinaisesti määritelty Maan topografisen pinnan ja merenpinnan välillä, on

$$V = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{R\left(r^2-R^2\right)}{\ell^3}V^*\,d\sigma.$$

Tässä V^* tarkoittaa *harmonisesti alaspäin jatketun* funktion V arvoa. Funktio on siis jatkettu alaspäin koko matkan topografian sisään aina merenpintaan saakka: palloapproksimaatiossa pallon pintaan $r = R$ asti. Tämä funktio, joka on topografian yläpuolella sama kuin V, on harmoninen ja olemassa myös topografian ja merenpinnan välillä. Tällaisen funktion olemassaolon kysymys on ollut kauan klassinen teoreettinen pähkinä. . . .

Yhtälö 8.9 ratkaisee tässä erikoistapauksessa niin sanotun *Dirichletin reuna-arvotehtävän* eli harmonisen funktion löytämisen avaruuden alueelta, kun funktion arvo alueen reunalla on annettuna.

8.5 Painovoima-anomalioita ulkoavaruudessa

Edellisessä osiossa 8.4 johdettu yhtälö 8.9 pätee mielivaltaiselle *harmoniselle* kentälle V, siis kentälle, jolle $\Delta V = 0$. Yhtälö soveltuu kätevästi lausekkeelle $r\Delta g$: painovoima-anomalia kerrottuna geosentrisen säteen kanssa. Sekin on harmoninen kenttä. Näin voimme ilmaista ulkoavaruuden painovoima-anomalian $\Delta g(\phi, \lambda, r)$ R-säteisen vertauspallon painovoima-anomalioiden $\Delta g(\phi', \lambda', R)$ funktioksi. Funktio $r\Delta g$ on harmoninen, koska yhtälön 5.7 mukaan

$$\Delta g = \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n,$$

siis

$$r\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (n-1)\, T_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T'_n,$$

jossa $T'_n(\phi, \lambda) = (n-1)\, T_n(\phi, \lambda)$ on täysin laillinen pintapallofunktio, aivan kuten $T_n(\phi, \lambda)$ itse: riippuvuus säteestä r, kerroin $\left(R/r\right)^{n+1}$, on sama kuin (harmonisen) potentiaalin tapauksessa. Poissonin integraaliyhtälö 8.9 pätee siis funktiolle $r\Delta g$:

$$\left[r\Delta g(\phi, \lambda, r)\right] = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{R\left(r^2 - R^2\right)}{\ell^3} \left[R\Delta g\left(\phi', \lambda', R\right)\right] d\sigma'$$

eli

$$\Delta g(\phi,\lambda,r) = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{R}{r}\frac{R\left(r^2-R^2\right)}{\ell^3}\Delta g\left(\phi',\lambda',R\right)\,d\sigma'. \tag{8.10}$$

Vaihtoehtoinen kirjoitustapa on

$$\Delta g = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{R}{r}\frac{R\left(r^2-R^2\right)}{\ell^3}\Delta g^*\,d\sigma,$$

jossa Δg^* merkitsee painovoima-anomaliaa merenpinnan tasolla, taas laskettuna *jatkamalla* ulkoista kenttää, tässä tapauksessa lauseketta $r\Delta g$, *harmonisesti alaspäin*.

Yhtälöstä 8.10 voidaan poimia ytimen suljettu muoto, joka on dimensioton:

$$K(\ell,r,R) = \frac{R}{r}\frac{R\left(r^2-R^2\right)}{\ell^3},$$

jolloin

$$\Delta g(\phi,\lambda,r) = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma K(r,\psi,R)\,\Delta g\left(\phi',\lambda',R\right)\,d\sigma'.$$

Approksimoimalla $r+R\approx 2r$ saadaan vielä

$$\Delta g(\phi,\lambda,r) \approx \frac{1}{2\pi}\iint_\sigma R^2\frac{r-R}{\ell^3}\Delta g\left(\phi',\lambda',R\right)\,d\sigma'.$$

Vaihtoehtoisesti johdetaan *spektraalimuoto*:

$$\Delta g(\phi,\lambda,r) =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(n-1)\,T_n(\phi,\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\Delta g_n(\phi,\lambda).$$

Asteosuusyhtälö 3.9 antaa funktiot Δg_n:

$$\Delta g_n(\phi,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g(\phi',\lambda',R)\,P_n(\cos\psi)\,d\sigma',$$

joiden avulla

$$\Delta g(\phi,\lambda,r) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} (2n+1) \iint_{\sigma} \Delta g(\phi', \lambda', R)\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma' =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} (2n+1)\, P_n(\cos\psi) \right) \Delta g(\phi', \lambda', R)\, d\sigma' =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} K_{\mathrm{mod}}\, \Delta g(\phi', \lambda', R)\, d\sigma',$$

jossa

$$K_{\mathrm{mod}}(\psi, r, R) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} (2n+1)\, P_n(\cos\psi)$$

on modifioitu Poissonin ytimen spektraaliversio painovoima-anomalioille. Ytimestä on poistettu astelukujen 0 ja 1 osuudet, katso Heiskanen ja Moritz (1967) yhtälö 2-159.

Stokesin ytimeen verrattuna Poissonin ydin putoaa nopeasti nollaan kasvaville etäisyyksille ℓ. Toisin sanoen integraaliyhtälön evaluoinnin saa rajoittaa hyvin paikalliseen alueeseen, esimerkiksi kalottiin, jonka säde on 1°. Katso kuva 8.7. Poissonin ytimen pääasiallinen käyttö on painovoima-anomalioiden *harmoninen jatkaminen* ylös- tai alaspäin, jotta eri korkeuksilla mitatut ja lasketut painovoima-anomaliat saadaan samaan vertaustasoon.

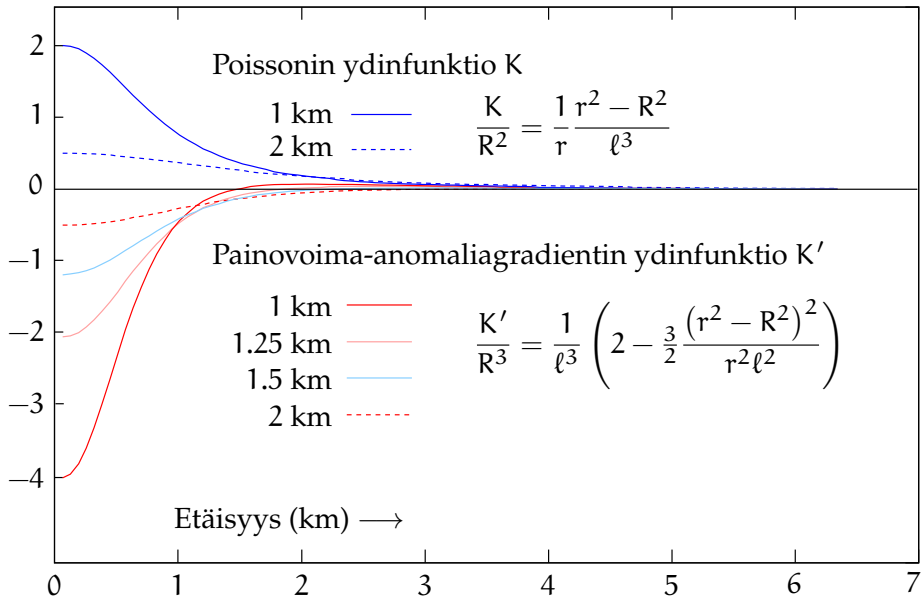
Limiitissä $r \to R$ (laskentatasoksi merenpinta) tämä ydinfunktio menee asymptoottisesti Diracin kaksiulotteiseen δ-funktioon. Tämä on väistämätöntä ytimelle, joka laskee painovoima-anomaliat painovoima-anomalioista.

8.6 Painovoima-anomalian pystygradientti

Differentioidaan yhtälöistä 5.8 ja 5.7 saatu yhtälö:

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \Delta g_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \Delta g}{\partial r} = -\frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (n+2)\, \Delta g_n.$$

Tämä yhtälö on eksakti palloapproksimaatiossa. Sen ydinfunktio on hyvin *lokalisoitu*, toisin sanoen se putoaa hyvin nopeasti nollaan. Myös tässä laskennassa pieni ”kalotti” riittää.



KUVA 8.7. Poissonin ydinfunktio painovoima-anomalioille sekä anomaalisen painovoiman pystygradientin ytimet eri korkeuseroille $r - R$. Näitä ydinfunktioita käytetään pintaintegrointiin karttakoordinaateissa (x, y) kilometreinä.

Δg_n ilmaistaan asteosuusyhtälön 3.9 avulla integraaliksi merenpinnan anomaliakentän yli:

$$\Delta g_n(\phi, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_\sigma \Delta g(\phi', \lambda', R)\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma',$$

siis

$$\frac{\partial \Delta g(\phi, \lambda, r)}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (2n+1)\,(n+2) \iint_\sigma \Delta g(\phi', \lambda', R)\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \\ = \frac{1}{4\pi R} \iint_\sigma K'(\psi, r, R)\, \Delta g(\phi', \lambda', R)\, d\sigma', \quad (8.11)$$

jossa (dimensioton) ydinfunktio on

$$K'(\psi, r, R) = -\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} (2n+1)\,(n+2)\, P_n(\cos\psi).$$

TAULU 8.2. Painovoima-anomalian pystygradientin ydinfunktion K' johtaminen. Käytetty on ℓ:n määritelmä, yhtälö 8.6, sekä Poissonin integraaliyhtälö 8.10.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta g(\phi,\lambda,r)}{\partial r} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\iint_\sigma \left(\frac{R}{r}\cdot R\left(r^2-R^2\right)\cdot \ell^{-3}\right)\Delta g(\phi',\lambda',R)\,d\sigma'\right) = \\
&= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\left(r^2-R^2\right)\cdot\ell^{-3}\right)\Delta g(\phi',\lambda',R)\,d\sigma' = \\
&= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \left(\left(-\frac{r^2-R^2}{r^2}+\frac{2r}{r}\right)\cdot\frac{1}{\ell^3}+\frac{1}{r}\cdot\left(r^2-R^2\right)\cdot\frac{d\left(\ell^2\right)^{-3/2}}{d\left(\ell^2\right)}\cdot\frac{\partial\ell^2}{\partial r}\right)\Delta g(\phi',\lambda',R)\,d\sigma' = \\
&= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \left(\frac{1}{\ell^3}\left(-\frac{r^2-R^2}{r^2}+2\right)+\frac{r^2-R^2}{r}\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\ell^{-5}\right)\cdot(2r-2R\cos\psi)\right)\Delta g(\phi',\lambda',R)\,d\sigma' = \\
&= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \frac{1}{\ell^3}\left(2-\tfrac{3}{2}\frac{r^2-R^2}{r}\frac{1}{\ell^2}\frac{\ell^2+r^2-R^2}{r}\right)\Delta g(\phi',\lambda',R)\,d\sigma' - \\
&\qquad -\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{R}{r}\frac{R\left(r^2-R^2\right)}{\ell^3}\Delta g(\phi',\lambda',R)\,d\sigma' = \\
&= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \frac{1}{\ell^3}\left(2-\tfrac{3}{2}\frac{r^2-R^2}{r^2}-\tfrac{3}{2}\frac{\left(r^2-R^2\right)\left(r^2-R^2\right)}{r^2\ell^2}\right)\Delta g(\phi',\lambda',R)\,d\sigma' - \frac{1}{r}\Delta g(\phi,\lambda,r) = \\
&= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \frac{1}{\ell^3}\left(2-\tfrac{3}{2}\frac{\left(r^2-R^2\right)^2}{r^2\ell^2}\right)\Delta g(\phi',\lambda',R)\,d\sigma' - \left(\frac{1}{r}+\frac{3}{2r}\right)\Delta g(\phi,\lambda,r) = \\
&= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \frac{1}{\ell^3}\left[2-\tfrac{3}{2}\frac{\left(r^2-R^2\right)^2}{r^2\ell^2}\right]\Delta g(\phi',\lambda',R)\,d\sigma' - \frac{5}{2r}\Delta g(\phi,\lambda,r). \qquad (8.12)
\end{aligned}
$$

Vaihtoehtoisesti johdetaan suljettu lauseke. Lähdetään Poissonin yhtälöstä 8.10 painovoima-anomalioille ja differentioidaan r:n suhteen. Katso taulu 8.2.

Tuloksessa viimeinen termi on pieni verrattuna edelliseen termiin: alle tuhannesosa.

Hakasulkeissa olevat termit vaativat omaa tarkastelua. Paikallisella alueella $\ell \approx r - R$ termit ovat samaa suuruusluokkaa; toinen termi kuitenkin menee nopeasti nollaan kun $\ell \gg r - R$. Kuitenkin kerroin

$1/\ell^3$ tekee näin vielä nopeammin.

Kirjoita

$$\frac{\partial \Delta g(\phi,\lambda,r)}{\partial r} = \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \kappa \frac{\Delta g(\phi',\lambda',R)}{\ell^3}\,d\sigma' - \frac{5}{2r}\Delta g(\phi,\lambda,r), \qquad (8.13)$$

määritelmällä

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} 2 - \tfrac{3}{2}\frac{\left(r^2-R^2\right)^2}{r^2\ell^2}. \qquad (8.14)$$

Kuva 8.7 näyttää, että Poissonin ydin K kapenee suhteessa $r-R$ ja sen huippu nousee suhteessa $(r-R)^{-2}$. Koska integraali Poissonin ytimen yli on kaksiulotteinen ja skaalautuu leveyden neliön mukaan, se pysyy vakiona kun $r \to R$, ja itse asiassa ydin suppenee Diracin kaksiulotteiseen δ-funktioon.

Painovoima-anomalian pystygradientin ydin K' käyttäytyy ikävämmin: se kapenee samalla tavalla, mutta kuten kuva 8.7 näyttää, sen huippu nousee suhteessa $(r-R)^{-3}$. Siksi sen pallointegraali hajaantuu suhteessa $(r-R)^{-1}$.

Regularisointi onnistuu havaitsemalla, että globaalisti vakiolla painovoima-anomaliakentällä

$$\widetilde{\Delta g}_0(\phi,\lambda,r) = \widetilde{\Delta g}_0(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \Delta g_0$$

on gradientti

$$\frac{\partial \widetilde{\Delta g}_0(\phi,\lambda,r)}{\partial r} = -\frac{2}{r}\widetilde{\Delta g}_0(\phi,\lambda,r), \qquad (8.15)$$

mutta myös, kuten yhtälö 8.13:

$$\frac{\partial \widetilde{\Delta g}_0(\phi,\lambda,r)}{\partial r} = \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \kappa \frac{\widetilde{\Delta g}_0(\phi',\lambda',R)}{\ell^3}\,d\sigma' - \frac{5}{2r}\widetilde{\Delta g}_0(\phi,\lambda,r). \qquad (8.16)$$

Vähennetään yhtälö 8.16 yhtälöstä 8.13 ja sijoita yhtälö 8.15, tuloksena

$$\frac{\partial \Delta g(\phi,\lambda,r)}{\partial r} = \frac{\partial\left(\Delta g(\phi,\lambda,r) - \widetilde{\Delta g}_0(\phi,\lambda,r)\right)}{\partial r} + \frac{\partial \widetilde{\Delta g}_0(\phi,\lambda,r)}{\partial r} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \kappa \frac{\Delta g(\phi',\lambda',R) - \widetilde{\Delta g}_0(\phi',\lambda',R)}{\ell^3}\,d\sigma' - \\
&\qquad - \frac{5}{2r}\left(\Delta g(\phi,\lambda,r) - \widetilde{\Delta g}_0(\phi,\lambda,r)\right) - \frac{2}{r}\widetilde{\Delta g}_0(\phi,\lambda,r) = \\
&= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \kappa \frac{\Delta g(\phi',\lambda',R) - \Delta g_0}{\ell^3}\,d\sigma' - \\
&\qquad - \frac{5}{2r}\left(\Delta g(\phi,\lambda,r) - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \Delta g_0\right) - \frac{2}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \Delta g_0 .
\end{aligned}
$$

Valitaan vakio $\Delta g_0 \overset{\text{def}}{=} \Delta g(\phi,\lambda,R)$, laskentapisteen merenpinnan tason anomalia:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta g(\phi,\lambda,r)}{\partial r} &= \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \kappa \frac{\Delta g(\phi',\lambda',R) - \Delta g(\phi,\lambda,R)}{\ell^3}\,d\sigma' - \\
&- \frac{5}{2r}\left(\Delta g(\phi,\lambda,r) - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \Delta g(\phi,\lambda,R)\right) - \frac{2}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \Delta g(\phi,\lambda,R) \approx \\
&\approx \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma \kappa \frac{\Delta g(\phi',\lambda',R) - \Delta g(\phi,\lambda,R)}{\ell^3}\,d\sigma' - \frac{2}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \Delta g(\phi,\lambda,R).
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

Jos $\kappa = 2$, tämä vastaisi Heiskanen ja Moritz (1967) yhtälöä 2-217, kuitenkin laskentapisteelle tasolla $r \neq R$. Hyvin käyttäytyvälle painovoima-anomaliakentälle

$$
\Delta g(\phi',\lambda',R) - \Delta g(\phi,\lambda,R) \overset{\text{nätisti}}{\to} 0 \qquad \text{kun } (\phi',\lambda') \to (\phi,\lambda),
$$

ja integraali 8.17 suppenee kun $r \to R$. Esitamme ilman todistusta, että tapauksessa $r \to R$ suppeneminen tapahtuu samaan raja-arvoon kuin Heiskasen ja Moritzin yhtälö, toisin sanoen lausekkeen 8.14 toinen termi katoaa ja tehollisesti $\kappa \to 2$.

Jos integrointi suoritetaan maapallon pinnan (säde R) eikä yksikköpallon σ' (säde 1) yli — tai samanarvoisesti paikallisissa metrisissä koordinaateissa (x, y) — voidaan tehdä sijoitus $dS = R^2\, d\sigma$, jossa dS on pinta-alkio R-säteisellä pallolla. Tämä poistaa kertoimen R^2 integraaliyhtälöistä, kuten 8.10, 8.12 ja 8.17.

Molodenskin menetelmässä tämä tai vastaavat yhtälöt voidaan evaluoida nopeasti hyvin paikallisesta painovoimadatasta.

Heiskasen ja Moritzin (1967) antama suljettu lauseke 2-217 on anomaalinen pystygradientti evaluoituna merenpinnalla (vertauspallolla). Yhtälöissämme 8.17 ja 8.11 tarvitaan myös painovoima-anomalioita merenpinnalla. Saatavilla ovat kuitenkin vain anomaliat *topografian pinnalla*. Käytännössä voi menetellä iteratiivisesti aluksi olettamalla, että topografian tasolla mitatut anomalia-arvot ovatkin merenpinnan tasolla:

$$\Delta g^{(0)}(\phi,\lambda,R) \approx \Delta g(\phi,\lambda,r) = \Delta g(\phi,\lambda,R+H),$$

jossa $H = H(\phi,\lambda)$ on pisteen (ϕ,λ) topografian korkeus. Kun karkea anomaalinen gradientti on laskettu esimerkiksi yhtälöllä 8.17, voidaan suorittaa oikea *reduktio merenpintaan* lineaarisessa approksimaatiossa:

$$\Delta g^{(1)}(\phi,\lambda,R) \approx \Delta g(\phi,\lambda,r) - \left.\frac{\partial \Delta g^{(0)}(\phi,\lambda,z)}{\partial z}\right|_{z=r} H.$$

Tätä voidaan iteroida.

8.7 Painovoimareduktiot geoidimäärityksessä

8.7.1 Klassiset menetelmät

Stokesin yhtälön käyttö gravimetriseen geoidilaskentaan edellyttää, että kaikki massat ovat *geoidin sisällä* — ja ulkoinen kenttä on siis harmoninen. Siksi topografiset massat siirretään laskennallisesti geoidin sisään tavalla, jonka tulee spesifioida. Olemassa olevat klassiset menetelmät ovat

- Helmertin (toinen) kondensaatiomenetelmä, osio 6.5: Massat siirretään suoraan alaspäin geoidille massatiheyskerrokseksi. Tämän jälkeen mitatun painovoiman siirtäminen alaspäin topografian pinnalta merenpintaan on helppoa. Epäsuora vaikutus (massasiirron vaikutus geoidiin, entistämisvaihe) on pieni.
- Isostaattinen reduktio, jossa poistetaan laskennallisesti sekä topografian että sen isostaattisen kompensaation eli vuoristojen

merenpinnan alapuolella olevien ”juurten” vaikutus. Tämän menetelmän epäsuora vaikutus on suurempi. Katso osio 6.7 ja yhtälö 6.8.

- Bouguer-reduktio, osio 6.2: topografisten massojen vaikutus poistetaan raa'asti havaitusta painovoimadatasta ja palautetaan geoidilaskun jälkeen yhtä raa'asti laskettuun tulokseen.

  Bouguer-anomaliat sisältävät vuoristossa suurta negatiivista systematiikkaa, ja sen takia Bouguer-reduktion epäsuora vaikutus on ylen suuri ja ulottuu laajalle alueelle. Tästä syystä Bouguer-reduktiota käytetään harvemmin.

8.7.2 *Alaspäin jatkaminen lineaarisessa approksimaatiossa*

Yllä kuvattu lähestymistapa voidaan *linearisoida* Molodenskin mukaan:

$$T = \underbrace{\frac{R}{4\pi}\iint_\sigma \left(\overbrace{\Delta g - \left.\frac{\partial \Delta g}{\partial z}\right|_{z=H'} H'}^{\Delta g^*(\phi',\lambda')} \right) S(\psi)\, d\sigma'}_{T^*(\phi,\lambda)} + \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=H} H. \qquad (8.18)$$

Siis ensin redukoidaan maaston pinnalla mitattu ja laskettu Δg merenpintaan käyttämällä painovoiman anomaalista pystygradienttia ja mittauspisteen korkeutta H'. Tuloksena

$$\Delta g^*(\phi',\lambda') = \Delta g(\phi',\lambda',H') - \left.\frac{\partial \Delta g(\phi',\lambda',z)}{\partial z}\right|_{z=H'} H'.$$

Sen jälkeen sovelletaan merenpinnalla Stokesin yhtälöä ja saadaan merenpinnan häiriöpotentiaali T^*. Tämän jälkeen häiriöpotentiaali ”antiredukoidaan” takaisin maaston tasoon, evaluointipisteeseen, yhtälöllä

$$T(\phi,\lambda,H) = T^*(\phi,\lambda) + \left.\frac{\partial T(\phi,\lambda,z)}{\partial z}\right|_{z=H} H.$$

Näissä yhtälöissä koko ajan T, sen pystyderivaatta $\frac{\partial}{\partial H}T$, Δg ja *sen* pystyderivaatta $\frac{\partial}{\partial H}\Delta g$ kuuluvat aina *ulkoiseen* harmoniseen painovoimakenttään. Niiden välinen yhteys on fysikaalisen geodesian perusyhtälö 5.5, pallogeometriassa

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T, \tag{5.6}$$

jossa $r = R + H$. Tässä tarvitaan ensin häiriöpotentiaalin pystyderivaatta. Se on helppoa:

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \frac{\partial T}{\partial r} = -\Delta g - \frac{2}{r}T,$$

jossa oikean puolen ensimmäinen termi on suoraan mitattu ja toisen termin T saadaan iteratiivisesti ratkaisuprosessin päätuotteena.

Painovoima-anomalioiden pystygradientin eli painovoiman *anomaalisen pystygradientin* laskeminen on vaikeampaa. Tehtävään tarjoutuu osiossa 8.6 esitetyt laskentavaihtoehdot. Käytännön laskennan onneksi integraaliyhtälöiden ytimet ovat hyvin lokalisoituja, eikä painovoima-anomalioita tarvita kovin laajalta alueelta.

8.7.3 Laskentapiste vertaustasoksi

Yllä olevassa yhtälössä 8.18 *vertaustasona* on käytetty merenpintaa. Tämä on mielivaltaista: voimme käyttää mitä tahansa vertaustasoa, esimerkiksi H_0, jolloin

$$T = \frac{R + H_0}{4\pi} \iint_\sigma \left(\Delta g - \left.\frac{\partial \Delta g}{\partial z}\right|_{z=H'} (H' - H_0) \right) S(\psi)\, d\sigma' + \\ + \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=H} (H - H_0)\,.$$

Mikäli nyt valitaan $H_0 = H$, viimeinen termi putoaa pois ja saadaan

$$T = \frac{R + H}{4\pi} \iint_\sigma \left(\Delta g - \left.\frac{\partial \Delta g}{\partial z}\right|_{z=H'} (H' - H) \right) S(\psi)\, d\sigma'.$$

Tässä tapauksessa reduktio tapahtuu Δg-mittauspisteen korkeudesta T-laskentapisteen korkeuteen. Tämä on luultavasti lyhyempi matka kuin merenpinnasta laskentakorkeuteen, varsinkin laskentapisteen

välittömässä läheisyydessä. Tämä merkitsee, että *linearisointivirhe jää*
[1] *pienemmäksi*[1]. Huonoa toisaalta on, että suluissa oleva lauseke on nyt jokaiselle evaluointipisteelle erilainen. Tämä mutkistaa FFT-pohjaisen laskentatekniikan käyttöä, josta lisää myöhemmin.

Tässä puhuttiin koko ajan *häiriöpotentiaalin* $T(\phi, \lambda, H)$ määrittämisestä, mikä on käytännössä sama asia kuin *korkeusanomalian*

$$\zeta(\phi, \lambda, H) = \frac{T(\phi, \lambda, H)}{\overline{\gamma_{Hh}}} \approx \frac{T(\phi, \lambda, H)}{\gamma\left(\phi, \frac{1}{2}(H + h)\right)}$$

[2] määrittäminen, yhtälö 7.1. Tässä γ on pisteen leveysasteelle[2] ϕ ja topografian korkeudelle $\frac{1}{2}(H + h) \approx H + \frac{1}{2}\zeta$ laskettu normaalipainovoima.

8.7.4 *Jäännösmaastomallinnusmenetelmä (*residual terrain modelling*)*

Kuvittele, että topografiset massat siirretään käsitteellisesti geoidin alapuolelle tavalla, joka *ei muuta ulkopuolista kenttää*. Tämä on olennaisesti sama asia, kuin jos määritettäisiin harmonisesti alaspäin jatketun kentän geoidi.

Ongelmana tässä on, että tällaista merenpinnan alaista massajakaumaa, joka tuottaisi harmonisesti alaspäin jatkettua ulkoista potentiaalia topografian pinnan ja geoidin välillä, ei tarkasti ottaen aina ole olemassakaan. Fysikaalisesti epärealistista olisi myös, jos sopiva massajakauma sisältäisi hyvin suuria positiivisia ja negatiivisia massoja lähekkäin.

Sanotaan, että ongelma on huonosti asetettu (”*ill posed*”). Tällaisissa tapauksissa käytetään *regularisointia*: ulkopuolista kenttää muutetaan, mutta mahdollisimman vähän, niin että siitä tulee järkevä kenttä, joka

[1] Linearisointivirhe voitaisiin edelleen virittää pienemmäksi valitsemalla pystygradientin evaluointitasoksi $z = \frac{1}{2}(H' + H)$.

[2] Oikeassa laskennassa laskettaisiin $\overline{\gamma_{Hh}}$ käyttäen todellista geodeettista leveysastetta φ ja yhtälöä 4.10. Korkeuden $\frac{1}{2}(H + h)$ on oltava oikein muutaman metrin sisällä millimetritarkkuuden saavuttamiseksi korkeusanomaliassa ζ.

voidaan harmonisesti jatkaa topografian sisään. Silloin on olemassa myös järkevä geoidin sisäinen massajakauma tämän kentän lähteenä.

Aluksi voidaan esimerkiksi suodattaa Maan pinnan painovoimakentästä pois topografian aiheuttamat lyhytaaltoiset osat korkean erotuskyvyn digitaalisen maastomallin avulla. Tätä kutsutaan RTM-menetelmäksi (jäännösmaastomallinnus, *residual terrain modelling*).

Tässä menetelmässä ei oikeasti siirretä kaikkia maaston massoja geoidin alapuolelle. Sen sijaan käytämme puskutraktorin kaltaista menetelmää (kuva 8.8), jolla joko poistamme tai lisäämme massoja topografian pinnan lähelle, tavalla, jolla saavutetaan korvaava sileä topografia, joka sisältää vain pitkät aallonpituudet. Korvaavan topografian ulkoinen kenttä ei sisällä, toisin kuin alkuperäisen topografian kenttä, kaikkein lyhyimpiä aallonpituuksia. Siksi sitä voidaan jatkaa riittävällä tarkkuudella alaspäin geoidin tasoon.

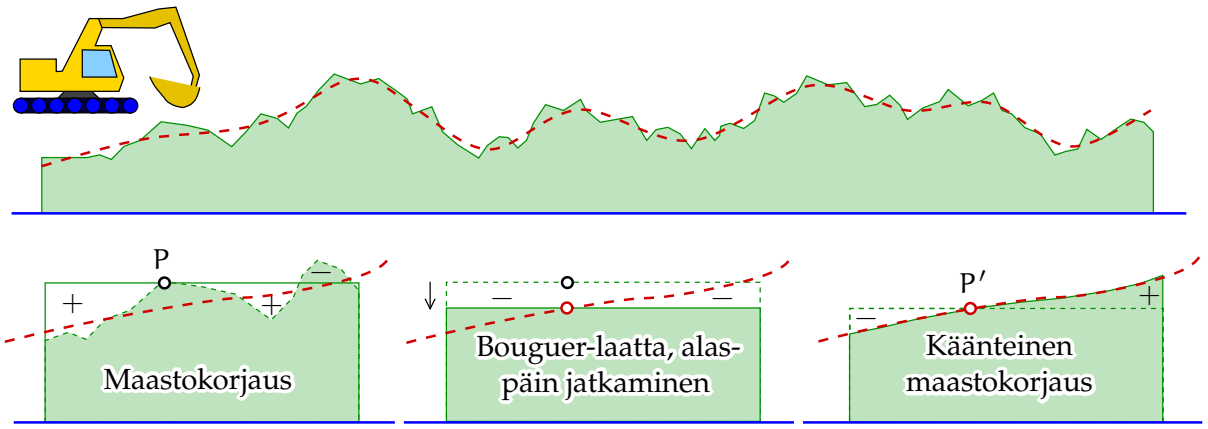
Ensin poistetaan laskennallisesti topografiasta *vain* lyhyet aallonpituudet (alle 30 km) siirtämällä huippujen massat laaksoihin. Toisin sanoen suoritetaan alipäästösuodatus. Poiston vaikutus mittauksista lasketuihin ilma-anomalioihin Δg lasketaan ja otetaan huomioon: poistamiseli *remove*-vaihe.

Tarkemmin:

1) Jokaisessa pisteessä P sovelletaan painovoima-anomalioihin *maastokorjaus* osiossa 6.3 kuvatulla tavalla.
2) Seuraavaksi poistetaan Bouguer-laatan vetovoima. Laatan paksuus on $H - H_{RTM}$, jossa H on maaston korkeus pisteessä P ja H_{RTM} silotetun eli alipäästösuodatetun maaston korkeus pisteen P vaakasijainnilla. Vaikutus on yhtälön 6.1 mukaan

$$2\pi G\rho\,(H - H_{RTM})\,,$$

   jossa ρ on laskennassa oletettu kallion tiheysarvo.
3) Tämän jälkeen painovoima-anomalian *sijainti* siirretään (alas- tai ylöspäin!) — ”alaspäin jatkaminen” — alkuperäisestä maaston



Kuva 8.8. Jäännösmaastomallinnus eli *residual terrain modelling* (RTM). Maastosta poistetaan laskennallisesti lyhyet aallonpituudet eli poikkeamat punaisesta katkoviivasta: sen yläpuolella nousevat maaston massat poistetaan, alapuolelle jäävät laaksot täytetään. Reduktion jälkeen punainen katkoviiva, joka on sileämpi kuin alkuperäinen maasto, on maaston uusi pinta. Uuden massajakauman ulkoinen potentiaali eroaa vain vähän alkuperäisestä, mutta sitä voidaan harmonisesti jatkaa alaspäin merenpintaan asti.
Vasemmalla pisteen P maastokorjaus, keskellä Bouguer-laatta-reduktio ja gradienttireduktio sileän maaston pisteen P′ tasoon. Oikealla pisteen P′ käänteinen maastokorjaus.

tasosta H uuden sileän maaston pinnan tasoon H_{RTM}. Tähän tarkoitukseen voi käyttää ilma-anomalian pystygradientin yhtälöä 8.17.

Jos tämä anomaalinen pystygradientti jätetään huomioimatta, kuten usein tehdään, maastokorjatun ulkoisen kentän painovoiman pystygradientti oletetaan olevan normaalipainovoiman pystygradientti — osion 5.4 mukaan $-0{,}3\ ^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$ — ja tämä toimenpide ei aiheuta muutosta painovoima-anomaliaan.

4) Tarkasti ottaen seuraavaksi pitäisi vielä suorittaa käänteinen maastokorjaus, jotta painovoima-anomaliat olisivat realistisia uudelle korvaavalle topografialle. Usein tämäkin askel jätetään pois, koska

efekti on pieni.

5) Sen jälkeen ulkoisen kentän harmoninen alaspäin jatkaminen onnistuu: ulkopuolisessa kentässä on jäljellä lähinnä vain pitkät aallonpituudet.

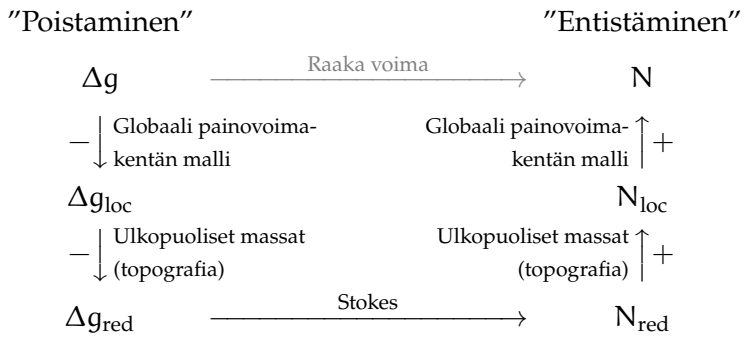
Koska RTM-menetelmän massojen siirrot ovat niin pieniä, siirtoetäisyydet niin lyhyitä ja siirtokuviot niin lyhytaaltoisia, on *epäsuora vaikutus* eli entistämisvaihe niin pieni, että sen voi usein jättää huomioimatta. Kyseessä on siis massasiirtojen aiheuttama geopotentiaalin muutos, jonka vaikutus on sovellettava käänteisenä lopullisen geopotentiaali- tai geoidiratkaisun saavuttamiseksi. Samasta syystä myös topografian tuntemattoman tiheyden vaikutus jää pieneksi.

Lopuksi huomautetaan, että koska RTM-menetelmä poistaa lyhytaaltoisen topografian vaikutuksen, menetelmä soveltuu myös painovoima-anomalioiden *interpolointimenetelmäksi*. Katso Märdla (2017).

8.8 Poistamis-entistämismenetelmä

Kaikki nykyiset geoidimääritysmenetelmät ovat tavalla tai toisella poistamis-entistamis- eli *remove-restore*-menetelmiä, jopa usealla eri tavalla.

1) Havaituista painovoima-arvoista poistetaan ensin globaalin painovoimakenttämallin vaikutus. Malli on yleensä annettu pallofunktiokehitelmänä. Näin saadaan *jäännöspainovoimakenttä*,
   - jonka numeeriset arvot ovat pienempiä ja helpompia käsitellä
   - joka on *paikallisempi*: pitkät ”aallonpituudet”, suurten alueiden yli ulottuvat kuviot, on jäännöskentästä poistettu, ja vain paikalliset yksityiskohdat ovat jäljellä.
2) Havaitusta painovoimasta poistetaan kaikkien *geoidin ulkopuolella* olevien massojen — käytännössä topografian — vaikutukset. Tämän tarkoituksena on saada jäännöspainovoimakenttä,
   - johon Stokesin yhtälöä voidaan käyttää, koska reunapinnan



KUVA 8.9. Poistamis-entistamis- eli *remove-restore*-menetelmä kommutoivana kaaviona.

ulkopuolella ei ole massoja jäljellä

- josta erityisesti maaston aiheuttamat painovoimakentän lyhyimmät "aallonpituudet" eli yksityiskohdat, joiden suuruusluokka on muutama kilometri, ovat poissa. Tämän jälkeen painovoima-arvojen *prediktio* harvoista mittausarvoista sujuu paremmin.

Joitakin painovoiman reduktiomenetelmiä, jotka poistavat laskennallisesti ulkopuolisten massojen painovoimavaikutuksen ja joilla on hyviä prediktio-ominaisuuksia, esitettiin jo alaosiossa 8.7.1: Bouguer-reduktio ja isostaattinen reduktio. Mainitaan myös Helmertin kondensaatio vaikka sen prediktio-ominaisuudet ovat heikompia.

Voimme havainnollistaa poistamis-entistamis- eli *remove-restore*-menetelmää *kommutoivalla kaaviolla* 8.9. Tässä kaaviossa mustat nuolet teksteineen tarkoittavat laskutoimituksia, jotka ovat suositeltavia, koska ne ovat helppoja ja tarkkoja. Harmaa nuoli teksteineen viittaa suoraan laskentaan, joka on puolestaan laskentaintensiivistä ja numeerisesti hankalaa.

8.9 Ydinfunktion modifikaatio

Yllä kuvatussa poistamis-entistamismenetelmässä redukoitujen painovoima-anomalioiden Δg_{red} ja geoidin korkeuksien N_{red} käsittely tapahtuu tavallisesti pienen alueen sisällä. Esimerkiksi FFT-menetelmää käytettäessä on laskenta-alue usein suorakulmainen alue karttaprojektiotasossa piirrettynä reilusti sen maan tai alueen ympärille, jonka geoidimalli ollaan laskemassa.

Lisäksi jos lasketaan geoidimalli suoraan Stokesin yhtälöä integroimalla, evaluoidaan tämä integraali — sen jälkeen kun globaalin mallin vaikutus on poistettu annetusta painovoima-aineistosta — vain rajatun alueen eli *kalotin* yli: lasketaan yhtälö

$$N_{red} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_0} S(\psi)\, \Delta g_{red}(\phi', \lambda')\, d\sigma', \tag{8.19}$$

jossa σ_0 on yksikköpallon kalotti, jonka säde on vaikkapa ψ_0.

Oletus tämän takana on, että Δg_{red} kalotin ulkopuolella on sekä pieni että nopeasti vaihteleva, koska pidemmät aallonpituudet ovat siitä poistuneet globaalin mallin reduktion mukaan. Tämä saattaa kuitenkin olla vaarallinen olettamus.

Kirjoitetaan yhtälön 8.19 molemmat integrandin osat spektraalimuotoon:

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)$$

ja

$$\Delta g_{red}(\phi', \lambda') = \sum_{n=L+1}^{\infty} \Delta g_n(\phi', \lambda'),$$

olettaen, että L on aineistosta vähennetyn globaalin pallofunktiokehitelmän eli painovoimamallin suurin mukana oleva asteluku — ja että malli on tarkka siihen astelukuun saakka.

Koska Δg_n on pintapallofunktioiden

$$Y_{nm}(\psi, \alpha) = \begin{cases} P_{nm}(\cos\psi)\cos m\alpha & \text{jos } m = 0, \ldots, n, \\ P_{n|m|}(\cos\psi)\sin|m|\,\alpha & \text{jos } m = -n, \ldots, -1, \end{cases}$$

eräs lineaariyhdistelmä, vaikkapa tällä tavoin, vertaile yhtälö 3.13:

$$\Delta g_n(\psi,\alpha) = \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{m=-n}^{n} \Delta g_{nm} Y_{nm}(\psi,\alpha),$$

ja myös

$$P_n(\cos\psi) = P_{n0}(\cos\psi)\cos(0\cdot\alpha) = Y_{n0}(\psi,\alpha),$$

seuraa Y-funktioiden ortogonaalisuuden perusteella, että

$$\iint_\sigma P_n(\cos\psi)\,\Delta g_{n'}(\phi',\lambda')\,d\sigma' = 0 \qquad \text{jos } n \neq n'.$$

Nyt voi kirjoittaa (termit $n \leqslant L$ putoavat pois):

$$\begin{aligned}
&\iint_\sigma S(\psi)\,\Delta g_{\text{red}}(\phi',\lambda')\,d\sigma' = \\
&\quad = \iint_\sigma \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)\right)\left(\sum_{n=L+1}^{\infty} \Delta g_n(\phi',\lambda')\right) d\sigma' = \\
&\quad = \iint_\sigma \left(\sum_{n=L+1}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)\right)\left(\sum_{n=L+1}^{\infty} \Delta g_n(\phi',\lambda')\right) d\sigma' = \\
&\qquad\qquad = \iint_\sigma S^L(\psi)\,\Delta g_{\text{red}}(\phi',\lambda')\,d\sigma',
\end{aligned}$$

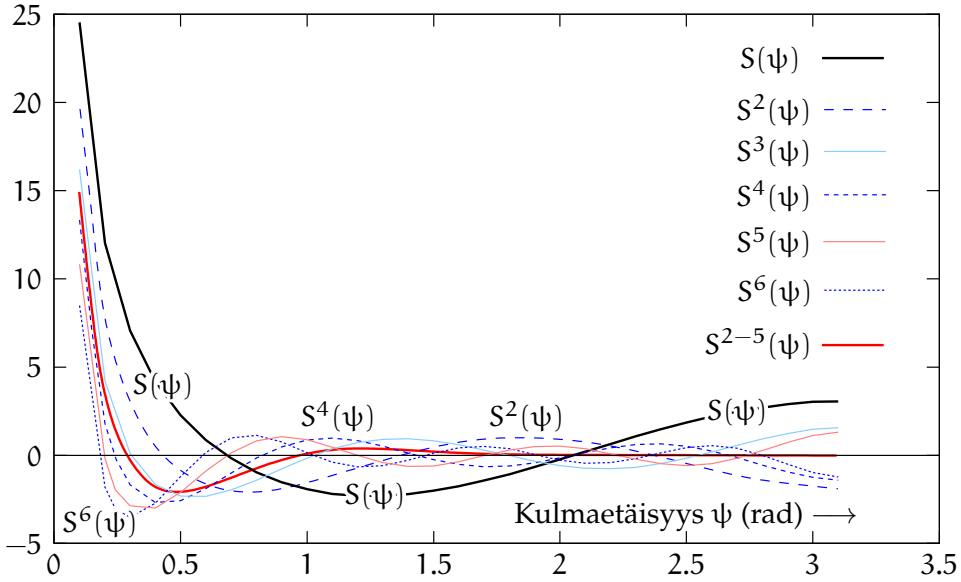
jossa

$$S^L(\psi) = \sum_{n=L+1}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)$$

on niin sanottu *modifioitu Stokesin ydinfunktio*. Astelukua L kutsutaan *modifiointiasteeksi*. Laskenta-alueen σ_0 koko valitaan yhteensopivaksi tämän kanssa.

Tässä kuvattua modifiointimenetelmää, S-funktion Legendren polynomikehitelmän rajoittaminen korkeampiin astelukuihin, kutsutaan *Wong-Gore*[3]*-modifikaatioksi* (Wong ja Gore, 1969). Uuden ydinfunktion S^L toivottava ominaisuus on, että se olisi ainakin alkuperäisfunktioon S

[3] L. Wong ja R. C. Gore työskentelivät Aerospace Corporationilla, joka on Kaliforniassa sijaitseva avaruusteknologian tutkimuslaitos. Wikipedia, The Aerospace Corporation.



KUVA 8.10. Modifioituja Stokesin ydinfunktioita. Huomaa, miten ytimen arvot korkeammilla modifiointiasteen L arvoilla lähestyvät nollaa paikallisen alueen ulkopuolella. Punainen käyrä on modifioitu ”pehmeästi” modifiointiasteilla 2–5 kosini-ikkunan avulla.

verrattuna *pieni* kalottialueen σ_0 ulkopuolella. Siinä tapauksessa integraalin rajoittaminen kalottiin koko yksikköpallon sijasta (yhtälö 8.19) ei tee suurta vahinkoa. Selvää on, että S^L on paljon kapeampi kuin S, ovathan siinä edustettuina vain korkeammat harmoniset asteluvut. Tätä voidaan verifioida piirtämällä molempien käyrien grafiikka (kuva 8.10). Käyrä ei mene kuitenkaan täysin nollaan kalotin ulkopuolella, vaan aaltoilee jonkin verran.

Syy aaltoiluun on, että modifioidun ydinfunktion katkaisu taajuus- eli astelukudomeenissa on hyvin äkkinäinen. Tällaisen terävän reunan muuntaminen avaruus- ja taajuusdomeenien välillä tuottaa aina värähtelyä, joka liittyy niin sanottuun *Gibbsin*[4] *ilmiöön*.

[4] Josiah Willard Gibbs (1839–1903) oli amerikkalainen fyysikko, kemisti, termodynaamikko, matemaatikko ja insinööri.

Kuvassa 8.10 on piiirretty punaisena Stokesin ydin, joka on modifioitu ”pehmeästi”: ytimen termit asteluvuilla $5 \to 2$ on pakotettu vähitellen nollaan sen sijaan että ne poistettaisiin kokonaan. Kuten näkyy, käyrä menee nollaan jopa siistimmin kuin ”terävästi” modifioidut ytimet.

8.10 Edistyneitä ydinfunktion modifikaatioita

Kirjallisuudesta löytyy muitakin ydinfunktion modifiointikeinoja. Niiden yleinen muoto on

$$S^L(\psi) = \sum_{n=L+1}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) + \sum_{n=2}^{L} (1 - s_n) \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) = \\ = S(\psi) - \sum_{n=2}^{L} s_n \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi), \quad (8.20)$$

5 jossa *modifiointikertoimet* s_n, $n = 2, \ldots, L$ voidaan valita[5]. Ne valitaan ytimen S^L arvojen minimoimiseksi kalotin ulkopuolisella alueella $\sigma - \sigma_0$. Tällä tavoin voi eliminoida yhtälön 8.19 katkaisuvirheen ja Wong-Gore-modifikaation aaltoilut lähes kokonaan. Molodenski ym. (1962) kehitti jo varhain sellaisen menetelmän. Katso myös Bucha ym. (2019).

Yllä olevassa yhtälössä 8.20 haluamme minimoida funktiota

$$S^L(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^{L} s_n \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)$$

paikallisen kalotin ulkopuolisen alueen $\sigma - \sigma_0$ yli. Kerrotaan tämä lauseke jokaisen Legendren polynomin $P_n(\cos\psi)$, $n = 2, \ldots, L$ kanssa vuorollaan, integroidaan paikallisen kalotin ulkopuolisen alueen $\sigma - \sigma_0$ yli ja vaaditaan, että tulos häviää:\{

$$\int_{\sigma-\sigma_0} S(\psi)\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma -$$

[5] Valinta $s_n = 1$ antaa taas yksinkertaisesti (Wong-Gore-menetelmällä) modifioidun Stokesin ytimen, josta matalat asteosuudet on kokonaan poistettu.

$$-\sum_{n'=2}^{L} s_{n'} \frac{2n'+1}{n'-1} \int_{\sigma-\sigma_0} P_{n'}(\cos\psi)\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma = 0,$$

$$n = 2, \ldots, L,$$

$L-1$ yhtälön ryhmä $L-1$ tuntemattomassa $s_{n'}$:

$$\sum_{n'=2}^{L} \frac{2n'+1}{n'-1} e_{nn'}\, s_{n'} = Q_n,$$

jossa

$$Q_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-\sigma_0} S(\psi)\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi)\, P_n(\cos\psi)\sin\psi\, d\psi$$

ja

$$e_{nn'} = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-\sigma_0} P_n(\cos\psi)\, P_{n'}(\cos\psi)\, d\sigma = \\ = \int_{\psi_0}^{\pi} P_n(\cos\psi)\, P_{n'}(\cos\psi)\sin\psi\, d\psi.$$

Kertoimet Q_n tunnetaan Molodenskin katkaisukertoimina, $e_{nn'}$ Paulin (1973) kertoimina.

Tästä voimme ratkaista s_n jokaiselle asteluvulle n arvojen 2 ja L välillä.

Tämä ratkaisu nollaa lausekkeet

$$\left\langle S^L \cdot P_n \right\rangle_{\sigma-\sigma_0} = \int_{\sigma-\sigma_0} S^L(\psi)\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma, \tag{8.21}$$

myös kaikille n-arvoille 2:n ja L:n välillä.

Lausekkeet 8.21 voidaan tulkita *skalaarituloina* funktioiden S^L ja P_n välillä. Samalla tavalla matriisin $e_{nn'}$ alkiot sisältävät funktioiden P_n ja $P_{n'}$ väliset skalaaritulot. Nämä skalaaritulot eivät häviä: kun integroidaan alueen $\sigma - \sigma_0$ eikä koko pallon σ yli, Legendren polynomit eivät ole keskenään ortogonaaleja. Siksi e on täysi matriisi eikä päälävistäjämatriisi, kuten silloin kun integroidaan koko yksikköpallon σ yli.

Legendren polynomit *ovat* keskenään *riippumattomia* integrointialueella $\sigma - \sigma_0$ ja virittävät yhdessä $L-1$ -ulotteisen lineaarisen vektoriavaruuden.

ψ_0-säteisen kalotin σ_0 ulkopuolella Stokesin ydinfunktio $S(\psi)$ on visuaalisen tarkastelun perusteella "sileä". Riippuen tietysti kalotin säteen ψ_0 ja modifiointiasteen L arvoista se voi olla niin sileä, että se ei sisällä mitään merkittävää osuutta asteluvuista, jotka ovat modifiointiastetta L suurempia. Jos tämä pätee funktiolle S, se pätee myös funktiolle S^L. Tämä merkitsee, että S^L on polynomien P_n, $n = 2, \ldots, L$ lineaariyhdistelmä eli niiden virittämän vektoriavaruuden alkio. Mutta jos näin on, ja skalaaritulot 8.21 jokaisen kantavektorin kanssa häviävät, on ytimen S^L *oltava nollafunktio* alueella $\sigma - \sigma_0$.

Katso myös Featherstone (2003).

Liitteen A osio A.1 selittää lisää lineaarisista vektoriavaruuksista ja vektoreiden välisestä skalaaritulosta.

8.11 Blokki-integrointi

Gravimetrisen geoidin numeerisessa laskennassa käytetään anomalioiden *keskiarvoja* laskettuina standardikokoisille soluille eli *blokeille*, yleensä $5' \times 5'$, $10' \times 10'$, $30' \times 30'$ ynnä muita. Euroopan leveysasteilla käytetään usein kokoja $3' \times 5'$, $5' \times 10'$, $6' \times 10'$ ynnä muita, jotka ovat likimäärin neliön muotoisia.

Seuraava yhtälö pätee integraalin laskennassa blokkien keskiarvoja käyttäen:

$$N(\phi, \lambda) \approx \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_i S_i(\phi, \lambda)\, \overline{\Delta g}_i, \tag{8.22}$$

jossa $\overline{\Delta g}_i$ on blokin i keskiarvo:

$$\overline{\Delta g}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\omega_i} \iint_{\sigma_i} \Delta g(\phi, \lambda)\, d\sigma = \frac{1}{\omega_i} \iint_{\sigma_i} \Delta g(\phi, \lambda) \cos\phi\, d\phi\, d\lambda,$$

ja Stokesin ydinfunktion blokki-integraali vastaavasti

$$S_i(\phi, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\sigma_i} S\big(\psi(\phi, \lambda; \phi', \lambda')\big) \cos\phi'\, d\phi'\, d\lambda',$$

jossa σ_i on blokin i alue ja sen pinta-ala yksikköpallolla on

$$\omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\sigma_i} d\sigma = \iint_{\sigma_i} \cos\phi\, d\phi\, d\lambda.$$

Sellaisen integraalin arvon numeerinen laskenta eli *kvadratuuri* tapahtuu kätevästi Simpsonin säännön[6] avulla: [6]

$$S_i(\phi,\lambda) = \int_{\lambda_i-\Delta\lambda/2}^{\lambda_i+\Delta\lambda/2} \int_{\phi_i-\Delta\phi/2}^{\phi_i+\Delta\phi/2} S\big(\psi(\phi,\lambda;\phi',\lambda')\big)\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'\,\mathrm{d}\lambda' \approx$$
$$\approx \Delta\phi\,\Delta\lambda \sum_{j=-1}^{1} w_j \sum_{k=-1}^{1} w_k S_i^{jk},$$

jossa $\Delta\lambda$ ja $\Delta\varphi$ ovat blokkien pituus- ja leveyssuuntaiset koot ja $w_{-1} = w_1 = \frac{1}{6}$, $w_0 = \frac{4}{6}$ ovat painot.

$$S_i^{jk}(\phi,\lambda) = S\Big(\psi\big(\phi,\lambda;\phi_i+\tfrac{1}{2}j\,\Delta\phi,\lambda_i+\tfrac{1}{2}k\,\Delta\lambda\big)\Big)\cos\big(\phi_i+\tfrac{1}{2}j\,\Delta\phi\big),$$
$$j,k=-1,0,1$$

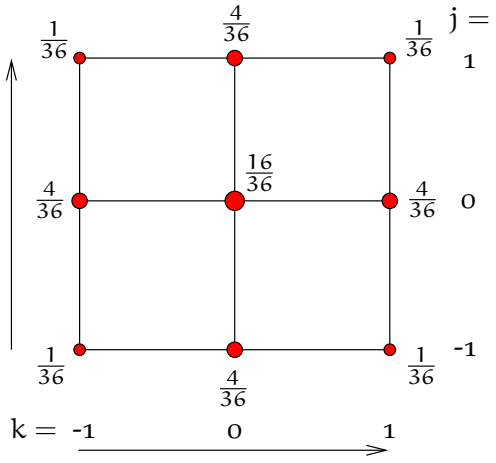
ovat lausekkeen $S\big(\psi(\phi,\lambda;\phi',\lambda')\big)\cos\phi'$ arvot laskennassa käytettyjen solmupisteiden kohdilla, 3×3 kappaletta. Katso kuva 8.11. Myös monimutkaisempia kaavoja (toistettu Simpson tai Romberg) voi käyttää.

8.12 Paikallisen vyöhykkeen vaikutus

Voi näyttää, että paikallisen (sisäisen) vyöhykkeen vaikutus geoidin korkeuteen laskentapisteessä (ϕ,λ) on verrannollinen itse pisteen painovoima-anomaliaan $\Delta g(\phi,\lambda)$. Jos lähdetään Stokesin yhtälöstä 8.2, jolloin $S(\psi) \approx 1/\sin\frac{1}{2}\psi \approx 2/\psi$, saadaan, jos ympyrän muotoisen sisäisen vyöhykkeen säde on ψ_0:

$$\delta N_0 = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0} \frac{2}{\cancel{\psi}}\Delta g(\psi,\alpha)\,\cancel{\sin\psi}\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\alpha \approx$$
$$\approx \frac{R}{\gamma}\int_0^{\psi_0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g(\psi,\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}\psi \approx \frac{R}{\gamma}\cdot\psi_0\cdot\overline{\Delta g_0} = \frac{s_0}{\gamma}\overline{\Delta g_0}.$$

[6] Thomas Simpson FRS (1710–1761) oli englantilainen matemaatikko ja oppikirjojen laatija. Simpsonin sääntöä käytti itse asiassa jo Johannes Kepler sata vuotta aiemmin.



KUVA 8.11. Simpsonin integroinnin solmupistepainot kahdessa ulottuvuudessa.

Tässä $s_0 = R\psi_0$ on paikallisen blokin (”kalotin”) säde pituusyksiköissä. Suure

$$\overline{\Delta g_0} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\psi_0}\int_0^{\psi_0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g(s,\alpha)\,d\alpha\right)d\psi = \\ = \frac{1}{s_0}\int_0^{s_0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g(s,\alpha)\,d\alpha\right)ds$$

on painovoima-anomalian erikoinen keskiarvo, ”rengaskeskiarvojen” keskiarvo säteiden $s = 0$ ja $s = s_0$ välillä. Jos s_0 on pieni, keskiarvon saa korvata keskipisteen anomalia-arvolla $\Delta g(\phi,\lambda)$ ilman suurta virhettä.

Luotiviivan poikkeamien paikalliset osuudet ovat puolestaan verrannollisia painovoima-anomalioiden *vaakagradientteihin*. Lähdetään Vening Meineszin yhtälöistä 8.5, joihin sijoitetaan tämä approksimaatio paikalliselle kalotille, tarkemmin

$$S(\psi) \approx \frac{2}{\psi} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{d\psi}S(\psi) = -\frac{2}{\psi^2}:$$

$$\begin{Bmatrix}\delta\xi_0\\ \delta\eta_0\end{Bmatrix} \approx \frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{\psi_0}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{\psi^2}\right)\Delta g(\phi',\lambda')\begin{Bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{Bmatrix}\sin\psi\,d\alpha\,d\psi.$$

Kehitetään Δg paikallisille lineaarisille suorakulmaisille koordinaateille

x, y:

$$\Delta g \approx \Delta g_0 + x\frac{\partial \Delta g}{\partial x} + y\frac{\partial \Delta g}{\partial y} \approx$$
$$\approx \Delta g_0 + R\psi\left(\cos\alpha\frac{\partial \Delta g}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial \Delta g}{\partial y}\right),$$

ja sijoitetaan:

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta\xi_0 \\ \delta\eta_0 \end{array} \right\} \approx \frac{1}{4\pi\gamma} \cdot$$
$$\cdot \int_0^{\psi_0}\int_0^{2\pi} -\frac{2}{\psi^2}\left(\Delta g_0 + R\psi\left(\cos\alpha\frac{\partial \Delta g}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial \Delta g}{\partial y}\right)\right)\left\{ \begin{array}{c} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{array} \right\}\sin\psi\,d\alpha\,d\psi.$$

Tässä termit, joissa on Δg_0, putoavat pois α-integroinnissa, koska $\int_0^{2\pi}\sin\alpha\,d\alpha = \int_0^{2\pi}\cos\alpha\,d\alpha = 0$. Näin tekevät myös sekatermit, joissa $\sin\alpha\cos\alpha$. Ainoat nollasta eroavat termit sisältävät $\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha\,d\alpha = \int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\,d\alpha = \pi$:

$$\delta\xi_0 \approx -\frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{\psi_0}\int_0^{2\pi}\frac{2}{\cancel{\psi^2}}R\cancel{\psi}\cos\alpha\frac{\partial \Delta g}{\partial x}\cos\alpha\,\cancel{\sin\psi}\,d\alpha\,d\psi \approx$$
$$\approx -\frac{R}{2\pi\gamma}\int_0^{\psi_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial \Delta g}{\partial x}\cos^2\alpha\,d\alpha\,d\psi \approx -\frac{R\psi_0}{2\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial x},$$
$$\delta\eta_0 \approx -\frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{\psi_0}\int_0^{2\pi}\frac{2}{\cancel{\psi^2}}R\cancel{\psi}\sin\alpha\frac{\partial \Delta g}{\partial y}\sin\alpha\,\cancel{\sin\psi}\,d\alpha\,d\psi \approx$$
$$\approx -\frac{R}{2\pi\gamma}\int_0^{\psi_0}\int_0^{2\pi}\frac{\partial \Delta g}{\partial y}\sin^2\alpha\,d\alpha\,d\psi \approx -\frac{R\psi_0}{2\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial y}.$$

Integraalien laskenta olettaa, että osittaisderivaatat ovat vakioita kalotin alueella. Käyttäen $R\psi_0 = s_0$ saadaan nyt

$$\delta\xi_0 \approx -\frac{s_0}{2\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial x}, \quad \delta\eta_0 \approx -\frac{s_0}{2\gamma}\frac{\partial \Delta g}{\partial y}.$$

Yhtälöt saattavat olla hyödyllisiä kun standardi blokki-integrointi, yhtälö 8.22, on numeerisesti huonokäytöksinen laskentapisteen välittömässä ympäristössä jos ydinfunktio on singulaarinen origossa $\psi = 0$. Sekä Stokesin 8.2 että Vening Meineszin 8.5 ytimet ovat tätä tyyppiä.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Minkä näköisiä ovat Stokesin yhtälö ja sen spektraalimuoto?
2) Minkä näköinen on Stokesin ydinfunktio $S(\psi)$ kehitettynä Legendren polynomeihin?
3) Mikä on Stokesin ytimen sopiva approksimaatio, kun ψ on pieni?
4) Mikä on isotrooppinen ja mikä anisotrooppinen suure Maan pinnalla? Anna jälkimmäisestä esimerkki.
5) Mitä Poissonin integraaliyhtälö kertoo?
6) Miksi painovoimareduktiot ovat tarpeen, kun geoidimallin laskemiseksi käytetään Stokesin yhtälöä?
7) Mitkä eri painovoimareduktiomenetelmiä on tarjolla?
8) Selitä jäännösmaastomallintamenetelmä eli *residual terrain modelling* -menetelmä (RTM).
9) Selitä poistamis-entistamis- eli *remove-restore*-lähestymistapa.
10) Miksi Stokesin ydinfunktio modifioidaan usein geoidilaskennassa? Minkä näköinen sellainen modifikaatio on?
11) Mikä on Gibbsin ilmiö?

Harjoitus 8−1: Stokesin yhtälö lähialueella

1) Johda Stokesin yhtälön $S(\psi)$ yksinkertaisempi muoto, joka pätee, kun kulmaetäisyys ψ on pieni. Oikeasti tämä yksinkertaistettu muoto sisältää vain yhden termin!
2) Käyttäen tätä muotoa, kirjoita integraaliyhtälö

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_\sigma S(\psi)\, \Delta g \, d\sigma$$

napakoordinaatteihin, siis integraaliksi muotoa

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \cdots \, ds \, d\alpha,$$

jossa $s = \psi R$ on lineaarinen etäisyys laskentapisteestä ja α on atsimuuttikulma (suuntakulma) geoidikorkeuden N laskentapisteestä liikkuvaan painovoima-anomalian Δg datapisteeseen.

Vihje: tässä on otettava huomioon napakoordinaattien (s, α) Jacobin determinantti.

3) Laske N (yhtälönä), jos $\Delta g = \Delta g_0$ vain ympyrän muotoisen alueen sisällä, $s \leqslant s_0$, ja sen ulkopuolella $\Delta g = 0$. Oleta, että s_0 on pieni.

Spektraalimenetelmät, FFT

9

9.1 Stokesin yhtälö konvoluutiona

Lähdetään liikkeelle Stokesin yhtälöstä 8.1,

$$T(\phi,\lambda) = \frac{R}{4\pi}\iint_{\sigma} S(\psi)\,\Delta g(\phi',\lambda')\,d\sigma',$$

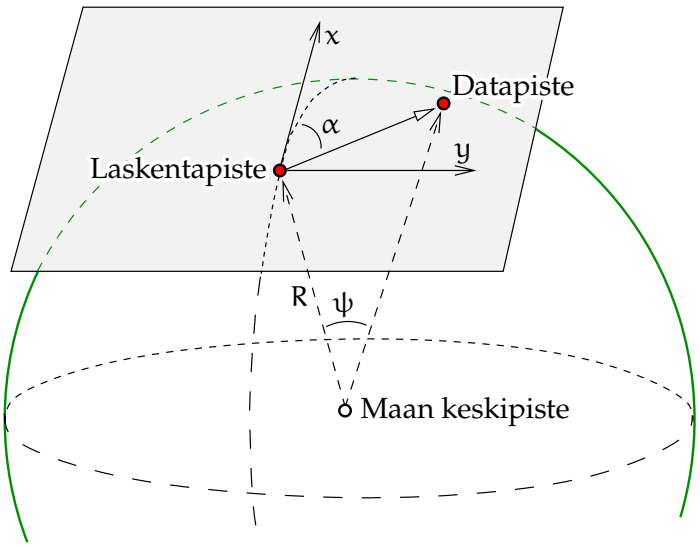
jossa (ϕ',λ') on liikkuvan integrointi- eli datapisteen sijainti ja (ϕ,λ) laskentapisteen sijainti, molemmat merenpinnan tasolla eli pallon muotoisen Maan pinnalla. Molempien pisteiden sijainnit annetaan siis pallokoordinaatteina. Integrointi suoritetaan yksikköpallon σ pinnan yli: pinta-alkio on $d\sigma = \cos\phi\,d\phi\,d\lambda$, jossa $\cos\phi$ on pallokoordinaattien (ϕ,λ) Jacobin determinantti.

Paikallisesti riittävän pienellä alueella voidaan kuitenkin kirjoittaa pisteiden koordinaatit myös suorakulmaisina ja ilmaista integraali suorakulmaisissa koordinaateissa. Sopivat suorakulmaiset koordinaatit ovat esimerkiksi *karttaprojektiokoordinaatit*, katso kuva 9.1.

Yksinkertainen tangenttitason suorakulmaisten koordinaattien esimerkki olisi

$$x = \psi R\cos\alpha, \quad y = \psi R\sin\alpha, \tag{9.1}$$

jossa α on laskentapisteen ja liikkuvan datapisteen välisen yhdysviivan atsimuutti. Tämän projektion keskus on tangenttitason kosketuspiste.



KUVA 9.1. Karttaprojektiokoordinaatit x, y paikallisessa tangenttitasossa.

Muiden pisteiden sijainnit mitataan Maan keskipisteen kulmalla eli *geosentrisellä kulmaetäisyydellä* ψ ja tangenttitason suuntakulmalla eli *atsimuutilla* α.

Realistisempi esimerkki käyttää suosittua konformista karttaprojektiota nimeltä *stereografinen projektio*:

$$x = 2 \tan \frac{\psi}{2} R \cos \alpha, \quad y = 2 \tan \frac{\psi}{2} R \sin \alpha.$$

Pienten ψ-arvojen limiitissä tämä on sama kuin yhtälöt 9.1.

Laskemalla yhtälöiden 9.1 neliöt, summaamalla ne ja jakamalla tulos R^2:llä saadaan

$$\psi^2 \approx \frac{x^2 + y^2}{R^2}.$$

Yleisemmin ψ on laskenta- eli evaluointipisteen (x, y) ja data-, integrointi- eli liikkuvan pisteen (x', y') välinen kulmaetäisyys maapallon keskustasta nähtynä, likimäärin

$$\psi^2 \approx \left(\frac{x - x'}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{R}\right)^2.$$

Lisäksi on otettava huomioon projektion Jacobin determinantti R^{-2}:

$$d\sigma = R^{-2}\,dx\,dy \iff dx\,dy = R^2\,d\sigma,$$

ja Stokesin yhtälöstä tulee nyt

$$T(x,y) \approx \frac{1}{4\pi R}\iint_{-\infty}^{\infty} S(x-x',y-y')\,\Delta g(x',y')\,dx'\,dy', \qquad (9.2)$$

kaksiulotteinen *konvoluutio*[1]. [1]

Konvoluutioilla on mukavia ominaisuuksia Fourier-teoriassa. Jos kutsutaan Fourier'n muunnosta symbolilla $\mathcal{F}$ ja konvoluutiota symbolilla $\otimes$, voidaan yllä oleva yhtälö lyhentää seuraavaksi:

$$T = \frac{1}{4\pi R} S \otimes \Delta g,$$

ja *konvoluutiolauseen* mukaan ("Fourier muuntaa konvoluution kertolaskuksi"):

$$\mathcal{F}\{T\} = \frac{1}{4\pi R}\mathcal{F}\{S\}\cdot\mathcal{F}\{\Delta g\}.$$

Tämä approksimaatio (x,y)-tasossa toimii vain, *jos integroinnin voi rajoittaa paikalliseen alueeseen*, jossa Maan pinnan kaarevuuden voi jättää huomiotta. Se onnistuu globaalien pallofunktiokehitelmien ansiosta, koska ne edustavat Maan painovoimakentän spatiaalisen vaihtelun pitkäaaltoista osuutta. Sen jälkeen kun havaituista painovoima-anomalioista Δg on poistettu globaalin pallofunktiomallin vaikutus (poistamis- eli *remove*-vaihe), voi laskentapisteestä kaukana olevien alueiden vaikutuksen unohtaa turvallisesti: poiston jälkeen anomaliakenttä Δg_{loc} sisältää vain loput lyhytaaltoiset osat, joiden vaikutus kumoutuu pidemmän matkan päässä.

---

[1] Integrointi kulkee miinus äärettömyydestä plus äärettömyyteen sekä x- että y-koordinaatissa. Tämä voi olla kaarevalla maapallolla realistinen vain, jos ydinfunktiolla S on rajoitettu kantaja: se eroaa nollasta vain rajoitetulla alueella, joka on pieni osa koko maapallon pinta-alasta. Tämä pitää paikkansa osiossa 8.9 esitetyille modifioiduille ydinfunktioille.

Tietenkin kun integraali on laskettu ja paikallinen häiriöpotentiaali T_{loc} ja vastaava geoidin korkeus N_{loc} on saatu, on muistettava, että näihin olisi lisättävä jälleen globaalin pallofunktiomallin erikseen laskettava vaikutus häiriöpotentiaaliin T ja geoidikorkeuteen N. Tämä on laskennan entistämisvaihe, katso kommutoiva kaavio 8.9.

9.2 Integrointi FFT:llä

Konvoluutiolauseen tarvitsema Fourier'n muunnos lasketaan *diskreettina Fourier'n muunnoksena.* Tähän on tarjolla laskennallisesti erittäin tehokas menetelmä: nopea Fourier'n muunnos, *Fast Fourier Transform* eli FFT, esimerkiksi Vermeer (1993). Kirjallisuudesta löytyy useita hieman erilaisia Fourier'n muunnoksen yhtälöitä. Valinnalla ei ole merkitystä, kunhan Fourier'n muunnos $\mathcal{F}$ ja Fourier'n käänteismuunnos $\mathcal{F}^{-1}$ ovat keskenään yhteensopivia.

Esivalmisteluna rakennetaan ensin funktion $\Delta g(x, y)$ diskreetti *hilaesitys*, suorakulmainen Δg-arvojen taulukko tasaisen pistevälin (x_i, y_j)-hilalla. Arvot voivat olla vaikkapa funktioarvot itse hilapisteissä[2]:

$$\Delta g_{ij} = \Delta g\big(x_i, y_j\big),$$

jossa hilapisteiden koordinaatit ovat

$$x_i = i\,\delta x, \quad y_j = j\,\delta y, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

sopiviksi valituilla hilan väleillä $(\delta x, \delta y)$. Kokonaisluku N on hilan koko, joka on oletettu yksinkertaisuuden vuoksi samaksi x:n ja y:n suunnassa.

Seuraavaksi tehdään samoin ydinfunktiolle

$$S(\psi) = S\big(x - x', y - y'\big) = S(\Delta x, \Delta y),$$

[2] Vaihtoehtoisesti voitaisiin esimerkiksi laskea jokaiselle hilapisteelle pistettä ympäröivän neliön muotoisen solun keskiarvo.

siis kirjoitetaan

$$S_{ij} = S(\Delta x_i, \Delta y_j),$$

jossa taas

$$\Delta x_i = i\,\delta x, \quad \Delta y_j = j\,\delta y, \qquad i,j = 0,1,\ldots,N-1.$$

Nyt ydinfunktion S origon huippu — $S(\Delta x, \Delta y) \to \infty$ kun $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ — sijoittuu funktioarvojen hilan S_{ij} origoon $i = j = 0$, yhteen nurkkaan, ja hila sisältää vain huipun yhden kvadrantin. Tämä ei ole hyväksyttävä.

Diskreetille Fourier'n muunnokselle ominainen jaksollisuus merkitsee, että arvot $i = \frac{1}{2}N,\ldots,N-1$ saa korvata negatiivisilla arvoilla $i' \stackrel{\text{def}}{=} i - N = -\frac{1}{2}N,\ldots,-1$ ilman, että muodollisesti mikään muuttuu: katso alaviite 1 liitteessä C. Tässä tulkinnassa

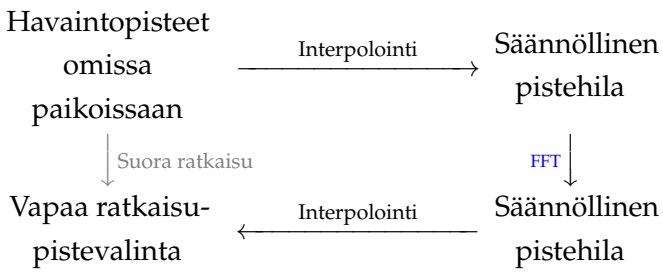
$$\Delta x_{i'} = i'\,\delta x, \quad \Delta y_{j'} = j'\,\delta y, \qquad i',j' = -\tfrac{1}{2}N,\ldots,\tfrac{1}{2}N-1,$$

ja nyt origo on hilan keskellä. Tämä on oikea tapa laskea todellisen, ei-jaksollisen ytimen arvot, käyttäen sekä positiivisia että negatiivisia arvoja Δx ja Δy origon symmetrisesti ympäröivältä alueelta.

Seuraavaksi:

1) Näin saadut funktioiden Δg ja S hilaesitykset Δg_{ij} ja S_{ij} muunnetaan *taajuusdomeeniin*. Niistä tulee siten kahden "taajuuden", x- ja y- suuntaisten aaltoindeksien u ja v, funktiot $\mathcal{S}_{uv} = \mathcal{F}\{S_{ij}\}$ ja $\mathcal{G}_{uv} = \mathcal{F}\{\Delta g_{ij}\}$. Spatiaalitaajuudet eli aaltoluvut[3] $\tilde{\nu}$ ja spatiaaliallonpituudet λ ovat $\tilde{\nu}_x = \lambda_x^{-1} = u/L$, $\tilde{\nu}_y = \lambda_y^{-1} = v/L$, jossa $L = N\,\delta x = N\,\delta y$ on neliön muotoiseksi oletetun alueen koko. 3
2) Ne kerrotaan keskenään "taajuuspari kerrallaan": lasketaan

[3] Tämä on niin sanottu lineaarinen aaltoluku, joka laskee, montako kokonaisia aaltoja on pituusyksikköä kohti. Syklinen eli pyöreä aaltoluku on $k = 2\pi\tilde{\nu}$, ja se laskee, montako vaihekulman radiaaneja on pituusyksikköä kohti.



KUVA 9.2. FFT-menetelmän kommutoiva kaavio.

$$\mathcal{T}_{uv} = \frac{1}{4\pi R}\, \mathcal{S}_{uv} \cdot \mathcal{G}_{uv}, \qquad u, v = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{9.3}$$

3) Muunnetaan tulos $\mathcal{T}_{uv} = \mathcal{F}\{T_{ij}\}$ takaisin *avaruusdomeeniin*: $T_{ij} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{T}_{uv}\}$, häiriöpotentiaalin T pistehila $T_{ij} = T(x_i, y_j)$. Mielivaltaisen pisteen häiriöpotentiaali saadaan tästä hilasta interpoloimalla. Koordinaatit x_i, y_j kulkevat indeksien i, j funktioina samalla tavalla kuin on kuvattu yllä Δg:n tapauksessa.

Esitetty menetelmä kelpaa häiriöpotentiaalin T — ja vastaavasti geoidikorkeuden $N = T/\gamma$ — laskentaan painovoima-anomalioista Stokesin yhtälön avulla. Yhtä hyvin se kelpaa muiden suureiden, kuten esimerkiksi painovoima-anomalian pystygradientin, evaluoimiseen yhtälön 8.17 avulla. Ainoa vaatimus on, että yhtälö olisi kirjoitettavissa *konvoluutioksi*.

Myös *inversiolasku* on helppoa, kuten tulemme näkemään: taajuusdomeenissa se on vain yksinkertainen jakolasku.

Diskreetin Fourier'n muunnoksen käyttö edellyttää, että syöttödata eli integroitavana oleva kenttä — esimerkissä painovoima-anomalioiden kenttä — on annettu laskenta-alueen peittävänä, säännöllisenä hilana, tai on muunnettava sellaiseksi. Tulos — esimerkissä häiriöpotentiaali — saadaan saman muotoisena säännöllisellä hilalla. Arvoja voi *interpoloida* hilasta haluttuihin pisteisiin.

FFT-menetelmää voidaan kuvata *kommutoivana kaaviona*, kuva 9.2.

Liitteestä C löytyy lyhyt selostus, miksi FFT toimii ja miksi se on niin

tehokas kuin se on.

9.3 Ratkaisu leveys- ja pituusasteissa

Yllä olevassa yhtälössä 9.2 hilan koordinaatit x ja y ovat suorakulmaisia. Käytännön syistä käytetään hilan koordinaatteina mieluummin leveys- ja pituusastetta (φ, λ). Näin väistyy uuden (x, y)-pistehilan rakentamisen tarve interpoloimalla annetusta (φ, λ)-hilasta karttaprojektiolaskennan kautta. Maantieteellisten koordinaattien käyttö johtaa kuitenkin *meridiaanikonvergenssin* aiheuttamiin lisävirheisiin. Eihän leveys- ja pituusastejärjestelmä ole suorakulmainen. Hieman sopivampi olisi koordinaattipari $(\varphi, \lambda \cos \varphi)$.

Ongelma on ratkaistu myös käsitteellisemmällä tasolla.

9.3.1 Strang van Heesin menetelmä

Stokesin ydinfunktio $S(\psi)$ riippuu vain laskentapisteen (ϕ, λ) ja datapisteen (ϕ', λ') välisestä geosentrisestä kulmaetäisyydestä ψ. Kulmaetäisyyden voi kirjoittaa seuraavasti (kosinisääntö pallolla):

$$\cos\psi = \sin\phi \sin\phi' + \cos\phi \cos\phi' \cos(\lambda - \lambda').$$

Sijoitetaan

$$\begin{aligned}
\cos(\lambda - \lambda') &= 1 - 2\sin^2 \frac{\lambda - \lambda'}{2}, \\
\cos\psi &= 1 - 2\sin^2 \frac{\psi}{2}, \\
\cos(\phi - \phi') &= 1 - 2\sin^2 \frac{\phi - \phi'}{2},
\end{aligned}$$

ja saadaan *puolikulman kosinisääntö*:

$$\begin{aligned}
\cos\psi &= \cos(\phi - \phi') - 2\cos\phi\cos\phi'\sin^2\frac{\lambda - \lambda'}{2} \\
\Longrightarrow \quad \sin^2\frac{\psi}{2} &= \sin^2\frac{\phi - \phi'}{2} + \cos\phi\cos\phi'\sin^2\frac{\lambda - \lambda'}{2}.
\end{aligned}$$

Tässä seuraava approksimaatio lienee sallittu:

$$\cos\phi', \cos\phi \approx \cos\phi_0,$$

jossa ϕ_0 on vertausleveysaste laskenta-alueen keskellä. Nyt yllä olevasta yhtälöstä tulee

$$\sin^2\frac{\psi}{2} \approx \sin^2\frac{\phi-\phi'}{2} + \cos^2\phi_0 \sin^2\frac{\lambda-\lambda'}{2}, \tag{9.4}$$

joka riippuu vain eroista $\Delta\phi \overset{\text{def}}{=} \phi - \phi'$ ja $\Delta\lambda \overset{\text{def}}{=} \lambda - \lambda'$.

Tämän jälkeen FFT-menetelmää voidaan soveltaa käyttämällä koordi-
4 naatteja (ϕ, λ)[4] ja Stokesin ydinfunktiota kirjoitettuna muotoon

$$S(\psi) = S(\Delta\phi, \Delta\lambda) = S\left(2\arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\Delta\phi}{2} + \cos^2\phi_0 \sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}}\right),$$

joka on nyt ainoastaan erotusten $\Delta\phi$ ja $\Delta\lambda$ funktio, kuten konvoluutio-
lause edellyttää. Tämän ovelan tavan käyttää FFT-menetelmää maan-
5 tieteellisissä koordinaateissa keksi hollantilainen G. Strang van Hees[5] vuonna 1990.

9.3.2 "Spherical FFT" / *monivyöhykemalli*

Jaetaan alue useaan kapeaan vyöhykkeeseen leveysasteen mukaan. Jokaisen vyöhykkeen sisällä sovelletaan Strang van Hees -menetelmää omalla optimaalisella keskusleveysasteella.

Kirjoitetaan Stokesin yhtälö seuraavasti:

$$N(\phi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint S(\Delta\phi, \Delta\lambda; \phi) \left[\Delta g(\phi', \lambda') \cos\phi'\right] d\phi'\, d\lambda', \tag{9.5}$$

---

[4] Käytännössä käytetään geodeettista eli maantieteellistä leveysastetta φ geosentrisen ϕ sijasta ilman merkittävää virhettä.

[5] Govert L. Strang van Hees (1932–2012) oli hollantilainen gravimetrisen geodesian tutkija.

jossa olemme ilmaisseet S leveysaste-eron, pituusaste-eron ja *laskenta-leveysasteen* funktiona. Nyt valitaan kaksi tukileveysastetta, ϕ_i ja ϕ_{i+1}. Lisäksi oletetaan, että S on niiden välillä riittävän lineaarinen ϕ:n funktio. Siinä tapauksessa voimme kirjoittaa

$$S(\Delta\phi, \Delta\lambda; \phi) = \frac{(\phi - \phi_i)\, S_{i+1}(\Delta\phi, \Delta\lambda) + (\phi_{i+1} - \phi)\, S_i(\Delta\phi, \Delta\lambda)}{\phi_{i+1} - \phi_i},$$

jossa $\Delta\phi = \phi - \phi'$, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$ ja

$$\begin{aligned} S_i(\Delta\phi, \Delta\lambda) &= S\big(\phi - \phi', \lambda - \lambda'; \phi_i\big), \\ S_{i+1}(\Delta\phi, \Delta\lambda) &= S\big(\phi - \phi', \lambda - \lambda'; \phi_{i+1}\big). \end{aligned}$$

Integraaliyhtälöön 9.5 sijoittamalla saadaan

$$N(\phi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma}\left(\frac{\phi_{i+1} - \phi}{\phi_{i+1} - \phi_i} I_i + \frac{\phi - \phi_i}{\phi_{i+1} - \phi_i} I_{i+1}\right), \tag{9.6}$$

jossa

$$\begin{aligned} I_i &= \iint S_i(\Delta\phi, \Delta\lambda)\Big[\Delta g\big(\phi', \lambda'\big)\cos\phi'\Big]\, d\phi'\, d\lambda', \\ I_{i+1} &= \iint S_{i+1}(\Delta\phi, \Delta\lambda)\Big[\Delta g\big(\phi', \lambda'\big)\cos\phi'\Big]\, d\phi'\, d\lambda'. \end{aligned}$$

Yhtälö 9.6 on kahden konvoluution lineaariyhdistelmä. Molemmat evaluoidaan FFT:n avulla. Yhtälö muodostaa saaduista ratkaisuista painotetun keskiarvon.

Tässä menetelmässä käytämme likiyhtälön 9.4 sijasta tarkkaa yhtälöä, jossa ϕ' on ilmaistu ϕ:hin ja $\Delta\phi$:hin:

$$\begin{aligned} \sin^2\frac{\psi}{2} = \sin^2\frac{\phi - \phi'}{2} + \cos\phi\cos\phi'\sin^2\frac{\lambda - \lambda'}{2} = \\ = \sin^2\frac{\Delta\phi}{2} + \cos\phi\cos\left(\phi - \Delta\phi\right)\sin^2\frac{\Delta\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Lasketaan S_i ja S_{i+1} tukileveysasteen arvoille ϕ_i ja ϕ_{i+1}, evaluoidaan integraalit konvoluutiolauseen avulla ja interpoloidaan $N(\phi, \lambda)$ yhtälön 9.6 mukaan, kun $\phi_i \leqslant \phi < \phi_{i+1}$. Tämänkään jälkeen ratkaisu ei ole eksakti, koska jokaisen vyöhykkeen sisällä käytetään edelleen lineaarista interpolointia. Kaventamalla vyöhykkeitä saadaan virhe pysymään mielivaltaisen pienenä.

9.3.3 "Spherical FFT" / *Taylorin kehitelmämalli*

Tämä on hieman monimutkaisempi, mutta myös monipuolisempi lähestymistapa, joka kehittää Stokesin ytimen Taylorin sarjaksi leveysasteen suhteen keskellä laskenta-aluetta sijaitsevan *vertausleveysasteen* molemmin puolin[6]. Kehitelmän jokainen termi riippuu vain leveysasteiden *erosta*. Laskettava integraali hajoaa vastaavasti termeihin, joista jokainen sisältää puhtaan konvoluution.

[6]

Kirjoitetaan *yleinen* ongelma seuraavasti:

$$\ell(\phi,\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} C\big(\phi,\phi',\Delta\lambda\big)\Big[m\big(\phi',\lambda'\big)\cos\phi'\Big]\,d\phi'\,d\lambda',$$

jossa ℓ sisältää laskettavat ja m annetut suureet ja C on kerroin- eli ydinfunktio. Tässä oletetaan vain geometrian *pyörähdyssymmetriaa* Maan akselin ympäri: ydinfunktio riippuu vain pituusasteiden erotuksesta $\Delta\lambda$ eikä absoluuttisista pituuksista λ ja λ'.

Konkreettisessa tapauksessa m sisältää esimerkiksi painovoima-anomalia-arvoja Δg eri pisteissä (ϕ',λ'), ℓ sisältää geoidikorkeuksia N eri pisteissä (ϕ,λ) ja C sisältää Stokesin ydinfunktion avulla laskettuja kertoimien arvoja.

Muunnetaan ensin riippuvuus suureista ϕ ja ϕ' riippuvuudeksi suureista ϕ ja $\Delta\phi$:

$$C = C\big(\phi,\phi',\Delta\lambda\big) = C(\Delta\phi,\Delta\lambda;\phi).$$

Linearisoidaan:

$$C = C_0(\Delta\phi,\Delta\lambda) + (\phi-\phi_0)\,C_\phi(\Delta\phi,\Delta\lambda) + \cdots$$

jossa määritellään sopivalle *vertausleveysasteelle* ϕ_0:

$$C_0(\Delta\phi,\Delta\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} C\big(\Delta\phi,\Delta\lambda;\phi_0\big),$$
$$C_\phi(\Delta\phi,\Delta\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial\phi}C(\Delta\phi,\Delta\lambda;\phi)\Big|_{\phi=\phi_0}.$$

[6] Kirjallisuudessa menetelmä on yleistetty kehittämällä ydin myös korkeuden suhteen.

Tämä kahden termin kehitelmä on tarkka vain rajallisella $\Delta\phi$-välillä, ja ydinfunktiolla C oletetaan olevan rajoitettu kantaja. Silloin integraalit voidaan laskea rajallisen alueen sisällä koko Maan sijasta.

Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}\ell(\phi,\lambda) &= \iint C(\Delta\phi,\Delta\lambda;\phi)\cdot m(\phi',\lambda')\cos\phi'\,d\phi'\,d\phi' = \\ &= \iint \left(C_0 + (\phi-\phi_0)\,C_\phi\right)\cdot m\cos\phi'\,d\phi'\,d\phi' = \\ &= \iint C_0\cdot m\cos\phi'\,d\phi'\,d\lambda' + (\phi-\phi_0)\iint C_\phi\cdot m\cos\phi'\,d\phi'\,d\lambda'.\end{aligned} \tag{9.7}$$

Tärkeää tässä on se, että ensimmäisen ja toisen termin integraalit,

$$\iint C_0(\Delta\phi,\Delta\lambda)\left[m(\phi',\lambda')\cos\phi'\right]d\phi'\,d\lambda' = C_0\otimes\left[m\cos\phi\right],$$
$$\iint C_\phi(\Delta\phi,\Delta\lambda)\left[m(\phi',\lambda')\cos\phi'\right]d\phi'\,d\lambda' = C_\phi\otimes\left[m\cos\phi\right],$$

ovat molemmat konvoluutioita: molemmat C-funktiot riippuvat vain erosta $\Delta\phi$ ja $\Delta\lambda$. Molemmat integraalit ovat laskettavissa, jos datahila $m\cos\phi$ ja kerroinhilat C_0 ja C_ϕ lasketaan ensin valmiiksi. Tämän periaatteessa kalliin, mutta FFT:n ja konvoluutiolauseen ansiosta paljon edullisemman integroinnin jälkeen on yhdistelmän 9.7 laskeminen nopeaa: yksi kertolasku ja yksi yhteenlasku jokaista laskentapistettä (ϕ,λ) kohtaan.

Esimerkki Olkoon laskenta-alue leveysasteella 60° kooltaan $10^\circ\times 20^\circ$. Jos hilan silmäkoko on $5'\times 10'$, on solujen määrä 120×120. Valitaan vaikkapa 256×256 -kokoinen hila (siis $N = 256$) ja täytetään puuttuvat arvot ekstrapoloimalla.

Myös ydinfunktioiden C_0 ja C_ϕ arvot lasketaan 256×256 -kokoisella $(\Delta\phi,\Delta\lambda)$-hilalla. Niitä on siis myös 65 536. Konvoluutioiden $C_0\otimes\left[m\cos\phi\right]$ ja $C_\phi\otimes\left[m\cos\phi\right]$ laskeminen FFT:n avulla — siis[7] 7

$$\iint C_0(\Delta\phi,\Delta\lambda)\, m(\phi',\lambda')\cos\phi'\,d\phi'\,d\lambda' = \\ = C_0 \otimes [m\cos\phi] = \mathcal{F}^{-1}\Big\{\mathcal{F}\{C_0\}\cdot\mathcal{F}\{m\cos\phi\}\Big\},$$

$$\iint C_\phi(\Delta\phi,\Delta\lambda)\, m(\phi',\lambda')\cos\phi'\,d\phi'\,d\lambda' = \\ = C_\phi \otimes [m\cos\phi] = \mathcal{F}^{-1}\Big\{\mathcal{F}\{C_\phi\}\cdot\mathcal{F}\{m\cos\phi\}\Big\},$$

vaatii $N^2 \times {}^2\log(N^2) = 65\,536 \times 16 =$ reilu miljoona "standardilaskutoimitusta[8]". Kertominen kerrointen $(\phi - \phi_0)$ kanssa ja yhteenlasku taas vaativat yhdessä 65 536 standardilaskutoimitusta.

Ydinfunktioiden C_0 ja C_ϕ vastaavat hilamatriisit saadaan seuraavasti: kolmelle vertausleveysasteelle $\phi_{-1}, \phi_0, \phi_{+1}$ lasketaan numeerisesti hilat

$$C_{-1} = C(\Delta\phi,\Delta\lambda;\phi_{-1}),$$
$$C_0 = C(\Delta\phi,\Delta\lambda;\phi_0),$$
$$C_{+1} = C(\Delta\phi,\Delta\lambda;\phi_{+1}),$$

jossa C_0 on suoraan tarjolla ja

$$C_\phi \approx \frac{C_{+1} - C_{-1}}{\phi_{+1} - \phi_{-1}}.$$

Myös *inversiolasku* on näin suoraan mahdollinen. Olkoon annettuna ℓ sopivassa pistehilassa. Lasketaan vektorin m ensimmäinen approksimaatio seuraavasti[9]:

$$\mathcal{F}\{C_0\}\cdot\mathcal{F}\{m\cos\phi\} = \mathcal{F}\{\ell\} \quad\Longrightarrow\quad [m\cos\phi]^{(0)} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{F}\{\ell\}}{\mathcal{F}\{C_0\}}\right\}.$$

---

[7] Fourier'n muunnokset kerrotaan kertomalla vastaavat alkiot, katso osio 9.2 yhtälö 9.3.

[8] Standardilaskutoimitus on kertolasku plus joko yhteen- tai vähennyslasku.

[9] Fourier'n muunnos jaetaan toisella jakamalla vastaavat alkiot, katso osio 9.2.

Toinen approksimaatio saadaan laskemalla ensin

$$\ell^{(0)} = C_0 \otimes \left[m \cos\phi\right]^{(0)} + (\phi - \phi_0) \cdot C_\phi \otimes \left[m \cos\phi\right]^{(0)},$$

jonka jälkeen tehdään parannus

$$\left[m \cos\phi\right]^{(1)} = \left[m \cos\phi\right]^{(0)} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{F}\{\ell - \ell^{(0)}\}}{\mathcal{F}\{C_0\}}\right\},$$

ja niin edelleen, iteratiivisesti. Pari kolme askelta riittää. Tätä menetelmää on käytetty maanalaisten massapisteiden laskemiseksi painovoima-anomalioista esittämään Maan ulkopuolista painovoimakenttää[10]. Enemmän on selostettu julkaisuissa Forsberg ja Vermeer (1992); Vermeer (1992).

[10]

9.3.4 "1-D-FFT"

Tämä on edellisten rajatapaus, jossa käytetään FFT-menetelmää vain pituusasteen suuntaan. Toisin sanoen tämä on vyöhykemenetelmä, jossa vyöhykkeet ovat vain yhden hilarivin leveitä. Menetelmä on eksakti, jos laskentaan otetaan mukaan kaikki pituusasteet $0° \leqslant \lambda < 360°$. Se vaatii edellisiin menetelmiin verrattuna hieman enemmän laskenta-aikaa. Itse asiassa se on identtinen Fourier-muunnoksen kanssa muuttujassa λ eli pituusasteessa. Yksityiskohdat löytyvät julkaisusta Haagmans ym. (1993).

9.4 Data-alueen reunustaminen ja ikkunointi

Diskreetti Fourier'n muunnos olettaa, että data on *jaksollisesti jatkuva*. Toisin sanoen oletetaan, että jos yhdistetään data-alueen itäreuna sen länsireunaan ja pohjoisreuna sen eteläreunaan, datan on oltava jatkuva näiden reunojen yli[11]. Käytännössä tämä ei pidä paikkaansa. On kyse

[11]

[10] Koska yhteys massapisteiden ja Maan pinnalla mitattujen painovoima-anomalioiden välillä voidaan kuvata eksaktisti geodeettisissa koordinaateissa, voidaan menetelmässä korvata geosentrinen leveysaste ϕ geodeettisella leveysasteella φ. Tällä tavalla vältetään virheet, jotka aiheutuvat Maan litistyneisyyden sivuuttamisesta.

kahdesta eri vaatimuksesta:

- Reunan toisella puolella olevan datan on oltava niin kaukana, että se ei vaikuta reunan yli merkittävästi laskennan tulokseen.
- Datan on oltava jatkuva reunojen yli.

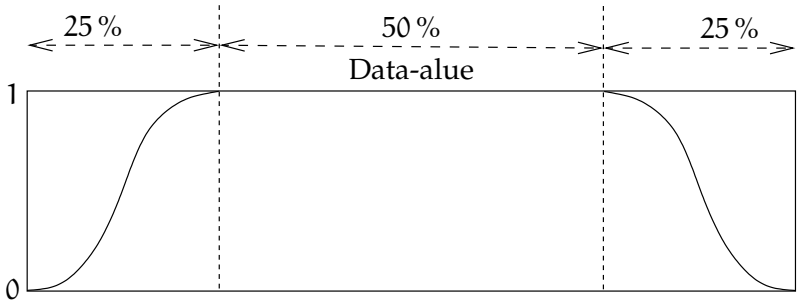
Siksi aina kun käytetään FFT-menetelmää konvoluutiolauseen kanssa, tarvitaan kaksi toimenpidettä.

1) Dataa jatketaan lisäämällä reunus data-alueelle, niin sanottu *reunustaminen* (engl. *bordering*). Usein reunuksen leveys on 25 % data-alueen koosta, jolloin laskenta-alueen pinta-ala on neljä kertaa data-alueen pinta-ala. Reunus täytetään mitatuilla arvoilla siinä, missä niitä on, muuten predikoiduilla (inter- tai ekstrapoloiduilla) arvoilla.

   Myös ydinfunktion laskenta-alue tehdään vastaavasti neljä kertaa suuremmaksi. Tässä tapauksessa koko hila, reunus mukaan lukien, täytetään oikeilla (lasketuilla) arvoilla.

   Ydinfunktion hila on täytettävä siten, että indeksiarvot $i, j \geqslant N/2$ tulkitaan negatiivisiksi arvoiksi $i - N$ ja $j - N$, jotka edustavat myös negatiivisia Δx_i ja Δy_j. Silloin funktion huippu on hilan keskellä. Jos funktio on symmetrinen, hilan neljä kvadranttia näyttävät toistensa peilikuvilta. Silloin hila on automaattisesti jaksollisesti jatkuva.
2) Koska diskreetti Fourier'n muunnos olettaa jaksollisuutta, on huolehdittava siitä, että data on jatkuva reunojen yli. Jos reunojen arvot eivät ole nolla, voidaan pakottaa ne nollaan kertomalla koko laskenta-alue niin sanotulla *ikkunointifunktiolla* (engl. *tapering function*), joka menee sileästi nollaan reunoihin mennessä. Sellaisen funktion voi rakentaa helposti: esimerkit ovat kolmannen asteen splinipolynomi tai Tukey'n eli kosini-ikkuna. Katso kuva 9.3, jossa

[11] Topologisesti yhteen kytketty data-alue on sama kuin *torus* eli donitsi, ja data oletetaan jatkuvaksi toruksen pinnalla.



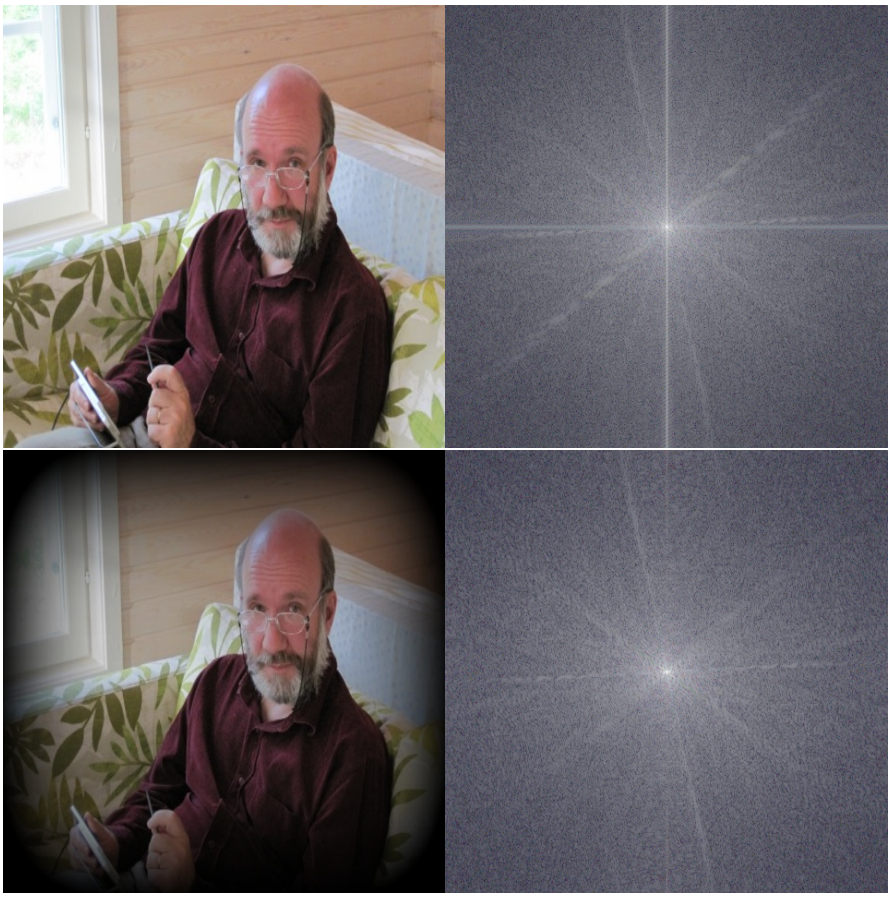
Kuva 9.3. ”Ikkunointi” 25 %.

on 25 %:n ikkunointifunktio, sekä esimerkkikuvat 9.4, josta näkyy, miten ei-jatkuvuus — jyrkät erot vasemman ja oikean reunan sekä ala- ja yläreunan välillä — aiheuttavat vaaka- ja pystysuuntaiset artefaktit Fourier’n muunnoksessa. Nämä artefaktit liittyvät *Gibbsin ilmiöön*, joka on mainittu osiossa 8.9: terävä leikkaus eli reuna avaruusdomeenissa tuottaa signaalia kaikilla taajuuksilla aina korkeimpiin saakka.

Ammattikirjallisuudessa on julkaistu paljon aiheen teknisistä puolista. Monet tutkimusryhmät ovat osallistuneet FFT-geoidimääritystekniikan kehittämiseen jo 1980-luvulla: Forsbergin ryhmä Kööpenhaminassa, Klaus-Peter Schwarzin ja Michael Sideriksen ryhmä Calgaryssa Kanadassa, Delftin ryhmä (Strang van Hees, Haagmans, De Min, Van Gelderen), Milanon ryhmä (Sansò, Barzaghi, Brovelli), Heiner Denker Hannoverin Leibniz-yliopiston laitoksessa ”*Institut für Erdmessung*” ja monet muut.

9.5 Geoidimallin laskenta FFT:llä

Nykyisin geoidi- tai kvasigeoidimallin laskeminen on lisääntyneen tietokonetehon ansiosta helppoa, erityisesti FFT:n avulla. Toisaalta tarkan geodeettisen satelliittipaikannuksen käytön leviäminen on tehnyt tarkoista geoidimalleista haluttua tavaraa, jotta GNSS-teknologiaa voitaisiin käyttää korkeuksien nopeaan ja kustannustehokkaaseen määritykseen.



KUVA 9.4. FFT-muunnoksen esimerkkikuvia ilman ikkunointia (ylhäällä) ja ikkunoinnin kanssa (alhaalla). Käytetty on FFT-online-palvelua Watts (2004). Kuvat ovat harmaasävyn amplitudispektrejä $|\mathcal{F}_{uv}|$, piirretty niin, että origo $u = v = 0$ on keskellä, katso liite C.

9.5.1 GRAVSOFT-ohjelmisto

GRAVSOFT-geoidilaskentaohjelmisto on tehty pääosin Tanskassa. Tekijöinä ovat toimineet muun muassa Carl Christian Tscherning[12], René

[12] Carl Christian Tscherning (1942–2014) oli tunnettu tanskalainen fysikaalinen geodeetti ja Maan painovoimakentän tutkija. Hän teki uraauurtavaa työtä tilastollisten laskentamenetelmien parissa Maan painovoimakentän mallintamiseksi erityyppisistä mittauksista.

Forsberg, Per Knudsen, norjalainen Dag Solheim ja kreikkalainen Dimitris Arabelos. Ohjelmiston käsikirja on Forsberg ja Tscherning (2008).

Tämä paketti on laajassa käytössä ja tarjoaa FFT-geoidimäärityksen varianttien lisäksi esimerkiksi pienimmän neliösumman kollokaatiomenetelmän sekä eri maastoefektien laskentaan soveltuvia rutiineja. Sen levinneisyyttä selittää osittain, että se on tieteelliseen käyttöön ilmainen ja toimitetaan lähdekoodin muodossa. Se on myös hyvin dokumentoitu. Sille on löytynyt myös kaupallisia käyttäjiä, esimerkiksi öljyteollisuudessa.

GRAVSOFTia on käytetty paljon myös opetuksessa, esimerkiksi monessa IAG:n (Kansainvälisen geodeettisen assosiaation) järjestämässä tutkijakoulussa eri maissa. ISG, Geoid Schools.

9.5.2 *Suomen FIN2000-geoidi*

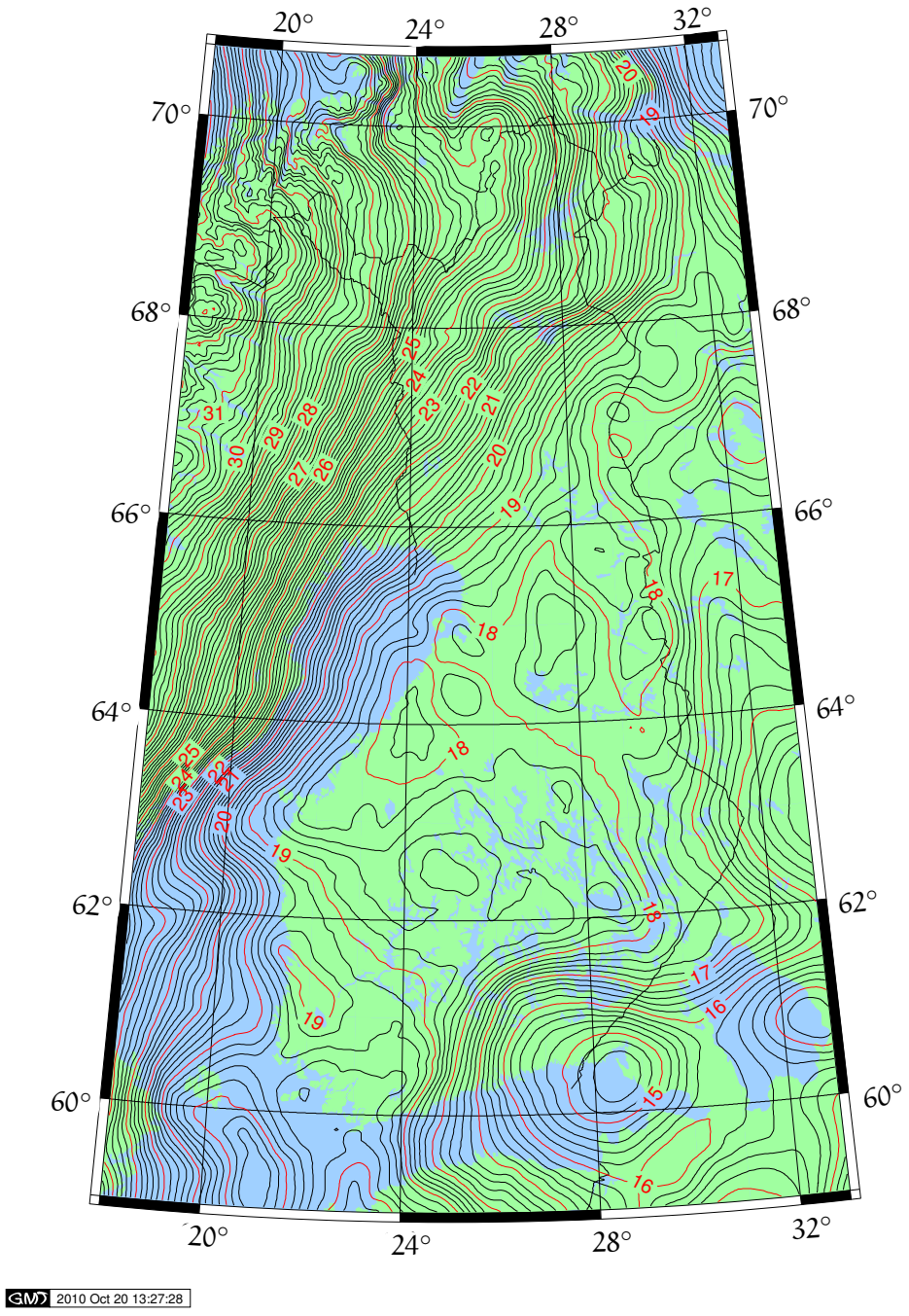
Tällä hetkellä Suomessa on käytössä kaksi geoidimallia: FIN2000 (kuva 9.5) ja FIN2005N00 (Bilker-Koivula ja Ollikainen, 2009). Ensimmäinen malli on vertauspinta N60-korkeusjärjestelmälle: sen käyttö GNSS-paikannuksen kanssa mahdollistaa pisteiden N60-korkeuden määrityksen. Malli antaa geoidin korkeuksia GRS80-vertausellipsoidin yläpuolella. Toinen malli on vastaavasti vertauspinta uudelle N2000-korkeusjärjestelmälle. Sekin antaa korkeuksia GRS80-ellipsoidista.

Mallien FIN2000 ja FIN2005N00 tarkkuudet (keskivirheet) ovat tasolla $\pm$ 2–3 cm.

9.6 FFT-laskennan käyttö muissa yhteyksissä

9.6.1 *Satelliittialtimetria*

Tanskalaistutkijat Per Knudsen ja Ole Balthasar Andersen ovat laskeneet maailman valtameren altimetrisen painovoimakartan invertoimalla satelliittialtimetriasta saatuja ”geoidikorkeuksia” painovoima-anomalioiksi (Andersen ym., 2010). Tämän menetelmän käytön edelläkä-



Kuva 9.5. Suomen FIN2000-geoidi. Aineisto © Geodeettinen laitos.

vijä on ollut Kaliforniassa sijaitsevan Scrippsin merentutkimuslaitoksen David Sandwell, esimerkiksi Garcia ym. (2014). Kartan lyhytaaltoiset piirteet kertovat merenpohjan muodoista.

9.6.2 *Satelliittipainovoimamissiot ja ilmagravimetria*

Myös painovoimasatelliittien, kuten CHAMP, GRACE ja GOCE, antamia aineistoja voidaan käsitellä FFT-menetelmällä alueellisesti: GOCE:n tapauksessa gradiometristen mittausten inversiolasku tuottaa satelliittitason mittauksista geoidin korkeuksia Maan pinnalla. Myös ilmagravimetriamittaukset käsitellään tällä tavoin käyttäen FFT:tä. Tätä tehtävää kutsutaan nimellä "harmonisesti alaspäin jatkaminen" ("*harmonic downwards continuation*"), ja se on periaatteessa epästabiili.

Ilmagravimetria on käypä laajojen alueiden gravimetrisen kartoituksen menetelmä. Pioneeriaikana kartoitettiin Grönlannin painovoimakenttä ja monta aluetta Arktiksen ja Etelämantereen ympärillä. Myöhemmin mitattiin Brasilian Amazonaksen, Mongolian ja Etiopian (Bedada, 2010) kaltaisia alueita, joista ei ollut olemassa kattavaa terrestristä painovoima-aineistoa. Ilmagravimetrian vahvuutena on, että laajoja alueita saadaan mitattua nopeasti ja homogeenisesti.

9.7 Maastokorjausten laskenta FFT:llä

*Maastokorjau*s on hyvin paikallinen ilmiö, jonka laskentaan tarvitaan korkean erotuskyvyn maastotietoa suhteellisen pieneltä alueelta laskentapisteen ympäri. Näin ollen maastokorjauksen laskeminen on kuin luotu FFT-menetelmää varten.

Näytetään, miten maastokorjaus voidaan laskea FFT:n avulla yksinkertaisella ja tehokkaalla tavalla. Tehdään seuraavat yksinkertaistavat *oletukset*:

- Maaston kaltevuudet ovat suhteellisen loivia.
- Maankuoren tiheys ρ on vakio.

- Maa on litteä — ”kenkälaatikkomaailma”.

Nämä oletukset eivät ole välttämättömiä. Yleinen tapaus johtaa kuitenkin yhtälöiden viidakkoon eikä auta käsitteellistä ymmärrystä.

Maastokorjaus, laskentapisteen korkeustason H ylä- ja alapuolella olevien tai puuttuvien topografisten massojen yhteisvaikutuksen poisto, lasketaan näillä oletuksilla seuraavalla suorakulmaisella yhtälöllä, joka antaa kalliopatsaiden vetovoiman pystysuuntaisen komponentin (kuva 6.5):

$$\begin{aligned} \mathrm{TC}(x,y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{G\rho\left(H'(x',y') - H(x,y)\right)}{\ell^2} \cos\theta \, dx' \, dy' = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{G\rho\,(H' - H)}{\ell^2} \cdot \tfrac{1}{2} \frac{H' - H}{\ell} dx' \, dy' = \\ &= \tfrac{1}{2} G\rho \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(H' - H)^2}{\ell^3} dx' \, dy'. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Tässä $G\rho\,(H' - H)\big/\ell^2$ on patsaan vetovoima ja $\frac{1}{2}\,(H' - H)\big/\ell$ on voimavektorin — jonka oletetaan tulevan kalliopatsaan keskipisteeltä — ja pystysuunnan välisen kulman θ kosini. Tämä on niin sanottu *prismamenetelmä*.

Tehdään lineaarinen approksimaatio, jossa ℓ, vinoetäisyys laskentapisteen (x, y) ja liikkuvan datapisteen (x', y') välillä, on samalla vaakaetäisyys:

$$\ell^2 \approx (x - x')^2 + (y - y')^2 .$$

Yhtälö 9.8 seuraa suoraan Newtonin gravitaatiolaista. Kun on oletettu, että maasto on suhteellisen loivaa, ℓ on suuri korkeuseron $H' - H$ verrattuna.

Yhtälöstä 9.8 saadaan kehittämällä termeihin:

$$\begin{aligned} \mathrm{TC}(x,y) = \tfrac{1}{2} G\rho H^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\ell^3} \, dx' \, dy' - G\rho H \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{H'}{\ell^3} \, dx' \, dy' + \\ + \tfrac{1}{2} G\rho \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(H')^2}{\ell^3} \, dx' \, dy', \end{aligned} \quad (9.9)$$

jossa jokainen integraali on *konvoluutio* ytimenä ℓ^{-3} ja integroitavina funktioina 1, H' ja $(H')^2$.

Valitettavasti yllä implisiittisesti määritellyllä funktiolla ℓ^{-3} ei ole olemassa Fourier'n muunnosta. Siksi muutetaan yllä olevaa määritelmää hieman lisäämällä pieni termi:

$$\ell^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + \delta^2. \tag{9.10}$$

Yllä olevassa yhtälössä 9.9 termit ovat suuria lukuja, jotka melkein kumoutuvat, antaen lähes oikean tuloksen. Numeerisesti tämä ei ole miellyttävää. Tähän löytyy seuraavaksi esitetty ratkaisu.

Jos ℓ määritellään yhtälön 9.10 mukaisesti, ytimen ℓ^{-3} Fourier'n muunnos on (Harrison ja Dickinson, 1989; Forsberg, 1984):

$$\mathcal{F}\{\ell^{-3}\} = \frac{2\pi}{\delta}\exp(-2\pi\delta q) = \frac{2\pi}{\delta}\left(1 - 2\pi\delta q + \frac{4\pi^2\delta^2 q^2}{1\cdot 2} - \cdots\right),$$

jossa $q \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\widetilde{\nu}_x^2 + \widetilde{\nu}_y^2} = \sqrt{u^2 + v^2}\big/L$, u ja v ovat aaltoindeksejä ja $\widetilde{\nu}_x = u/L$ ja $\widetilde{\nu}_y = v/L$ ovat (lineaarisia) "spatiaalitaajuuksia" eli aaltolukuja x- ja y-suunnissa (x, y)-tasossa. Jos tämä sijoitetaan yhtälöön 9.9, huomataan, että termit, joissa on $1/\delta$ summautuvat nollaksi, ja tietenkin myös termit, joissa on suureen δ positiiviset potenssit häviävät, kun $\delta \to 0$. Saadaan (Harrison ja Dickinson, 1989):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{TC\} \approx \tfrac{1}{2}G\rho H^2\,\mathcal{F}\{1\}\cdot\left(\frac{2\pi}{\delta}(1 - 2\pi\delta q)\right) - \\ - G\rho H\,\mathcal{F}\{H'\}\cdot\left(\frac{2\pi}{\delta}(1 - 2\pi\delta q)\right) + \\ + \tfrac{1}{2}G\rho\,\mathcal{F}\{(H')^2\}\cdot\left(\frac{2\pi}{\delta}(1 - 2\pi\delta q)\right),\end{aligned}$$

jättämällä kaikki δ:n korkeampien potenssien termit pois.

Laita termit toiseen järjestykseen:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{TC\} = \frac{2\pi}{\delta}G\rho\left(\tfrac{1}{2}H^2\,\mathcal{F}\{1\} - H\,\mathcal{F}\{H'\} + \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{(H')^2\}\right) - \\ - 2\pi G\rho\cdot 2\pi q\cdot\left(\tfrac{1}{2}H^2\,\mathcal{F}\{1\} - H\,\mathcal{F}\{H'\} + \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{(H')^2\}\right).\end{aligned}$$

Koska $\mathcal{F}\{1\} = 0$ jos $q \neq 0$, toisen termin sisäinen ensimmäinen termi häviää aina. Kun muistetaan, että laskentapisteen korkeus H on vakio, saadaan

$$\mathcal{F}\{\mathrm{TC}\} = \frac{2\pi}{\delta} G\rho \left(\tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{H^2 - HH' + \tfrac{1}{2}(H')^2\} \right) + \\ + 2\pi G\rho \cdot 2\pi q \cdot \left(H\,\mathcal{F}\{H'\} - \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{(H')^2\} \right)$$

ja käänteinen Fourier'n muunnos antaa

$$\mathrm{TC} = \frac{\pi}{\delta} G\rho \left(H^2 - 2H'H + (H')^2 \right) + \\ + 2\pi G\rho\, \mathcal{F}^{-1}\left\{ 2\pi q \cdot \left(H\,\mathcal{F}\{H'\} - \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{(H')^2\} \right) \right\}.$$

Ensimmäisessä termissä

$$H^2 - 2H'H + (H')^2 = (H - H')^2 = 0$$

pisteessä (x, y), jossa $H' = H$, ja saadaan

$$\mathrm{TC} = 4\pi^2 G\rho\, \mathcal{F}^{-1}\left\{ q \cdot \left(H\,\mathcal{F}\{H'\} - \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{(H')^2\} \right) \right\},$$

josta nyt murheenkryyni $1/\delta$ on hävinnyt.

Tämän "regularisoinnin" tai "renormalisoinnin" *edellytyksenä* on, että pisteen (x, y) kohdalla $H' = H$, eli evaluointi tapahtuu Maan pinnalla. Yllä olevat Fourier'n muunnokset evaluoidaan FFT-menetelmällä.

Maastokorjauksen TC laskemiseksi maaston *ulkoisessa tilassa* — esimerkit ovat ilmagravimetria, merenpohjan vaikutus merenpinnalla ja Mohorovičićin rajapinnan vaikutus Maan pinnalla — löytyvät tekniikat, jotka ilmaisevat TC konvoluutioiden summaksi, Taylorin sarjakehitelmäksi. Varhainen artikkeli tästä aiheesta on Parker (1972).

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä on konvoluution määritelmä?

2) Selosta konvoluutiolause.
3) Varmista, että yhtälön 9.2 molempien puolien dimensiot täsmäävät.
4) Mikä on spatiaalitaajuus? Mikä on lineaarisen ja pyöreän spatiaalitaajuuden välinen ero?
5) Selosta Strang van Heesin menetelmän perusajatus.
6) Mitkä muut lähestymistavat ovat olemassa FFT-menetelmän soveltamiseksi kaarevalla pallo- tai ellipsoidisella pinnalla?
7) Miksi data-alueen reunustamista ja laskenta-alueen ikkunointia tarvitaan?
8) Geoidimäärityksen lisäksi, missä fysikaalisessa geodesiassa käytetään FFT-menetelmää?
9) Kun lasketaan maastokorjaus Maan pinnalla, selitä derivoinnissa käytetty ”δ-temppu”. Miksi se on tarpeen ja miten δ saadaan häviämään?

Tilastolliset menetelmät

10

10.1 Epävarmuuden rooli geofysiikassa

Geofysiikassa tuloksia saadaan usein epävarman, epätäydellisen tai muuten puutteellisen havaintoaineiston perusteella. Sama pitää paikkansa Maan painovoimakentän tutkimuksessa: esimerkiksi painovoimahavaintojen tiheys Maan pinnalla vaihtelee suuresti, ja laajat alueet valtamerillä ja napa-alueilla ovat vain hyvin harvan mittausverkon peittämiä. Puhutaan vajavaisesta spatiaalisesta otannasta (”*spatial undersampling*”).

Toisaalta avaruudesta käsin toimivat mittausteknologiat kattavat tavallisesti koko maapallon valtamerineen kaikkineen. Ne eivät kuitenkaan aina mittaa kovin suurella *erotuskyvyllä*. Menetelmän erotuskyky voi olla rajallinen, mikä pätee esimerkiksi satelliittiratojen häiriöistä lasketuille painovoimakentän parametreille, tai havaintolaitteet mittaavat vain suoraan satelliittiradan alla, kuten satelliittialtimetria.

Toinen usein relevantti epävarmuustekijä on, että Maan pinnalla voidaan tehdä tarkkoja havaintoja mutta Maan sisällä epävarmuus on paljon suurempi ja tiedot saadaan paljon epäsuoremmalla tavalla.

Edellisissä luvuissa kuvailtiin tekniikoita, joiden avulla voitaisiin laskea Maan painovoimakentän haluttuja arvoja tai parametreja olettaen, että esimerkiksi painovoima-anomaliat olisivat saatavissa kaikkialta Maan pinnalta mielivaltaisen korkealla erotuskyvyllä. Tässä luvussa

katsotaan, minkälaisia matemaattisia apuvälineitä voidaan käyttää reaalimaailman tilanteissa, joissa näin ei ole.

10.2 Lineaariset funktionaalit

Kuvausta, joka liittää jokaiseen funktioavaruuteen kuuluvaan funktioon tietyn numeerisen arvon, kutsutaan matematiikassa *funktionaaliksi*. Sellainen on esimerkiksi osittaisderivaatta tietyssä pisteessä x_0:

$$f \mapsto \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0}.$$

Triviaali funktionaali on myös *evaluointifunktionaali*, funktioarvo itse (siis "nollas derivaatta"), tietylle argumenttiarvolle,

$$f \mapsto f(x_0).$$

Toiset funktionaalit ovat esimerkiksi integraali tietyn alueen σ yli:

$$f \mapsto \int_\sigma f(x)\, dx,$$

ja niin edelleen.

Voimme kirjoittaa symbolisesti

$$L = \frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}, \quad \text{merkityksellä} \quad L\{f\} = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0}.$$

Funktionaali tai operaattori on *lineaarinen*, jos

$$L\{\alpha f + \beta g\} = \alpha L\{f\} + \beta L\{g\}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Muista, että kaikki osittaisderivaatat, kuten myös *Laplacen operaattori* Δ, ovat lineaarisia.

Fysikaalisessa geodesiassa mielenkiintoiset funktionaalit ovat kaikki funktion $T(\phi, \lambda, R) = T(\phi, \lambda, r)|_{r=R}$, siis pallon muotoisen Maan pinnan häiriöpotentiaalin, funktionaaleja. Teoriassa käytetään siis pal-
1 loapproksimaatiota[1], ja pallon pinta, säde R, vastaa keskimerenpintaa.

Esimerkiksi pisteen P häiriöpotentiaali $T_P \stackrel{\text{def}}{=} T(\phi, \lambda, R)$ merenpinnan tasolla paikalla (ϕ, λ) on sellainen funktionaali:

$$T(\cdot, \cdot, R) \mapsto T(\phi, \lambda, R).$$

Sopiva funktionaali löytyy myös, jos piste P ei ole merenpinnan tasolla:

$$T(\cdot, \cdot, R) \mapsto T(\phi, \lambda, r).$$

Jos suure ei ole häiriöpotentiaali, vaan vaikkapa painovoima-anomalia tai luotiviivan poikkeama:

$$T(\cdot, \cdot, R) \mapsto \Delta g(\phi, \lambda, r), \qquad \begin{aligned} T(\cdot, \cdot, R) &\mapsto \xi(\phi, \lambda, r), \\ T(\cdot, \cdot, R) &\mapsto \eta(\phi, \lambda, r). \end{aligned}$$

Kaikki nämä ovat myös *lineaarisia* funktionaaleja. Itse asiassa jos kirjoitetaan

$$T(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi) \left(a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda \right),$$

jopa pallofunktiokehitelmän kertoimet a_{nm}, b_{nm} ovat kaikki häiriöpotentiaalin T lineaarisia funktionaaleja:

$$T(\cdot, \cdot, R) \mapsto a_{nm}, \qquad T(\cdot, \cdot, R) \mapsto b_{nm}.$$

Tässä $T(\cdot, \cdot, R)$ on lyhenne koko funktiolle

$$T(\phi, \lambda, R), \qquad \phi \in \left[-\pi/2 \, , + \pi/2 \right], \quad \lambda \in \left[0, 2\pi \right).$$

10.3 Tilastotiede Maan pinnalla

Tilastotieteessä määritellään *stokastinen prosessi* stokastiseksi suureeksi eli satunnaissuureeksi, jonka *arvojoukko* eli kodomeeni on funktioavaruus. Toisin sanoen se on satunnaissuure, jonka realisaatioarvot ovat

[1] Tämä ei ole välttämätöntä, mutta approksimaation aiheuttama virhe on tavallisesti pieni.

funktioita. Stokastinen prosessi voi olla ajassa kehittyvä suure, jonka tarkka käyttäytyminen on epävarmaa. Hyvä esimerkki tästä on satelliitin rata. Samalla tavalla kuin reaaliarvoiselle stokastiselle suureelle $\underline{x}$ voidaan määritellä *odotusarvo* $E\{\underline{x}\}$ ja varianssi

$$\Sigma_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Var}\{\underline{x}\} = E\left\{\left(\underline{x} - E\{\underline{x}\}\right)^2\right\},$$

voidaan näin tehdä myös stokastiselle prosessille. Ainoa ero on, että näin saadaan *funktioita*.

Olkoon esimerkiksi stokastinen prosessi $\underline{x}(t)$ ajan funktio. Silloin voidaan määritellä sen varianssifunktio seuraavasti:

$$C_{xx}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Var}\{\underline{x}(t)\}.$$

Stokastiselle prosessille voidaan kuitenkin määritellä paljon enemmän, esimerkiksi saman prosessin arvojen kovarianssi eri ajanhetkien välillä eli *autokovarianssi*:

$$A_x(t_1, t_2) = C_{xx}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cov}\{\underline{x}(t_1), \underline{x}(t_2)\} = \\ = E\left\{\left(\underline{x}(t_1) - E\{\underline{x}(t_1)\}\right)\left(\underline{x}(t_2) - E\{\underline{x}(t_2)\}\right)\right\}.$$

Samalla tavalla, jos on käytettävissä kaksi eri prosessia, voidaan niiden välille määritellä *ristikovarianssi*:

$$C_{xy}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cov}\{\underline{x}(t_1), \underline{y}(t_2)\} = \\ = E\left\{\left(\underline{x}(t_1) - E\{\underline{x}(t_1)\}\right)\left(\underline{y}(t_2) - E\{\underline{y}(t_2)\}\right)\right\}.$$

Stokastisen prosessin argumentti on tavallisesti *aika* t. Geofysiikassa tutkitaan kuitenkin stokastisia prosesseja, joiden argumentit ovat *paikkoja* Maan pinnalla: puhutaan prosesseista, jotka ovat muotoa $\underline{x}(\phi, \lambda)$. Auto- ja ristikovarianssien määrittäminen tapahtuu muuten samalla tavalla, mutta maapallon tapauksessa on olemassa erikoinen ongelma. Stokastinen suure määritellään yleisesti suureena $\underline{x}$, josta saadaan

realisaatioita $x_1, x_2, x_3, \ldots$, joilla yhdessä on tiettyjä tilastollisia ominaisuuksia.

Klassinen esimerkki on *nopan heitto*. Nopan voi heittää yhä uudelleen ja uudelleen, ja heittojen tuloksilla voi harrastaa tilastotiedettä. Toinen klassinen esimerkki on *mittaus*. Saman suureen mittaus voidaan toistaa, ja toistetaankin, tarkkuuden parantamiseksi.

Maapallon pinnalla määritellyn stokastisen prosessin osalta tilanne on toinen.

Meillä on vain yksi maapallo.

Tästä syystä tilastotiedettä pitää harrastaa hieman eri tavalla.

Kun annettuna on stokastinen prosessi — vaikkapa joku geofysikaalinen suure — Maan pinnalla, $\underline{x}(\phi, \lambda)$, määritellään tilastollisen odotusarvon $E\{\cdot\}$ vastineeksi *maantieteellinen keskiarvo*

$$M\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma x(\phi, \lambda)\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x(\phi, \lambda) \cos\phi \, d\phi \, d\lambda. \tag{10.1}$$

Tässä $x(\phi, \lambda)$ on prosessin $\underline{x}$ yksi ja ainoa realisaatio, joka on olemassa tällä maapallolla.

Ilmeisesti määritelmä on järkevä vain siinä tapauksessa, että prosessin $\underline{x}(\phi, \lambda)$ tilastollinen käyttäytyminen on samanlainen kaikkialla Maan pinnalla, sijainnista (ϕ, λ) riippumatta. Tätä kutsutaan homogeenisuusolettamukseksi. Se on itse asiassa olettamus, että maapallon pallosymmetria ulottuu kentän $\underline{x}$ tilastolliseen käyttäytymiseen.

Samalla tavalla kuin tilastollinen varianssi määriteltiin odotusarvon perusteella, voimme määritellä *maantieteellisen varianssin*:

$$C_{xx}(\phi, \lambda) = \mathrm{Var}\{x(\phi, \lambda)\} \stackrel{\text{def}}{=} M\left\{ \left(x - M\{x\} \right)^2 \right\}. \tag{10.2}$$

Painovoima-anomalioiden $\Delta g(\phi, \lambda)$ globaali keskiarvo *häviää*[2] niiden [2]

määritelmän perusteella:

$$M\{\Delta g\} = 0.$$

Silloin yhtälö 10.2 yksinkertaistuu seuraavaksi:

$$C_{\Delta g \Delta g}(\phi, \lambda) = \mathrm{Var}\{\Delta g(\phi, \lambda)\} = M\{\Delta g^2\} = \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma \big(\Delta g(\phi, \lambda)\big)^2 \, d\sigma.$$

Tässä annettu maantieteellisen keskiarvon $M\{\cdot\}$ määritelmä perustuu yhden ja ainoan realisaation *integrointiin* koko maapallon pinnan yli. Kuten nähtiin, tilastotieteessä keskiarvo määritellään hieman eri tavalla, stokastisen prosessin *odotusarvona*. Painovoima-anomalioiden tapauksessa se on $E\{\underline{\Delta g}\}$, jossa $\underline{\Delta g}$ on anomalia *stokastisena prosessina*. Toisin sanoen se Δg:n arvojen sarja, joka syntyy, jos tarkastellaan loputonta satunnaisesti syntyneiden maapallojen sarjaa. Ei kovin käytännöllistä!

Siinä tapauksessa, että stokastisen prosessin odotusarvo on sama kuin integrointimenetelmällä laskettu yhden realisaation keskiarvo — ja muutkin tilastolliset ominaisuudet ovat vastaavasti samoja — puhutaan *ergodisesta prosessista*. Ergodisuuden todistaminen empiirisesti on geofysiikassa tavallisesti hankalaa tai mahdotonta.

10.4 Painovoimakentän kovarianssifunktio

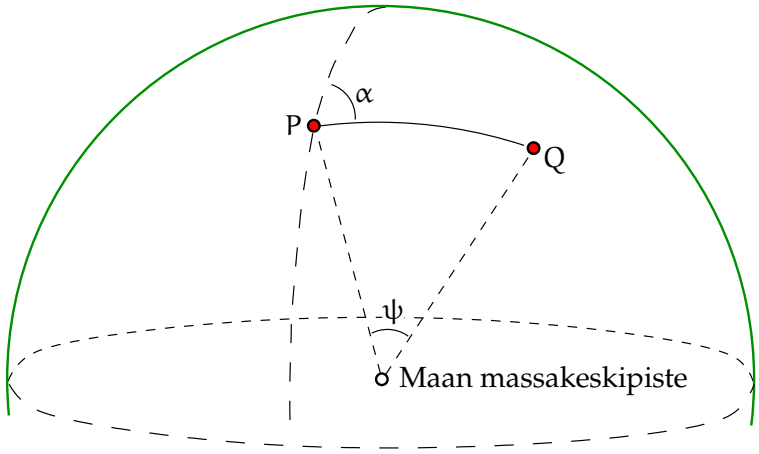
Kovarianssifunktion määrittäminen pisteiden P ja Q välillä on monimutkaisempaa. Yhtälöiden 10.1 ja 10.2 tapaista lähestymistapaa ei voida käyttää suoraan, koska sekä Δg_P että Δg_Q:

$$\Delta g_P = \Delta g(\phi_P, \lambda_P), \qquad \Delta g_Q = \Delta g(\phi_Q, \lambda_Q),$$

voivat liikkua toisistaan riippumatta koko Maan pinnan yli.

Seuraavassa oletetaan, että laskettava kovarianssi riippuu vain pisteiden P ja Q *suhteellisesta* sijainnista. Homogeenisessa painovoimakentässä

[2] Tämä ei pidä tarkasti ottaen paikkaansa, jos esimerkiksi anomalioiden laskennassa käytetty normaalipainovoimakenttä sisältää ilmakehän massan, mutta merenpinnan lähellä mitatut painovoima-arvot eivät sisällä ilmakehän vetovoimaa.



KUVA 10.1. Geosentrisen kulmaetäisyyden ja atsimuuttikulman määritelmä.

kovarianssifunktio ei riipu pisteiden absoluuttisesta sijainnista, vaan ainoastaan pisteiden P ja Q välisestä sijainti*erosta*.

Kirjoitetaan

$$\phi_Q = \phi_Q(\phi_P, \lambda_P, \psi_{PQ}, \alpha_{PQ}), \quad \lambda_Q = \lambda_Q(\phi_P, \lambda_P, \psi_{PQ}, \alpha_{PQ}).$$

ϕ_Q ja λ_Q ovat laskettavissa[3], jos tunnetaan ϕ_P ja λ_P sekä *geosentrinen kulmaetäisyys* ψ_{PQ} ja *atsimuuttikulma* α_{PQ}. Katso kuva 10.1.

[3]

Nyt voi kirjoittaa

$$\Delta g_Q = \Delta g_Q\Big(\phi_Q(\phi_P, \lambda_P, \psi_{PQ}, \alpha_{PQ}), \lambda_Q(\phi_P, \lambda_P, \psi_{PQ}, \alpha_{PQ})\Big) = \\ = \Delta g_Q(\phi_P, \lambda_P, \psi_{PQ}, \alpha_{PQ}),$$

ja voi määritellä *kovarianssifunktioksi*

$$C_{\Delta g \Delta g}(\psi_{PQ}, \alpha_{PQ}) \stackrel{\text{def}}{=} M\Big\{\Delta g_P(\phi_P, \lambda_P)\, \Delta g_Q(\phi_P, \lambda_P, \psi_{PQ}, \alpha_{PQ})\Big\} = \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma \Delta g_P(\phi_P, \lambda_P)\, \Delta g_Q(\phi_P, \lambda_P, \psi_{PQ}, \alpha_{PQ})\, d\sigma_P. \quad (10.3)$$

Myös tässä M on maantieteellinen keskiarvo-operaattori. Ensin kiinnitetään piste Q suhteessa pisteeseen P: sekä atsimuutti α_{PQ} että etäisyys

4 ψ_{PQ} pidetään vakioina[4]. Piste P, ja piste Q sen mukana, liikutetaan koko Maan pinnan yli. Lasketaan vastaava integraali koko yksikköpallon σ_P yli ja jaetaan arvolla 4π:

$$C_{\Delta g\Delta g}(\psi_{PQ}, \alpha_{PQ}) = M\{\Delta g_P \, \Delta g_{Q(P)}\} = \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma \Delta g_P \, \Delta g_{Q(P)} \, d\sigma = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Delta g_P \, \Delta g_{Q(P)} \, \cos\phi \, d\phi \, d\lambda,$$

jossa käytetään $d\sigma = \cos\phi \, d\phi \, d\lambda$, ja $\cos\phi$ on yksikköpallon koordinaattien $(\phi, \lambda) = (\phi_P, \lambda_P)$ *Jacobin determinantti*.

Homogeenisuusolettamuksen lisäksi teemme vielä *isotropiaolettamuksen*: kovarianssifunktio — yleisemmin painovoimakentän tilastollinen käyttäytyminen — *ei* riipu pisteparin (P, Q) välisestä suunnasta eli atsimuutista α_{PQ}, vaan ainoastaan niiden välisestä kulmaetäisyydestä ψ_{PQ}. Tämäkin on homogeenisuuden lailla maapallon pallosymmetrian eräs ilmenemismuoto. Tässä tapauksessa voimme laskea maantieteellisen keskiarvon hieman eri tavalla, keskiarvostamalla myös kaikkien atsimuuttikulmien $\alpha_{PQ} \in [0, 2\pi)$ yli:

$$C_{\Delta g\Delta g}(\psi_{PQ}) \overset{\text{def}}{=} M'\{\Delta g_P \, \Delta g_{Q(P)}\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\{\Delta g_P \, \Delta g_{Q(P)}\} \, d\alpha_{PQ} = \\ = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Delta g_P \, \Delta g_{Q(P)} \, \cos\phi \, d\phi \, d\lambda \, d\alpha_{PQ}. \quad (10.4)$$

[3] Puhutaan *geodeettisesta päätehtävästä* pallolla.

[4] Kriittinen lukija voi huomauttaa, että vaikka kulmaetäisyys ψ_{AB} on olemassa riippumatta maantieteellisten koordinaattien määritelmästä, näin ei ole atsimuuttikulman α_{AB} tapauksessa: se riippuu meridiaanin paikallisesta suunnasta. Jos yhtälössä 10.3 kulma α_{AB} on tavallinen geodeettinen atsimuutti, se ottaa huomioon vain tietyn mahdollisen atsimuuttiriippuvuuden kuvion. Tästä syntyy ajatus yleistyksestä atsimuuttikulmiin, jotka ovat määriteltyjä suhteessa Maan pinnan yleisiin kaarevalinjaisiin koordinaatteihin.
Myös *isotropia* tulisi silloin ymmärtää atsimuuttiriippuvuuden puuttumisena ei vain maantieteellisissä koordinaateissa vaan kaikissa mahdollisissa kaarevalinjaisissa koordinaateissa.

Huomautus Maan todellinen painovoimakenttä ei ole kovin homogeeninen eikä kovin isotrooppinenkaan, mutta siitä huolimatta molempia hypoteeseja käytetään laajasti.

10.5 Pienimmän neliösumman kollokaatio

10.5.1 Stokastiset prosessit yhdessä ulottuvuudessa

Kollokaatio on tilastollinen estimointitekniikka, jota käytetään *stokastisen prosessin* arvojen estimoimiseksi ja estimaattien epävarmuuden, kuten keskivirheiden, laskemiseksi.

Olkoon $\underline{s}(t)$ stokastinen prosessi ja $C(t_i, t_j)$ sen autokovarianssifunktio. Olkoon lisäksi prosessi *stationaarinen*, toisin sanoen mille tahansa kahdelle aikahetkelle t_i, t_j pätee $C(t_i, t_j) = C(t_j - t_i) = C(\Delta t)$. Argumentti t on yleensä aika, mutta se voi olla mikä tahansa parametri, esimerkiksi kuljettu matka.

Tästä prosessista on tehty *havaintoja* ajan hetkillä $t_1, t_2, \ldots, t_N$, kun prosessin vastaavat arvot näillä hetkillä ovat $\underline{s}(t_1)$, $\underline{s}(t_2)$, $\ldots$, $\underline{s}(t_N)$. Oletetaan aluksi, että nämä arvot ovat *virheettömiä* havaintoarvoja. Silloin havainnot ovat prosessin $\underline{s}$ funktioarvot, stokastiset suureet, joiden varianssi-kovarianssimatriisi voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\mathrm{Var}\{\underline{s}_i\} = \begin{bmatrix} C(t_1,t_1) & C(t_1,t_2) & \cdots & C(t_1,t_N) \\ C(t_2,t_1) & C(t_2,t_2) & \cdots & C(t_2,t_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t_N,t_1) & C(t_N,t_2) & \cdots & C(t_N,t_N) \end{bmatrix}.$$

Tätä autokovarianssimatriisia kutsutaan myös $\underline{s}$:n *signaalivarianssimatriisiksi*. Tähän käytetään symbolia C_{ij}, sekä matriisin yhdelle alkiolle $C_{ij} = C(t_i, t_j)$ että koko matriisille: $C_{ij} = \big[C(t_i, t_j), i, j = 1, \ldots, N\big]$. Symboli $\underline{s}_i$ taas merkitsee prosessin arvoista $\big[\underline{s}(t_i), i = 1, \ldots, N\big]$ koostuvaa vektoria — tai yhtä sen alkioista $\underline{s}(t_i)$.

Huomaa, että jos funktio $C(t, t')$ tai $C(\Delta t)$ on tiedossa, koko matriisi

ja kaikki sen alkiot voidaan laskea sillä ehdolla, että kaikki argumenttiarvot eli havaintojen ajanhetket t_i ovat myös tiedossa.

Olkoon ongelman asettelu se, että pitää *estimoida* eli *predikoida* prosessin $\underline{s}$ arvo ajan hetkellä T, siis $\underline{s}(T)$, käyttäen hyväksi yllä kuvattuja *havaintoja* $\underline{s}(t_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Samalla tavalla, kun yllä laskettiin $\underline{s}(t_i)$:n ja $\underline{s}(t_j)$:n väliset kovarianssit — signaalivarianssimatriisin C_{ij} alkiot — lasketaan myös $\underline{s}(T)$:n ja kaikkien $\underline{s}(t_i)$, $i = 1, \ldots, N$ väliset kovarianssit. Saadaan

$$\mathrm{Cov}\{\underline{s}(T), \underline{s}(t_i)\} = \begin{bmatrix} C(T,t_1) & C(T,t_2) & \cdots & C(T,t_N) \end{bmatrix}.$$

Tähän voidaan käyttää merkintää C_{Tj}. On oletettu, että on vain yksi aikahetki T, johon estimointi kohdistuu. Yleistys tilanteeseen, jossa on useita T_p, $p = 1, \ldots, M$, on suoraviivainen. Silloin signaalikovarianssimatriisista tulee $M \times N$ -kokoinen:

$$\mathrm{Cov}\left\{\underline{s}(T_p), \underline{s}(t_i)\right\} = \begin{bmatrix} C(T_1,t_1) & C(T_1,t_2) & \cdots & C(T_1,t_N) \\ C(T_2,t_1) & C(T_2,t_2) & \cdots & C(T_2,t_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C(T_M,t_1) & C(T_M,t_2) & \cdots & C(T_M,t_N) \end{bmatrix}.$$

Tähän voidaan käyttää yleisempää merkintää C_{pj}.

10.5.2 Signaali ja kohina

Prosessia $\underline{s}(t)$ kutsutaan *signaaliksi*, joka on fysikaalinen ilmiö, josta olemme *kiinnostuneita*. On myös olemassa fysikaalisia ilmiöitä, jotka ovat muuten samanlaisia, mutta joista me *emme* ole kiinnostuneita: päinvastoin haluamme *poistaa* niiden vaikutuksen. Sellaisia stokastisia prosesseja kutsutaan *kohinaksi*.

Kun suoritetaan havainto, jonka tarkoitus on saada arvo suureelle $\underline{s}(t_i)$, saamme todellisuudessa arvon, joka ei ole absoluuttisen tarkka. Todellinen havainto on siis

$$\underline{\ell}_i = \underline{s}(t_i) + \underline{n}_i. \tag{10.5}$$

Tässä $\underline{n}_i$ on stokastinen suure: *havaintovirhe* eli *kohina*. Olkoon sen varianssi, tai tarkemmin useiden havaintojen yhteinen kohinavarianssimatriisi, D_{ij}. Tämä on samanlainen matriisi kuin yllä C_{ij}: molemmat ovat symmetrisiä ja positiivisesti definiittejä. Ainoa ero on, että D_{ij} edustaa *kohinaa*, ilmiötä, josta emme ole kiinnostuneita. Usein saa olettaa, että kahden eri havainnon $\underline{\ell}_i$ ja $\underline{\ell}_j$ virheet $\underline{n}_i$ ja $\underline{n}_j$ eivät korreloidu, jolloin D_{ij} on lävistäjämatriisi.

10.5.3 Estimaattori ja ennustusvarianssi

Nyt rakennetaan *estimaattori*

$$\widehat{s}(T_p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \Lambda_{pi}\underline{\ell}_i,$$

käytettävissä olevien havaintojen $\underline{\ell}_i$ lineaariyhdistelmänä. Tämän estimaattorin elämän tarkoitus on päästä mahdollisimman lähelle $\underline{s}(T_p)$. Siis minimoitava suure on erotus

$$\widehat{s}(T_p) - \underline{s}(T_p) = \Lambda_{pi}\underline{\ell}_i - \underline{s}(T_p) = \Lambda_{pi}\left(\underline{s}(t_i) + \underline{n}_i\right) - \underline{s}(T_p).$$

Tässä jätettiin kirjoitusmukavuuden vuoksi summausmerkki $\sum$ pois (Einsteinin summauskonventio): Summaamme aina vierekkäisten, identtisten indeksien, tässä tapauksessa i:n, yli.

Tutkitaan tämän erotuksen varianssi, niin sanottu *ennustusvarianssi*:

$$\Sigma_{pp} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Var}\left\{\widehat{s}(T_p) - \underline{s}(T_p)\right\}.$$

Käytämme hyväksi *varianssien kasautumislakea*, yllä annettuja notaatioita sekä tietoamme, että tuskinpa havaintoprosessin kohinan $\underline{n}$ ja signaalin $\underline{s}$ välillä on olemassa fysikaalista yhteyttä eli *korrelaatiota*:

$$\mathrm{Cov}\left\{\left(\underline{s}(t_i) + \underline{n}_i\right), \left(\underline{s}(t_j) + \underline{n}_j\right)\right\} = \\ = \mathrm{Cov}\left\{\underline{s}(t_i), \underline{s}(t_j)\right\} + \mathrm{Cov}\left\{\underline{n}_i, \underline{n}_j\right\} = C_{ij} + D_{ij},$$

ja[5]

[5]

$$\begin{aligned}\Sigma_{pq} &= \mathrm{Cov}\left\{\left(\hat{s}(T_p) - \underline{s}(T_p)\right), \left(\hat{s}(T_q) - \underline{s}(T_q)\right)\right\} = \\ &= \Lambda_{pi}\,\mathrm{Cov}\left\{\left(\underline{s}(t_i) + \underline{n}_i\right), \left(\underline{s}(t_j) + \underline{n}_j\right)\right\}\Lambda_{jq} + \mathrm{Cov}\left\{\underline{s}(T_p), \underline{s}(T_q)\right\} - \\ &\quad - \Lambda_{pi}\,\mathrm{Cov}\left\{\underline{s}(t_i), \underline{s}(T_q)\right\} - \mathrm{Cov}\left\{\underline{s}(T_p), \underline{s}(t_j)\right\}\Lambda_{jq} = \\ &\quad = \Lambda_{pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)\Lambda_{jq} + C_{pq} - \Lambda_{pi}C_{iq} - C_{pj}\Lambda_{jq}. \quad (10.6)\end{aligned}$$

Varianssit eli matriisin päälävistäjän alkiot Σ_{pp} saadaan nyt asettamalla $q = p$.

10.5.4 *Optimaalisuuden osoitus*

Tässä osoitetaan, että optimaalinen estimaattori on todella se, joka tuottaa pienimmät mahdolliset varianssit. Valitse

$$\Lambda_{pj} \stackrel{\text{def}}{=} C_{pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1}.$$

Silloin, yhtälöstä 10.6 ja käyttäen hyväksi matriisien C ja D symmetrisyyttä, saadaan

$$\begin{aligned}\Sigma_{pp} &= C_{pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1}C_{jp} + C_{pp} - \\ &\quad - C_{pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1}C_{jp} - C_{pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1}C_{jp} = \\ &\quad = C_{pp} - C_{pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1}C_{jp}. \quad (10.7)\end{aligned}$$

Tutkitaan seuraavaksi *vaihtoehtoinen valinta*

$$\Lambda_{pj} = C_{pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1} + \delta\Lambda_{pj}.$$

Tässä tapauksessa saadaan sijoittamalla

$$\Sigma'_{pp} = \overbrace{\Lambda_{pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)\Lambda_{jp}}^{\text{I}} + C_{pp}\overbrace{-\Lambda_{pj}C_{jp}}^{\text{II}}\overbrace{-C_{pi}\Lambda_{ip}}^{\text{III}},$$

jossa

[5] Matriisi C_{iq} on matriisin C_{pj}, matriisi Λ_{jq} matriisin Λ_{pi} transpoosi.

$$\begin{aligned} I &= \Lambda_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})\,\Lambda_{jp} = \\ &= \left(C_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})^{-1}+\delta\Lambda_{pj}\right)(C_{ij}+D_{ij})\left((C_{jk}+D_{jk})^{-1}\,C_{kp}+\delta\Lambda_{kp}\right) = \\ &= C_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})^{-1}\,C_{jp} + C_{pi}\delta\Lambda_{ip} + \delta\Lambda_{pi}C_{ip} + \delta\Lambda_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})\,\delta\Lambda_{jp}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II &= -\Lambda_{pj}C_{jp} = -\left(C_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})^{-1}+\delta\Lambda_{pj}\right)C_{jp} = \\ &= -C_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})^{-1}\,C_{jp} - \delta\Lambda_{pi}C_{ip} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} III &= -C_{pi}\Lambda_{ip} = -C_{pi}\left((C_{ij}+D_{ij})^{-1}\,C_{jp}+\delta\Lambda_{ip}\right) = \\ &= -C_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})^{-1}\,C_{jp} - C_{pi}\delta\Lambda_{ip}, \end{aligned}$$

lopputuloksena

$$\Sigma'_{pp} = C_{pp} \overbrace{-C_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})^{-1}\,C_{jp}}^{III} \overbrace{+\delta\Lambda_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})\,\delta\Lambda_{jp}}^{I}.$$

Tässä viimeinen termi — ainoa ero tulokseen 10.7 verrattuna — on positiivinen, koska matriisit C_{ij} ja D_{ij} ovat positiivisesti definiittejä: $\Sigma'_{pp} > \Sigma_{pp}$, paitsi jos $\delta\Lambda_{pi} = 0$. Toisin sanoen yllä annettu ratkaisu

$$\Lambda_{pj} = C_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})^{-1} \quad\Longrightarrow\quad \widehat{s}(T_p) = C_{pi}\,(C_{ij}+D_{ij})^{-1}\,\underline{\ell}_j$$

on *optimaalinen* pienimmän neliösumman — tarkemmin, ennustusvarianssin Σ_{pp} minimoimisen — merkityksessä.

10.5.5 *Painovoima-anomalioiden kovarianssifunktio*

Pienimmän neliösumman kollokaatiota käytetään paljon maanpinnan painovoima-arvojen ja painovoimakentän muiden funktionaaliarvojen optimaaliseksi estimoimiseksi.

Jos on kaksi pistettä P ja Q, joiden mitatut painovoima-anomaliat ovat $\underline{\Delta g}_P = \underline{\Delta g}(\phi_P, \lambda_P)$ ja $\underline{\Delta g}_Q = \underline{\Delta g}(\phi_Q, \lambda_Q)$, näiden kahden anomalian välinen kovarianssin

$$\mathrm{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q\right\}$$

määrittäminen kiinnostaa. Kuten jo argumentoitiin osiossa 10.4, voimme empiirisesti saada sellaisen kovarianssin vain tutkimalla kaikki pisteparit (P, Q), jotka ovat samassa keskinäisessä asennossa maailman ympäri, ja ottamalla niiden keskiarvon käyttäen operaattoria M tai M'.

Tavallisesti kovarianssin oletetaan riippuvan *vain* pisteiden P ja Q välisestä geosentrisestä kulmaetäisyydestä ψ. Silloin puhutaan *isotrooppisesta prosessista* $\underline{\Delta g}(\phi, \lambda)$. Kovarianssi on

$$\mathrm{Cov}\{\Delta g_P, \Delta g_Q\} = M'\{\Delta g_P \Delta g_{Q(P)}\} = C(\psi_{PQ}).$$

Usein käytetty painovoima-anomalioiden kovarianssifunktio on Hirvo-
6 sen[6] kovarianssifunktio:

$$C(\psi) = \frac{C_0}{1 + (\psi/\psi_0)^2}, \tag{10.8}$$

jossa $C_0 = C(0)$ ja ψ_0 ovat painovoimakentän käyttäytymistä kuvaavia parametreja. Suuretta $C_0 = \mathrm{Var}\{\Delta g(\phi, \lambda)\} = M\{\Delta g^2\}$ kutsutaan *signaalivarianssiksi* ja suuretta ψ_0 *korrelaatiopituudeksi*. ψ_0 on se etäisyys, jolla eri pisteiden painovoima-anomalioiden välillä on vielä 50 %
7 korrelaatiota[7].

Paikallisissa sovelluksissa käytetään kulmaetäisyyden ψ sijasta lineaarista etäisyyttä

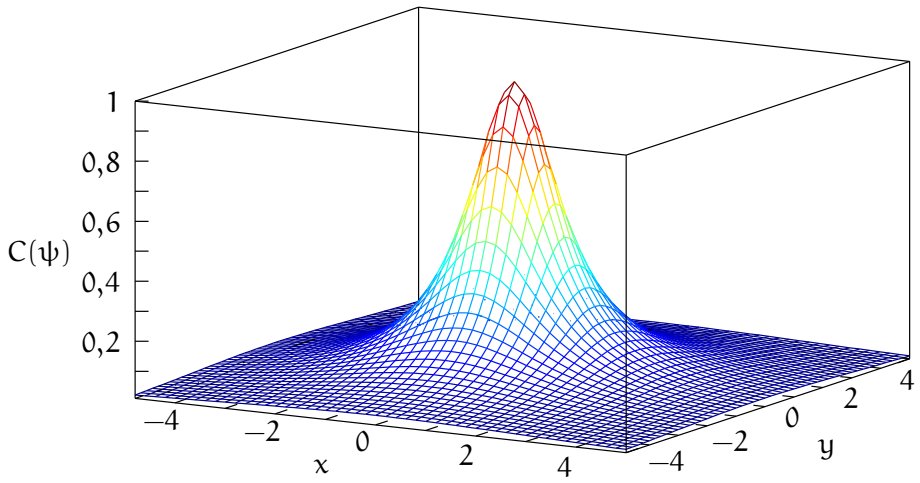
$$s = R\psi,$$

[6] Reino Antero Hirvonen (1908–1989) oli suomalainen geodeetti ja Maan painovoimakentän tutkija.

[7] Korrelaatio on

$$\mathrm{Corr}\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q\} = \frac{\mathrm{Cov}\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\underline{\Delta g}_P\}\,\mathrm{Var}\{\underline{\Delta g}_Q\}}} = \frac{\dfrac{C_0}{1 + (\psi/\psi_0)^2}}{\sqrt{C_0 C_0}} = \frac{1}{1 + (\psi/\psi_0)^2},$$

joka on 0,5 kun $\psi = \psi_0$.



KUVA 10.2. Hirvosen kovarianssifunktio kahdessa ulottuvuudessa. Oletettu on $C_0 = \psi_0 = 1$.

jossa R on maapallon säde. Silloin

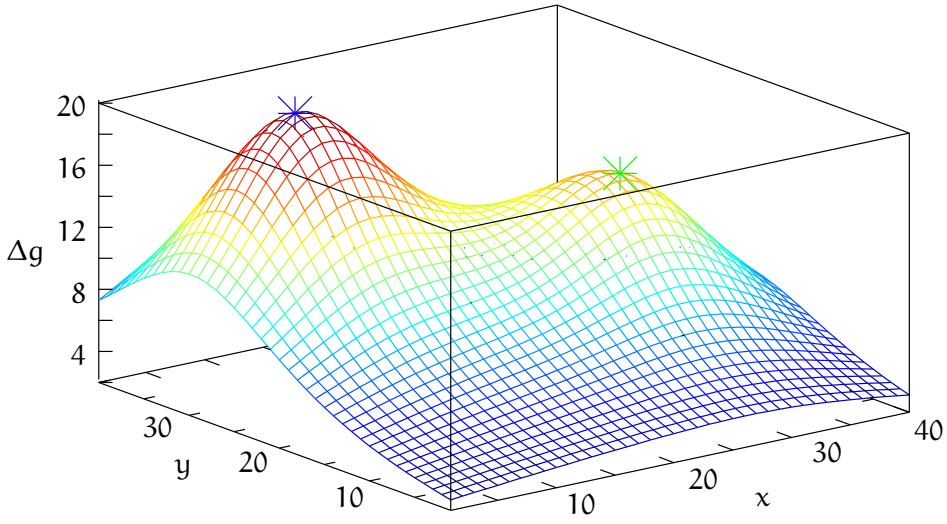
$$C(s) = \frac{C_0}{1 + (s/d)^2}.$$

Tämä yhtälö johdettiin Yhdysvaltain Ohion osavaltion painovoima-aineistosta, mutta se pätee laajemminkin. $C(0) = C_0$, signaalivarianssi. Myös suuretta $d = R\,\psi_0$ kutsutaan korrelaatiopituudeksi. Se on etäisyys d, jolla $C(d) = \frac{1}{2}C_0$, kuten yhtälöstä näkyy.

Suure C_0 vaihtelee huomattavasti alueesta toiseen, sadoista tuhansiin $mGal^2$, ja on yleensä suurimmillaan vuoristoalueilla. Suure d on yleensä muutaman kymmenen kilometrin suuruusluokkaa.

Vaihtoehtoiset funktiot, joita käytetään usein paikallisissa sovelluksissa ovat esimerkiksi stationaarisen Gaussin ja Markovin prosessin kovarianssifunktio sekä sen kvadraattinen variantti:

$$C(\psi) = C_0 \exp\left(-\frac{\psi}{\psi_0}\right), \qquad C(\psi) = C_0 \exp\left(-\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^2\right).$$



KUVA 10.3. Esimerkki pienimmän neliösumman kollokaatiosta. Tässä on annettuna kaksi datapistettä $\underline{\Delta g}_1$ ja $\underline{\Delta g}_2$ (tähtiä), ja piirretty pinta antaa estimoitua arvoa $\widehat{\Delta g}_P$ alueen jokaiselle pisteelle P. Käytetään siis pienimmän neliösumman kollokaatiota painovoimadatan inter- ja ekstrapolointiin.

10.5.6 *Pienimmän neliösumman kollokaatio painovoima-anomalioille*

Jos on annettuna N pistettä $P_i, i = 1, \ldots, N$, joissa on mitattu painovoima-arvot ja laskettu anomaliat $\underline{\Delta g}_i = \underline{\Delta g}(\phi_i, \lambda_i)$, voidaan, kuten yllä, rakentaa *signaalivarianssimatriisi*

$$C_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Var}\left\{\underline{\Delta g}_i\right\} =$$
$$= \begin{bmatrix} C_0 & C(\psi_{12}) & \cdots & C(\psi_{1N}) \\ C(\psi_{21}) & C_0 & \cdots & C(\psi_{2N}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C(\psi_{N1}) & C(\psi_{N2}) & \cdots & C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_0 & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_0 \end{bmatrix},$$

jossa kaikki alkiot $C(\psi_{ij})$ lasketaan yllä annetun kovarianssifunktion 10.8 avulla.

Jos lasketaan myös painovoimaltaan tuntemattomalle pisteelle P:

$$\mathrm{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_i\right\} = \begin{bmatrix} C(\psi_{P1}) & C(\psi_{P2}) & \cdots & C(\psi_{PN}) \end{bmatrix} \stackrel{\mathrm{def}}{=} C_{Pi},$$

saadaan samalla tavalla kuin ennen *pienimmän neliösumman kollokaation* ratkaisuksi

$$\widehat{\Delta g}_P = C_{Pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1} \underline{\ell}_j \approx C_{Pi} C_{ij}^{-1} \underline{\ell}_j,$$

jossa $\underline{\ell}_j = \underline{\Delta g}_j + \underline{n}_j$ on pisteissä $j = 1, \ldots, N$ suoritetut painovoima-anomaliahavainnot. Matriisi D_{ij}, joka jätetään huomiotta, kuvailee havaintojen tekemisen yhteydessä esiintyvää satunnaista havaintovirhettä, mittausepävarmuutta eli *kohinaa* $\underline{n}_i$. Usein D_{ij} on lävistäjämatriisi eli havainnot ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan eivätkä korreloi keskenään.

Voimme laskea myös ratkaisun tarkkuusarvion, *ennustusvarianssin*, yhtälö 10.11:

$$\Sigma_{PP} = C_0 - C_{Pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1} C_{jP} \approx C_0 - C_{Pi} C_{ij}^{-1} C_{jP}$$

yhden tuntemattoman pisteen P tapauksessa. Sen neliöjuuri

$$\sigma_{\Delta g_P} = \sqrt{\Sigma_{PP}}$$

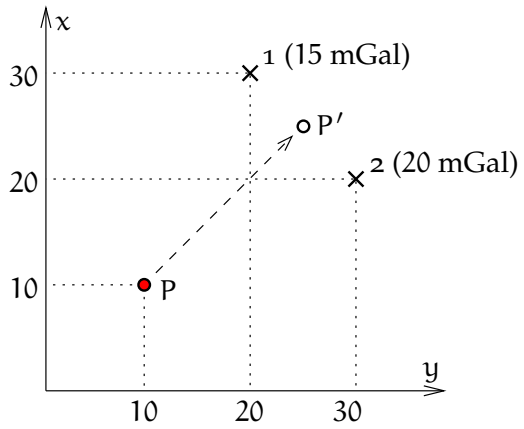
on estimaattorin $\widehat{\Delta g}_P$ *keskivirhe*.

10.5.7 Laskuesimerkki

Katso kuva 10.4. Annettuna on kaksi pistettä, joissa painovoima on mitattu ja painovoima-anomaliat laskettu: $\underline{\Delta g}_1 = 15\,\mathrm{mGal}$, $\underline{\Delta g}_2 = 20\,\mathrm{mGal}$. Koordinaatit x- ja y-suunnassa ovat kilometreissä. Oletetaan, että eri pisteiden painovoima-anomalioiden välillä on voimassa Hirvosen kovarianssifunktio,

$$C(s) = \frac{C_0}{1 + \left(s/d\right)^2},$$

jossa $d = 20\,\mathrm{km}$ ja $C_0 = \pm 1000\,\mathrm{mGal}^2$. Tämän lisäksi oletetaan, että suoritetut painovoimamittaukset — mukaan lukien painovoimapisteiden korkeuksien määritys — ovat virheettömiä. Siis $D_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$.



KUVA 10.4. Pienimmän neliösumman kollokaation laskuesimerkki.

Kysymys Laske pisteen P painovoima-anomalian estimaatti $\widehat{\Delta g}_P$ ja sen keskivirhe $\sigma_{\Delta g_P} = \sqrt{\Sigma_{PP}}$.

Vastaus Lasketaan ensin etäisyydet s ja vastaavat kovarianssit C.

$$s_{12}^2 = \left((30-20)^2 + (20-30)^2\right)\,\mathrm{km}^2 = 200\,\mathrm{km}^2,$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{1000\,\mathrm{mGal}^2}{1 + 200/400} = 666{,}66\ldots\,\mathrm{mGal}^2,$$

$$s_{1P}^2 = \left((30-10)^2 + (20-10)^2\right)\,\mathrm{km}^2 = 500\,\mathrm{km}^2,$$

$$C_{1P} = \frac{1000\,\mathrm{mGal}^2}{1 + 500/400} = 444{,}44\ldots\,\mathrm{mGal}^2,$$

$$s_{2P}^2 = \left((20-10)^2 + (30-10)^2\right)\,\mathrm{km}^2 = 500\,\mathrm{km}^2,$$

$$C_{2P} = \frac{1000\,\mathrm{mGal}^2}{1 + 500/400} = 444{,}44\ldots\,\mathrm{mGal}^2.$$

Tästa seuraa

$$C_{ij} + D_{ij} \approx$$
$$\approx C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 666{,}66 \\ 666{,}66 & 1000 \end{bmatrix}\,\mathrm{mGal}^2,$$

ja sen käänteismatriisi

$$(C_{ij} + D_{ij})^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0018 & -0{,}0012 \\ -0{,}0012 & 0{,}0018 \end{bmatrix}\,\mathrm{mGal}^{-2}.$$

Lisäksi

$$C_{Pi} = \begin{bmatrix} C_{P1} & C_{P2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 444{,}44 & 444{,}44 \end{bmatrix} \text{ mGal}^2.$$

Kun havaintojen vektori on

$$\underline{\Delta g}_j = \begin{bmatrix} \underline{\Delta g}_1 \\ \underline{\Delta g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ mGal},$$

saadaan tuloksena

$$\widehat{\Delta g}_P = \\ = \begin{bmatrix} 444{,}44 & 444{,}44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0018 & -0{,}0012 \\ -0{,}0012 & 0{,}0018 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ mGal} = \\ = 9{,}333 \text{ mGal}.$$

Tarkkuus, *ennustusvarianssi*, yhtälö 10.11:

$$\Sigma_{PP} = C_{PP} - C_{Pi} \left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1} C_{jP} = \\ = C_0 - \begin{bmatrix} 444{,}44 & 444{,}44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0018 & -0{,}0012 \\ -0{,}0012 & 0{,}0018 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 444{,}44 \\ 444{,}44 \end{bmatrix} \text{ mGal}^2 = \\ = 762{,}96 \text{ mGal}^2,$$

siis

$$\sigma_{\Delta g_P} = \sqrt{\Sigma_{PP}} = \pm 27{,}622 \text{ mGal}.$$

Tuloksen yhteenveto:

$$\widehat{\Delta g}_P = 9{,}333 \pm 27{,}622 \text{ mGal}.$$

Havaitaan, että löytynyt painovoima-anomalian estimaatti on paljon pienempi kuin sen oma epävarmuus, eli se *ei eroa merkittävästi nollasta*. itse asiassa kun jätetään havainnot kokonaan käyttämättä, *a priori* estimaatti on

$$\widehat{\Delta g}_P = 0 \pm \sqrt{1000} \text{ mGal} = 0 \pm 31{,}623 \text{ mGal},$$

melkein yhtä hyvä.

Jos sen sijaan olisimme käyttäneet pistettä P′ pisteiden 1 ja 2 välillä, paikassa (25 km, 25 km), silloin

$$C_{P'1} = C_{P'2} = 1000\,\text{mGal}^2 \Big/ \left(1 + {}^{50}/_{400}\right) = 888{,}89\,\text{mGal}^2$$

ja $\widehat{\Delta g}_{P'} = 18{,}667 \pm 7{,}201$ mGal, mikä on selvästi parempi kuin *a priori* nolla-estimaatti.

Jos olisi valittu käytettäväksi Gaussin ja Markovin kovarianssifunktio

$$C = C_0 \exp\left(-{}^{s}/_{d}\right),$$

olisi saatu tuloksiksi $\widehat{\Delta g}_P = 7{,}664 \pm 29{,}272$ mGal alkuperäiselle pistesijainnille ja $\widehat{\Delta g}_{P'} = 16{,}460 \pm 18{,}426$ mGal siirretylle sijainnille.

10.5.8 Pienimmän neliösumman kollokaation teoria

Yllä esitettiin eräs pienimmän neliösumman kollokaation (LSC, *least-squares collocation*) suosittu sovellus. Tässä tutkitaan menetelmää yleisemmältä kannalta. Perusyhtälö on

$$\widehat{\mathbf{f}} = C_{fg}\left(C_{gg} + D_{gg}\right)^{-1}\left(\underline{\mathbf{g}} + \underline{\mathbf{n}}\right). \tag{10.9}$$

Vektori $\underline{\mathbf{g}}$ sisältää *havaintosuureita* $\underline{g}_i$, vektori $\underline{\mathbf{n}}$ sisältää havaintojen virheet eli epävarmuuden tai *kohinan* ja $\widehat{\mathbf{f}}$ on *predikoitavana* olevien suureiden $\widehat{f}_p$ vektori.

Molemmat vektorit $\underline{\mathbf{g}}$ ja $\widehat{\mathbf{f}}$ voivat olla esimerkiksi painovoima-anomalioita, jolloin on kyseessä *homogeeninen prediktio*, eräänlainen inter- tai ekstrapolaatio. Yleisemmin $\widehat{\mathbf{f}}$ ja $\underline{\mathbf{g}}$ ovat keskenään erityyppisiä, esimerkiksi $\widehat{\mathbf{f}}$ koostuu geoidin korkeuksista $\underline{N}_p$ ja $\underline{\mathbf{g}}$ painovoima-anomalioista $\underline{\Delta g}_i$. Jälkimmäisessä tapauksessa *Stokesin yhtälö* on ”piilevänä” mukana C-matriisien rakenteessa.

Matriisit rakennetaan kovarianssifunktioista. Niiden alkiot voidaan esittää seuraavasti[8]:

[8]

$$[C_{fg}]_{pi} = M'\{f_p g_i\}, \quad [C_{gg}]_{ij} = M'\{g_i g_j\}, \quad [D_{gg}]_{ij} = E\{\underline{n}_i \underline{n}_j\},$$

jossa $\underline{n}_i$, vektorin $\underline{\mathbf{n}}$ alkio, edustaa havaintoyhtälössä 10.5 esiintyvää havaintoprosessin epävarmuutta:

$$\underline{\ell}_i = g_i + \underline{n}_i, \quad \text{eli vastaavasti} \quad \underline{\boldsymbol{\ell}} = \mathbf{g} + \underline{\mathbf{n}}.$$

$\underline{\ell}$ on itse havaintoarvojen vektori, mukaan lukien havaitsemisen epävarmuus $\underline{\mathbf{n}}$.

D-matriisi on havaintojen epävarmuuden eli *kohinan varianssimatriisi*, joka kuvaa siis havaintoprosessia eikä painovoimakentän ominaisuutta. Varianssimatriisin $M'\{\Delta g_i \, \Delta g_j\}$ arvot voivat olla niinkin suuria kuin 1200 mGal^2. Painovoimahavaintojen varianssimatriisin $E\{\underline{n}_i \underline{n}_j\}$ arvot voivat puolestaan olla mittaustekniikasta riippuen paljon pienempiä, esimerkiksi niinkin pieniä kuin 0,01 mGal^2.

Tämä ei päde *blokkikeskiarvojen* tapauksessa — esimerkiksi $1° \times 1°$ -kokoisten blokkien keskiarvot hajanaisista havaintopisteistä laskettuina — koska arvot ovat usein hyvin epätarkkoja.

Pienimmän neliösumman kollokaatiomenetelmän suurin vahvuus on sen *joustavuus*. Eri havaintotyypit voidaan käsitellä yhden yhtenäisen teorian ja menetelmän avulla, havaintopisteiden paikat ovat vapaita ja tulos saadaan suoraan vapaasti valittaviksi suureiksi ja paikkoihin, joihin niitä halutaan.

10.6 Painovoima-anomalioiden prediktio

Jos laskettavana eli estimoitavana oleva suure $\widehat{\mathbf{f}}$ on samantyyppinen kuin havaittu suure $\underline{\mathbf{g}}$, puhutaan *homogeenisesta prediktiosta*. Esimerkiksi alaosiossa 10.5.6 jo esitetty painovoima-anomalioiden prediktion yhtälö saadaan yhtälöstä 10.9 sijoittamalla:

$$\widehat{\Delta g}_P = C_{Pi} \, (C_{ij} + D_{ij})^{-1} \, \underline{\ell}_j. \tag{10.10}$$

[8] Signaalikovarianssien evaluoimiseksi käytetään tässä *maantieteellistä keskiarvoa* $M'\{\cdot\}$. Näin ollen funktioita f ja g ei enää katsota stokastisiksi. Oletetaan, että niiden globaali maantieteellinen keskiarvo häviää: $M\{\mathbf{f}\} = M\{\mathbf{g}\} = 0$.

Tässä on useita pisteitä j, joissa painovoima on mitattuna: vaikkapa N havaintoa $\underline{\ell}_j = \underline{\Delta g}_j + \underline{n}_j$, $j = 1, \ldots, N$. Predikoitavia pisteitä voi olla yksi eli P tai useita. Matriisit C_{ij} ja D_{ij} ovat neliön muotoisia, ja niiden summan käänteismatriisi on olemassa. C_{Pi} on suorakulmainen matriisi. Jos on vain yksi piste P, C_{Pi} on $1 \times N$ -kokoinen rivimatriisi.

9 *Prediktion virhe* on nyt erotussuure[9] $\widehat{\Delta g}_P - \underline{\Delta g}_P$, ja sen varianssi ("ennustusvarianssi") on

$$\begin{aligned}\Sigma_{PP} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Var}\left\{\widehat{\Delta g}_P - \underline{\Delta g}_P\right\} = \\ &= \mathrm{Var}\left\{\widehat{\Delta g}_P\right\} + \mathrm{Var}\left\{\underline{\Delta g}_P\right\} - \mathrm{Cov}\left\{\widehat{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_P\right\} - \mathrm{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_P, \widehat{\Delta g}_P\right\}.\end{aligned}$$

Tässä (varianssien kasautumislaki sovellettuna yhtälöön 10.10):

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left\{\widehat{\Delta g}_P\right\} = C_{Pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1}\left(C_{jk} + D_{jk}\right)\left(C_{k\ell} + D_{k\ell}\right)^{-1} C_{\ell P} = \\ = C_{Pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1} C_{jP}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left\{\widehat{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_P\right\} &= \mathrm{Cov}\left\{C_{Pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1}\left(\underline{\Delta g}_j + \underline{n}_j\right), \underline{\Delta g}_P\right\} = \\ &= C_{Pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1}\left(\mathrm{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_j, \underline{\Delta g}_P\right\} + 0\right) = \\ &= C_{Pi}\left(C_{ij} + D_{ij}\right)^{-1} C_{jP},\end{aligned}$$

ja myös

$$\mathrm{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_P, \widehat{\Delta g}_P\right\} = C_{Pi}(C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{jP}$$

sekä lopuksi signaalin varianssi $\mathrm{Var}\left\{\underline{\Delta g}_P\right\} = C_{PP}$.

Tassa C_{iP} (eli C_{jP}, eli jopa $C_{\ell P}$) on matriisin C_{Pi} transpoosi. Matriisi $(C_{ij} + D_{ij})^{-1}$ on symmetrisenä oma transpoosinsa.

---

[9] Ole tietoinen, että tässä $\underline{\Delta g}_P$ on painovoima-anomalian *todellinen arvo* pisteessä P, jota emme tunne empiirisesti. *Mitattu arvo* olisi $\underline{\ell}_P = \underline{\Delta g}_P + \underline{n}_P$, jossa $\underline{n}_P$ on painovoimahavainnon satunnainen virhe eli "kohina".

Lopputulos on

$$\Sigma_{PP} = C_{Pi}(C_{ij} + D_{ij})^{-1}C_{jP} + C_{PP} - \\ - C_{Pi}(C_{ij} + D_{ij})^{-1}C_{jP} - C_{Pi}(C_{ij} + D_{ij})^{-1}C_{jP} = \\ = C_{PP} - C_{Pi}(C_{ij} + D_{ij})^{-1}C_{jP}.$$

Siinä tapauksessa, että $D_{ij} \ll C_{ij}$, saadaan yksinkertaisempi ja usein käytetty tulos:

$$\Sigma_{PP} \approx C_{PP} - C_{Pi}C_{ij}^{-1}C_{jP}. \tag{10.11}$$

Rajatapauksia

- Piste P on kaukana kaikista pisteistä i. Silloin $C_{Pi} \approx 0$ ja $\Sigma_{PP} \approx C_{PP}$, siis prediktio on käytännössä mahdoton ja prediktion yhtälö 10.10 antaa arvon nolla. Prediktion *keskivirhe* $\sigma_{\Delta g_P} = \sqrt{\Sigma_{PP}}$ on sama kuin painovoima-anomaliasignaalin vaihtelevuus $\sqrt{C_{PP}}$, signaalivarianssin neliöjuuri.
- Piste P on identtinen erään pisteen i kanssa. Silloin jos käytetään vain tuota pistettä i, saadaan

  $$\Sigma_{PP} = C_{PP} - C_{PP}C_{PP}^{-1}C_{PP} = 0,$$

  ei prediktiovirhettä laisinkaan. Prediktiopisteen arvo kun oli jo tiedossa!
  Kuitenkin jos $D_{PP} \neq 0$ (mutta pieni), on tulos $\Sigma_{PP} \approx D_{PP}$.

10.7 Kovarianssifunktio ja astevarianssit

10.7.1 Häiriöpotentiaalin kovarianssifunktio

Teoreettisessa työssä käytetään painovoima-anomalioiden sijasta mieluummin *häiriöpotentiaalin* T kovarianssifunktiota Maan pinnalla:

$$K(P, Q) = K(\psi_{PQ}, \alpha_{PQ}) \stackrel{\text{def}}{=} M\{T_P T_{Q(P)}\},$$

tai vaihtoehtoisesti käyttäen yhtälöä 10.4:

$$K(P,Q) = K(\psi_{PQ}) \stackrel{\text{def}}{=} M'\{T_P T_{Q(P)}\} = \\ = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} T_P T_{Q(P)} \cos\phi \, d\phi \, d\lambda \, d\alpha_{PQ}. \quad (10.12)$$

Tässä on oletettu, että häiriöpotentiaali on *isotrooppinen*: K ei riipu α:sta vaan ainoastaan ψ:stä.

Valitaan yksikköpallon pinnalla koordinaattijärjestelmä, jossa piste P on ”napa”. Tässä järjestelmässä parametrit α_{PQ} ja ψ_{PQ} ovat pisteen Q pallokoordinaatit. Kovarianssifunktio kehitetään seuraavaksi summaksi:

$$K(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} k_{nm} Y_{nm}(\psi,\alpha)$$

jossa Y_{nm} on määritelty yhtälön 3.3 tavoin:

$$Y_{nm}(\psi,\alpha) = \begin{cases} P_{nm}(\cos\psi)\cos m\alpha & \text{jos } m \geqslant 0, \\ P_{n|m|}(\cos\psi)\sin|m|\,\alpha & \text{jos } m < 0. \end{cases} \quad (10.13)$$

Isotropian perusteella kaikki kertoimet, joiden järjestysluku $m \neq 0$, häviävät: yhtälon 10.13 oikealla puolella olevat lausekkeet voivat olla vain riippumattomia α:sta, jos $m = 0$. Siis

$$K(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} k_{n0} Y_{n0}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n P_n(\cos\psi). \quad (10.14)$$

Kertoimia k_n kutsutaan (häiriöpotentiaalin) *astevariansseiksi*. Isotrooppiselle kovarianssifunktiolle $K(\psi)$ astevarianssien k_n, $n = 2, 3, \ldots$ informaatiosisältö on sama kuin itse funktion, ja se on itse asiassa sen *spektraaliesitys*.

10.7.2 *Astevarianssit ja pallofunktiokertoimet*

Kerro yhtälö 10.14 lausekkeen $P_{n'}(\cos\psi)\sin\psi$ kanssa ja integroi:

$$\int_0^\pi K(\psi)\,P_{n'}(\cos\psi)\sin\psi\,d\psi =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} k_n \int_0^\pi P_n(\cos\psi)\,P_{n'}(\cos\psi)\sin\psi\,d\psi =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} k_n \int_{-1}^{+1} P_n(t)\,P_{n'}(t)\,dt = k_{n'}\,\frac{2}{2n+1},$$

käyttäen ortogonaalisuusehtoa 3.5. Seuraa, että

$$k_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi K(\psi)\,P_n(\cos\psi)\sin\psi\,d\psi, \qquad (10.15)$$

siis jos $K(\psi)$ on annettuna, voimme laskea kaikki k_n.

Sijoittamalla $K(\psi_{PQ})$ yhtälöstä 10.12 saadaan, lyhennyksillä $\psi = \psi_{PQ}$, $\alpha = \alpha_{PQ}$:

$$k_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi \overbrace{\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} T_P T_{Q(P)}\cos\phi\,d\phi\,d\lambda\,d\alpha}^{K(\psi)}\,P_n(\cos\psi)\sin\psi\,d\psi =$$
$$= \frac{2n+1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} T_P \overbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} T_{Q(P)}\,P_n(\cos\psi)\sin\psi\,d\psi\,d\alpha}^{I}\cos\phi\,d\phi\,d\lambda.$$

Tässä olemme vaihtaneet integraalien järjestystä, kuten on sallittu, ja siirtäneet T_P:n toiseen paikkaan.

Lauseke I on yksikköpallon pintaintegraali:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi T_{Q(P)}P_n\left(\cos\psi_{PQ}\right)\sin\psi_{PQ}\,d\psi_{PQ}\,d\alpha_{PQ} =$$
$$= \iint_\sigma T_{Q(P)}\,P_n\left(\cos\psi_{PQ}\right)d\sigma_Q = \frac{4\pi}{2n+1}T_{n,P},$$

jossa $T_{n,P} = T_n(\phi_P,\lambda_P) = T_n(\phi,\lambda)$. T_n on häiriöpotentiaalin T harmonisen asteluvun n osuus, vertaile asteosuusyhtälö 3.9. Sijoittamalla saadaan

$$k_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} T_P T_{n,P}\cos\phi\,d\phi\,d\lambda =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma TT_n\,d\sigma = M\{TT_n\} = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma T_n^2 d\sigma = M\{T_n^2\},$$

M-operaattorin määritelmän mukaan ja ottaen huomioon funktioiden T_n keskinäinen ortogonaalisuus.

Astevarianssit ovat häiriöpotentiaalin asteosuuksien maantieteelliset varianssit.

Kirjoitetaan yhtälöä 4.11 seuraten, mutta käyttäen yhtälön 3.15 määritelmiä:

$$T(\phi,\lambda,r) = \\ = \frac{GM_\oplus}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\overline{P}_{nm}(\sin\phi)\left(\delta\overline{C}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda\right),$$

jossa normaalikenttä, kertoimet $\overline{C}^*_n$, on poistettu vähentämällä:

$$\begin{cases}\delta\overline{C}_{n0} = \overline{C}_{n0} - \overline{C}^*_n & \text{jos } n \text{ parillinen,}\\ \delta\overline{C}_{nm} = \overline{C}_{nm} & \text{muuten.}\end{cases}$$

Nähdään, että

$$T_n(\phi,\lambda) = \frac{GM_\oplus}{R}\sum_{m=0}^{n}\overline{P}_{nm}(\sin\phi)\left(\delta\overline{C}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda\right).$$

Saadaan

$$k_n = \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma T_n^2\,d\sigma = \langle T_n\cdot T_n\rangle_{\overline{\sigma}} = \left(\frac{GM_\oplus}{R}\right)^2\sum_{m=0}^{n}\left(\delta\overline{C}^2_{nm} + \overline{S}^2_{nm}\right).$$

Tässä on käytetty hyväksi täysin normalisoitujen kantafunktioiden $\overline{P}_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda$ ja $\overline{P}_{nm}(\sin\phi)\sin m\lambda$ ortonormaaliutta yksikköpallon σ pinnalla. Siis

Häiriöpotentiaalin astevarianssit k_n voidaan laskea suoraan pallofunktiokehitelmän kertoimista.

Kirjallisuudesta löytyy monia vaihtoehtoisia kirjoitustapoja, kuten

$$k_n = \sigma_n^2 = \sigma_i^{TT}.$$

10.8 Kovarianssien kasautumislaki eri suureiden välillä

Yllä johdettua häiriöpotentiaalin kovarianssifunktiota K voidaan käyttää myös muiden suureiden kovarianssifunktioiden johtamiseksi. Tämä toimii periaatteessa suureille, jotka ovat maapallon pinnan häiriöpotentiaalin $T(\cdot,\cdot,R)$ lineaarisia funktionaaleja, kuten esitettiin osiossa 10.2.

10.8.1 Esimerkki: potentiaalin jatkaminen ylöspäin

Kirjoitetaan häiriöpotentiaali avaruudessa $T(\phi,\lambda,r)$ pintahäiriöpotentiaalin $T(\phi,\lambda,R) = T(\cdot,\cdot,R)$ funktionaaliksi. Asteosuuksien T_n määritelmän perusteella,

$$T(\phi,\lambda,R) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\phi,\lambda),$$

pätee

$$T(\phi,\lambda,r) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\phi,\lambda).$$

Symbolisesti

$$T(\phi,\lambda,r) = L\{T(\cdot,\cdot,R)\}.$$

Tässä L on lineaarinen funktionaali

$$L\{f\} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} f_n,$$

jossa funktiot f_n on asteosuusyhtälön 3.9 mukaisesti määritelty, niin että pallon muotoisen Maan merenpinnalla

$$f = \sum_{n=2}^{\infty} f_n.$$

Symbolisesti

$$L\{f\} = \sum_{n=2}^{\infty} L^n f_n,$$

jossa

$$L^n = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$$

on funktionaalin L *spektraaliesitys*.

Voimme kirjoittaa *tietyllä pisteellä* P, paikka (ϕ_P, λ_P, r_P) avaruudessa:

$$L_P\{f\} = \sum_{n=2}^{\infty} L_P^n f_{n,P}\,,$$

jossa

$$L_P^n = \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1}.$$

Konkreettisesti häiriöpotentiaalille $T(\phi_P, \lambda_P, r_P)$ pisteessä P tämä merkitsee

$$T(\phi_P, \lambda_P, r_P) = L_P\{T(\cdot,\cdot,R)\} = \sum_{n=2}^{\infty} L_P^n T_{n,P} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} T_n(\phi_P, \lambda_P).$$

Häiriöpotentiaalin T kovarianssifunktio *avaruudessa* on

$$\begin{aligned} K(r_P, r_Q, \psi_{PQ}) &= M'\Big\{T(\phi_P, \lambda_P, r_P)\, T(\phi_{Q(P)}, \lambda_{Q(P)}, r_Q)\Big\} = \\ &= M'\Big\{L_P\{T(\cdot,\cdot,R)\}\, L_{Q(P)}\{T(\cdot,\cdot,R)\}\Big\} = \\ &= M'\Big\{\sum_{n=2}^{\infty} (L_P^n T_{n,P}) \sum_{n'=2}^{\infty} \left(L_Q^{n'} T_{n',Q(P)}\right)\Big\} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{n'=2}^{\infty} L_P^n L_Q^{n'} M'\{T_{n,P} T_{n',Q(P)}\}. \end{aligned}$$

[10] Ortogonaalisuuden perusteella[10] $M'\{T_{n,P} T_{n',Q(P)}\} = 0$ jos $n \neq n'$. Siis

$$K(r_P, r_Q, \psi_{PQ}) = \sum_{n=2}^{\infty} L_P^n L_Q^n M'\{T_{n,P} T_{n,Q(P)}\}. \tag{10.16}$$

Nyt merenpinnan tasolla kaikki $L_P^n = L_Q^n = 1$, eli

$$K(\psi_{PQ}) = \sum_{n=2}^{\infty} M'\{T_{n,P} T_{n,Q(P)}\}.$$

Vertaamalla yhtälön 10.14

$$K(\psi_{PQ}) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n P_n(\cos\psi) \tag{10.14}$$

kanssa nähdään, että

$$M'\{T_{n,P}T_{n,Q(P)}\} = k_n P_n(\cos\psi_{PQ}).$$

Tämä ei tule yllätyksenä: jos spatiaalinen kovarianssifunktio on isotrooppinen, sen yleisen muodon on oltava

$$K(r_P, r_Q, \psi_{PQ}) = \sum_{n=2}^{\infty} K_n^r(r_P, r_Q)\, K_n^\psi(\psi_{PQ}),$$

ja $K_n^\psi(\psi_{PQ})$ on oltava samaa muotoa kuin $K(\psi)$ yhtälössä 10.14, ja samasta syystä:

$$K_n^\psi(\psi_{PQ}) = k_n P_n(\cos\psi_{PQ}).$$

Merenpinnalla $K_n^r(R,R) = 1$ ja yhtälö 10.15 antaa kertoimet k_n.

Yhtälöstä 10.16 tulee nyt[11] [11]

---

[10] Kuten osion 8.5 lausekkeen $r\Delta g$ harmonisuuden todistuksessa, on otettava mukaan kolmas ulottuvuus.

$$M'\{T_{n,P}T_{n',Q(P)}\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\{T_{n,P}\, T_{n',Q(P)}\}\, d\alpha_{PQ} =$$
$$= M\left\{T_{n,P}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_{n',Q(P)}\, d\alpha_{PQ}\right\} = M\left\{T_{n,P}\, T^{\bigcirc}_{n',P}\right\},$$

määritelmällä

$$T^{\bigcirc}_{n',P} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_{n',Q(P)}\, d\alpha_{PQ}.$$

Kolmiulotteisesti r:n kanssa:

$$T^{\bigcirc}_{n',P}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_{n',Q(P)}(r)\, d\alpha_{PQ} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^{n'+1} T_{n',Q(P)}(R)\, d\alpha_{PQ} =$$
$$= \left(\frac{r}{R}\right)^{n'+1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_{n',Q(P)}(R)\, d\alpha_{PQ} = \left(\frac{r}{R}\right)^{n'+1} T^{\bigcirc}_{n',P}(R).$$

Tämä osoittaa, että $T^{\bigcirc}_{n',P}(r)$ on täysin laillinen asteluvun n' avaruuspallofunktio, $T^{\bigcirc}_{n',P} = T^{\bigcirc}_{n',P}(R)$ laillinen pintapallofunktio ja pallofunktioiden ortogonaalisuus pätee:

$$M'\{T_{n,P}T_{n',Q(P)}\} = M\left\{T_{n,P}T^{\bigcirc}_{n',P}\right\} = 0 \qquad \text{jos } n \neq n'.$$

$$K(r_P, r_Q, \psi_{PQ}) = \sum_{n=2}^{\infty} L_P^n L_Q^n k_n P_n(\cos\psi_{PQ}) =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} \left(\frac{R}{r_Q}\right)^{n+1} k_n P_n(\cos\psi_{PQ}) =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1} k_n P_n(\cos\psi_{PQ}). \quad (10.17)$$

Tässä olemme ilmaisseet avaruuden häiriöpotentiaalin $T(\phi, \lambda, r)$ kovarianssifunktion vastaavan merenpinnan häiriöpotentiaalin $T(\phi, \lambda, R)$ astevarianssien k_n kehitelmänä. Sovelsimme *kovarianssien kasautumislakea* funktion K kehitelmään 10.14. Näin olemme saaneet häiriöpotentiaalille *kolmiulotteisen kovarianssifunktion*, jollainen tarvitaan esimerkiksi vuoristomaissa ja ilma- ja avaruussovelluksissa.

10.8.2 *Esimerkki:* painovoima-anomalioiden kovarianssifunktio

Tiedämme yhtälön 5.7 perusteella, että painovoima-anomalioiden ja häiriöpotentiaalin välillä on olemassa seuraava yhteys:

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n,$$

symbolisesti: $\Delta g = L_{\Delta g}\{T\}$ sopivalle operaattorille $L_{\Delta g}$:

$$L_{\Delta g}\{f\} = \sum_{n=2}^{\infty} L_{\Delta g}^n f_n, \qquad L_{\Delta g}^n = \frac{n-1}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}.$$

Taas konkreettisessa pisteessä P,

$$\Delta g(\phi_P, \lambda_P, r_P) = L_{\Delta g, P}\{T(\cdot, \cdot, R)\} =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} L_{\Delta g, P}^n T_{n,P} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{r_P} \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} T_{n,P}.$$

[11] Tämä toimii niin siististi, koska tässä tapauksessa operaattori L^n on luonteeltaan kerroin, $(R/r)^{n+1}$.

Voidaan näyttää samalla tavalla kuin yllä, että

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\{\Delta g_P, \Delta g_Q\} &= M'\{\Delta g_P\, \Delta g_{Q(P)}\} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} L^n_{\Delta g,P} L^n_{\Delta g,Q} M'\{T_{n,P} T_{n,Q(P)}\} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{r_P}\left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} \frac{n-1}{r_Q}\left(\frac{R}{r_Q}\right)^{n+1} k_n P_n(\cos\psi_{PQ}) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R^2}{r_P r_Q}\right)^{n+2} \left(\frac{n-1}{R}\right)^2 k_n P_n(\cos\psi_{PQ}).\end{aligned}$$

Usein kirjoitetaan

$$\begin{aligned}C(r_P, r_Q, \psi_{PQ}) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Cov}\{\Delta g_P, \Delta g_Q\} = M'\{\Delta g_P\, \Delta g_{Q(P)}\} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R^2}{r_P r_Q}\right)^{n+2} c_n P_n(\cos\psi_{PQ}),\end{aligned}$$

jossa *painovoima-anomalioiden astevarianssit* ovat

$$c_n = \left(\frac{n-1}{R}\right)^2 k_n.$$

Vastaavasti lasketaan myös ”sekakovarianssit” häiriöpotentiaalin ja painovoima-anomalian välille:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\{T_P, \Delta g_Q\} &= \\ &= M'\{T_P\, \Delta g_{Q(P)}\} = \sum_{n=2}^{\infty} L^n_P L^n_{\Delta g,Q} M'\{T_{n,P} T_{n,Q(P)}\} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} \frac{n-1}{r_Q}\left(\frac{R}{r_Q}\right)^{n+1} k_n P_n(\cos\psi_{PQ}) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{r_Q}\left(\frac{R^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1} k_n P_n(\cos\psi_{PQ}).\end{aligned}$$

Kaikki nämä ovat *kovarianssien kulkeutumisen* eli *kasautumisen* esimerkkejä sovellettuna sarjakehitelmään:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left\{L_1\{\underline{T}_P\}, L_2\{\underline{T}_Q\}\right\} &= \sum_n L^n_{1,P} L^n_{2,Q} M'\{T_{n,P} T_{n,Q(P)}\} = \\ &= \sum_n L^n_{1,P} L^n_{2,Q} k_n P_n(\cos\psi_{PQ}),\end{aligned}$$

mielivaltaisille lineaarisille funktionaaleille

$$L_1\{T_P\} = \sum_n L^n_{1,P} T_{n,P}, \qquad L_2\{T_Q\} = \sum_n L^n_{2,Q} T_{n,Q},$$

jossa $T_{n,P} = T_n(\phi_P, \lambda_P)$ ja $T_{n,Q} = T_n(\phi_Q, \lambda_Q)$ ovat Maan pinnan häiriöpotentiaalin asteosuuksia. Haaste jokaisessa tapauksessa on identifioida tämän lineaarisen funktionaalin spektraalimuoto. Tämä tehdään kehittämällä kyseessä oleva suure funktioihin T_n ja poimimalla löytyneet kertoimet kehitelmästä. Nämä kertoimet on värjätty yllä punaisiksi ja sinisiksi.

10.9 Globaalit kovarianssifunktiot

Empiirisiä kovarianssifunktioita on laskettu paljon, vaikka koko maapalloa koskevia empiirisiä kovarianssifunktioita on olemassa vain muutama. Tavallisesti ne annetaan *astevarianssikaavan* muodossa. Kuuluisin on William Kaulan[12] havaitsema nyrkkisääntö (Rapp, 1989):

$$k_n = \alpha \frac{2n+1}{n^4}.$$

Kirjoittamalla

$$c_n = \left(\frac{n-1}{R}\right)^2 k_n,$$

jossa c_n ovat *painovoima-anomalioiden* astevarianssit, saadaan

$$c_n = \alpha \frac{2n+1}{n^4} \left(\frac{n-1}{R}\right)^2 \approx \frac{2\alpha}{nR^2}.$$

Tässä α on planeettakohtainen vakio, Kaulan arvion mukaan $\alpha = 10^{-10}\left(GM_\oplus/a_\oplus\right)^2$.

Kaulan sääntö ei pidä paikkaansa kovin tarkasti. Se pätee aika hyvin myös Marsin painovoimakentälle, tietenkin eri vakioarvolla (Yuan ym., 2001).

[12] William M. Kaula (1926–2000) oli amerikkalainen geofyysikko ja avaruusgeodeetti, joka tutki Maan painovoimakentän määritystä satelliittigeodesian keinoin.

Toinen kuuluisa sääntö on Tscherningin ja Rappin kaava (Tscherning ja Rapp, 1974):

$$c_n = \frac{A\,(n-1)}{(n-2)\,(n+B)} = \left(\frac{n-1}{R}\right)^2 k_n.$$

Vakiot ovat tekijöiden mukaan $A = 425.28\,\mathrm{mGal}^2$ ja $B = 24$ (tarkasti). Teknisenä yksityiskohtana valitaan tavallisesti $R = R_B = 0.999\overline{R}$, Maan sisällä olevan *Bjerhammarin*[13] *pallon säde* ($\overline{R}$ on Maan keskisäde). Kaavan muoto on valittu sen mukaan, että eri suureiden kovarianssifunktioiksi saataisiin suljettuja lausekkeita.

[13]

10.10 Kollokaatio ja spektraalinäkökohta

Myös pienimmän neliösumman kollokaation laskennat voidaan suorittaa tehokkaasti FFT:n keinoin. Tätä varten pitää tarkastella geometriassa olevia symmetrioita, lähinnä *pyörähdyssymmetriaa*, joka on olemassa esimerkiksi pituusastesuunnassa koko maapallolla, kun kollokaatioyhtälöt riippuvat vain pisteiden välisistä pituusaste-*eroista* $\Delta\lambda$ eivätkä absoluuttisista pituusasteista λ.

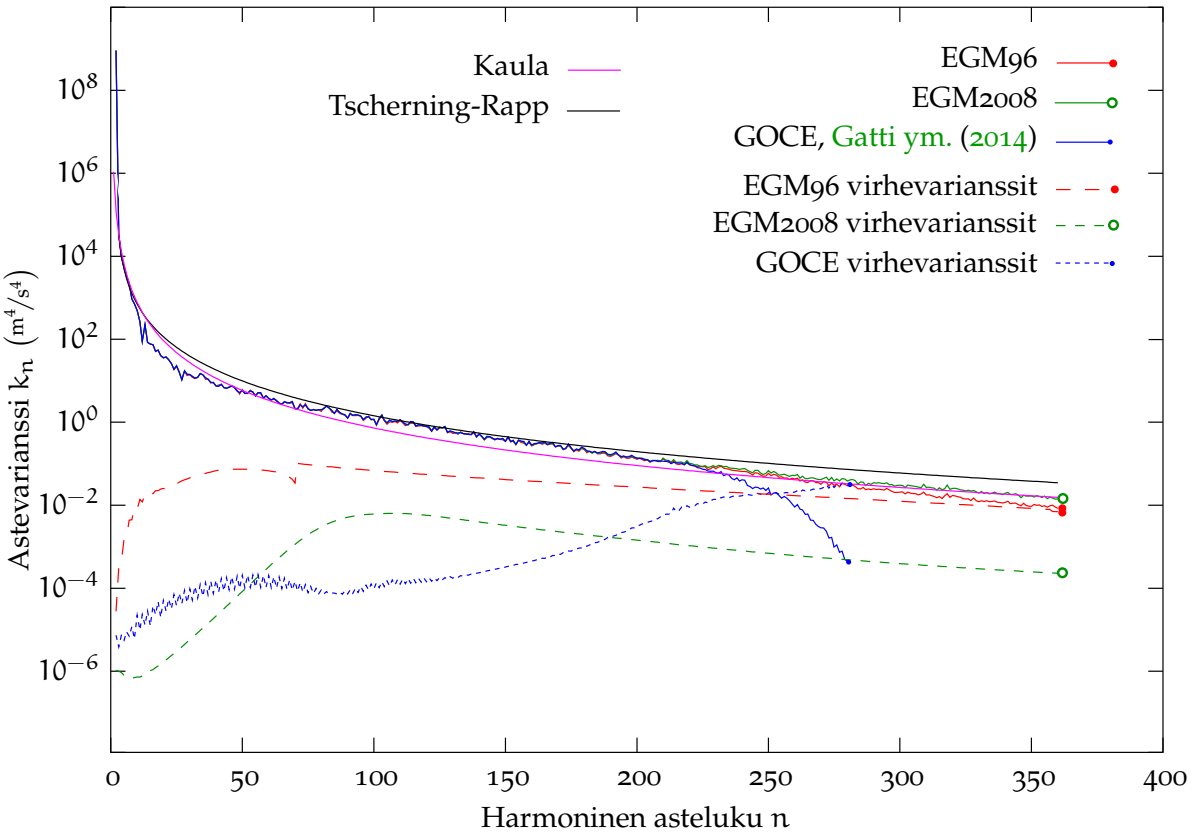
Seuraavassa käsitellään yksinkertaistettua esimerkkiä yhdessä ulottuvuudessa. Olkoon kentän $\underline{g}(\psi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$ havaintoja $\underline{\ell}_i = \underline{g}_i + \underline{n}_i$ annettuna *ympyrän* reunalla pisteissä $\psi_i \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi\, i/N$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Oletetaan, että myös laskentatulokset, tulosfunktion $f(\psi)$ estimaatit $\widehat{f}_i$, halutaan samoihin pisteisiin. Silloin on yhtälö 10.9:

$$\widehat{\mathbf{f}} = C_{fg}\,(C_{gg} + D_{gg})^{-1}\,(\underline{\mathbf{g}} + \underline{\mathbf{n}})\,, \tag{10.9}$$

jossa

$$\begin{aligned}
\left[C_{fg}\right]_{ij} &= C_{fg}\big(f(\psi_i), g(\psi_j)\big) = C_{fg}\big(\psi_i, \psi_j\big),\\
\left[C_{gg}\right]_{ij} &= C_{gg}\big(g(\psi_i), g(\psi_j)\big) = C_{gg}\big(\psi_i, \psi_j\big),\\
\left[D_{gg}\right]_{ij} &= D_{gg}\big(g(\psi_i), g(\psi_j)\big) = D_{gg}\big(\psi_i, \psi_j\big).
\end{aligned}$$

[13] Arne Bjerhammar (1917–2011) oli ruotsalainen geodeetti.



KUVA 10.5. Globaalit kovarianssifunktiot astevariansseina. GOCE-malli menee vain astelukuun 280 saakka.

Mikäli koko tilanteen *fysiikka*, mukaan lukien mittausprosessin fysiikka, on pyörähdyssymmetrinen, on oltava

$$[C_{fg}]_{i,j(i)} = M_{\bigcirc}\left\{f(\psi_i)\, g\left(\psi_{j(i)}\right)\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(\psi_i)\, g\left(\psi_{j(i)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} [C_{fg}]_k,$$

jossa $j(i) = (i + k) \bmod N$. Tässä operaattori $M_{\bigcirc}$ on funktion "ympyrä-keskiarvo",

$$M_{\bigcirc}\{h\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} h(\psi_i),$$

mikä, kuten maantieteellinen keskiarvo osiossa 10.4, korvaa tilastollisen keskiarvon.

Samalla tavalla saadaan

$$\left[C_{gg}\right]_{i,j(i)} = M_{\bigcirc}\left\{g(\psi_i)\, g\left(\psi_{j(i)}\right)\right\} = \\ = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} g(\psi_i)\, g\left(\psi_{j(i)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left[C_{gg}\right]_k.$$

Nyt C_{fg}, C_{gg} ovat ainoastaan k:n funktiot, ja ne voidaan kirjoittaa

$$\left[C_{fg}\right]_{ij} = C_{fg}(\psi_i, \psi_j) = C_{fg}(\Delta\psi_k) = \left[C_{fg}\right]_k,$$
$$\left[C_{gg}\right]_{ij} = C_{gg}(\psi_i, \psi_j) = C_{gg}(\Delta\psi_k) = \left[C_{gg}\right]_k,$$

joissa $\Delta\psi_k \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_j - \psi_i) \bmod 2\pi$ ja $k = (j - i) \bmod N$.

Lisäksi

$$\left[D_{gg}\right]_{ij} = D_{gg}(\psi_i, \psi_j) = D_{gg}(\Delta\psi_k) = \left[D_{gg}\right]_k = E\{\underline{n}_i \underline{n}_{j(i)}\},$$

havaintokohinan perinteinen tilastollinen varianssi. Koska havainnot eivät yleensä korreloi keskenään, on[14]

$$D_{gg} = \sigma^2\, I_N,$$

σ^2 (havaintojen varianssi, oletettu samaksi kaikille) kerrottuna $N \times N$ -kokoisella yksikkömatriisilla.

Tämän muotoisia matriiseja kutsutaan *Toeplitz-sirkulanteiksi*[15]. Ominaisuuden ansiosta yhtälö 10.9 koostuu konvoluutioista.

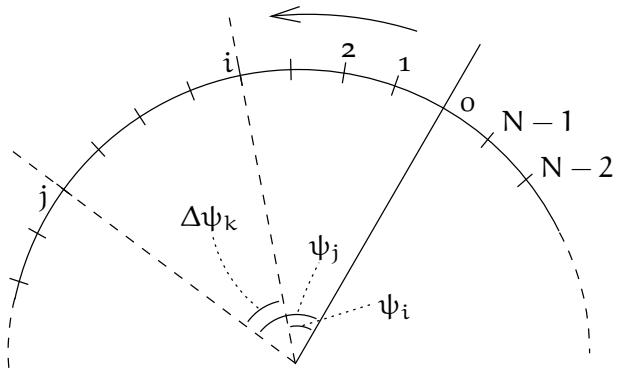
---

[14] Itse asiassa yksikkö- eli identiteettimatriisi tunnetaan myös Kroneckerin deltana. Toeplitzin matriisina se voidaan tulkita Diracin deltafunktion diskreettina versiona. Sen diskreetti Fourier'n muunnos on "valkoinen":

$$\mathcal{F}\{I_N\} = \frac{1}{N},$$

ja sisältää saman tehon kaikille taajuuksille.

[15] Otto Toeplitz (1881–1940) oli saksanjuutalainen matemaatikko ja funktionaalianalyysin tutkija.



KUVA 10.6. Kehämäinen geometria.

Ilman todistusta esitetään, että yhtälön 10.9 spektraalivastine on seuraavan näköinen:

$$\mathcal{F}\{\widehat{\mathbf{f}}\} = \frac{\mathcal{F}\{C_{fg}\}}{\mathcal{F}\{C_{gg}\} + \mathcal{F}\{D_{gg}\}}\mathcal{F}\{\underline{\mathbf{g}} + \underline{\mathbf{n}}\} = \frac{\mathcal{F}\{C_{fg}\}}{\mathcal{F}\{C_{gg}\} + \sigma^2/N}\mathcal{F}\{\underline{\mathbf{g}} + \underline{\mathbf{n}}\}.$$

Tämä on helppo ja nopea tapa laskea ratkaisu FFT:n avulla. Jos sopivalla operaattorilla L pätee $\mathbf{f} = L\{\mathbf{g}\}$, yhtälöstä tulee

$$\mathcal{F}\{\widehat{\mathbf{f}}\} = \frac{\mathcal{F}\{L\} \cdot \mathcal{F}\{C_{gg}\}}{\mathcal{F}\{C_{gg}\} + \sigma^2/N} \cdot \mathcal{F}\{\underline{\mathbf{g}} + \underline{\mathbf{n}}\}.$$

Limiitissä, jossa havainnot ovat eksakteja, $\sigma^2 = 0$ ja siis $\underline{\mathbf{n}} = 0$, pätee

$$\mathcal{F}\{\widehat{\mathbf{f}}\} = \mathcal{F}\{L\} \cdot \mathcal{F}\{\underline{\mathbf{g}}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{\mathbf{f}} = L\{\underline{\mathbf{g}}\}.$$

Esimerkiksi jos $\mathbf{g}$ ovat painovoima-anomalioita ja $\mathbf{f}$ häiriöpotentiaalin arvoja, on[16]

$$\mathcal{F}\{L\} = \frac{R}{n-1}.$$

Lähestymistapaa kutsutaan *Fast Collocationiksi*, esimerkiksi Bottoni ja Barzaghi (1993). Luonnollisesti sitä käytetään Maan pinnan kahdessa

[16] Käytännön laskennassa yhtälöä on kuitenkin muutettava käyttämään globaaliin pallogeometriaan viittaavan asteluvun n sijasta käytetyn laskentahilan Fourier'n aaltolukua.

ulottuvuudessa, vaikka esimerkkimme on yksiulotteinen. Kuten aina se edellyttää, että havaintoaineisto on annettu *hilan* muodossa, ja tässä tapauksessa myös aineiston tarkkuuden alueella pitää olla *homogeeninen* — kaikkialla sama. Tämä vaatimus täyttyy tuskin koskaan tarkasti.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä on signaalin ja kohinan välinen ero?
2) Mikä on funktionaali?
3) Mikä on lineaarinen funktionaali?
4) Maan pinnalla määritellyn stokastisen prosessin tilastollinen käyttäytyminen on samanlaista riippumatta siitä, missä paikassa maapallolla ollaan. Tämän ominaisuuden nimi on isotrooppisuus | ergodisuus | homogeenisuus | stationaarisuus.
5) Ajan stokastisen prosessin tilastollinen käyttäytyminen on samanlaista rippumatta siitä, missä kohdassa aika-akselilla ollaan. Tämän ominaisuuden nimi on isotrooppisuus | ergodisuus | homogeenisuus | stationaarisuus.
6) Miksi Maan painovoimakentän tutkimuksessa käytetään maantieteellistä keskiarvoa tilastollisen keskiarvon sijaan?
7) Mitä kahta eri kovarianssifunktion tyyppiä käytetään Maan pinnan painovoima-anomalioille? Anna yhtälöt ja nimeä vapaat parametrit.
8) Selosta astevarianssit. Mikä on astevarianssien k_n ja c_n välinen ero?
9) Mitä Kaulan sääntö ilmaisee?
10) Mikä on Toeplitz-sirkulantti matriisi?

Harjoitus 10−1: Ennustusvarianssi

Pisteen P ennustusvarianssin yhtälö on

$$\Sigma_{PP} = C_{PP} - C_{Pi}(C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{jP},$$

jossa havaintopisteet ovat $i = 1, \ldots, N$. Oleta, että on vain yksi havaintopiste, piste P. Silloin

$$\Sigma_{PP} = C_{PP} - C_{PP}(C_{PP} + D_{PP})^{-1} C_{PP}.$$

Näytä, että jos $D_{ij} \neq 0$, mutta $D_{ij} \ll C_{ij}$,

$$\Sigma_{PP} \approx D_{PP}.$$

Harjoitus 10−2: Hirvosen kovarianssiyhtälö ja prediktio

Hirvosen kovarianssiyhtälö on

$$C(s) = \frac{C_0}{1 + \left(s/d\right)^2}, \tag{10.18}$$

jossa Ohion parametrit ovat $C_0 = 337\,\text{mGal}^2$ ja $d = 40\,\text{km}$ (Heiskanen ja Moritz, 1967, yhtälö 7-9). Yhtälö antaa kahden pisteen P ja Q painovoima-anomalioiden välisen kovarianssin

$$C(s_{PQ}) = \text{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q\right\}.$$

s_{PQ} on pisteiden välinen lineaarinen etäisyys.

1) Laske $\text{Var}\left\{\underline{\Delta g}_P\right\}$ ja $\text{Var}\left\{\underline{\Delta g}_Q\right\}$. Muista, että määritelmän mukaan $\text{Var}\{\underline{x}\} = \text{Cov}\{\underline{x}, \underline{x}\}$!
2) Laske $\text{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q\right\}$ jos $s_{PQ} = 20\,\text{km}$.
3) Laske *korrelaatio*

$$\text{Corr}\left\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q\right\}}{\sqrt{\text{Var}\left\{\underline{\Delta g}_P\right\} \text{Var}\left\{\underline{\Delta g}_Q\right\}}}.$$

4) Oleta nyt, että *ainoa mittauspiste on* P. Mikä on painovoima-anomalian "ennustusvarianssi" pisteessä Q, joka on tarkasti $s_{PQ} = 10\,\text{km}$ matkan päässä annetun anomalian pisteestä P? Sovella yhtälöä 10.11 seuraavasti:

$$\Sigma_{QQ} = C_{QQ} - C_{QP} C_{PP}^{-1} C_{PQ}.$$

5) Entä kohta 4, jos etäisyys on $s_{PQ} = 80\,\text{km}$?

Harjoitus 10–3: Painovoima-anomalioiden prediktio

Olkoon annettuna kahdessa pisteessä 1 ja 2 mitatut painovoima-anomaliat $\underline{\ell}_1 = \underline{\Delta g}_1 + \underline{n}_1$ ja $\underline{\ell}_2 = \underline{\Delta g}_2 + \underline{n}_2$. Pisteiden välinen etäisyys on 80 km, ja niiden välissä 40 km etäisyydellä molemmista pisteistä sijaitsee piste P. Laske pisteen P painovoima-anomalia Δg_P *prediktion avulla*. Prediktion yhtälö on

$$\widehat{\Delta g}_P = C_{Pi} \left(C_{ij} + D_{ij} \right)^{-1} \underline{\ell}_j,$$

jossa $\underline{\ell}_j = \underline{\Delta g}_j + \underline{n}_j$ on painovoima-anomalioiden havaintojen (abstrakti) vektori,

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \text{Var}\left\{\underline{\Delta g}_1\right\} & \text{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_1, \underline{\Delta g}_2\right\} \\ \text{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_1, \underline{\Delta g}_2\right\} & \text{Var}\left\{\underline{\Delta g}_2\right\} \end{bmatrix}$$

on vektorin $\underline{\Delta g}_i$ signaalivarianssimatriisi ja

$$C_{Pi} = \begin{bmatrix} \text{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_1\right\} & \text{Cov}\left\{\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_2\right\} \end{bmatrix}$$

on signaalikovarianssimatriisi $\underline{\Delta g}_P$:n ja $\underline{\Delta g}_i$:n välillä. D_{ij} on havaintojen satunnaisen epävarmuuden eli *kohinan* $\underline{n}_i$, $i = 1, 2$ varianssimatriisi:

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \text{Var}\{\underline{n}_1\} & \text{Cov}\{\underline{n}_1, \underline{n}_2\} \\ \text{Cov}\{\underline{n}_1, \underline{n}_2\} & \text{Var}\{\underline{n}_2\} \end{bmatrix}.$$

1) Laske matriisi C_{ij} olettamalla taas Hirvosen kovarianssiyhtälö 10.18 ja parametriarvo $d = 40\,\text{km}$.

2) Laske C_{Pi}.

3) Laske $\widehat{\Delta g}_P$ ilmaistuna havaittuihin arvoihin $\underline{\ell}_1$ ja $\underline{\ell}_2$. Oleta $D_{ij} = 0$ (ja siis $\underline{n}_i = 0$). Matriisin C_{ij} kääntäminen käsin on mahdollista, mutta käytä mieluummin Matlab tai octave.

4) Laske *ennustusvarianssi* (huomaa $C_{jP} = C_{Pi}^T$) yhtälöllä

$$\Sigma_{PP} = C_{PP} - C_{Pi} C_{ij}^{-1} C_{jP}.$$

Harjoitus 10–4: Painovoima-anomalioiden prediktio (2)

Olkoon taas annettuna pisteet 1 ja 2, joissa on mitatut painovoima-anomaliat $\underline{\ell}_1 = \underline{\Delta g}_1$ ja $\underline{\ell}_2 = \underline{\Delta g}_2$. Nyt kuitenkin pisteet 1, 2 ja P muodostavat *kolmion*, jossa pisteen P kohdalla on suora kulma. Etäisyys P:stä pisteisiin 1 ja 2 on edelleen 40 km. Pisteiden 1 ja 2 välinen etäisyys on nyt vain $40\sqrt{2}$ km.

1) Laske C_{ij}, C_{Pi}, $\widehat{\Delta g}_P$ ja Σ_{PP}.

2) Vertaa tulosta edellisen tuloksen kanssa. Mikä on johtopäätös?

Harjoitus 10–5: Kovarianssien kasautuminen

Annettuna on häiriöpotentiaalin kovarianssifunktio 10.17:

$$\mathrm{Cov}\{\underline{T}_P, \underline{T}_Q\} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1} k_n P_n(\cos\psi_{PQ}).$$

1) Johda painovoimahäiriön $\underline{\delta g}$ (yhtälö 5.4) kovarianssifunktio. Vihje: kirjoita ensin kehitelmä muotoa

$$\delta g = \sum_{n=2}^{\infty} L_{\delta g}^n T_n$$

kertoimen $L_{\delta g}^n$ lausekkeen löytämiseksi. Sen jälkeen

$$\mathrm{Cov}\left\{\underline{\delta g}_P, \underline{\delta g}_Q\right\} = \sum_{n=2}^{\infty} L_{\delta g,P}^n L_{\delta g,Q}^n k_n P_n(\cos\psi_{PQ}).$$

2) Johda *painovoiman häiriögradientin*

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} T = -\frac{\partial}{\partial r} \delta g$$

eli painovoima*häiriön* pystygradientin, kovarianssifunktio.

Harjoitus 10–6: Kaulan sääntö painovoima-anomalioille

Häiriopotentiaalille

$$T(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\phi, \lambda)$$

eli Maan pinnalla ($r = R$):

$$T(\phi, \lambda, R) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\phi, \lambda)$$

Kaulan sääntö pätee *astevariansseilla*

$$k_n = \alpha \frac{2n+1}{n^4}.$$

Näistä voi laskea varianssien kasautumislain avulla *painovoima-anomalioiden*

$$\Delta g(\phi, \lambda, R) = \sum_{n=2}^{\infty} L^n_{\Delta g}(R)\, T_n(\phi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{R}\right) T_n(\phi, \lambda)$$

astevarianssit:

$$c_n = \left(L^n_{\Delta g}(R)\right)^2 k_n = \left(\frac{n-1}{R}\right)^2 k_n \approx \frac{2\alpha}{nR^2}.$$

Differentioi analogisella tavalla painovoima-anomalian kehitelmä 5.7

$$\Delta g(r, \varphi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\phi, \lambda),$$

tuloksena

$$\frac{\partial\, \Delta g}{\partial r} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)\,(n+2)}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n,$$

spektraaliyhteys häiriöpotentiaalin ja *anomaalisen painovoimagradientin* välillä.

Maan pinnalla $r = R$:

$$\left.\frac{\partial \Delta g}{\partial r}\right|_{r=R} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{R^2} T_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=2}^{\infty} L^n_{\Delta g'}(R)\, T_n(\phi, \lambda)$$

jossa

$$L^n_{\Delta g'}(R) = -\frac{(n-1)(n+2)}{R^2}.$$

1) Johda likimääräinen yhtälö *anomaalisen painovoimagradientin* astevariansseille. Merkitse ne symbolilla c'_n samalla analogisella tavalla kuin yllä painovoima-anomalioiden astevariansseille c_n:

$$c'_n = x(n) \cdot k_n \approx y \cdot n^z.$$

Löydä lauseke $x(n)$ ja vakiot y ja z maapallon tapauksessa.

2) Mikä on johtopäätös?

Harjoitus 10−7: Maanalaiset massapisteet

1) Jos massapiste sijoitetaan Maan sisään syvyyteen D havaintopisteen P alapuolella, mikä on sen Maan pinnalla aiheuttaman koko painovoiman g muutoksen *korrelaatiopituus* eli arvo s, jolla $C(s) = \frac{1}{2}C_0$?

2) Siis jos haluamme rakentaa massapistemallin, jossa jokaisen havaintopisteen Δg_P alapuolella on yksi massapiste, kuinka syvälle ne pitää laittaa, jos korrelaatiopituus d on annettu?

Gravimetriset mittalaitteet

11

11.1 Historia

Ensimmäinen mittalaite, joka rakennettiin *heilurin* perusteella oli kello. Heiluriyhtälö

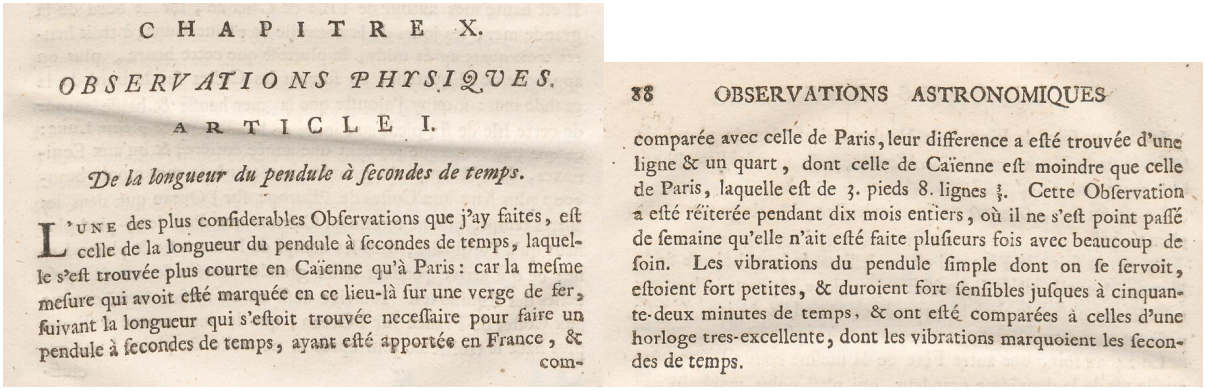
$$P = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

kertoo, että tietyn pituisen heilurin heilahdusaika eli periodi P on vakio, joka riippuu vain heilurin pituudesta ℓ ja paikallisesta painovoimasta g sillä edellytyksellä, että heilahdukset ovat pieniä. Alankomaalainen Christiaan Huygens[1] rakensi vuonna 1657 ensimmäisen tähän peraatteeseen perustuvan käyttökelpoisen heilurikellon (Wikipedia, Heilurikello). [1]

Kun nuori ranskalaistutkija Jean Richer[2] kävi Ranskan Guyanassa vuonna 1671 heilurikello mukanaan, hän huomasi, että kello kulki selvästi hitaammin. Asia saatiin korjatuksi yksinkertaisesti lyhentämällä heiluria. Ilmiön syy ei voinut olla esimerkiksi heilurin lämpölaajeneminen trooppisissa ilmasto-olosuhteissa. Oikea selitys oli, että tropiikissa [2]

[1] Christiaan Huygens FRS (1629–1695) oli aikansa johtava hollantilainen tiedemies ja matemaatikko. Heilurikellon keksimisen lisäksi hän oli ensimmäinen, joka oivalsi vuonna 1655, että Saturnus-planeetalla on rengas.

[2] Jean Richer (1630?–1696) oli ranskalainen tähtitieteilijä, joka muistetaan oikeasti vain heilurilöydöstään.



CHAPITRE X.

OBSERVATIONS PHYSIQUES.

ARTICLE I.

De la longueur du pendule à ſecondes de temps.

L'UNE des plus conſiderables Obſervations que j'ay faites, eſt celle de la longueur du pendule à ſecondes de temps, laquelle s'eſt trouvée plus courte en Caïenne qu'à Paris: car la meſme meſure qui avoit eſté marquée en ce lieu-là ſur une verge de fer, ſuivant la longueur qui s'eſtoit trouvée neceſſaire pour faire un pendule à ſecondes de temps, ayant eſté apportée en France, & com-

88 OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

comparée avec celle de Paris, leur difference a eſté trouvée d'une ligne & un quart, dont celle de Caïenne eſt moindre que celle de Paris, laquelle eſt de 3. pieds 8. lignes ½. Cette Obſervation a eſté réïterée pendant dix mois entiers, où il ne s'eſt point paſſé de ſemaine qu'elle n'ait eſté faite pluſieurs fois avec beaucoup de ſoin. Les vibrations du pendule ſimple dont on ſe ſervoit, eſtoient fort petites, & duroient fort ſenſibles juſques à cinquante-deux minutes de temps, & ont eſté comparées à celles d'une horloge tres-excellente, dont les vibrations marquoient les ſecondes de temps.

KUVA 11.1. Jean Richer'n raportti.

painovoima g on heikompi kuin Euroopassa. Palattuaan Ranskaan vuonna 1673 Richer joutui taas pidentämään heiluriaan. Havainnosta on merkintä raportissa "*Observations astronomiques et physiques faites en l'isle de Caïenne*", Richer (1731), sivuilla 87–88.

Näin keksittiin *heilurigravimetri*. Myöhemmin rakennettiin varta vasten paljon tarkempia laitteita, esimerkiksi Katerin[3] reversioheiluri ja neljän heilurin Von Sterneckin[4] koje, jota käytettiin myös Suomessa 1920- ja 1930-luvuilla (Pesonen, 1930; Hirvonen, 1937).

Mainittavia ovat myös hollantilaisen F. A. Vening Meineszin sukellusvenemittaukset muun muassa Jaavanmerellä. Niissä havaittiin, että merenpohjalla olevien syvänmeren hautojen yläpuolella vallitsee tuntuva painovoimavaje ja että syvänteet ovat näin ollen isostaattisessa epätasapainossa (Vening Meinesz, 1928).

Tuotantomielessä heilurigravimetrit ovat painovoimamittauksiin liian hankalia ja hitaita. Kenttämittauksia varten on kehitetty *jousigravimetri*, katso osio 11.2.

[3] Henry Kater FRS FRAS (1777–1835) oli brittiläisfyysikko, joka työskenteli tieteellisten kojeiden ja metrologian parissa.

[4] Robert Freiherr (paroni) Daublebsky von Sterneck (1839–1910) oli itävaltalais-unkarilaisen armejan kenraalimajuri sekä geofyysikko, tähtitieteilijä ja geodeetti.

KUVA 11.2. Autograv™ CG-5 -jousigravimetri Scintrexiltä. Kuva Monniaux (2011).

Heilurigravimetri on periaatteessa absoluuttinen mittauskoje, koska painovoima saadaan sen avulla suoraan kiihtyvyyslukuna. Olemassa on kuitenkin heilurin kiinnitykseen eli tukipisteeseen liittyviä systemaattisia efektejä, joiden takia mittauksen absoluuttisuuteen ei voi luottaa. Yksi kokeiltu ratkaisu on *hyvin pitkä lankaheiluri*, esimerkiksi Hytönen (1972). Nykyisin absoluuttimittaukset tehdään kuitenkin mieluummin ballistisilla gravimetreilla, katso osio 11.3. On havaittu, että vanhemmat, heilurikojeilla saadut mittausarvot niin sanotussa Potsdamin järjestelmässä ovat systemaattisesti 14 mGal liian korkeita.

11.2 Relatiivinen eli jousigravimetri

Jousigravimetri on yksinkertaisimmillaan sama kuin *jousivaaka*.

Lineaarisen jousivaa'an koemassan liikeyhtälö on

$$m\left(\frac{d^2\ell}{dt^2} - g\right) = -k\,(\ell - \ell_0)\,, \tag{11.1}$$

jossa m on koemassa, g paikallinen (mitattava) painovoima ja k jousivakio. Suure ℓ_0 on jousen "lepopituus", joka jousella olisi, jos siihen ei kohdistuisi ulkopuolisia voimia. ℓ on jousen todellinen hetkellinen pituus.

Tasapaino jousen voiman ja painovoiman välillä on

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad mg = k\,(\ell - \ell_0) = k\left(\bar{\ell} - \ell_0\right), \tag{11.2}$$

jossa $\bar{\ell}$ on jousen keskimääräinen pituus heilahtelun aikana ja samalla *tasapainopituus*, jos heilahtelua ei ole.

Kun koemassaa häiritään, se alkaa heilahdella tasapainopaikkansa ympäri. Värähtely-yhtälö, joka saadaan summaamalla yhteen yhtälöt 11.1 ja 11.2, on

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\ell - \bar{\ell}\right) = -\frac{k}{m}\left(\ell - \bar{\ell}\right).$$

Heilahdusaika on

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{\ell} - \ell_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta\ell}{g}}, \tag{11.3}$$

jossa $\delta\ell = \bar{\ell} - \ell_0$ on tasapainotilassa ja lepotilassa olevan jousen pituuksien välinen ero: *jousen pidennys painovoiman vaikutuksesta*.

Kojeen *herkkyys* saadaan differentioimalla yhtälö 11.2 muodossa

$$mg = k\left(\bar{\ell} - \ell_0\right) = k\,\delta\ell$$

tuloksena

$$\frac{d\bar{\ell}}{dg} = \frac{d\,(\delta\ell)}{dg} = \frac{m}{k} = \frac{P^2}{4\pi^2}. \tag{11.4}$$

Sijoittamalla esimerkiksi $\delta\ell = 5\,\text{cm}$ ja $g = 10\,\text{m/s}^2$ yhtälöön 11.3 saadaan $P = 0{,}44\,\text{s}$. Yhden milligalin muutos painovoimassa g tuottaa yhtälön 11.4 mukaan pidennystä vain $5 \cdot 10^{-8}\,\text{m} = 50\,\text{nm}$ (tarkista!), yksi kahdestoistaosa helium-neonlaserin aallonpituudesta. Liikkeen havaitsevan tai liikettä kompensoivan anturin on selvästi oltava erittäin herkkä!

11.2.1 Astatisointi

Astatisoitu gravimetri hyödyntää erilaista mittausgeometriaa. Esimerkki on pitkään suosiota nauttinut LaCoste-Romberg-gravimetri. Sen sisällä koemassa on vivun eli puomin päässä, katso kuva 11.3. Vipuun kohdistuu kaksi vääntöä, jotka ovat tasapainossa. Jousen aiheuttama vääntö on

$$\tau_s = k\left(\bar{\ell} - \ell_0\right) b \sin\beta,$$

jossa $\bar{\ell}$ on jousen todellinen venytetty tasapainopituus ja ℓ_0 teoreettinen pituus ilman kuormitusta eli lepopituus.

Sinisäännön mukaan

$$\bar{\ell}\sin\beta = c\sin(90^\circ + \epsilon) = c\cos\epsilon,$$

jonka sijoitus edelliseen yhtälöön antaa

$$\tau_s = k\left(\bar{\ell} - \ell_0\right)\frac{bc}{\bar{\ell}}\cos\epsilon.$$

Massaa vetävä painovoima on mg ja vastaava vääntö

$$\tau_g = mgp\cos\epsilon.$$

Niiden välillä on oltava tasapaino:

$$\tau_g - \tau_s = mgp\cos\epsilon - k\left(\bar{\ell} - \ell_0\right)\frac{bc}{\bar{\ell}}\cos\epsilon = 0$$

eli

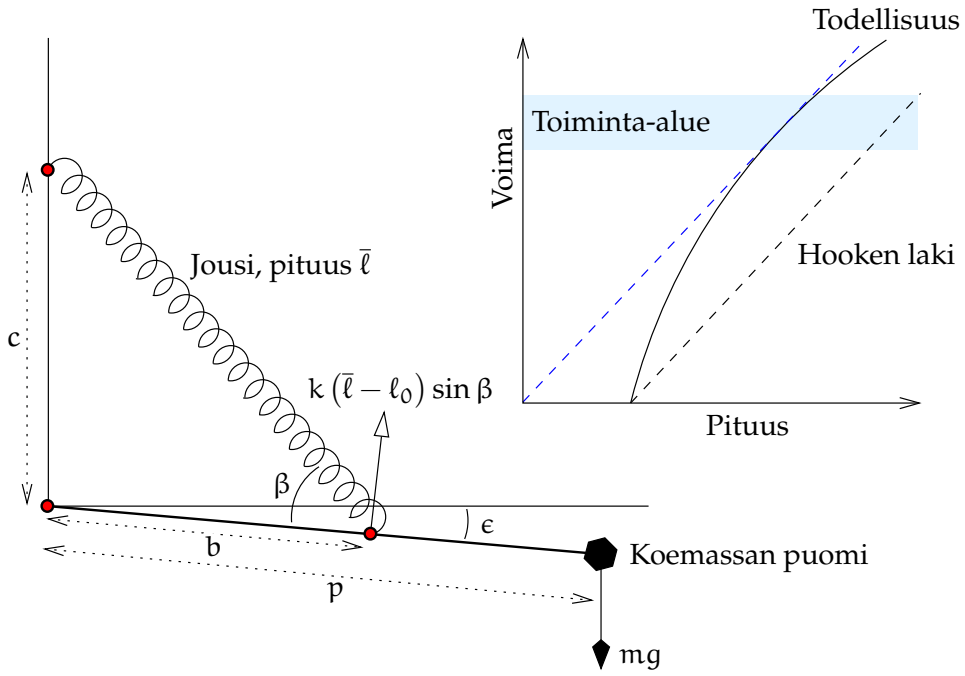
$$mgp\bar{\ell} - kbc\left(\bar{\ell} - \ell_0\right) = 0. \tag{11.5}$$

Differentioimalla

$$mp\bar{\ell}\,dg + mgp\,d\bar{\ell} - kbc\,d\bar{\ell} = 0,$$

ja sijoittamalla siihen yhtälö 11.5 antaa *herkkyyskaavan*:

$$\frac{d\bar{\ell}}{dg} = -\frac{mp\bar{\ell}}{mgp - kbc} = -\frac{mp\bar{\ell}}{mgp - mgp\,\bar{\ell}\Big/\left(\bar{\ell} - \ell_0\right)} = \frac{\bar{\ell}}{g}\frac{\bar{\ell} - \ell_0}{\ell_0}.$$



KUVA 11.3. Jousigravimetrin toimintaperiaate. Oikealla näytetään, miten toteutetaan ”nollapituusjousi”.

Tästä näkyy, että herkkyyttä voidaan kasvattaa mielivaltaisesti valitsemalla ℓ_0 mahdollisimman lyhyeksi, lähes nollaksi. Tämä ratkaisu on nimeltään *nollapituusjousi* (Wikipedia, Zero-length springs).

Tietenkin kojeen *tasaus* käyttämällä sisäänrakennettua rasiatasainta ja kolmea jalkaruuvia on kriittisen tärkeää.

Esimerkiksi oletukset $\bar{\ell} = 5\,\text{cm}$, $\ell_0 = 0{,}1\,\text{cm}$, $g = 10\,\text{m/s}^2$ antavat

$$\frac{d\bar{\ell}}{dg} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{m/mGal},$$

50 kertaa[5] paremman tuloksen kuin aiemmin! Parannus- eli *astatisointisuhde* on juuri $(\bar{\ell} - \ell_0)/\ell_0$.

[5] Vertailukelpoisuuden vuoksi pitää kertoa lausekkeen $p/b\sin\beta$ kanssa, jos koemassan paikka mitataan.

Tämä on *astatisoidun* gravimetrin, kuten LaCoste-Romberg-gravimetrin[6], toimintaperiaate.

11.2.2 *Heilahtelun periodi*

Aihetta voi tarkastella myös hieman toisella tavalla. Jos laite ei ole tasapainotilassa, puomi heilahtelee hitaasti tasapainoasennon molemmin puolin. Lähdetään yhtälöstä 11.5:

$$mgp\bar{\ell} - kbc\left(\bar{\ell} - \ell_0\right) = 0, \tag{11.6}$$

mutta sovellettuna epätasapainotilaan. Silloin koemassalla on kiihtyvyys a, positiivinen alaspäin, ja pätee

$$m\left(g - a\right)p\ell - kbc\left(\ell - \ell_0\right) = 0,$$

jossa jousen tasapainopituuden $\bar{\ell}$ sijaan on laitettu sen hetkellinen pituus ℓ. Vähentämällä yllä olevat kaksi yhtälöä toisistaan saadaan

$$mgp\left(\bar{\ell} - \ell\right) + map\ell - kbc\left(\bar{\ell} - \ell\right) = 0.$$

Käytetään yhtälöä 11.6 lausekkeen kbc eliminoimiseksi, tuloksena

$$mgp\left(\bar{\ell} - \ell\right) + map\ell - mgp\frac{\bar{\ell}}{\bar{\ell} - \ell_0}\left(\bar{\ell} - \ell\right) = 0.$$

Termien uudelleenjärjestys antaa

$$map\ell = mgp\frac{\ell_0}{\bar{\ell} - \ell_0}\left(\bar{\ell} - \ell\right)$$

eli

$$a = -\frac{g}{\ell}\frac{\ell_0}{\bar{\ell} - \ell_0}\left(\ell - \bar{\ell}\right).$$

---

[6] Lucien LaCoste (1908–1995) oli amerikkalainen fyysikko ja metrologi, joka keksi ylioppilaana yhdessä fysiikkaprofessorinsa Arnold Rombergin (1882–1974) kanssa astatisoidun gravimetrin ja nollapituusjousen periaatteen.

Tähän ilmaantuu jälleen "astatisointisuhde" $(\bar{\ell} - \ell_0)/\ell_0$, joka nollapituusjouselle ($\ell_0 \approx 0$) on hyvin suuri.

Nyt jousen pituuden epätasapaino $\ell - \bar{\ell}$ on yhteydessä koemassan pystysijainnin poikkeamaan z (alaspäin kasvava) seuraavasti:

$$z = (\ell - \bar{\ell}) \frac{p}{b \sin \beta}.$$

Tämän avulla saadaan

$$a = \frac{d^2}{dt^2} z = -\frac{g}{\ell} \frac{\ell_0}{\bar{\ell} - \ell_0} \frac{b \sin \beta}{p} z.$$

Tämä on värähtely-yhtälö muuttujassa z. Värähtelyaika on

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g} \frac{p}{b \sin \beta} \frac{\bar{\ell} - \ell_0}{\ell_0}}.$$

Samoille arvoille kuin yllä, $\ell_0 = 0{,}1\,\mathrm{cm}$, $\bar{\ell} = 5\,\mathrm{cm} \approx \ell$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ ja $p/b \sin \beta = 2$, löydämme

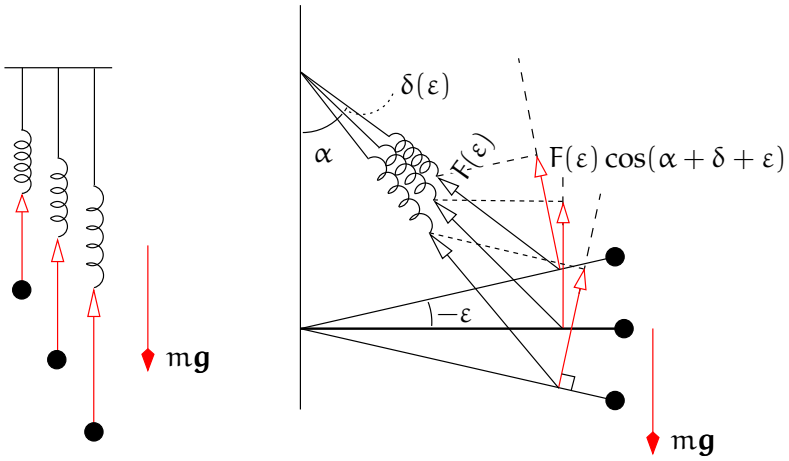
$$P = 4{,}4\,\mathrm{s}.$$

Tämä pitkä värähtelyaika merkitsee, että laite on vähemmän herkkä korkeataajuuksisille värähtelyille, joita syntyy esimerkiksi ohikulkevasta liikenteestä tai mikroseismiikasta. Tämä on merkittävä toiminallinen etu.

11.2.3 Käytännön mittaus

Tavallinen jousigravimetri perustuu *elastisuuteen*. Koska mikään aine ei ole täysin elastista, vaan aina myös plastista[7], gravimetri itse muuttuu mittausprosessin aikana. Tätä muutosta kutsutaan *käynniksi*. Käynti otetaan huomioon käytännön mittauksissa seuraavilla toimenpiteillä:

[7] Metallikiteen plastinen deformaatio tapahtuu kidehilan virheiden, *dislokaatioiden*, välityksellä. Kun dislokaatiot kulkevat hilan läpi kiteen kuormittuessa, metallin ominaisuudet muuttuvat, mistä voi seurata *metalliväsymys*, joka on tunnettu ongelma esimerkiksi ilmailussa. Wikipedia, Dislokaatio. Metallurgian keskeinen käytännön tehtävä on metallien vahvistaminen estämällä dislokaatioiden liikettä, esimerkiksi lisäämällä hiiltä rautaan teräksen valmistuksessa. Wikipedia, Strengthening mechanisms of materials.



KUVA 11.4. Astatisoinnin idea. Tavallisen jousen elastinen voima kasvaa jyrkästi jousen venyessä (vasemmalla), kun taas koemassan paino on vakio. Puomi- ja diagonaaliasetelman ansiosta (oikea) jousen voiman osuus puomin liikkumissuunnassa (punainen) pienenee jousen venymisen myötä, kun taas jousen voima kasvaa lähes samalla tavalla, kun jousi venyy. Tämä likimääräinen kumoaminen nostaa herkkyyttä. Käytetty jousi on *nollapituusjousi*.

- Mitataan pitkin linjoja, jotka lähtevät tunnetusta pisteestä ja päättyvät tunnettuun pisteeseen. Silloin saadaan *sulkuvirhe*. Mittaus etenee linjaa pitkin mahdollisimman nopeasti. Sulkuvirhe poistetaan tasoittamalla mittauksesta saadut arvot suhteessa niiden mittausaikoihin.
- Gravimetria kuljetetaan varovasti sitä kolhimatta.
- Kuljetuksen aikana muistetaan aina *arretoida* (laittaa puomi liikkumattomaksi)!
- Koska jousen elastiset ominaisuudet ja laitteen geometria riippuvat lämpötilasta, tarkkuusgravimetrit ovat aina *termostoituja*.

Merigravimetri eroaa tavallisesta (maa-)gravimetrista siinä, että se on tehokkaasti *vaimennettu*. Sama pätee myös ilmagravimetrille. Molemmat asennetaan vakautetulle alustalle, jolloin mittausakseli osoittaa aina

paikallisen luotiviivan suuntaan kulkuneuvon liikkeistä huolimatta.

11.3 Absoluuttinen eli ballistinen gravimetri

Ballistinen eli absoluuttinen gravimetri on paluuta perusteisiin eli painovoiman määritelmään: koje mittaa suoraan *vapaan putoamisen kiihtyvyyttä*. Laite sisältää tyhjiöputken, jonka sisällä kappale, valoa heijastava prisma, putoaa vapaasti. Katso kuva 11.5.

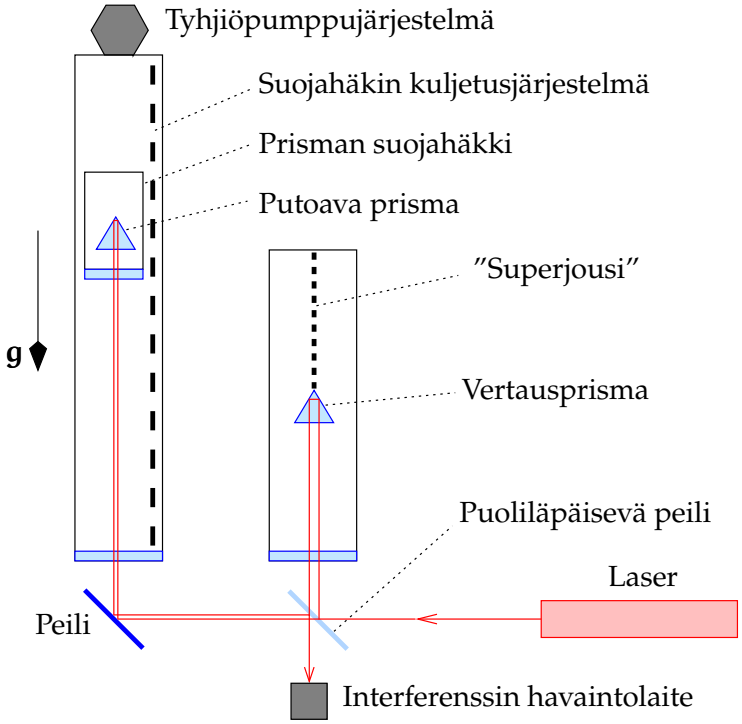
Tässä kuvataan lyhyesti Boulderissa Coloradon yliopistossa Jim Fallerin[8] ryhmän rakentama JILA-gravimetri, joita Geodeettinen laitos on hankkinut kaksi. Kuvassa 11.6 näkyy uudempi saman ryhmän rakentama laite, FG5. Suomessa tämä laite, jonka sarjanumero on 221, on toiminut vapaan putoamisen kiihtyvyyden kansallisena mittanormaalina. Vuonna 2012 laite päivitettiin FG5X-tyyppiseksi.

Prisman putoamisen aikana ”häkki”, jonka pohjassa on ikkuna, liikkuu häkin sisällä olevan prisman mukana siihen kuitenkaan koskematta. Häkin päätarkoitus on estää jäljellä olevia ilmahiveniä vaikuttamasta prisman kulkuun. Putken pohjan lähellä häkki, joka kulkee tietokoneohjattuna raidetta pitkin, jarruttaa, ja prisma laskeutuu suhteellisen pehmeästi häkin pohjaan. Sen jälkeen häkki kulkee takaisin putken yläpäähän ja uusi mittausjakso alkaa.

Laserinterferometri mittaa prisman paikat matkan varrella. Mittaukset toistetaan tuhansia kertoja hyvän tarkkuuden aikaansaamiseksi. Kyse on siis keskiarvostuksesta. Toinen prisma, vertausprisma, on ripustettu toisessa putkessa hyvin löysästä jousesta (oikeastaan elektronisesti simuloitu ”superjousi”), mikä suojaa prismaa mikroseismiikalta.

Laite on suunniteltu niin, että on mahdollista saavuttaa suurin mahdollinen tarkkuus. Esimerkiksi pudottamisen aiheuttama tärinä on saatu hallintaan hyvin suunnitellun jalustan avulla. Tarkkuudet ovat

[8] James E. Faller (synt. 1934) on amerikkalainen fyysikko, metrologi, geodeetti ja gravitaation tutkija. Hän ehdotti, että laserheijastimia asennettaisiin Kuun pinnalle Apollo-projektissa Kuun etäisyyden mittaamiseksi — LLR, *lunar laser ranging*.



KUVA 11.5. Ballistisen absoluuttigravimetrin toimintaperiaate.

muutaman mikrogalin luokkaa eli samaa kuin mihin LaCoste-Romberg-relatiivigravimetrit pystyvät.

Laite on kuitenkin kookas, ja vaikka sen voi kuljettaa paikasta toiseen, sitä ei voi kutsua kenttäkojeeksi. Viime aikoina kehitys on mennyt pienempien laitteiden suuntaan, koska niiden kuljetettavuus on olennaisesti parempi.

Vapaasti putoavan massan liike saadaan yhtälöstä

$$\frac{d^2}{dt^2}z = g(z),$$

jossa on oletettu — realistisesti — että painovoima g riippuu paikasta z pudotusputken sisällä, alaspäin kasvava. Jos kuitenkin oletetaan g vakioksi, saadaan integroimalla

$$\frac{d}{dt}z = v_0 + gt, \qquad z = z_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2,$$

KUVA 11.6. FG5-tyyppinen absoluuttinen gravimetri. Valokuva Yhdysvaltojen National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA).

josta saadaan mittausprosessin *havaintoyhtälöt*

$$\underline{z}_i = \begin{bmatrix} 1 & t_i & \frac{1}{2}t_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ v_0 \\ g \end{bmatrix} + \underline{n}_i .$$

9 Tässä estimoitavissa olevat tuntemattomat[9] ovat z_0, v_0 ja g. Suureet $\underline{z}_i$ ovat putoavan prisman interferometrisesti mitatut pystysuuntaiset paikat ja $\underline{n}_i$ mittausvirheet eli "kohina". Vastaavan mittaushetken eli *epookin* t_i tarkka määritys laskettuna prisman vapauttamisen hetken lähellä olevasta nollahetkestä on tietenkin olennaista. Jokaisessa yksittäisessä pudotuksessa kerättävien mittausarvojen lukumäärä on mittava.

[9] Olisi helppo (harjoitus!) lisätä tähän painovoiman pystygradienttia edustava tuntematon. Se, voidaanko tälle tuntemattomalle saada käyttökelpoinen arvo mittauksista, on hyvä kysymys.

Havaintoyhtälöt kirjoitetaan matriisimuotoon:

$$\underline{\ell} = A\mathbf{x} + \underline{\mathbf{n}},$$

jossa

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \vdots \\ \underline{z}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \underline{n}_1 \\ \underline{n}_2 \\ \vdots \\ \underline{n}_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \frac{1}{2}t_1^2 \\ 1 & t_2 & \frac{1}{2}t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & \frac{1}{2}t_n^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} z_0 \\ v_0 \\ g \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu seuraa tästä pienimmän neliösumman tasoituksen menetelmän mukaisesti *normaaliyhtälöistä*

$$A^T A\,\widehat{\mathbf{x}} = A^T \underline{\ell},$$

antaen ratkaisun eli estimaatin

$$\widehat{\mathbf{x}} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \underline{\ell}.$$

Estimaattien epävarmuus on vektorin varianssimatriisi

$$\mathrm{Var}\{\widehat{\mathbf{x}}\} = \sigma^2 \left(A^T A\right)^{-1},$$

jossa σ on yhden havainnon $\underline{z}_i$ epävarmuus eli keskivirhe, ”painoyksikön keskivirhe”.

Vaihtoehtoinen absoluuttigravimetrityyppi *heittää* prisman *ylös* putken sisällä, minkä jälkeen prisma kulkee symmetristä rataa. Tällainen ”*rise-and-fall*” -laite on esimerkiksi italialainen IMGC-02 (d’Agostino ym., 2008). Teoreettisesti tällä menetelmällä saataisiin tarkempia mittaustuloksia, mutta sen tekniset haasteet ovat suurempia kuin pudotusmenetelmässä. Laitetyyppien väliset vertailut ovat auttaneet identifioimaan virhelähteitä.

Viime aikoina on rakennettu myös niin sanottuja atomi- eli kvanttigravimetreja, joilla mitataan interferometrisesti yksittäisten atomien putoamisliikettä (de Angelis ym., 2009).

Laitteen idea on, että painovoiman vaikutus putoavien atomien aineaallon vaihekulmaan mitataan. Ensin valmistetaan niin sanottu Bosen ja Einsteinin kondensaatti äärimmäisellä jäähdytyksellä. Kondensaatissa on ehkä miljoona atomia, jotka kaikki ovat identtisessä kvanttitilassa. Atomien vaihekulmat liikkuvat yhdessä, ikään kuin ne olisivat yhdessä marssivat sotilaat.

Laservalon ja atomien välinen vuorovaikutus perustuu Raman-ilmiöön, epäelastiseen sirontaprosessiin, jossa atomit vaihtavat sekä energiaa että liikemäärää lasersäteen fotonien kanssa samalla kun ne siirtyvät kvanttitilasta toiseen. Sirontaan osallistuu kaksi fotonia: kyseessä on "kielletty" siirtymä, jolla on hyvin tarkasti määritelty energian ja liikemäärän muutos.

Kondensaatin annetaan pudota, ja ensimmäinen laserpulssi jakaa
[10] sen kahtia. Puolet atomeista[10] putoaa ensin hitaasti ja sitten nopeammin. Toinen puoli putoaa ensin nopeasti ja sitten hitaammin. Tämän toteuttamiseksi ammutaan toinen laserpulssipari, joka toimii peilin tai ehkä tennismailan tavoin. Kolmas ja viimeinen laserpulssi yhdistää säteet. Sen jälkeen havaitaan vahvistavaa tai vaimentavaa interferenssiä fluoresenssi-ilmaisimen avulla. Havainnoista päätellään interferometrin kahden haaran välinen vaihe-ero.

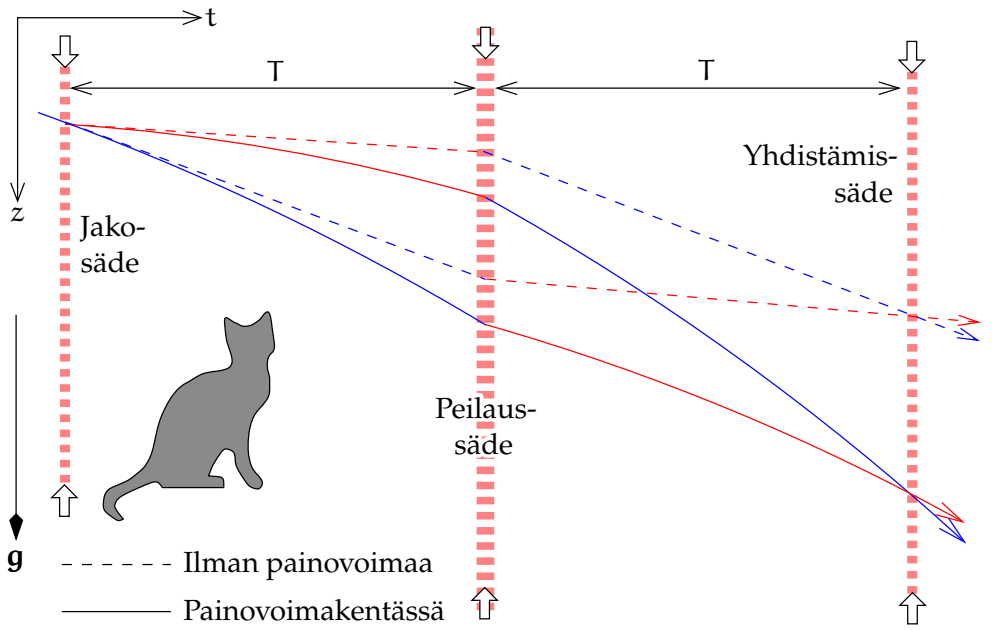
Kun atomit kulkevat aika-avaruuden kautta kahta eri reittiä, joiden
[11] painovoimapotentiaalit ovat erilaiset[11], syntyy niiden välille vaihe-ero, joka periaatteessa voidaan mitata. Katso kuva 11.7, jossa vaaka-akseli on aika. Ilman painovoimaa (katkoviivat) tämä vaihe-ero olisi nolla.

Kuten kaikissa (ei-kinemaattisissa) interferometrisissa menetelmissä, ambiguiteettiongelma — se, että mitattu vaihe on aina välillä $[0, 2\pi)$, vaikka vaiheen muutos tai vaihe-ero voi sisältää monta kokonaista

---

[10] Tämä on kvanttiteoreettisesti väärin sanottu. *Jokaisen atomin* aineaalto jakautuu kahteen! Wikipedia, Kaksoisrakokoe.

[11] Itse asiassa atomin aaltofunktion vaihekulman kiertoliike toimii kellon tavoin, ja ajan kulun nopeus riippuu paikallisesta geopotentiaalista (Vermeer, 1983a).



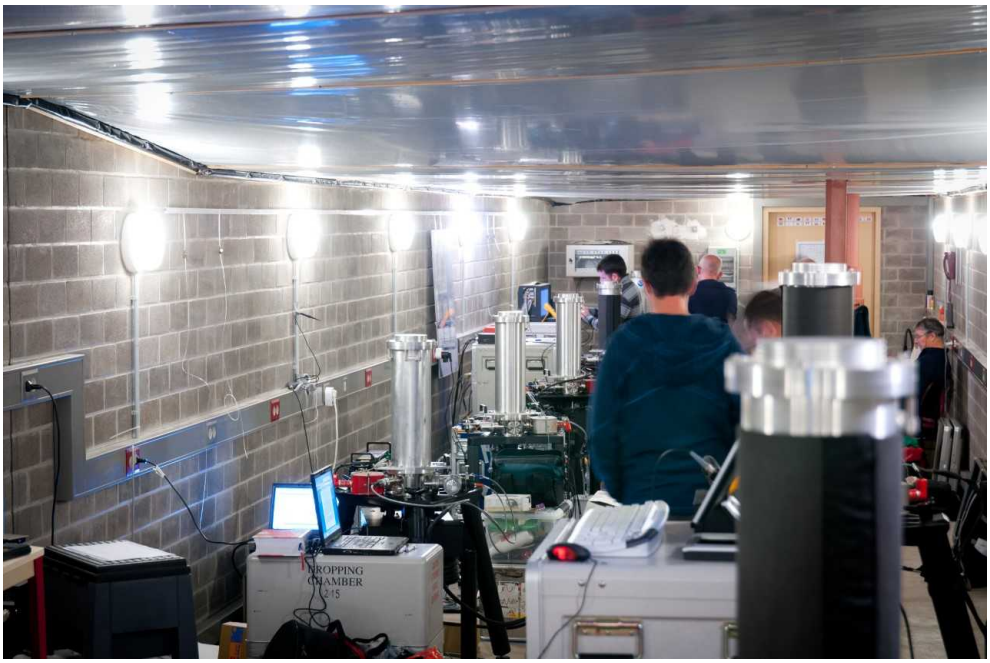
KUVA 11.7. Atomi- eli kvanttigravimetrin toiminta-ajatus. Vaaka-akseli on aika.

kierrosta — asettaa oman haasteensa. Ambiguiteettien ratkaisu onnistuu mittaamalla useilla eri pulssien välisillä aikaväleillä T, kuva 11.7.

11.4 Verkkohierarkia gravimetriassa

Gravimetriassa verkkohierarkia on yhtä tärkeä kuin geodeettisissa sijainnin tai korkeuden mittauksissa. Menetelmä on yleensä ollut se, että ylin mittausluokka koostuu absoluuttigravimetrilla — aikanaan heilurikojeella — mitatuista pisteistä. Tämän ylimmän luokan verkon vaiheittainen tihennys eli *runkoverkon* mittaus suoritettiin sen jälkeen relatiivi- eli jousigravimetreilla, kuten myös alimman luokan mittaukset eli painovoimakartoitus. Runkomittauksissa käytettiin nopeita kuljetusvälineitä, kuten lentokoneita, ja kansalliset tai alueelliset vertauspisteet sijaitsivat usein lentokentillä.

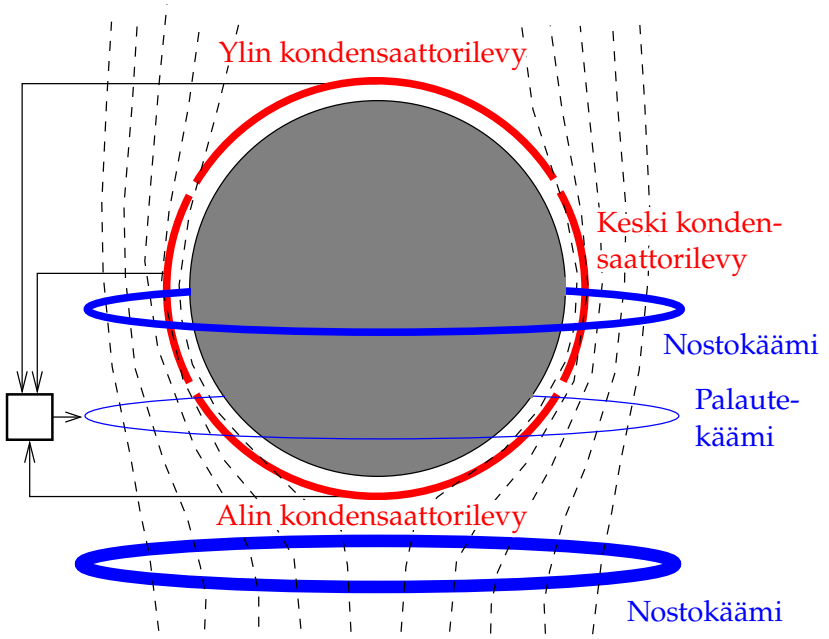
Koska heilurigravimetrit eivät ole riittävän tarkasti absoluuttisia, on vanhaan Potsdamin järjestelmään jäänyt systemaattinen 14 milligalin



KUVA 11.8. Kansainvälinen absoluuttigravimetrien vertailu Walferdangessa Luxemburgissa. Kuva © Olivier Francis.

kokoinen virhe: kaikki arvot ovat sen verran liian korkeita. Nykyisin käytetäänkin mieluummin ballistisia vapaan putoamisen gravimetreja, joiden systematiikka on paljon pienempi, vaikkakaan ei olematon: suuruusluokkaa on mikrogalleja. Koska olemassa ei ole parempia, siis absoluuttisempia, laitteita, ratkaisua ongelmaan ei lopulta ole. Siksi alalla järjestetään säännöllisiä kansainvälisiä laitevertailuja, kuten International Intercomparison of Absolute Gravimeters, jotka ovat arvokkaita.

Suomessa absoluuttigravimetrilla säännöllisesti mitatut pisteet ovat Metsähovin lisäksi Vaasassa (kaksi pistettä), Joensuussa (kaksi pistettä), Kuusamossa, Sodankylässä, Kevolla ja Eurajoella.



KUVA 11.9. Suprajohtavan gravimetrin toimintaperiaate. Pallon paikka luetaan kapasitiivisesti.

11.5 Suprajohtava gravimetri

Tämä gravimetrityyppi perustuu magneettikentässä leijuvaan suprajohtavaan metallikuulaan, jonka tarkka paikka mitataan elektronisesti. Koska magneettikenttä ei läpäise suprajohtavaa ainetta, kuula jää ikuisesti samaan paikkaan kentän sisälle. Kyseessä on Meissnerin ilmiö. Kentän on oltava muuttumaton. Kenttä on suprajohtavien käämien generoima ja mu-metallista tehdyn säilion sisällä (Wikipedia, Mu-metal). Näin Maan magneettikenttä suljetaan ulkopuolelle.

Suprajohtavuus vaatii edelleen työskentelyä nestemäisen heliumin (He) lämpötiloilla. Siksi laite ei ole vain kallis, vaan sen käyttö vaatii kalliita laboratoriotiloja toimivan yhteiskunnallisen infrastruktuurin ympäristössä.

Suprajohtavia gravimetreja on maailmassa reilut kolmekymmentä. Työtä koordinoi IAG:n palvelu IGETS, *International Geodynamics and Earth*

Tide Service. Yksi GWR20-tyyppinen laite on toiminut vuodesta 1994 Kirkkonummella silloisen Geodeettisen laitoksen, nyt Maanmittauslaitoksen Metsähovin tutkimusasemalla, Virtanen ja Kääriäinen (1995), Virtanen (1998). Laite päivitettiin vuonna 2014.

Suprajohtavan gravimetrin tärkein ominaisuus sen ylivoimaisen tarkkuuden[12] lisäksi on *stabiilius* eli olematon käynti. Siksi se soveltuu erinomaisesti pitkäperiodisten ilmiöiden seuraamiseen, kuten suurten maanjäristysten aiheuttamien kiinteän Maan ominaisvärähtelyjen[13], joissa koko maapallo soi kirkonkellon tavoin. Se sopii siis mittauksiin, joihin tavallinen gravimetri ei sovi suuremman käynnin ja heikomman herkkyyden takia, ja mittauksiin, joihin seismometri ei sovi, koska mitattavat taajuudet ovat liian matalia.

Viime aikojen trendi on kevyiden, ”kannettavien” ja kaukoohjattavien suprajohtavien gravimetrien kehitys, esimerkiksi GWR *i*Grav®, joka painaa 30 kg eikä kuluta yhtään nestemäistä heliumia. Toisaalta se vaatii reilun kilowattin verran verkkovirtaa jäähdytysjärjestelmäänsä (GWR Instruments, Inc., *i*GRAV® Gravity Sensors). Ehkä tämä tuo parannusta nykytilanteeseen, jossa valtaosa laitteista sijaitsee Euroopassa ja Pohjois-Amerikassa.

11.6 Painovoimamittaus ja ilmakehä

Ilmakehä vaikuttaa painovoimaan seuraavalla tavalla:

- *Laitteeseen liittyvät vaikutukset* johtuvat gravimetrin konstruktiosta. Ainakin ilmanpaineen vaikutus saadaan häviämään sulkemalla laite painekammioon. Käytännössä helpompaa on *kalibroida* laite

[12] Virtanen (2006) kertoo, miten Metsähovin laite havaitsi painovoiman muutoksen, kun työläiset loivat lunta laboratoriorakennuksen katolta ja pitivät teetauon! Myös vierailijoiden ”punnitus” heidän vetovoimansa perusteella on rutiinia.

[13] Niiden periodit ovat välillä noin 300–30 000 sekuntia — taajuudet 0,03–3 mHz — ja ne ovat geofysikaalisesti hyvin mielenkiintoisia, Wikipedia, Earth normal modes.

laboratoriossa ja laskea kalibroinnin mukainen korjaus kenttämittauksiin.

- *Ilmakehän vetovoima* on oikea gravitaatio. Se sisältää epäsäännöllisiä paikasta ja ajasta riippuvaisia vaihteluita, joita pitää korjata pois painovoiman havaintoarvoista.

  Ilmakehän vaikutuksen voi laskea Bouguer-laatta-approksimaation avulla: jos ilmanpaine on p, on ilmakehän massan pintatiheys

  $$\kappa = p/\gamma\,,$$

  jossa γ on edustava painovoima-arvo ilmakehän sisällä. Emme tee suurta virhettä, jos käytämme merenpinnan arvoa $\gamma \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Merenpinnan standardi-ilmanpaine on 1013,25 hPa, jolloin saadaan merenpinnan tasolla[14] $\kappa \approx 10\,329\,\mathrm{kg/m^2}$. Bouguer-laatan vaikutus on [14]

  $$2\pi G\kappa = 0{,}43\,\mathrm{mGal} \tag{11.7}$$

  ylöspäin.

  Olisi kuitenkin väärin käyttää tätä arvoa korjauksena! Standardi-ilmakehä on oikeasti pallokuori, jonka sisällä mittaukset tehdään, ja kuoren sisällä sen vetovoima häviää, katso osio 1.4.

  Sen sijaan ilmanpaineen paikallisella *vaihteluilla* on suhteellinen vaikutus. Jos ilmanpaineen poikkeama on $\Delta p = p - p_0$, jossa p_0 on keskimääräinen ilmanpaine, tehtävä painovoimamittauksen korjaus on

  $$\delta g_A = 0{,}43\frac{\Delta p}{p_0}\mathrm{mGal}.$$

  Myrskyn tai säärintaman ylikulun aikana kaunis teoria romahtaa ja yksinkertaiset kaavat antavat harhaanjohtavia tuloksia. Silloin on paras olla tekemättä painovoimamittauksia!

---

[14] Siis tosiaan, standardi läppärin 14 tuuman näyttöön (kuvasuhde 16 : 9) kohdistuva voima on 547 kg… mutta sillä ei ole väliä, koska se ei ole vanhanaikainen tyhjiökuvaputki.

- *Ilmakehän sisällyttäminen maapallon massaan* ei ole painovoimamittauksiin tehtävä korjaus, vaan *reduktio*, jota käytetään painovoima-*anomalioiden* laskennassa, mikäli halutaan anomalioita, joissa ilmakehän vaikutus ei aiheuta systematiikkaa.

  Muista, että GRS80:n normaalipainovoimakenttä on määritelty siten, että parametri $GM_\oplus$ sisältää koko maapallon massan ilmakehä mukaan lukien. Se on Maan vetovoima sellaisena kuin satelliitit sen tuntevat (Heikkinen, 1981).

  Siksi, jos halutaan laskea painovoima-anomalioita, joiden maailmanlaajuinen keskiarvo on nolla, pitää redukoida myös mitattu painovoima siirtämällä laskennallisesti *koko mittauspaikan yläpuolella oleva ilmakehä* mittauspaikan alapuolelle, esimerkiksi merenpintaan.

  Ilmakehän kokonaismassa on

$$M_A = 4\pi\kappa R^2 = 4\pi\frac{p}{\gamma}R^2.$$

  Newtonin mukaan sen vetovoima on

$$\frac{GM_A}{R^2} = \frac{4\pi G p}{\gamma},$$

  kaksi kertaa yllä laskettua Bouguer-laatan ilmakehäreduktiota 11.7. Tämä arvo on lisättävä mitattuihin painovoima-arvoihin.

  Voi myös ajatella tätä arvoa painovoiman muutoksena, jos paikallisen ilmakehän Bouguer-laatta *tiivistettäisiin* Helmertin kondensaation tavoin mittauspaikan alapuolelle, jolloin saadaan kaksinkertainen Bouguer-laattakorjaus.

  Merenpinnalla korjaus on 0,87 mGal. Korkeudella korjaus on

$$0{,}87\frac{p(H)}{p_0}\text{mGal},$$

  jossa $p(H)$ ja p_0 ovat ilmanpaineet korkeudella H ja merenpinnalla.

11.7 Ilmagravimetria ja GNSS

1990-luvun alussa GPS, globaali paikannusjärjestelmä, ja yleisemmin satelliittipaikannus, muutti *ilmagravimetrian* hankalasti toteutettavasta tekniikasta täysin operationaaliseksi. Tämän ymmärtämiseksi on tunnettava ilmagravimetrian toimintaperiaate.

Lentokoneessa kuljetetaan ilmagravimetria, kojetta, joka on samalla tavalla vahvasti *vaimennettu* kuin merigravimetri. Mittaus tapahtuu automaattisesti, yleensä sähköstaattisen kompensaation avulla. Koje on asennettu vakautetulle alustalle, joka seuraa paikallista luotiviivaa.

Lennon aikana gravimetri mittaa lentokoneessa *kokonaispainovoimaa*, joka koostuu kahdesta osasta:

1) varsinainen painovoima kiinteään Maahan kiinnitetyssä ja sen mukana pyörivässä vertauskehyksessä
2) lentokoneen kiihtyvyyksien aiheuttamat näennäisvoimat, jopa suorassa lennossa.

Lentokoneeseen on kiinnitetty muutama GNSS-antenni. Niiden ja geodeettisen GNSS-laitteen avulla voidaan lentokoneen liikkeitä seurata senttimetrin tarkkuudella. Liikkeistä voidaan laskea kohdalla 2 mainitut näennäisvoimat.

Jos mitataan lentokoneen (eli mittalaitteen) paikka $\mathbf{x}_i$ hetkillä t_i, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, saadaan kiihtyvyysarvojen estimaatit seuraavasti (inertiaalisessa kehyksessä):

$$\mathbf{a}_i^* \approx \frac{\mathbf{x}_{i+1}^* + \mathbf{x}_{i-1}^* - 2\mathbf{x}_i^*}{\Delta t^2}. \tag{11.8}$$

Jos gravimetrilla mitattu kiihtyvyys on $\widetilde{g}$ ja paikallisen luotiviivan suunta (ylöspäin) $\mathbf{n}$, seuraa paikallinen painovoima g seuraavasti:

$$g = \widetilde{g} - \Big\langle \big(\mathbf{a}^* + \mathbf{f}_\omega\big) \cdot \mathbf{n} \Big\rangle = \widetilde{g} - \langle \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{n} \rangle - \omega_\oplus^2 \, N(\varphi) \cos\varphi,$$

jossa $\mathbf{f}_\omega = \omega_\oplus^2 \, (X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j})$ on Maan pyörähdysliikkeen keskipakoiskiihtyvyys, yhtälö 4.1. $N(\varphi)$ on Maa-ellipsoidin poikittaiskaarevuussäde, yhtälö 2.6.

Maan mukana pyörivässä kehyksessä (”*Earth centred, Earth fixed*”) keskipakoiskiihtyvyystermi on jätettävä pois. Sen sijaan on silloin kuitenkin otettava huomioon corioliskiihtyvyys, joka johtaa lentokoneen nopeuden $\boldsymbol{v}$ vuorovaikutuksesta Maan pyörimisliikkeen kanssa. Kiihtyvyystermi on

$$\mathbf{f}'_\omega = -2\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{v} \rangle = 2\omega_\oplus \left(v_Y\,\mathbf{i} - v_X\,\mathbf{j}\right),$$

ja saadaan

$$g = \widetilde{g} - \left\langle \left(\mathbf{a}^\oplus - \mathbf{f}'_\omega\right) \cdot \mathbf{n} \right\rangle = \widetilde{g} - \left\langle \mathbf{a}^\oplus \cdot \mathbf{n} \right\rangle + 2\omega_\oplus\, v_{\text{itä}} \cos\varphi\,.$$

Kriittistä tässä menetelmässä on aikavakion Δt valinta. Parasta on valita se mahdollisimman pitkäksi, koska silloin laskettujen GNSS-kiihtyvyyksien $\mathbf{a}_i$ tarkkuus on mahdollisimman hyvä. Myös gravimetrin vaimennus valitaan Δt:n mukaan, ja havainnot suodatetaan digitaalisesti: kaikki taajuudet rajan Δt^{-1} yläpuolella poistetaan, koska ne ovat lähes kokonaan lentokoneen liikkeiden aiheuttamia.

Signaalista poistettu korkeataajuuksinen osa on usein 10 000 kertaa vahvempi kuin etsitty painovoimasignaali! Katso esimerkiksi Lu ym. (2017) kuva 2.

Jos yhden GNSS-paikkamittauksen pystysuuntaisen *koordinaatin* epävarmuus (keskivirhe) on σ_z ja eri koordinaatit eivät korreloi keskenään, on yhtälön 11.8 mukaan pystykiihtyvyyden epävarmuus

$$\sigma_a = \frac{\sigma_z\sqrt{6}}{\Delta t^2}.$$

Aikavälin Δt tekeminen mahdollisimman pitkäksi ilman, että *erotuskyky* kärsii, vaatii matalaa lentonopeutta. Yleensä käytetään potkurikonetta tai jopa helikopteria. Tietysti mittauksen hinta kasvaa lennon keston mukaan — helikopterin roottoritunti on kallis!

Lentokorkeus H valitaan erotuskyvyn Δx mukaan:

$$H \sim \Delta x = v\,\Delta t,$$

jossa v on lentonopeus. Vierekkäisten lentoratojen välinen etäisyys valitaan vastaavalla tavalla.

Ensimmäinen suuri ilmagravimetriaprojekti lienee ollut Grönlannin painovoimakentän kartoitus ilmasta (Brozena, 1992). Kunnianhimoisessa amerikkalais-tanskalaisessa hankkeessa lennettiin kesinä 1991–92 yli 200 000 km. Koko ajan mitattiin sekä painovoimaa että magneettikenttää. Jäänpinnan korkeutta mitattiin altimetrisesti.

Sen jälkeen on kartoitettu muitakin suuria asumattomia alueita pohjoisella ja eteläisellä napa-alueella, katso Brozena ym. (1996), Brozena ja Peters (1994). Muista suurista mittauskampanjoista kerrottiin jo alaosiossa 9.6.2. Toiminta jatkuu, katso Coakley ym. (2013), Kenyon ym. (2012). Menetelmä soveltuu suurille asumattomille alueille, mutta myös esimerkiksi merialueille lähellä rannikkoa tai saaristojen sisällä. Tällaisissa paikoissa laivagravimetrilla olisi vaikea navigoida pitkiä suoria linjoja. Vuonna 1999 suoritettiin ilmagravimetriakampanja Itämeren yli, ja mukana oli myös Suomenlahti (Jussi Kääriäinen, henkilökohtainen tiedotus).

Taloudellisuuden lisäksi ilmagravimetrian tärkeä etu on, että laajalta alueelta saadaan *homogeeninen* painovoima-aineisto. Monien vuosikymmenien aikana kerätyn pintamittausaineiston homogeenisuutta on vaikea taata samalla tavalla. Myöskään paikallisen maaston vaikutus, joka on pintamittauksissa etenkin vuoristossa systemaattinen ja hankalasti poistettava häiriötekijä (katso osio 6.3), ei esiinny samalla tavalla ilmagravimetriassa.

Satelliittigravimetrian toimintaperiaate on samanlainen, katso osio 13.7. Olennainen ero on, että satelliitissa oleva laitteisto on painottomassa tilassa. $\widetilde{g} = 0$ korkealla radalla tai jos käytetään ilmanvastuksen kompensaatiomekanismia. $\widetilde{g}$ on pieni ja mitataan herkän kiihtyvyysmittarin avulla matalalla radalla, jossa ilmanvastus on merkittävä.

Satelliittipainovoimamission suunnittelun suurin haaste onkin lentokorkeuden valinta. Matalin mahdollinen korkeus on noin 200 km. Sillä korkeudella tarvitaan ajoainetta tankillisen verran, koska muuten

lento ei kestä kauan. Mittausten erotuskyky Maan pinnalla on rajallinen: esimerkiksi GOCE-satelliittin ”näkemät” Maan painovoimakentän pienimmät yksityiskohdat ovat läpimitaltaan 50–100 km.

11.8 Painovoimagradientin mittaus

Painovoiman kiihtyvyys $\mathbf{g}$ on geopotentiaalin W gradientti. Painovoiman kiihtyvyys vaihtelee paikan mukaan, etenkin massojen lähistöllä. Puhutaan *painovoimagradienttitensorista* eli Eötvösin tensorista:

$$\mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} \partial_{xx} & \partial_{xy} & \partial_{xz} \\ \partial_{yx} & \partial_{yy} & \partial_{yz} \\ \partial_{zx} & \partial_{zy} & \partial_{zz} \end{bmatrix} W.$$

Tiedämme, että painovoima kasvaa alaspäin, ainakin vapaassa ilmassa. Ylöspäin painovoima vähenee, noin 0,3 mGal jokaista korkeusmetriä kohti.

Toposentrisissä koordinaateissa (x, y, z), joissa z osoittaa zeniitin suuntaan, on tämä matriisi likimäärin

$$\mathcal{M} \approx \begin{bmatrix} -0{,}15 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}15 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 \end{bmatrix} {}^{\text{mGal}}/_{\text{m}},$$

jossa $\partial_{zz} W = \partial_z g_z = -\partial_z g \approx 0{,}3\,{}^{\text{mGal}}/_{\text{m}}$ on standardiarvo painovoiman pystysuuntaiselle ilmagradientille: Newtonin laki antaa pallon muotoiselle maapallolle

$$g_z = -\frac{GM}{(R+z)^2}.$$

Miinusmerkki tulee siitä, että $\mathbf{g}$:n suunta on alaspäin, kun z-koordinaatti

kasvaa ylöspäin. Differentiointi antaa

$$\frac{\partial}{\partial z} g_z = 2\frac{GM}{(R+z)^3} \cdot \frac{\partial\,(R+z)}{\partial z} = -\frac{2g_z}{(R+z)} \approx$$
$$\approx 3 \cdot 10^{-6}\ {}^{m}/_{s^2}/_{m} = 0{,}3\,{}^{mGal}/_{m}.$$

Suureet $\partial_{xx}W$ ja $\partial_{yy}W$ taas edustavat tasapotentiaalipintojen kaarevuuksia x- ja y-suunnassa, yhtälöt 4.4:

$$\partial_{xx}W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{g}{\rho_x}, \quad \partial_{yy}W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{g}{\rho_y},$$

jossa ρ_x ja ρ_y ovat x- ja y-suunnan kaarevuussäteet. Sijoittaminen $\rho_x, \rho_y \approx R$ antaa

$$\partial_{xx}W = \partial_{yy}W \approx -1{,}5 \cdot 10^{-6}\ {}^{m}/_{s^2}/_{m} = -0{,}15\,{}^{mGal}/_{m}.$$

Unkarilainen tutkija Loránd Eötvös teki useita neuvokkaita kokeita (Eötvös, 1998) painovoimagradienttitensorin komponenttien mittaamiseksi rakentamillaan *torsiovaaoilla*. Menetelmä on edelleen käytössä geofysikaalisessa tutkimuksessa, koska painovoimagradientti on mittaussuureena varsin herkkä paikallisille maankuoren ainetiheysvaihteluille.

Eötvösin kunniaksi painovoimagradientin yksikkönä käytetään eötvösiä, symboli E:

$$1\,E = 10^{-9}\ {}^{m}/_{s^2}/_{m} = 10^{-4}\,{}^{mGal}/_{m}.$$

Yllä oleva tensori on nyt

$$\mathcal{M} \approx \begin{bmatrix} -1500 & 0 & 0 \\ 0 & -1500 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 \end{bmatrix} E.$$

Huomaa, että

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \partial_{xx}W + \partial_{yy}W + \partial_{zz}W \approx 0,$$

tuttu Laplacen differentiaaliyhtälö. Yhtälö ei ole kuitenkaan tässä eksakti: Maan mukana pyörivässä koordinaattijärjestelmässä Laplacen yhtälöön pitää lisätä keskipakoisvoiman divergenssin termi $2\omega_{\oplus}^2$, yhtälö 4.2.

Kuun ja Auringon painovoimagradienttikenttä tunnetaan Maan päällä *vuoroveden kenttänä*, katso osio 14.1.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Osiossa 11.2 kuvatulla jousigravimetrilla yhden milligalin muutos painovoimassa g tuottaa yhtälön 11.4 mukaan pidennystä $5 \cdot 10^{-8}$ m. Suorita tarkistuslasku.
2) Miksi heilurigravimetri, vaikkakin teoreettisesti absoluuttinen, ei ole kovin tarkka absoluuttisena gravimetrina?
3) Millaisilla menetelmävalinnoilla otetaan käytännön mittauksissa huomioon relatiivigravimetrin käynti?
4) Miksi kansainvälisten gravimetristen runkoverkkojen vertauspisteet olivat ennen absoluuttisten gravimetrien tuloa usein lentokentillä?
5) Mikä on absoluuttisessa eli ballistisessa gravimetrissa seuraavien osien rooli:
   (a) putoavan prisman ympäröivä ”häkki”
   (b) ”superjousi”?
6) Googlen mukaan
   - Persianlahden sota 1990–1991 oli ensimmäinen selkkaus, jossa sotilaat käyttivät GPS:ää laajasti.
   - Joulukuussa 1993 GPS saavutti ”*initial operational capabilityn*” (IOC), kun täysi konstellaatio, 24 satelliittia, oli käytettävissä.
   - Greenland Aerogeophysics Project, ensimmäinen suuren mittakaavan ilmagravimetriakartoitus, kartoitti Grönlannin

painovoimakenttää kesien 1991 ja 1992 aikana.

Miksi nämä vuosiluvut ovat näin lähellä toisiaan?

Harjoitus 11–1: Absoluuttinen gravimetri

Absoluuttisen gravimetrian havaintoprosessin yhtälö on

$$z = z_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Oletetaan, että putoamismatka on 30 cm.

1) Paljonko on putoamisaika?
2) Jos tavoitetarkkuus on $\pm 10\,\mu$Gal, kuinka tarkasti laserinterferometrin tulee mitata putoamismatka?

   Saa vapaasti valita käytettävän analyysimenetelmän: analyyttinen, numeerinen, ... Ajattele olevasi ostotilanteessa absoluuttista gravimetria rakentaessasi. Karkea arvio riittää!
3) Sama kysymys putoamisajan mittaustarkkuudelle.

Harjoitus 11–2: Jousigravimetri

Kun jousigravimetria käytetään kenttätyössä, asetetaan se jokaisella mittausasemalla tukevaan pohjaan, esimerkiksi peruskallioon, ja *tasataan*.

Tämän lisäksi huolehditaan aina siitä, että

- Laite *arretoidaan* kuljetuksen aikana: puomi kiinnitetään liikkumattomaksi.
- Laitteen sisäinen lämpötila pidetään vakiona *termostaattijärjestelmän* avulla.

Syynä tähän on se, että jousigravimetrin toiminta riippuu jousen aineen ominaisuuksista, jotka saattavat muuttua huolimattoman käsittelyn tai lämpötilan vaihtelujen seurauksena.

Tämän lisäksi jousigravimetrilla on aina *käynti*: yhteys mitatun arvon ja todellisen arvon välillä muuttuu hitaasti ajassa. ”Kypsässä”, ei-

vastavalmistuneessa gravimetrissa, käynti on kuitenkin hyvin tasainen ja melkein lineaarinen.

Kysymys Miten jousigravimetrin käyttäytyminen, erityisesti sen käynti, otetaan huomioon

1) mittausverkon topologian suunnittelussa?
2) verkon eri mittausten aikajärjestyksen suunnittelussa?
3) kulkuneuvojen ja mittauspisteiden sijaintien valinnassa?

Harjoitus 11–3: Ilmanpaine ja painovoima

1) Paljonko 100 hPa syvä matalapaineen alue — jolla on siis 100 hPa:n *vähemmän* ilmanpainetta kuin keskimääräinen ilmanpaine 1013,25 hPa — vaikuttaa Maan pinnalla mitattuun painovoimaan? Oleta, että alue on laaja, niin laaja kuin matalapaineet yleensä.
2) Paljonko merenpinta nousee matalapaineen alla ”ylösalainen ilmapuntari” -ilmiön takia?
3) Kuinka suuri on kohdassa 2 mainitun ilmiön vaikutus *laivalla* mitattuun painovoimaan? Oleta, että olet avomerellä, että painovoiman pystygradientti vapaassa ilmassa on $-0{,}3\ {}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$ ja että meriveden tiheys on $1030\ {}^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{m}^3}$. Analysoi tilanne huolellisesti[15].

[15] Siis oikein huolellisesti.

Geoidi, keskimerenpinta ja meritopografia

12

12.1 Peruskäsitteet

Merellä geoidi on keskimäärin samalla tasolla kuin *keskimerenpinta*, joka saadaan, jos hetkellisestä merenpinnasta poistetaan kaikki jaksolliset ja kvasijaksolliset vaihtelut. Nämä vaihtelut ovat esimerkiksi:

- vuorovesi-ilmiöitä (Kuun ja Auringon aiheuttamia), suuruusluokkaa ± 1 m, paikallisesti enemmänkin
- ilmanpaineen vaihtelujen aiheuttamia vaihteluja (”ylösalainen ilmapuntari”), jotka ovat tavallisesti desimetrien luokkaa, mutta trooppisten hirmumyrskyjen alla jopa metrejä
- tuulen aiheuttama vesimassojen kasaantuminen, ”*wind pile-up*”
- reunamerillä makean jokiveden mereen virtaaman vaihteluja
- valtamerillä esimerkiksi Golfvirran ja Agulhasinvirran yhteydessä syntyviä mesomittakaavan pyörteitä (”*mesoscale eddies*”), joiden elinkaari voi olla kuukausia ja joissa merenpinta voi olla jopa pari desimetriä ympäristönsä merenpinnan ala- tai yläpuolella
- merivirtausten jatkuva siirtyminen paikasta toiseen
- ENSO, *El Niño Southern Oscillation*, on hyvin pitkä-aikainen, kvasijaksollinen sääilmiö, joka tapahtuu pääasiassa Tyynenmeren vesissä ja sen yläpuolella olevassa ilmassa, mutta joka vaikuttaa koko maapallon sääilmiöihin. Vaihtelun aikaskaala on kahdesta

seitsemään vuoteen. Katso kuva 13.1.

Jos poistetaan kaikki nämä jaksolliset ja kvasijaksolliset vaihtelut, jää jäljelle *keskimerenpinta*. Jos merten vesi olisi tasapainotilassa, olisi tämä keskimerenpinta Maan painovoimakentän tasapotentiaalipinta nimeltä *geoidi*.

Näin ei todellisuudessa ole. Keskimerenpinta eroaa tasapotentiaalipinnasta muun muassa seuraavien ilmiöiden seurauksena:

- Pysyvät virtaukset valtameressä aiheuttavat coriolisvoiman kautta pysyviä keskimääräisen vedenpinnan tasoeroja.
- Myös pysyvät lämpötila- ja suolaisuuserot aiheuttavat pysyviä keskiveden tason eroja, jälkimmäiset esimerkiksi jokien suiden edustalla.

Yllä mainitut fysikaaliset ilmiöt aiheuttavat muiden joukossa niin sanotun *meritopografian,* pysyvän erotuksen keskimerenpinnan ja geoidin välillä. Katso kuva 12.4.

Geoidin klassinen määritelmä on

> *"Maan painovoimakentän tasapotentiaalipinta, joka yhtyy keskimäärin lähimmin keskimerenpintaan."*

Tämän määritelmän käytännön ongelma on, että geoidin oikean tason määritys edellyttää keskimerenpinnan tuntemista kaikkialla maailman valtamerillä. Siksi monet "geoidin" mallit käytännössä eivät yhdy globaaliin keskimerenpintaan, vaan johonkin paikallisesti määritettyyn keskimerenpintaan. Usein sekin yhteys on likimääräinen.

Keskimerenpintakin on ongelmallinen käsite. Se on merenpinta, josta on laskennallisesti poistettu kaikki jaksolliset efektit, mutta kuka voi tietää, onko niin sanottu sekulaarinen efekti todellisuudessa pitkäperiodinen? Pysyvyyden mittana ovat mittaussarjat, kun mareografimittaukset ovat olleet laajasti käytössä jo noin vuosisadan ajan. Nykyaikaiset merenpintaa mittaavat satelliitit, kuten TOPEX/Poseidon ja sen seuraajat, ovat sen sijaan olleet käytössä vasta noin neljännesvuosisadan.

Järkevä kompromissi lienee merenpinnan 18 vuoden jakson keskiarvo eli Kuun rataliikkeen jaksollisuus *saros*, Wikipedia, Saros-jakso.

12.2 Geoidimallit ja kansalliset korkeusdatumit

Paikallisesti määritetty geoidin malli on yleensä *suhteellinen*. Käytettävissä ei ole tekniikkaa, jolla globaali keskimerenpinta voitaisiin määrittää paikallisesti riittävällä tarkkuudella. Tulevaisuudessa tämä luultavasti muuttuu uusien teknologioiden ansiosta.

Yleensä paikallinen geoidimalli on sidoksissa *kansalliseen korkeusjärjestelmään* ja ero klassisesta määritelmästä on siis sama kuin tasoero kansallisen korkeusjärjestelmän ja globaalin keskimerenpinnan välillä.

Suomessa korkeudet määritettiin pitkään N60-järjestelmässä, joka on sidottu keskimerenpintaan Helsingin satamassa vuoden 1960 alussa. Ero sen ja globaalin keskimerenpinnan välillä on noin 30 cm johtuen Itämeren topografiasta, katso kuva 12.4. Järjestelmän *pääkiintopiste* sijaitsee Kaivopuistossa, kuva 7.2. Tarkkavaaituksen avulla korkeuksia on viety kaikkialle Suomeen.

Nykyinen Suomen korkeusjärjestelmä on N2000. Järjestelmä on sidottu periaatteessa Amsterdamin keskimerenpinnalle, joka on lähellä globaalia keskimerenpintaa. Sen pääkiintopiste Suomessa sijaitsee Metsähovin tutkimusasemalla Kirkkonummella.

Vuoden 1960 alussa Suomen N60-korkeusjärjestelmän lähtötaso oli Maan painovoimakentän tasapotentiaalipinta. Maannousun seurauksena se ei ole sitä enää: *postglasiaalinen maannousu* vaihtelee Helsingin seudun noin neljästä millimetristä vuodessa maannousun maksimialueen Pohjanmaan jopa kymmeneen millimetriin vuodessa. Tämä on tärkein syy, miksi Fennoskandian korkeusjärjestelmillä on ”parasta ennen” -päivämäärä, ja ne joudutaan uusimaan pari kertaa vuosisadassa.

Yleensä käytännön geoidikartat, kuten Suomen geoidimalli FIN2000 (kuva 9.5), rakennetaan niin, että ne muuntavat kansallisen korkeusjärjestelmän mukaiset korkeudet, esimerkiksi N60-korkeudet (Helmertin

korkeudet), ”keskimerenpinnasta” korkeuksiksi GRS80-järjestelmän vertausellipsoidista.

Koska maannousu on jatkuva prosessi, se on sidottava tiettyyn epookkiin eli ajanhetkeen, jolloin tehtiin ne GNSS-mittaukset, joihin alun perin gravimetrinen geoidiratkaisu on sovitettu. FIN2000:n tapauksessa tämä oli 1997.0 (Matti Ollikainen, henkilökohtainen tiedotus; Bilker-Koivula ja Ollikainen, 2009; Häkli ym., 2009).

Tarkasti ottaen FIN2000 ei siis olekaan geoidin malli. Parempi nimitys lienee ”muunnospinta”. Tämä koskee oikeastaan *kaikkia* kansallisia tai alueellisia geoidimalleja, jotka tehdään ensisijaisesti sitä varten, että GNSS-mittauksia voitaisiin käyttää korkeuden määritykseen (”GNSS-vaaitus”). Nämä ”geoidinkaltaiset pinnat” rakennetaan yleensä seuraavalla tavalla:

1) Lasketaan gravimetrinen geoidimalli käyttämällä Stokesin integraaliyhtälöä ja poistamis-entistämismenetelmää (*remove-restore*), esimerkiksi FFT-laskentatekniikan avulla.
2) Sovitetaan geoidipinnan ratkaisu muutamaan vertailupisteeseen, joissa sekä korkeus vaaituksesta eli ”merenpinnasta” että GNSS-menetelmästä eli vertausellipsoidista tunnetaan. Sovitus tapahtuu esimerkiksi mallintamalla erotukset polynomifunktiona:

$$\delta N = a + b\,(\lambda - \lambda_0) + c\,(\varphi - \varphi_0) + \cdots$$

tai jotain monimutkaisempaa, ja ratkaisemalla kertoimet a, b, c, ... kahden korkeuden välisistä erotuksista niissä tunnetuissa vertailupisteissä pienimmän neliösumman menetelmän avulla.

12.3 Geoidi ja postglasiaalinen maannousu

Globaali keskimerenpinnan taso ei ole vakio. Merenpinta nousee hitaasti, mutta nousuvauhti on viime vuosisadan aikana kasvanut. Koko 1900-luvun aikana keskimääräinen nousutahti on ollut parhaiden arvoiden mukaan 1,5–2,0 $^{mm}/_{a}$, esimerkiksi 1,6 $^{mm}/_{a}$ (Wöppelmann ym., 2009).

Muutaman viime vuosikymmenen aikana tahti on kiihtynyt ja on nyt reilu $3\,^{\mathrm{mm}}/_{\mathrm{a}}$, katso kuva 13.1.

Tätä arvoa kutsutaan *eustaattiseksi keskimerenpinnan nousuksi.* Se johtuu osin jäätiköiden ja mannerjään sulamisesta, osin meriveden lämpölaajenemisesta. Eustaattisen nousun tarkkaa arvoa on vaikea määrittää: lähes kaikilla merenpinnan tasoa seuraavilla mareografeilla on omat pystyliikkeensä, ja niiden erottaminen merenpinnan noususta edellyttää mittauspaikkojen edustavaa maantieteellistä jakaumaa. Etenkin kiinteän Maan vielä käynnissä oleva isostaattinen reaktio viimeisen jääkauden päättymiseen eli deglasiaatioon, niin sanottu GIA (*glacial isostatic adjustment*), on maailmanlaajuinen ilmiö, jota on osattu vasta viime vuosikymmeninä havainnoida satelliittipaikannuksen avulla.

Eustaattisen merenpinnan nousun takia on tehtävä ero *absoluuttisen* ja relatiivisen eli *suhteellisen* maannousun välillä:

Absoluuttinen maannousu on maankuoren liike maapallon massakeskipisteen suhteen — tai vastaavasti geosentrisen vertausellipsoidin, esimerkiksi GRS80:n, pinnan suhteen. Tämä maannousu mitataan, kun käytetään satelliitteja, joiden radanmääritys tapahtuu Maan massakeskipisteeseen sidotussa vertausjärjestelmässä, esimerkiksi mareografin paikannus GNSS:n avulla.

Suhteellinen maannousu on maankuoren liike keskimerenpinnan suhteen. Tämä liike mitataan *mareografin* avulla.

Geoidin nousu Kun postglasiaalinen maannousu on Maan sisäisten ainemäärien siirtyminen paikasta toiseen, on selvää, että myös geoidi muuttuu. Geoidin nousu on kuitenkin pientä maannousuun verrattuna, vain muutama prosentti.

Yhtälö (piste suureen yläpuolella merkitsee aikaderivaattaa[1]): [1]

$$\dot{H} = \dot{h} - \dot{N} = \dot{H}_r + \dot{H}_e + \dot{H}_t,$$

[1] Tämä pistekirjoitustapa eli *fluxion* on Newtonin keksimä.

jossa

$\dot{H}$	suhteellinen maannousu geoidista
$\dot{h}$	absoluuttinen maannousu vertausellipsoidista
$\dot{H}_r$	suhteellinen maannousu paikallisesta keskimerenpinnasta
$\dot{H}_e$	eustaattinen (globaalin keskimerenpinnan) nousu
$\dot{H}_t$	meritopografian ajallinen muutos (luultavasti pieni)
$\dot{N}$	geoidin nousu vertausellipsoidista.

Geoidin nousu maannousun seurauksena voidaan yksinkertaisesti laskea Stokesin integraaliyhtälön avulla:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_\sigma S(\psi) \left(\frac{d}{dt}\Delta g\right) d\sigma.$$

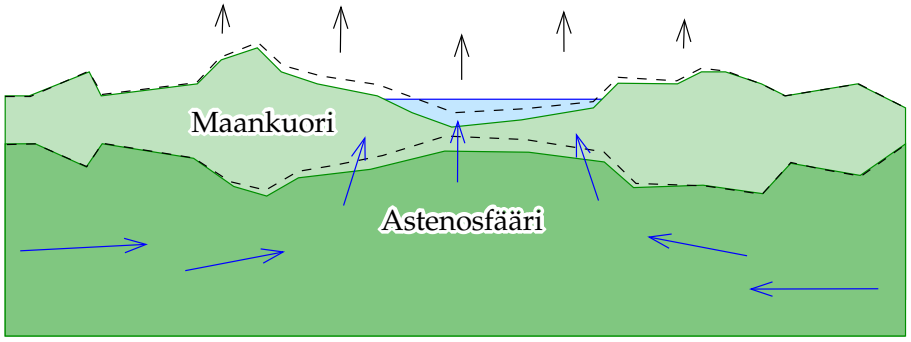
Tässä $\frac{d}{dt}\Delta g$ on painovoima-anomalioiden muutos ajassa maannousun seurauksena. Valitettavasti emme tunne tarkasti *mekanismia*, jolla massaa virtaa Maan vaipassa maannousualueen alle. Voimme olettaa

$$\frac{d}{dt}\Delta g = c\frac{dH}{dt} = c\dot{H},$$

jossa vakio c voi vaihdella arvojen $-0{,}16$ ja $-0{,}31\,{}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$ välillä.

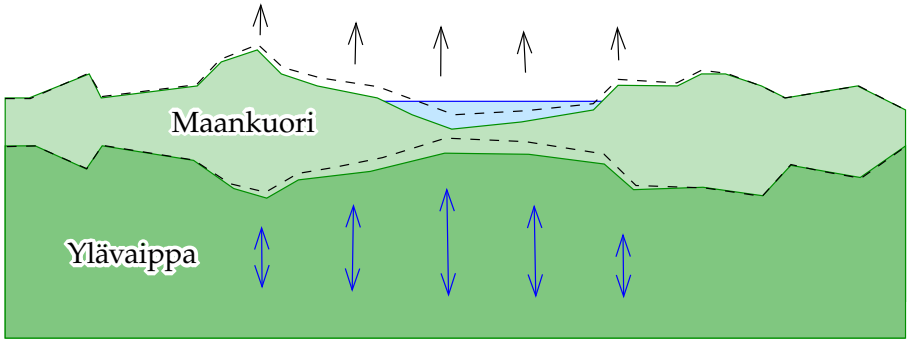
- Arvoa $-0{,}16\,{}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$ kutsutaan ”Bouguer-hypoteesiksi”: se vastaa tilannetta, jossa nousevan maankuoren alle virtaa ylävaipan ainetta täyttämään vapautunutta tilaa. Aine voidaan karkeasti mallintaa Bouguer-laataksi.
- Arvo $-0{,}31\,{}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$ on toinen ääripää, ”vapaa-ilmahypoteesi”, jonka mukaan viime jääkauden jääkuorma on vain puristanut Maan vaippaa kokoon, ja nyt se laajentuu hitaasti entiseen tilavuuteensa (”pullataikinamalli”).

Todennäköisin arvo oli pitkään noin $-0{,}2\,{}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$, melkoisella epävarmuudella. Uusimmat tulokset (Mäkinen ym., 2010; Olsson ym., 2019) voidaan esittää muodossa $-0{,}16 \pm 0{,}02\,{}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$ (yksi standardipoikkeama). Näyttää siltä, että Bouguer-malli on lähempänä fysikaalista totuutta. Massan virtauksen oletetaan tapahtuvan *astenosfäärissä*.



(a)

Bouguer-hypoteesi. . .



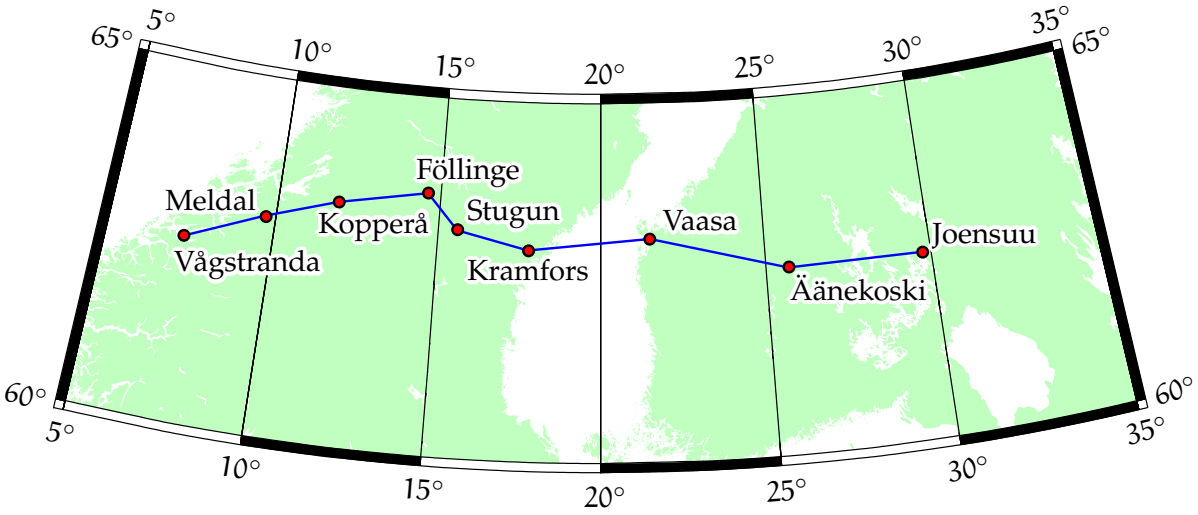
(b)

. . . ja vapaa-ilmahypoteesi.

KUVA 12.1. Postglasiaalisen maannousun mekanismin kaksi eri hypoteesia.

Tätä ongelmakenttää on tutkittu Pohjoismaissa paljon. Käytetty menetelmä on ollut gravimetrinen mittaus 63. pohjoista leveyspiiriä pitkin (”*Blue Road Geotraverse*” -projekti). Mittausasemat ulottuvat Norjan rannikolta Venäjän rajalle saakka, ja ne on valittu niin, että painovoima vaihtelee kapean arvovälin sisällä. Näin vältetään gravimetrien mittakaavavirheen vaikutus. Eihän meitä kiinnosta absoluuttinen painovoima-arvo, vaan ainoastaan painovoima*erojen muutos* ajassa asemien välillä.

Mittauksia on tehty monen vuoden ajan käyttäen huipputarkkoja jousi- eli relatiivigravimetreja. Viime vuosina on siirrytty absoluuttigravimetrien käyttöön, jolloin mittaus*linjoja* ei enää tarvita.



KUVA 12.2. Fennoskandian 63. pohjoisen leveyspiirin painovoimalinja.

12.4 Meritopografian määritys

Periaatteessa on olemassa kolme geodeettista menetelmää:

- satelliittialtimetria ja gravimetrinen geoidimääritys
- mareografien paikannus rannikolla GNSS:n avulla gravimetrisen geoidimäärityksen kanssa
- tarkkavaaitus rannikkoa pitkin mareografien välillä.

Tämän lisäksi on olemassa meritieteellinen menetelmä eli *fysikaalinen mallinnus*. Menetelmää kutsutaan *steeriseksi vaaitukseksi*, jos käytetään lämpötila- ja suolaisuusmittauksia pystyprofiilia pitkin avomerellä, ja *geostrofiseksi vaaitukseksi*, jos käytetään virtausmittauksia coriolisvoiman vaikutuksen määrittämiseksi, yleensä rannikon lähellä.

Kaikkien menetelmien pitäisi antaa samat tulokset. Itämeri on esimerkkitapaus, jossa kaikkia kolmea geodeettista menetelmää on käytetty. Tulos on ollut, että koko Itämeren pinta on ”kallellaan”: tasapotentiaalipintaan nähden merenpinta nousee Tanskan salmista Suomenlahden ja Pohjanlahden pohjukoille 25–30 cm.

Meritieteelliset mallilaskennat antavat ymmärtää, että tämä kalte-

vuus on peräisin pääosin *suolaisuusgradientista*: Atlantilla suolaisuus on 30–35 ‰, kun Itämerellä se laskee tasoon 5–10 ‰, jokien massiivisen makean veden tuotannon takia (Ekman, 1992). Tietysti tämän päälle tulee ajallisia vaihteluita, kuten myrskyjen aiheuttamia heilahteluja kylpyammeen tapaan. Vaihtelujen amplitudi voi olla yli metri.

Julkaisussa Ekman (1992) kerrotaan lisää Itämeren topografiasta ja sen määrityksestä.

12.5 Globaali meritopografia ja lämmönkuljetus

Yksi tärkeä syy, miksi tutkijat ovat kiinnostuneita maailmanlaajuisesta meritopografiasta, on, että se antaa tilaisuuden tutkia tarkemmin valtamerten virtauksia ja niiden kautta Auringon lämpöenergian kulkua päiväntasaajalta korkeampiin leveysasteisiin. On monia muita asioita, joita merivirtausten parempi tunteminen auttaisi tutkimaan, esimerkiksi veteen liuennut hiilidioksidi, lehtivihreä (kasviplankton) ja suolaisuus.

Maan pyörähdysliikkeen aiheuttama coriolisvoima eli -kiihtyvyys on

$$\mathbf{f}'_\omega = -2\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \boldsymbol{\nu} \rangle, \tag{12.1}$$

jossa $\boldsymbol{\nu}$ on vapaasti liikkuvan hiukkasen nopeusvektori pyörivään maapalloon kiinnitetyssä järjestelmässä ja $\boldsymbol{\omega}_\oplus$ on maapallon pyörähdysliikkeen vektori. Tämä on aksiaalinen vektori, joka on Maan pyörähdysakselin suuntainen.

Jos neste virtaa Maan pinnalla, vaikuttaa yhtälössä 12.1 vain vektorin $\boldsymbol{\omega}_\oplus$ merenpinnan normaalisuunnassa $\mathbf{n}$ oleva osa: se on $\langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \cdot \mathbf{n} \rangle = \omega_\oplus \sin\varphi$, eli vektorina

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}_\oplus \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{\omega}_\oplus \cdot \mathbf{n} \rangle \, \mathbf{n} = (\omega_\oplus \sin\varphi)\, \mathbf{n}.$$

Nyt vaakatasoon projisoitu coriolisvektori on

$$\mathbf{f}'_{\overline{\omega}} \stackrel{\text{def}}{=} -2\,\langle \overline{\boldsymbol{\omega}}_\oplus \times \boldsymbol{\nu} \rangle = -2\omega_\oplus \sin\varphi\, \langle \mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu} \rangle,$$

jonka pituus on skalaari

$$f'_\varpi = \|\mathbf{f}'_\varpi\| = 2v\,\omega_\oplus \sin|\varphi|\,.$$

Tässä $v = \|\boldsymbol{v}\|$ ja $\omega_\oplus = \|\boldsymbol{\omega}_\oplus\|$ tutulla tavalla. Corioliskiihtyvyyden *suunta* on aina kohtisuorassa virtausnopeuteen: virtaussuuntaan nähden oikealle päin pohjoisella pallonpuoliskolla ja vasemmalle päin eteläisellä pallonpuoliskolla.

Coriolisvoiman seurauksena merivirtauksen alueella merenpinta on virtauksen suhteen *sivusuunnassa kallellaan*, kulmalla

$$\frac{f'_\varpi}{\gamma} = 2v\frac{\omega_\oplus}{\gamma}\sin|\varphi|\,.$$

Tässä γ on paikallinen painovoima. Tätä tasapainoa coriolisvoiman ja painovoiman välillä kutsutaan *geostrofiseksi tasapainoksi.* Kuten yhtälöstä näkyy, on päiväntasaajalla kaltevuus nolla, mutta kaikkialla muualla merivirrat ovat kallellaan.

Esimerkiksi Golfvirran tapauksessa efektin aiheuttamat korkeuden muutokset ovat muutaman desimetrin. Jos määritellään paikallinen (x, y)-koordinaatisto, jossa $x(\varphi, \lambda)$ osoittaa pohjoiseen ja $y(\varphi, \lambda)$ itään, voimme kirjoittaa meritopografialle H geostrofiset yhtälöt

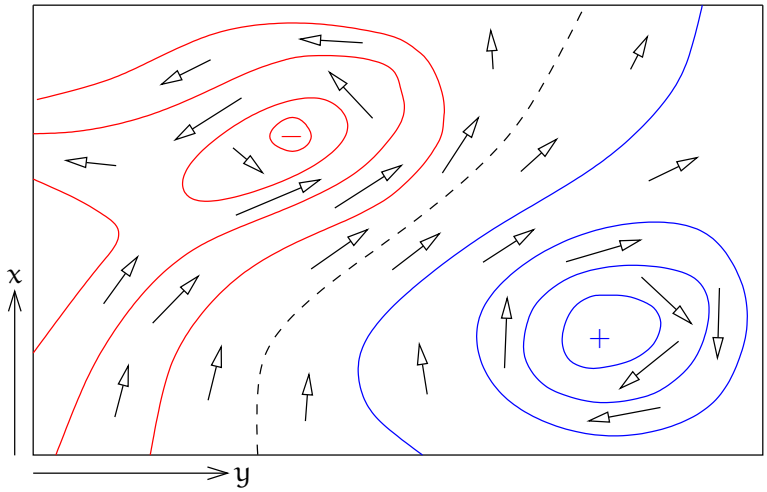
$$\frac{\partial H}{\partial x} = -2v_y\frac{\omega_\oplus}{\gamma}\sin\varphi, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = +2v_x\frac{\omega_\oplus}{\gamma}\sin\varphi. \tag{12.2}$$

Kuten tulemme näkemään luvussa 13, voidaan satelliittialtimetrian avulla mitata merenpinnan paikka avaruudessa muutaman senttimetrin tarkkuudella. Jos tämän lisäksi on tarkka geoidikartta, voidaan laskea meritopografia ja yhtälöiden 12.2 avulla ratkaista virtauksen nopeusvektorikenttä[2]

$$\begin{bmatrix} v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} v_x(\varphi,\lambda) & v_y(\varphi,\lambda) \end{bmatrix}^T.$$

Yhtälöiden elegantti ominaisuus on, ettei tarvitse edes tietää kentän $H(x, y) = H(\varphi, \lambda)$ absoluuttista tasoa, koska se häviää differentioinnissa.

[2]Käypä, vaikkakin epävirallinen, merivirtauksen yksikkö on sverdrup (Wikipedia,



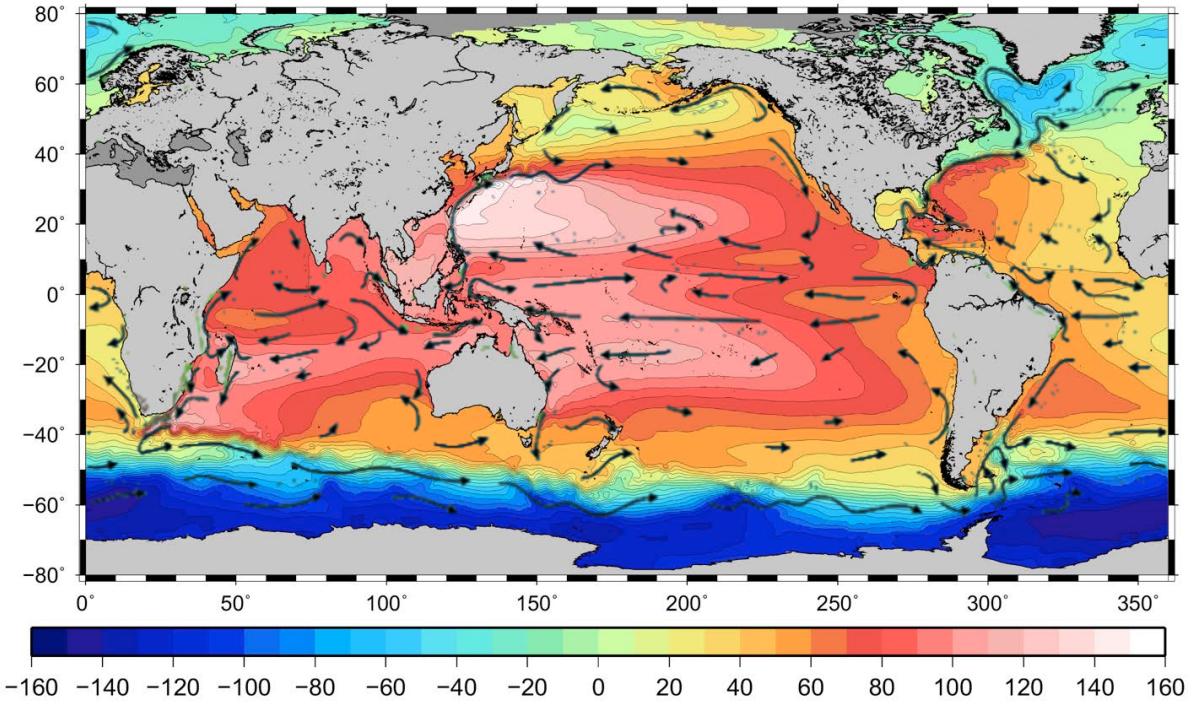
KUVA 12.3. Meritopografian ja merivirtausten välinen yhteys. Nuolet esittävät merivirtauksia, käyrät meritopografiaa.

Kuvattu menetelmä, kuva 12.3, edellyttää riittävän tarkan Maan valtameren geoidikartan olemassaoloa. Tähän tarpeeseen GOCE-satelliitti tuli kuin tilattuna, katso alaosio 13.7.3. Hankkeen yhtenä päämääränä oli, kuten nimestä voi päätellä, saada täydellinen kuva merivirtauksista ja erityisesti niiden lämmönsiirtokyvysta. Tämä tieto auttaa ymmärtämään, miten maapallon ilmasto toimii ja miten se on muuttumassa myös ihmiskunnan toiminnan seurauksena. Tämä on Euroopalle, Fennoskandialle ja myös Suomelle tärkeä asia, ovathan nämä alueet asumiskelpoisia myös Golfvirran tuoman lämpöenergian ansiosta (Caesar ym., 2018).

Satelliittialtimetrian avulla voidaan tutkia merivirtausten *vaihteluja* myös ilman geoidimallia. Jo kauan on ollut tiedossa, että Pohjois-Atlantilla Golfvirran laidalla liikkuu 10–100 kilometrin kokoisia *mesomittakaavan pyörteitä*, jotka näkyvät altimetriakuvissa. Mielenkiintoista

---

Sverdrup), miljoona kuutiometriä sekunnissa. Maailman kaikki joet muodostavat yhdessä noin yhden sverdrupin, kun Golfvirta on 30–150 Sv. "*There is a river in the ocean*" – Matthew Fontaine Maury (1806–1873), amerikkalainen yleisnero ja merentutkimuksen uranuurtaja.



KUVA 12.4. GOCEn tuottama meritopografiakartta. Pohjakartta © European Space Agency (ESA). Yksikkö cm. Päälle piirretyt meren pintavirtaukset NOAA / Rick Lumpkin (NOAA, Ocean currents).

on, että pyörteet näkyvät myös merenpinnan lämpötilakartoissa, ja biologit ovat havainneet, että pyörteiden sisäinen eliöstö poikkeaa ulkopuolisesta (Godø ym., 2012). Pyörteiden elinkaari voi olla viikkoja, jopa kuukausia.

Hyvä, vaikkakin jo hieman vanha, johdanto "geodeettiseen meritieteeseen" ja satelliittialtimetrian käyttöön on Rummel ja Sansó (1992).

12.6 Merenpinnan globaali käyttäytyminen

Vettä on maapallolla kolmessa eri olomuodossa: nesteenä, jäänä ja höyrynä. Geologisen historian aikana etenkin nestemäisen veden ja jään suhde on vaihdellut suuresti. Myös nykyään suuri määrä jäätä on

sidoksissa mannerjäätiköihin, lähinnä Etelämantereella ja Grönlannissa. Näistä Itä-Etelämantereen mannerjäätikkö on ylivoimaisesti suurin.

Koska mannerjäätiköihin sidotun veden määrä vaihtelee, vaihtelee myös merenpinta. Viime jääkauden päättyminen nosti keskimerenpintaa jopa 120 metriä. Prosessi tuli päätökseen noin 7000 vuotta sitten[3] 3 (Wikipedia, Merenpinnan nousu). Vasta parin viime vuosisadan aikana merenpinta on lähtenyt taas kiihtyvään nousuun globaalin lämpenemisen seurauksena.

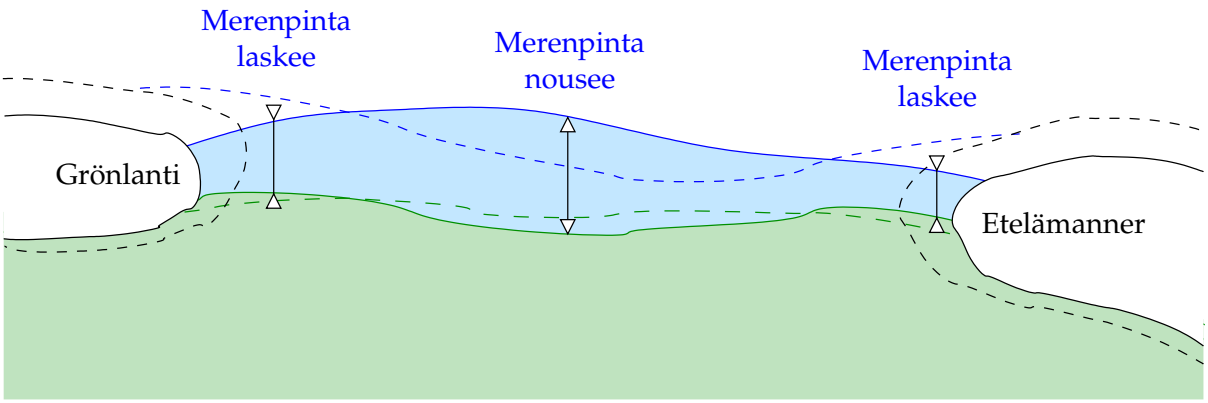
Elämme edelleen viimeisen glasiaation jälkimainingeissa. Siellä missä oli isoja mannerjäätiköitä, kuten Fennoskandiassa ja Kanadassa Laurentian mannerjäätikkö, maa nousee edelleen tasaiseen tahtiin, nopeimmillaan 10 ja 14 millimetriä vuodessa. Maannousualueiden ympärillä Keski-Euroopassa ja Yhdysvalloissa tapahtuu puolestaan maan *vajoamista* 0,5–1,7 millimetrin vuosivauhdilla, esimerkiksi DeJong ym. (2015). Välittömästi Maan kovan ulkokerroksen eli litosfäärin alla olevassa ylävaipassa eli *astenosfäärissä* ainetta virtaa hitaasti sisään päin nousevan maankuoren alle.

Kuvion mutkistamiseksi mannerjäätiköiden sulamisen aiheuttama merenpinnan nousu painaa myös valtameren pohjaa alas — jopa 0,3 millimetriä vuodessa. Kyseessä on niin sanottu Peltier'n ilmiö (Peltier, 2009). Siksi joko rannikon mareografeilla tai avaruudesta käsin satelliittialtimetrialla mitattu merenpinnan nousu *ei edusta koko valtameren veden tilavuuden muutosta*. Jos jälkimmäinen kuitenkin kiinnostaa, kuten aina ilmastotutkimuksessa, havaintoarvoihin pitää lisätä Peltier'n korjaus.

Merenpohjan vajoaminen ei ole ollut globaalisti tasaista: mantereiden reunalla tapahtuu "vipuliikettä", kun merenpohja vajoaa, mutta kuiva maa ei. Intian valtameren ja Tyynenmeren tropiikissa merenpinta saavutti maankuoren suhteen maksimitasonsa jo noin 7000 vuotta sitten: *mid-Holocene highstand*. Sen jälkeen paikallinen merenpinta on laskenut,

---

[3] 7000 years "before present", 7 ka BP. *BP* sovitusti merkitsee ennen vuotta 1950. Nykyisin käytetään myös lyhennettä *b2k*: ennen vuotta 2000.



KUVA 12.5. Merenpintayhtälö. Merenpinta reagoi monimutkaisella tavalla mannerjäätiköiden sulamiseen.

ja kuolleita korallimuodostelmia on jäänyt 2–3 metriä nykymerenpinnan yläpuolelle. Näin esimerkiksi muodostuivat Tuvalu ja Malediivit, joita moderni merenpinnan nousu on jälleen uhkaamassa.

12.7 Merenpintayhtälö

Tieteellisesti merenpinnan vaihteluja tutkitaan *merenpintayhtälön* avulla. Alan uranuurtajia on ollut kanadalainen Richard Peltier, joka on rakentanut fysikaalisia malleja siitä, miten sekä kiinteä Maa että merenpinta reagoi, jos mannerjäätiköiden kokonaismassa muuttuu.

Merenpintayhtälö on (Farrell ja Clark, 1976; Spada ja Melini, 2015):

$$S = S_E + \frac{G}{R}\Big(\rho_i\big(G_s \otimes_i I - \overline{G_s \otimes_i I}\big) + \rho_w\big(G_s \otimes_o S - \overline{G_s \otimes_o S}\big)\Big), \quad (12.3)$$

jossa

- $S = S(\omega, t) = S(\phi, \lambda, t)$ tarkoittaa merenpinnan vaihteluja paikan $\omega = (\phi, \lambda)$ ja ajan t funktiona. Vaihtelut ovat suhteessa kiinteän Maan pintaan eli meren syvyyden vaihteluja. S on myös mareografien havaintosuure.
- $I = I(\omega, t)$ on jäätiköiden paksuuden vaihtelua kuvaava paikan ja ajan funktio.

- S_E on *eustaattinen termi*, jäämassojen vaihtelu ilmaistuna "vastaavana globaalin merenpinnan vaihteluna", yhtälönä

$$S_E(t) = -\frac{m_i(t)}{\rho_w A_o},$$

  jossa $m_i(t)$ on jään kokonaismassan vaihtelu ajan funktiona, ρ_w meriveden tiheys ja A_o valtamerten kokonaispinta-ala.
- R on Maan keskisäde, G Newtonin universaalinen gravitaatiovakio, osio 1.2.
- ρ on aineen tiheys: ρ_i jään ja ρ_w meriveden.
- $\otimes$ on Maan pinnan ja aika-akselin *konvoluution* symboli: $\otimes_i$ jäätiköiden ja $\otimes_o$ valtamerten yli. *Greenin funktio* kerrotaan jää- ja merifunktioiden kanssa sekä integroidaan kyseessä olevan määrittelyjoukon yli. Nämä integraalit ovat muuten hyvin samanlaisia kuin ne, joista puhuttiin osiossa 8.1. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}\{G_s \otimes_o S\}(\omega, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{t} \iint_{meri} G_s\big(\psi(\omega,\omega'), (t-t')\big)\, S(\omega', t')\, d\omega'\, dt', \end{aligned} \quad (12.4)$$

  jossa $\psi(\omega,\omega')$ on geosentrinen kulmaetäisyys laskentapisteen $\omega = (\phi,\lambda)$ ja datapisteen $\omega' = (\phi',\lambda')$ välillä. Pintaintegraalin mitta on $d\omega = R^2\, d\sigma = R^2 \cos\phi\, d\phi\, d\lambda$. Kuten näkyy, tässä on kyse *sekä* Maan pinnalla ω *että* aika-akselilla t suoritetusta konvoluutiosta.
- *Yläpalkki* merkitsee *keskiarvotusta* koko kyseessä olevan alueen yli.
- G_s on *merenpinnan Greenin funktio*

$$G_s(\psi, \Delta t) = \frac{1}{\gamma} G_V(\psi, \Delta t) - G_r(\psi, \Delta t), \quad (12.5)$$

  jossa $\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} t - t' \geqslant 0$.
  Tämä yhtälö ilmaisee yksinkertaisesti sen, että meren syvyys S on merenpinnan ja merenpohjan välinen etäisyys ja että syvyyden

muutos on erotus näissä tapahtuvien pystysuuntaisten siirtymien välillä: potentiaalin V muutoksesta johtuva merenpinnan siirtymä ja merenpohjan siirtymä eli paikallisen säteen r muutos.

Tässä *geopotentiaalin Greenin funktio* on

$$G_V(\psi, \Delta t) = G_V^r(\psi, \Delta t) + G_V^e(\psi, \Delta t) + G_V^v(\psi, \Delta t),$$

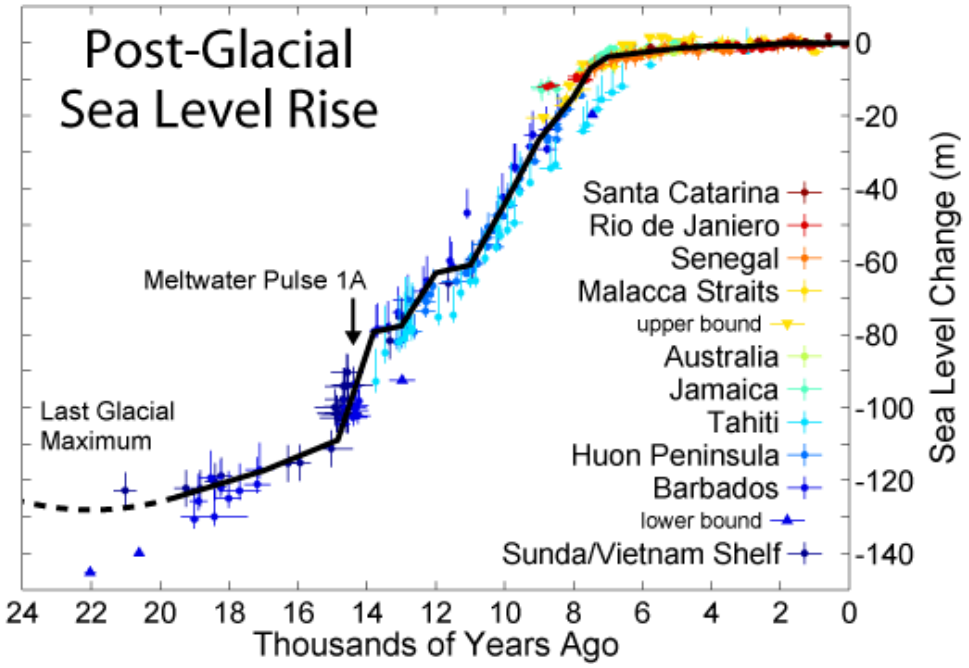
Funktio $G_V^r(\psi, \Delta t) = \delta(\Delta t) \Big/ 2 \sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)$ on jäykän (*"rigid"*) osittainen Greenin funktio, joka edustaa vesi- tai jäämassan aiheuttamaa potentiaalin muutosta ennen mitään deformaatiota.

Funktiot G_V^e ja G_V^v ovat elastisen ja viskoosin deformaation geopotentiaalin osittaiset Greenin funktiot. Ne siis luonnehtivat maapallon *reologista käyttäytymistä*, ja niiden teoreettiseen laskemiseen tarvitaan Maan sisäisiä tiheys- ja viskositeettijakaumia $\rho(r)$ ja $\eta(r)$ — olettaen, että ne ovat *isotrooppisia* eli riippuvat vain säteestä r.

$$G_r(\psi, \Delta t) = G_r^e(\psi, \Delta t) + G_r^v(\psi, \Delta t)$$

on vastaavasti merenpohjan *pysty-* eli *säteittäisen siirtymän* Greenin ydinfunktio, samalla tavalla jaettuna elastiseen ja viskoosiin osuuteen. "Jäykkä" osuus on triviaalisti nolla.

Merenpinnan käyttäytymisen voi nyt laskea siten, että ensin yritetään konstruoida "jääkuorman historia" $I(\omega, t)$. Sen jälkeen yritetään laskea tästä iteratiivisesti merenpintayhtälön 12.3 avulla $S(\omega, t)$. S merkitsee *suhteellista* merenpinnan vaihtelua: muutoksia merenpinnan ja Maan kiinteän kappaleen eli maankuoren välisessä pystysuuntaisessa sijaintierossa. Kyseessä on *paikan funktio*: ei saa olettaa, että se olisi kaikkialla sama. Artikkelissa Mitrovica ym. (2001) näytetään, miten esimerkiksi Grönlannin sulamisvedet pakenevat eteläiselle pallonpuoliskolle, kun taas Etelämantereen sulamisvedet siirtyvät pohjoiseen. Tämä on seuraus siitä, että *Maan painovoimakenttä* ja geoidi *muuttuvat*, kun suuret jäämassat sulavat. Ja myös Maan *muoto* muuttuu, kun jään kuormitus muuttuu: *glacial isostatic adjustment* eli GIA.



KUVA 12.6. Merenpinnan nousu viime jääkauden jälkeen (Rohde, 2005).

Tämä hankaloittaa globaalin keskimerenpinnan vaihtelujen seurantaa paikallisten mittausten avulla: ongelma on tuttu Fennoskandiasta, jossa maankuori nousee toistaiseksi nopeammin kuin globaali merenpinta.

Merenpintayhtälön Greenin funktiot ovat sekä etäisyyden ψ että aikaeron Δt funktioita. Tämä kertoo, että GIA on sekä paikan että ajan funktio. Pallosymmetriselle Maalle funktioita voidaan kirjoittaa *kehitelmiksi*. Katso Wieczerkowski ym. (1999).

Maapallon *elastinen* vaste kuormitukseen on geologisella aikaskaalalla välitön. Sitä kuvaavat samanlaiset elastiset Loven luvut kuin ne, jotka esiintyvät vuorovesivoiman aiheuttaman deformaation teoriassa, pitkille (vaikkakin geologisesti lyhyille) jaksoille P. Katso osio 14.2. Tällä tavoin:

$$G_s^e(\psi,\Delta t) = \frac{1}{\gamma}\cdot \overbrace{\delta(\Delta t)\sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n(\cos\psi)}^{G_V^e(\psi,\Delta t)} - \overbrace{\frac{1}{\gamma}\cdot \delta(\Delta t)\sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n(\cos\psi)}^{G_r^e(\psi,\Delta t)},$$

jonka k_n ja h_n esiintyvät myös yhtälöissä 14.4. $\delta(\Delta t)$ on Diracin delta-funktio.

GIA puolestaan on *viskoosi* deformaatio monella eri geologisella aikaskaalalla. Yhtälöstä 12.5 tulee

$$G^v_s(\psi,\Delta t) = \frac{1}{\gamma}\cdot \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} k^v_n(\Delta t)\,P_n(\cos\psi)}^{G^v_V(\psi,\Delta t)} - \overbrace{\frac{1}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty} h^v_n(\Delta t)\,P_n(\cos\psi)}^{G^v_\tau(\psi,\Delta t)},$$

jossa potentiaalin ja pystysiirtymän *viskoosit Loven luvut* ovat

$$k^v_n(\Delta t) = \sum_{i=1}^{I} r^k_{ni}\exp(-s_{ni}\,\Delta t), \quad h^v_n(\Delta t) = \sum_{i=1}^{I} r^h_{ni}\exp(-s_{ni}\,\Delta t).$$

Tässä n on asteluku ja indeksi $i = 1,\ldots,I$ laskee *viskooseja relaksaatiomoodeja* jokaiselle asteluvulle n. Eri moodien lukumäärä I on käytännössä kourallinen, joista jokainen liittyy käytetyn Maan tiheys- ja viskositeettimallin eri epäjatkuvuuspintaan. Suhteita r^k_{ni}/s_{ni} ja r^h_{ni}/s_{ni} kutsutaan "moodien vahvuusluvuiksi" ja $\tau_{ni} \overset{\text{def}}{=} 1/s_{ni}$ ovat *relaksaatioaikoja*, joissa kyseessä oleva moodi vaimentuu ajan myötä.

Yleensä maannousun kuviot, joilla on pitkät spatiaaliset mittakaavat — alhaiset asteluvut n — vaimentuvat hitaammin, kun taas paikalliset kuviot — korkeat asteluvut — vaimentuvat nopeammin. Viime jääkauden lopun eli deglasiaation paikalliset kuviot ovat nyttemmin jo hävinneet. Fennoskandian maannousu on jo nyt maantieteellisesti hyvin sileä, ja deglasiaation aikainen seisminen toiminta on pitkälti ohi. Mannerjäätikön vetäytymisen aikana jäätikön reunalla tapahtui voimakkaita maanjäristyksiä, joiden jäljet näkyvät maisemassa yhä (Kuivamäki ym., 1998). Tämän hetken hallitsevat viskoosit maannousukuviot ovat maantieteelliseltä mittakaavaltaan satoja kilometrejä ja aikaskaalaltaan tuhansia vuosia.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Luetteloi kaikki tuntemasi syyt merenpinnan vaihteluille.

2) Mikä on meritopografia?
3) Mikä on eustaattinen merenpinnan nousu?
4) Mistä nimi "*El Niño*" on peräisin?
5) Mikä on absoluuttinen ja mikä suhteellinen maannousu? Mistä ero niiden välillä koostuu?
6) Mitä kahta mallia on pääasiassa tarjolla maannousun mekanismiksi?
7) Millä kolmella geodeettisella menetelmällä voidaan määrittää meritopografia?
8) Minkä muotoinen on Itämeren meritopografia ja mikä on sen syy?
9) Mikä on coriolisvoima ja miten se vaikuttaa merivirtauksiin?
10) Mikä on geostrofinen tasapaino?
11) Kenen kunniaksi yksikkö sverdrup on nimetty?
12) Miten meritopografian kartta voidaan invertoida merivirtausten kartaksi? Missä maapallolla tämä menetelmä *ei* toimi?
13) Mikä on Peltier'n ilmiö? Mikä on *mid-Holocene highstand*?
14) Mitä merenpintayhtälö kuvaa?
15) Miten merenpintayhtälö 12.3 muuttuisi, jos yhtälön 12.4 tyyppiset konvoluutiointegraalit olisivat yksikköpallon $d\sigma = \cos\phi\, d\phi\, d\lambda$ yli eivätkä $d\omega = R^2 \cos\phi\, d\phi\, d\lambda$ yli?
16) Miksi keskimerenpinta Itämerellä ei nouse, kun Grönlannin mannerjäätikkö sulaa? Mitä tapahtuu Itämerellä, kun Länsi-Etelämantereen mannerjäätikkö sulaa?

Harjoitus 12−1: Coriolisvoima ja merivirtaus

Annettuna on, että merivirtauksen virtausnopeus on $0{,}1\,\mathrm{m/s}$ ja sen leveys 100 km.

1) Kuinka paljon on korkeusero vasemman ja oikean reunan välillä? Kumpi reuna on korkeampi? Oleta, että virtaus on pohjoisella

leveydellä 45°.

2) Jos sama virtaus olisi 200 km leveä ja sen virtausnopeus olisi 0,05 m/s (eli jos oletetaan sama syvyys, myös kuljetetun veden määrä on sama), laske korkeusero vasemman ja oikean reunan välillä.

3) (*Huvin vuoksi*) jos virtauksen syvyys on 1 km, paljonko on kuljetetun veden määrä sverdrup-yksikössä?

Harjoitus 12–2: Maan vajoaminen ja maannousun mekanismi

Miten Yhdysvalloissa ja Keski-Euroopassa havaittu postglasiaalinen maan vajoaminen tukee Bouguer-tyyppistä maannousun mekanismia (kuva 12.1a) muttei vapaa-ilmamekanismia?

Satelliittialtimetria ja satelliittipainovoimamissiot

13

13.1 Satelliittialtimetria

Satelliittialtimetria on mittausmenetelmä, jossa mitataan mikroaaltotutkan avulla matka satelliitilta suoraan alaspäin merenpintaan. Historiallisesti useilla satelliiteilla on ollut tutka-altimetri mukanaan, katso taulukko 13.1 (ei välttämättä täydellinen).

- GEOS- ja Seasat-satelliitit olivat amerikkalaisia koesatelliitteja altimetriamenetelmän kehittämiseksi. Satelliitin GEOS-3 (1975-027A) mittaustarkkuus oli vielä vaatimaton. Ennen sitä kokeiltiin altimetriaa myös avaruuslaboratorio Skylabilla (1973-027A) olevalla laitteella. Sen tarkkuus oli ± 1 m.
- Seasat (1978-064A) meni epäkuntoon vain kolme kuukautta laukaisunsa jälkeen luultavasti oikosulun[1] seurauksena. Seasatin aineisto oli kuitenkin ensimmäinen laaja satelliittialtimetria-aineisto, jota käytettiin keskimerenpinnan määrittämiseksi, maailmanlaajuisesti ja myös Itämerellä (Vermeer, 1983b). [1]
- Geosat (1985-021A) oli Yhdysvaltain laivaston laukaisema satelliitti, jonka tavoite oli kartoittaa maailman valtameren painovoimakenttä, tarkemmin luotiviivan poikkeamat. Niitä tarvitaan oikean lähtösuunnan antamiseksi sukellusveneestä laukaistaville ballisti-

[1] Mutta lue tämä: Wikipedia, Seasat conspiracy theory.

TAULUKKO 13.1. Altimetriasatelliitteja kautta aikojen.

Satelliitti	Laukaisuvuosi	Ratatason kaltevuus (°)	Radan korkeus (km)	Toistojaksot (vrk)	Mittaustarkkuus (m)	Paikannustekniikka
GEOS-3	1975	115,0	843	~ 38	0,20	
Seasat	1978	108,0	780	3, 17,07	0,08	
Geosat	1985	108,05	786	3, 17,07	0,04	
ERS-1	1991	98,5	780	3, 35, 168	0,03	
TOPEX/Poseidon	1992	66,0	1337	9,9156	0,033	GPS, DORIS
ERS-2	1995	98,5	780	3, 35	0,03	PRARE
Geosat follow-on	1998	108,0	800	17,07	0,035	
Envisat	2001	98,5	784	35	0,045	GPS, DORIS
Jason-1	2001	66,1	1336	9,9156	0,025	GPS, DORIS
Jason-2	2008	66,04	1336	9,9156	0,025	GPS, DORIS
CryoSat-2	2010	92,0	725	369		DORIS
Haiyang-2A	2011	99,3	970	14, 168	0,085	DORIS, GPS
SARAL/AltiKa	2013	98,5	781	35		DORIS
Jason-3	2016	66,04	1338	9,9927	0,025	GPS, DORIS
Sentinel-3A	2016	98,62	804	27	0,03	DORIS, SLR, GNSS

sille ohjuksille. Geodeettisen mission 17 päivän toiston aineisto oli alun perin salainen. Myöhemmin eteläisen pallonpuoliskon aineisto julkaistiin tutkijoiden käyttöön, ja vieläkin myöhemmin koko aineisto.

- Satelliitit ERS-1/2 (1991-050A, 1995-021A) ja Envisat (2002-009A) olivat ESA:n (Euroopan avaruusjärjestön) laukaisemia. Altimetri oli vain yksi useista laitteista. ERS-satelliiteilla oli mukana saksalainen PRARE-paikannuslaite, mutta vain ERS-2-satelliitin laite toimi laukaisun jälkeen.
- TOPEX/Poseidon (1992-052A) oli amerikkalais-ranskalainen yhteistyöprojekti, jonka yhtenä tavoitteena oli *meritopografian* tarkka kartoitus. Erikoispiirteenä oli tarkka GPS-paikannuslaite, jonka avulla altimetri osasi määrittää merenpinnan sijainnin geosent-

risesti. Yhdessä sen seuraajien Jason-1, -2 ja -3 (2001-055A, 2008-032A, 2016-002A) kanssa satelliittimissio on tuottanut ja tuottaa edelleen arvokasta tietoa globaalin keskimerenpinnan noususta viimeisten 25 vuoden aikana. Tulos on noin 3 mm vuodessa. Katso kuva 13.1.

Kuuluisa merentutkija Walter Munk[2] luonnehti vuonna 2002 TOPEX/Poseidonia sanoilla ”kaikkien aikojen menestyksekkäin merentutkimushanke” (Munk, 2002).

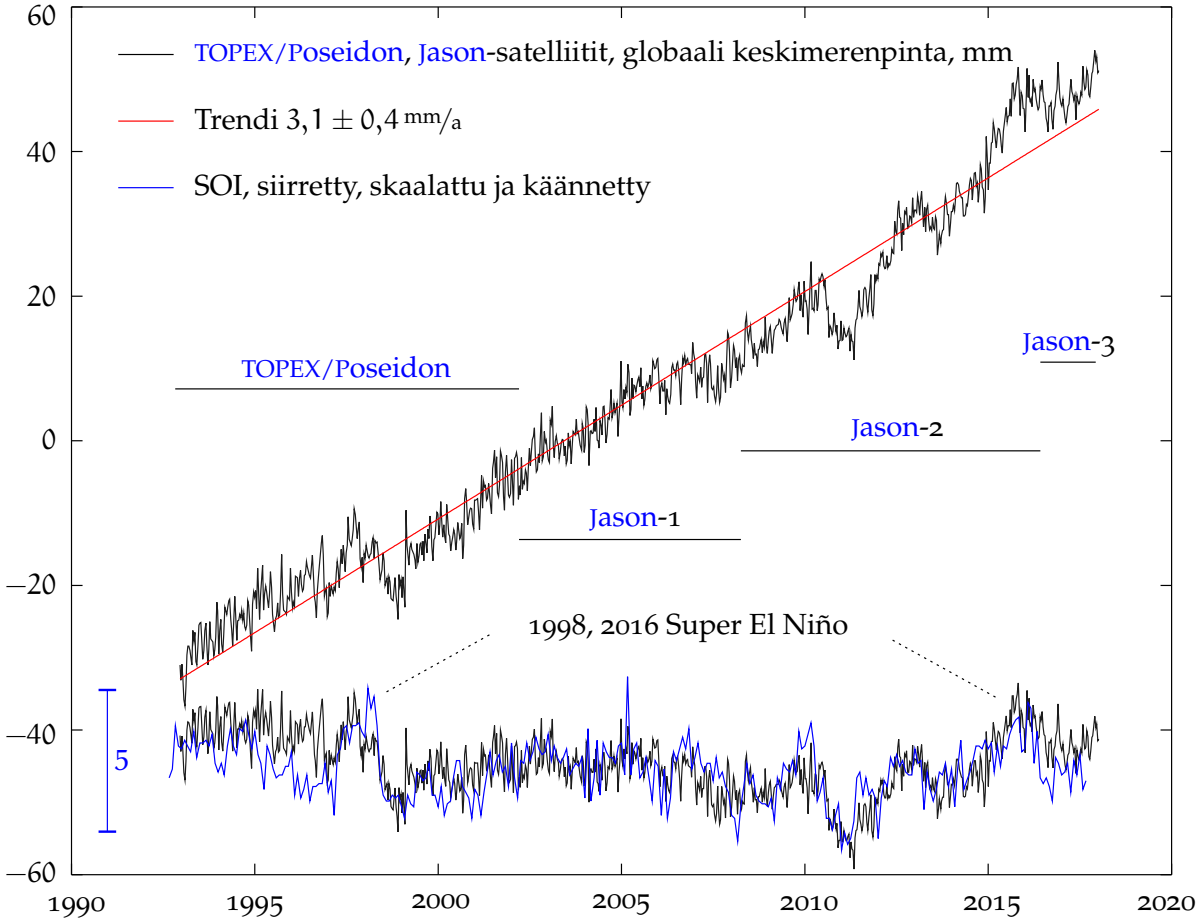
- Haiyang-2A (2011-043A) on kiinalainen, Kiinan laukaisema satelliitti.
- SARAL (2013-009A) on Intian laukaisema satelliitti. Altimetri AltiKa ja DORIS ovat Ranskan rakentamia.
- CryoSat-2 (2010-013A) on ESA:n laukaisema satelliitti napa-alueiden merijään tutkimiseksi. Kiinnostuksen kohteena on *freeboard*, varalaita eli paljonko jää törröttää vedestä. Tästä voidaan laskea jään paksuus ja pinta-alan kanssa sen kokonaistilavuus. Paikannus tapahtuu ranskalaisen DORIS-järjestelmän avulla.

  CryoSat-1-satelliitin laukaisu epäonnistui.
- Sentinel-3A (2016-011A) on ESA:n monipuolinen kaukokartoitussatelliitti: suunnitellun konstellaation ensimmäinen. Se kantaa eri havaintolaitteita, joiden joukossa on SRAL: Synthetic Aperture Radar Altimeter.

Satelliittialtimetrian mittausmenetelmä esitetään kuvassa 13.2. Kuvassa näkyvät kaikki altimetriassa mukana olevat suureet: mitattu etäisyys s on satelliitin korkeus h vertausellipsoidista korjattuna geoidin korkeudella N, meritopografialla H ja merenpinnan vaihteluilla, esimerkiksi vuorovesien, pyörteiden ja vuosisyklin muodossa.

Tämän lisäksi, jos satelliitissa ei ole mukana tarkkaa paikannuslaitetta,

[2] Walter Heinrich Munk (1917–2019) oli kuuluisa amerikkalainen fysikaalinen meritieteilijä.



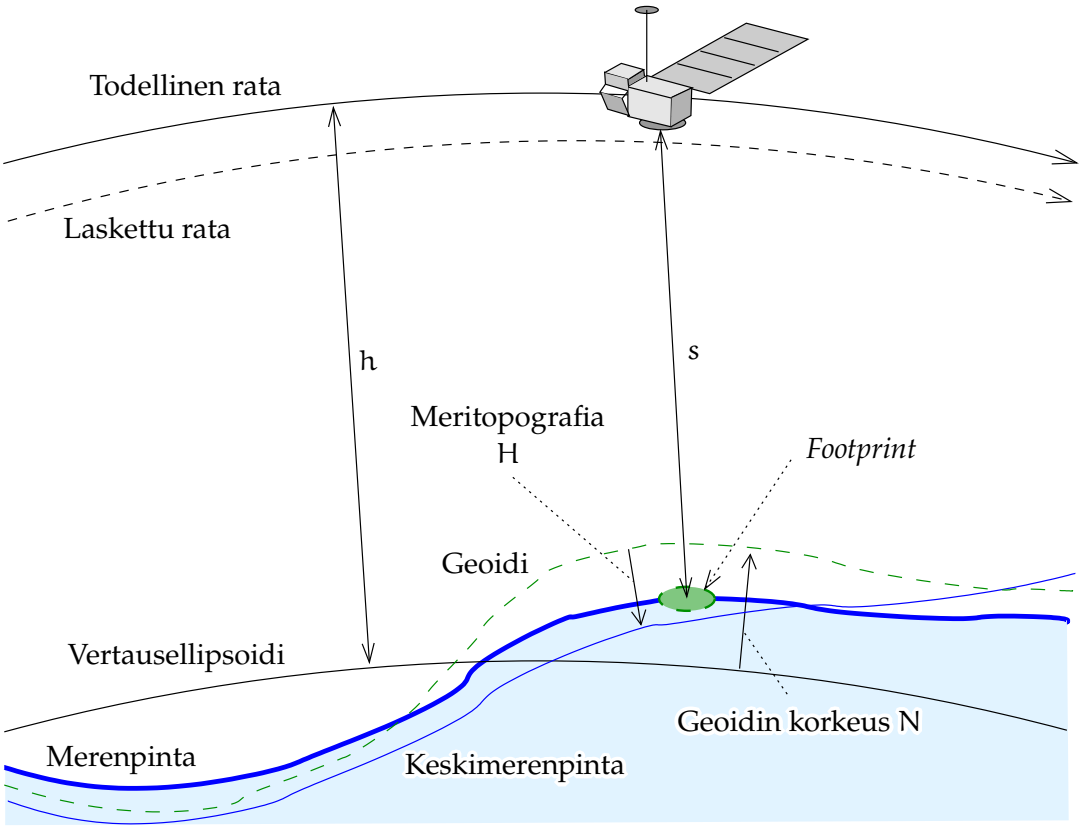
Kuva 13.1. TOPEX/Poseidon- ja Jason -satelliittien tuottamat tulokset. Vuotuinen sykli poistettu. Data © Coloradon yliopisto, Boulder, Yhdysvallat, Sea Level Research Group; Nerem ym. (2010). Vertailu ENSO:n ("El Niñon") kanssa, SOI = *Southern Oscillation Index*, Itä-Anglian yliopisto, Climate Research Unit; Ropelewski ja Jones (1987).

satelliitin todellinen rata eroaa lasketusta radasta — jopa jälkeenpäin lasketusta radasta. Siksi

$$h = h_0 + \Delta h,$$

jossa h_0 on laskettu rata ja Δh ratavirheen korjaus.

Mittaukset tehdään lähettämällä joka sekunti alas tuhansia pulsseja, mittaamalla takaisin heijastettujen pulssien kulkumatkat, keskiarvos-



KUVA 13.2. Satelliittialtimetria mittausmenetelmänä: käsitteet.

tamalla mittaustahdiksi 10–20 arvoa sekunnissa ja lähettämällä ne Maahan. Arvoista suurin ja pienin heitetään pois mahdollisina virhemittauksina, ja lopusta lasketaan lineaariregression avulla keskiarvo pulssisarjan keskiepookkiin. Näin regressioviivasta saatu arvo on varsinainen ”mittaus”: yksi sekunnissa, jolloin tehollinen mittaustahti on 1 Hz.

Yksityiskohdat vaihtelevat satelliitista toiseen. Paluupulssin muoto ei ole koskaan aivan terävä. Heijastuksen paikka meren pinnalla eli *footprint* on läpimitaltaan muutaman kilometrin. Etenkin jos merellä on aallokkoa (*merkitsevä aallonkorkeus*, *significant wave height*, SWH), käsittelyvaiheessa on suoritettava huolellinen korjaus, jottei syntyisi systematiikkaa. Jos SWH on suuri, on myös altimetrin *footprint* eli me-

renpinnan alue, josta vastaanottimeen palaa radioenergiaa, suurempi ja radioaaltojen kulkumatka keskimäärin hieman pidempi.

Uusimmat satelliitit käyttävät interferometrista tekniikkaa, joka eroaa hieman yllä kuvatusta.

Kaikista laitteistoon, ilmakehään, mereen ja kiinteään Maahan liittyvistä korjauksista mainittakoon

1) meriaaltojen korkeus (SWH)
2) kiinteän Maan vuorovesiliike
3) meren vuorovedet
4) troposfäärin ”kostea” kulku- eli propagaatioviive, joka saadaan parhaiten satelliitilla olevan alaspäin katsovan vesihöyryradiometrin mittauksista, muuten säämallista
5) troposfäärin ”kuiva” kulku- eli propagaatioviive
6) ionosfääriviive, ainoastaan ionosfäärin osuudesta satelliitin alapuolella, riippuu lentokorkeudesta
7) altimetriatutkan oma kalibrointikorjaus. Nykyisin pyritään aina ”*in-flight*”-kalibrointiin käyttäen GNSS-paikannettujen mareografien joukkoa, katso osio 13.4.

Mittaukset ja kaikki niihin tehtävät korjaukset kerätään ”*geophysical data record*” -nimiseen (GDR) tietueeseen: yksi per havaintoepookki. Näin rakennetut tiedostot jaetaan tutkijoille. Tämä mahdollistaa kaikenlaisen kokeilun, esimerkiksi korjausten korvaamisen paremmilla malleilla lasketuilla korjauksilla.

13.2 Risteyskohtatasoitus

Kun satelliitti kiertää Maata kuukausien tai vuosien ajan, kertyy tuhansia pisteitä, joissa radat kulkevat ristin. Jos oletetaan, että merenpinnan taso oli sama satelliitin molempien ylilentojen aikana, muodostuu *ehto*, jota voidaan käyttää ratavirheiden tasoittamiseksi.

Havaintoyhtälö on

$$\underline{s} = h - N - H - \epsilon + \underline{n} = h_0 + \Delta h - N - H - \epsilon + \underline{n},$$

jossa $\underline{s}$ on altimetrinen merenpinnan korkeuden mittaus (mukaan lukien tunnetut korjaukset 1–7 edellisessä osiossa), h todellinen ja h_0 laskettu satelliitin korkeus vertausellipsoidista. N on geoidin korkeus, H on *meritopografia* eli keskimerenpinnan pysyvä poikkeama tasapotentiaalipinnasta, Δh on ratavirheen korjaus, ϵ on merenpinnan *jäännösvaihtelu* eli vaihtelu vuoroveden ja muiden mallinnettavien vaikutusten korjaamisen jälkeen ja $\underline{n}$ on altimetriatutkahavaintojen satunnainen mittausepävarmuus eli kohina.

Tästä saadaan ratojen i ja j risteyskohdassa:

$$\underline{\ell}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left(\underline{s}^i - h_0^i\right) - \left(\underline{s}^j - h_0^j\right) = (\Delta h_i - \Delta h_j) - (\epsilon_i - \epsilon_j) + \left(\underline{n}_i - \underline{n}_j\right).$$

Tämä on risteyskohtatasoituksen havaintoyhtälö. Hankaluutena on, että merenpinnan jäännösvaihtelu ja ratakorjaukset esiintyvät yhtälössä samalla tavalla. Ristikohtatasoituksen avulla niitä ei voi erikseen määrittää.

Jos unohdetaan toistaiseksi merenpinnan jäännösvaihtelu tai oletetaan, että se käyttäytyy satunnaisesti, jolloin se kuuluu kohinaan $\underline{n}$, voimme kirjoittaa yksinkertaisemmin

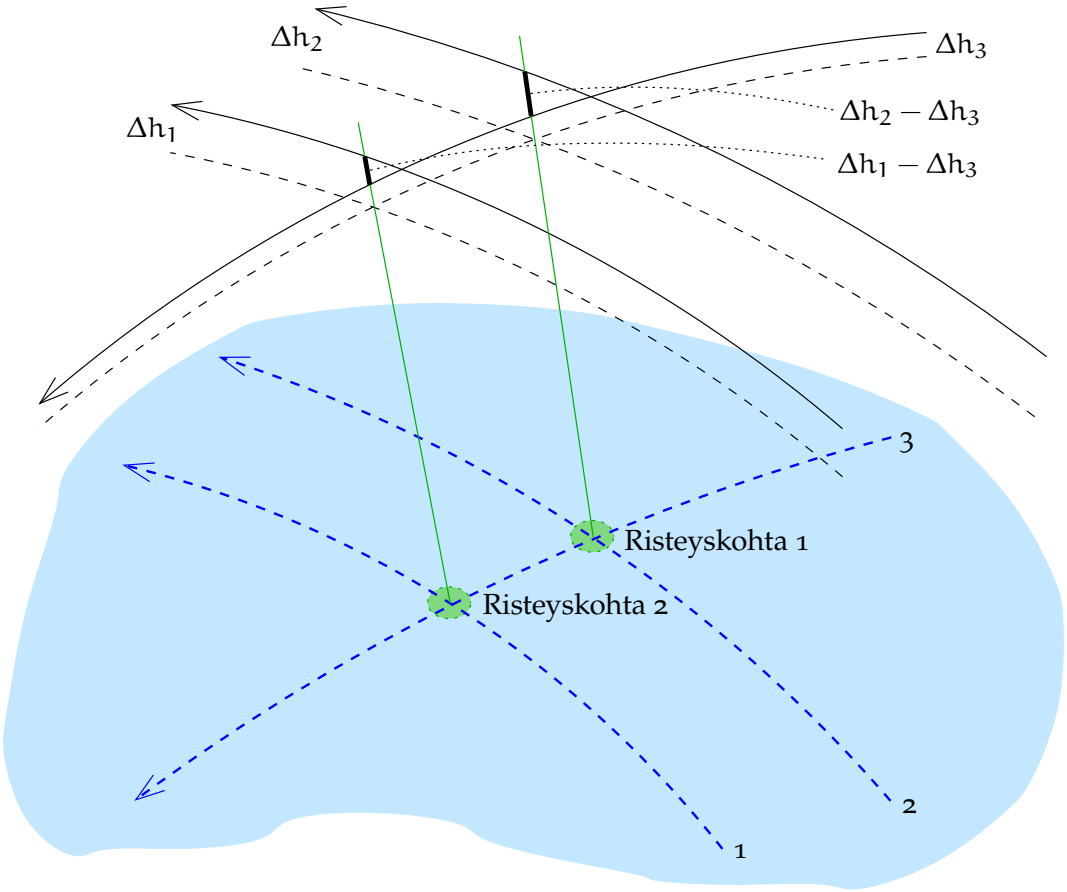
$$\underline{\ell}_k = \Delta h_i - \Delta h_j + \underline{n}_k, \qquad \text{jossa} \quad \underline{n}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left(\underline{n}_i - \underline{n}_j\right) - (\epsilon_i - \epsilon_j).$$

Indeksi k laskee risteyskohtia, indeksit i ja j laskevat ratoja.

Seuraavaksi valitaan sopiva *malli* satelliittiradan virheelle. Yksinkertaisin valinta, joka riittää pienellä alueella, on oletus, että ratakorjaus on jokaiselle radalle vakio. Katso yksinkertainen esimerkki, kuva 13.3.

13.2.1 Yksinkertainen esimerkki

Kuvassa 13.3 on kolme rataa ja kaksi risteyskohtaa. *Havaintoyhtälöt*, jotka kuvaavat tiedossa olevien risteyskohtien ristiriidat ratakorjausten



KUVA 13.3. Eräs risteyskohtien yksinkertainen geometria.

funktioina, ovat

$$\underline{\ell}_1 = \Delta h_2 - \Delta h_3 + \underline{n}_1,$$
$$\underline{\ell}_2 = \Delta h_1 - \Delta h_3 + \underline{n}_2,$$

3 eli matriisimuodossa[3]

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \end{bmatrix}}^{\underline{\ell}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix}}^{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{n}_1 \\ \underline{n}_2 \end{bmatrix}}^{\underline{n}}, \tag{13.1}$$

symbolisesti

$$\underline{\ell} = A\mathbf{x} + \underline{\mathbf{n}}\,.$$

Kun nyt yrittää laskea ratkaisun tavallisen pienimmän neliösumman menetelmän avulla,

$$\widehat{\mathbf{x}} = \left(A^{\mathsf{T}}A\right)^{-1} A^{\mathsf{T}}\underline{\ell}\,,$$

se ei onnistu. *Normaalimatriisi* $A^{\mathsf{T}}A$ on *singulaarinen* (tarkista!). Tämä käy järkeen, voidaanhan koko rataverkko siirtää ylös tai alas ilman, että havaintosuureet $\underline{\ell}_k$ muuttuvat. Sellaiseen järjestelmään ei löydy yksiselitteistä ratkaisua.

Ratkaisun saaminen edellyttää, että *jotain* kiinnitetään, esimerkiksi yksi rata — tai demokraattisemmin kaikkien ratojen keskitaso. Kiinnitys saadaan aikaan lisäämällä seuraava "havaintoyhtälö":

$$\ell_3 \overset{\text{def}}{=} 0 = \begin{bmatrix} c & c & c \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}\,, \tag{13.2}$$

jossa c on sopiva vakio. Silloin matriisista A tulee

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ c & c & c \end{bmatrix},$$

ja pienimmän neliösumman ratkaisu

$$\widehat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \widehat{\Delta h}_1 \\ \widehat{\Delta h}_2 \\ \widehat{\Delta h}_3 \end{bmatrix} = \left(A^{\mathsf{T}}A\right)^{-1} A^{\mathsf{T}}\underline{\ell} = \left(A^{\mathsf{T}}A\right)^{-1} A^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

jossa matriisin kääntäminen onnistuu. Tässä nimenomaisessa tapauksessa $\widehat{\mathbf{x}} = A^{-1}\underline{\ell}$ antaa saman ratkaisun, koska A on neliön muotoinen ja sen käänteismatriisi on olemassa:

$$\left(A^{\mathsf{T}}A\right)^{-1} A^{\mathsf{T}}\underline{\ell} = A^{-1}\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{-1} A^{\mathsf{T}}\underline{\ell} = A^{-1}\left(\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{-1} A^{\mathsf{T}}\right)\underline{\ell} = A^{-1}\underline{\ell}\,.$$

[3] Huomaa samanlaisuus vaaituksen havaintoyhtälöiden kanssa! Vaaituspisteiden sijasta on ratoja ja vaaituslinjojen sijasta risteyskohtia.

Nyt symbolisen algebran järjestelmä maxima (SourceForge, Maxima) — tai raaka laskenta — antaa helposti verifioitavan käänteismatriisin

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ c & c & c \end{bmatrix}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & c \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1/c \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1/c \\ 2 & -1 & 1/c \\ -1 & -1 & 1/c \end{bmatrix},$$

ja ratkaisu on

$$\begin{bmatrix} \widehat{\Delta h_1} \\ \widehat{\Delta h_2} \\ \widehat{\Delta h_3} \end{bmatrix} = A^{-1} \underline{\ell} =$$

$$= \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1/c \\ 2 & -1 & 1/c \\ -1 & -1 & 1/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \end{bmatrix},$$

josta c on hävinnyt.

Toinen tapa tutkia tätä on kirjoittaa havaintoyhtälöt 13.1 ja 13.2 yhdessä näin:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\underline{\ell}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ c & c & c \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix}}^{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{n}_1 \\ \underline{n}_2 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\underline{n}},$$

ja kertoa vasen puoli ja molemmat termit oikealla lävistäjämatriisilla

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}.$$

Tulos on

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \\ 0 \end{bmatrix}}^{D\underline{\ell}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{DA} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{n}_1 \\ \underline{n}_2 \\ 0 \end{bmatrix}}^{Dn},$$

josta c on hävinnyt.

Periaate pätee yleisesti:

> *Minimaaliset pakkoehdot lisättyinä havaintoyhtälöihin, joissa on datumivaje, eivät olennaisesti muuta ratkaisua.*

13.2.2 Edistyneempi ratakorjausmalli

Edistyneempi ratakorjausten esitystapa, joka kelpaa käytettäväksi suuremmalla alueella, on *lineaarinen funktio*:

$$\Delta h = a + b\tau,$$

jossa parametri τ on paikka radassa laskettuna sen alkupisteestä. Paikan dimensio voi olla aika sekunteina tai etäisyys asteina tai kilometreinä. Nyt yllä olevan tilanteen havaintoyhtälöiden ryhmä on

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \end{bmatrix}}^{\underline{\ell}} = \overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & \tau_1^2 & -1 & -\tau_1^3 \\ 1 & \tau_2^1 & 0 & 0 & -1 & -\tau_2^3 \end{array}\right]}^{A} \overbrace{\left[\begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \\ \hline a_2 \\ b_2 \\ \hline a_3 \\ b_3 \end{array}\right]}^{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{n}_1 \\ \underline{n}_2 \end{bmatrix}}^{\underline{n}}.$$

Rakennematriisi A sisältää arvojen 1 ja -1 lisäksi myös arvoja $\pm\tau_k^i$, jossa i on radan ja k risteyskohdan numero. Arvot ovat laskettavissa, kun ratojen geometria on tiedossa.

Nyt jokaisella radalla on *kaksi* tuntematonta, a ja b, vakio ja trendi. Tietysti tämäkin ryhmä osoittautuu singulaariseksi. Singulariteetin

poistaminen onnistuu kiinnittämällä kaikki kolme b-parametria ja
4 yhden a-parametrin[4].

Ilmiötä, että ratkaisua ei löydy, mikäli jotain ei kiinnitetä, kutsutaan *datumidefektiksi*. Sopivan asian kiinnitys määrittää tietyn *datumin*. Kahden eri datumin välillä on olemassa *muunnoskaava*: yksinkertaisimmassa tapauksessa, jolloin jokaisella radalla on vain yksi ratakorjausparametri, muunnos on yksinkertaisesti kaikkien ratojen *translaatio* eli siirto ylös tai alas.

Tilanne on hieman sama kuin kansallista korkeusjärjestelmää määritettäessä. On kiinnitettävä yksi korkeus, esimerkiksi Helsingin sataman. Jos vaihtoehtoisesti kiinnitetään toinen korkeus, esimerkiksi Turun sataman, saadaan toinen *datumi*, jossa kaikki korkeusarvot eroavat ensimmäisen datumin vastaavista korkeuksista tietyllä vakioarvolla.

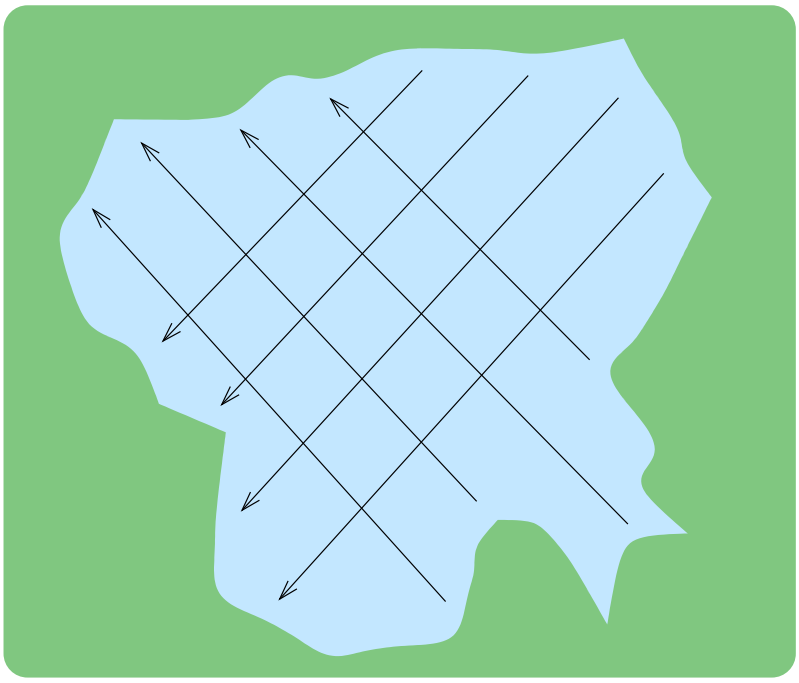
Sama argumentti pitää, jos on useita ratoja, esimerkiksi kymmenen rataa pohjoiseen ja kymmenen etelään, sekä 10×10 risteyskohtaa. Jos jokaista rataa kohti on kaksi parametria, tuntemattomia olisi 40 ja havaintoja peräti 100. Onkin asetettava ratojen verkon absoluuttinen taso sekä kaikenlaiset kaltevuudet ja väännöt. Yksinkertainen lähestymistapa on asettaa kaikille estimoitavissa oleville tuntemattomille a_i ja b_i *a priori* epävarmuuksia johdettuina esimerkiksi tunnetuista radanmäärityksen epävarmuuksista. Pienimmän neliösumman tasoituksen yhtälöstä tulee silloin

$$\widehat{\mathbf{x}} = \left(A^T A + \sigma^2 \Sigma^{-1}\right)^{-1} A^T \underline{\ell},$$

jossa Σ on lävistäjämatriisi, jossa on jokaisen radan i parametrien *a*
5 *priori* varianssit[5] $\sigma^2_{a,i}$ ja $\sigma^2_{b,i}$. Tätä lähestymistapaa kutsutaan Tihonovin[6]
6

[4]Tämän ymmärtämiseksi rakenna vaikkapa kolmen radan ”rautalankamalli” kolmesta jäykästä rautalangan pätkästä ja sido ne yhteen naruilla risteyskohdista. Risteyskohtaehdot eivät millään tavalla kiinnitä kaltevuuksien b arvoja, ja koko häkkyrän absoluuttinen taso on edelleen kiinnittämättä.

[5]σ on painoyksikön keskivirhe, tässä tapauksessa risteyskohtahavainnon vakioksi oletettu keskivirhe.



Kuva 13.4. Satelliittialtimetrian ratageometrian esimerkki.

regularisoinniksi.

13.2.3 *Toinen esimerkki*

Oheisessa satelliittialtimetriaratakuviossa 13.4 on 16 risteyskohtaa. Yritämme suorittaa risteyskohtatasoituksen.

Kysymyksiä

1) Jos jokaisen satelliittiradan ratakorjaus Δh kuvataan mallilla, jossa on yksi vakio, kuinka monta tuntematonta on?
2) Jos käytettävissä on 16 ”havaintoa” eli risteyskohtaeroa, kuinka monta on ylimääräistä?
3) Onko mahdollista laskea tämä verkko geometrisesti?
4) Jos kiinnitetään yksi rata etukäteen (*a priori* tieto), kuinka

[6] Andrei Nikolajevitš Tihonov (1906–1993) oli venäläinen matemaatikko ja geofyysikko.

monta ylimääräisyyttä on? Voidaanko tämä verkko laskea?

5) Oletetaan, että jokaisella radalla on *kaksi* tuntematonta, vakio ja ajassa lineaarisesti kehittyvä termi eli "trendi". Mitä kaikkea täytyy kiinnittää, jotta verkko voitaisiin laskea? Montako ylimääräisyyttä silloin on?

6) Jos kohdassa 3 kiinnitetään yksi rata, minkä niistä valitsisit? Ehdota vaihtoehtoisesti ratkaisua, joka välttää valinnan.

Vastauksia

1) Yhtä monta kuin on ratoja: 8.

2) $16 - 8 = 8$.

3) Ei, koska koko verkon absoluuttinen taso ei ole kiinnitetty.

4) $16 - (8 - 1) = 9$. Nyt verkko voidaan laskea.

5) Jos oletetaan, että radat ovat suoria (x, y)-koordinaateissa, koko verkon sallittujen muunnosten joukko on

$$\Delta h = a_{00} + a_{10}\, x + a_{01}\, y + a_{11}\, xy,$$

jossa on neljä vapausastetta. On siis kiinnitettävä esimerkiksi yksi vakio ja kolme trendiä, joista kaikki eivät mene pohjoiseen tai etelään. Silloin on $16 - (16 - 4) = 4$ ylimääräisyyttä.

6) Mikä tahansa valinta olisi mielivaltainen. Käytä mieluummin yllä kuvattua Tihonovin regularisointa.

13.2.4 *Globaali risteyskohtatasoitus*

Maailmanlaajuisissa risteyskohtatasoituksissa käytetään usein vieläkin hienompaa mallia

$$\Delta h = a + b \sin \tau + c \cos \tau, \tag{13.3}$$

jossa τ on kulmamitassa, esimerkiksi paikka radassa laskettuna viimeisestä päiväntasaajan ylikulusta etelästä pohjoiseen eli *nousevasta*

solmusta. Katso Schrama (1989), jossa tämä ongelma käsitellään laajemmin. Tässä mallissa a edustaa radan kokoa ja b ja c merkitsevät radan keskipisteen siirtymää Maan keskipisteestä. Malli on kolmiulotteinen: ratakaaret risteyskohteineen muodostavat pallon muotoisen verkon maapallon ympäri. Risteyskohtaehtojen jättämät vapausasteet ovat pallon koko ja sen keskipisteen siirtymä Maan keskipisteestä:

$$\Delta h = a_0 + a_1 \cos\phi \cos\lambda + a_2 \cos\phi \sin\lambda + a_3 \sin\phi, \tag{13.4}$$

jossa on neljä vapausastetta[7].

[7]

13.3 Satelliittiradan valinta

Satelliittiradan valinnassa Keplerin rataliikkeen lait ovat keskeisiä. Keplerin kolmas laki sanoo

$$GM_\oplus P^2 = 4\pi^2 a^3, \tag{13.5}$$

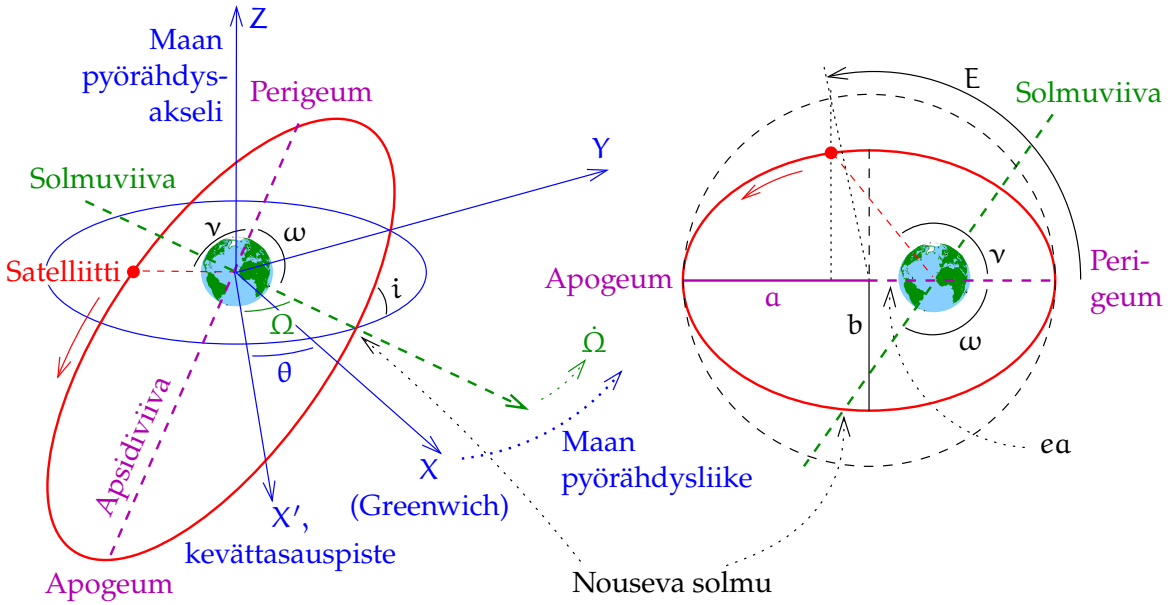
jossa $a = a_\oplus + h$ on satelliittiradan isoakselin puolikas eli keskimääräinen etäisyys Maan keskipisteestä, kun suuretta h kutsutaan satelliitin keskikorkeudeksi. P on kiertoaika eli periodi, ja $a_\oplus$ on Maan päiväntasaajasäde.

Yhtälöstä 13.5 voi jo päätellä, että satelliittihavaintojen avulla suure $GM_\oplus$, maapallon kokonaismassa kerrottuna Newtonin universaalisen gravitaatiovakion kanssa[8], saadaan määritetyksi tarkasti. Periodi P on määritettävissä tarkasti pitkistä havaintosarjoista, ja myös radan koko a saadaan hyvin täsmällisesti esimerkiksi satelliittilaserhavaintojen (SLR,

[8]

[7] Voitaisiin väittää, että parametrin a pitäisi olla nolla yhtälössä 13.3, koska Keplerin kolmannen lain avulla voidaan määrittää radan kokoa hyvin tarkasti, katso osio 13.3. Silloin myös $a_0 = 0$ yhtälössä 13.4.

[8] Siksi sanotaan, että ensimmäisenä Henry Cavendish ”punnitsi maapalloa”. . . . Suureen $GM_\oplus$ määrittäminen oli jo silloin suoraviivaista Kuun rataliikkeen, tai jopa maanpinnan painovoiman, avulla. Haasteena oli G:n ja Maan massan $M_\oplus$ erottaminen toisistaan, jotta viimeksi mainittu saataisiin tavallisissa massan yksiköissä.



KUVA 13.5. Keplerin rata-alkiot: a — isoakselin puolikas, e — eksentrisyys, i — inklinaatio, Ω — nousevan solmun rektaskensio (taivaallinen pituus), ω — perigeumin argumentti ja ν — luonnollinen anomalia.

satellite laser ranging) avulla. Tähän on käytetty esimerkiksi tunnettuja LAGEOS-satelliitteja (Laser Geodynamic Satellite) 1976-039A ja 1992-070B, jotka kiertävät maapalloa 5900 kilometrin korkeudella. Etäisyydet saadaan nykyisin alle senttimetrin tarkkuudella.

Altimetriasatelliittien kiertoradat valitaan paljon matalammiksi, kuten luvun alussa annetusta taulukosta 13.1 ilmenee. Korkeus säädetään rakettimoottoreiden avulla tarkasti niin, että satelliitti kulkee saman paikan yli esimerkiksi kerran päivässä, 14 kierroksen jälkeen. Vaihtoehtoisesti valitaan rata, joka kulkee paikan yli joka kolmas päivä, joka seitsemästoista päivä tai joka 168. päivä. . . . Tätä kutsutaan *toistojaksoksi*.

Toistojakso valitaan käyttötarkoituksen mukaan:

- Jos halutaan tutkia *keskimerenpinnan* tarkkaa muotoa, valitaan *pitkä* toistojakso, jotta maaradat saadaan mahdollisimman lähelle toisiaan Maan pinnalla.

- Jos halutaan tutkia merenpinnan *vaihtelevuutta*, valitaan rata, joka palautuu samaan paikkaan *lyhyin* aikavälein. Silloin rataverkosto Maan pinnalla muodostuu harvemmaksi.

Myös Maan muotoparametrit vaikuttavat satelliitin rataliikkeeseen, esimerkiksi suure J_2, *dynaaminen litistyneisyys*, jonka arvo on $J_2 = 1082{,}63 \cdot 10^{-6}$. Se on suurin niistä monesta pallofunktiokertoimesta, jotka yhdessä edustavat Maan muotoa ja vaikuttavat satelliittiratoihin. Kertoimen J_2 tapauksessa vaikutus on sellainen, että satelliitin ratataso kiertää tietyllä kulmanopeudella Maan pyörähdysakselin ympäri: *ratatason prekessio*. Tästä seuraa tyypillisesti, että jos satelliitti lentää saman paikan yli seuraavana päivänä, se tapahtuu useita minuutteja aikaisemmin. Yhtälö ympyrän muotoiselle radalle, jonka säde on a, on

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{GM_\oplus}{a^3}}\left(\frac{a_\oplus}{a}\right)^2 J_2 \cos i,$$

jossa $a_\oplus$ on Maan vertausellipsoidin päiväntasaajasäde, $M_\oplus$ Maan massa ja i ratatason kaltevuuskulma eli *inklinaatio* päiväntasaajan suhteen.

Numeroarvojen sijoitus tähän antaa

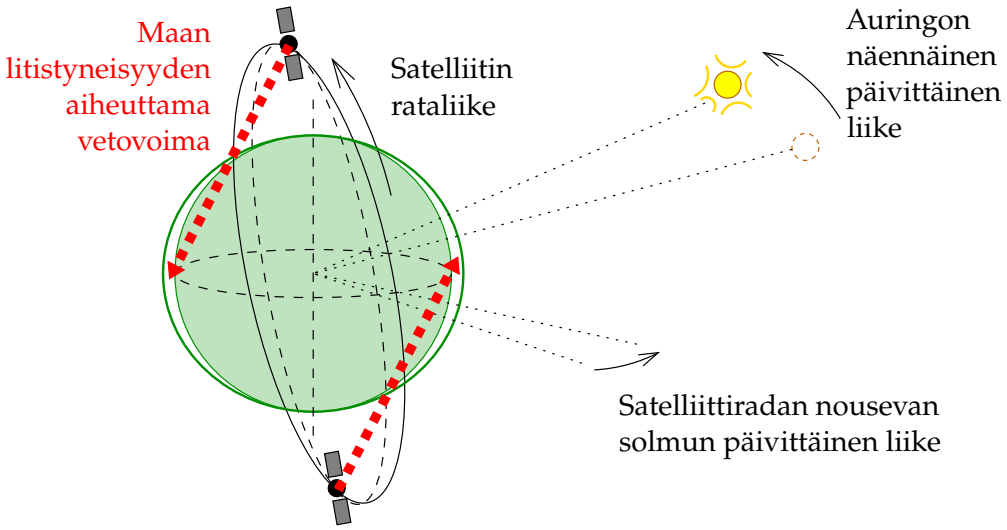
$$\frac{d\Omega}{dt} = -1{,}318\,95 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m^{3.5}\,s^{-1}} \cdot \frac{\cos i}{(a_\oplus + h)^{3.5}},$$

jossa h on satelliittiradan *keskikorkeus*, konventionaalisesti päiväntasaajasäteen $a_\oplus$ kokoisen pallopinnan yläpuolella. Jos tähän sijoitetaan vaikkapa satelliitin korkeudeksi $h = 800\,\mathrm{km}$ (ja käytetään arvoa $a_\oplus = 6\,378\,137\,\mathrm{m}$), saadaan

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\,1{,}331\,03 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad/s} \cdot \cos i = \left(-6{,}^\circ 589/\text{päivä}\right) \cdot \cos i.$$

Käytännön syistä, esimerkiksi aurinkopaneelien takia, satelliittirata valitaan usein niin, että ratataso kiertää Auringon vuosittaisen näennäisliikkeen mukana eli $360^\circ/365{,}25\,\text{päivää} = 0{,}^\circ 9856/\text{päivä}$. Katso kuva 13.6.

Jos inklinaatio i valitaan välillä 96°–102° radan korkeudesta riippuen, Maan dynaaminen litistyneisyys J_2 aiheuttaa juuri sopivan ratatason



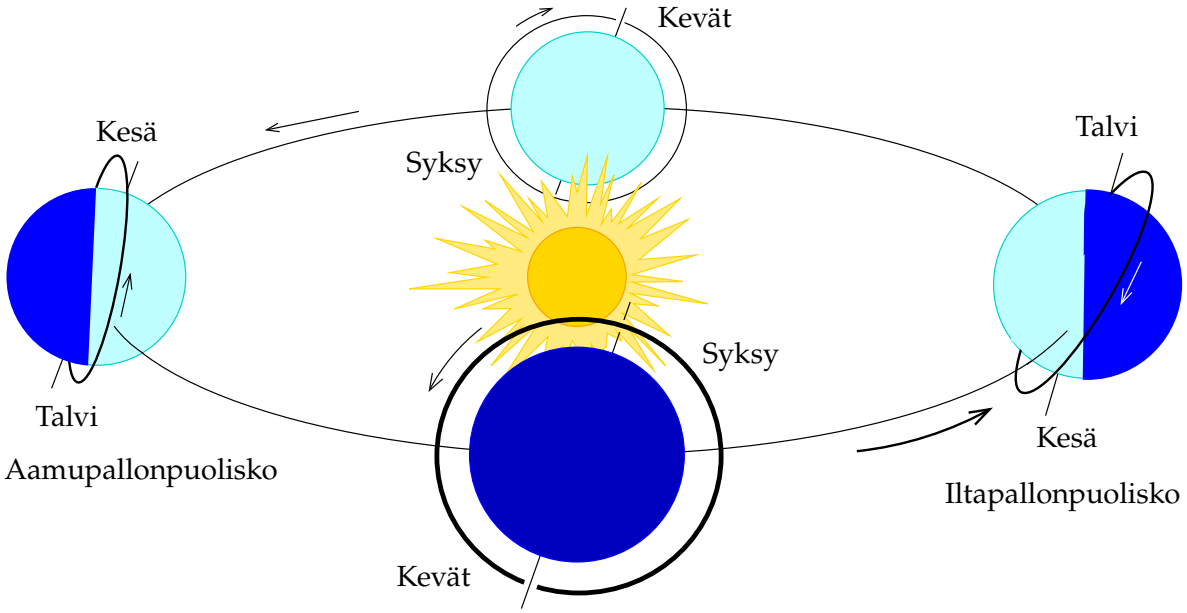
Kuva 13.6. Aurinkosynkronisen kiertoradan mekanismi.

kiertoliikkeen (”*no-shadow / Sun-synchronous / Sun-stationary orbit*”).
9 Kyseessä on varjoton[9] aurinkosynkroninen rata, katso kuva 13.7.

Kiertorataa, jonka inklinaatio- eli kaltevuuskulma $i > 90°$, kutsutaan *retrogradiseksi radaksi*: satelliitin liike on länteen päin, vastoin Maan pyörähdysliike, joka on itään päin. Radan inklinaatio i, tai retrogradiselle radalle sen suplementti $180° - i$, on korkein pohjoinen tai eteläinen geosentrinen leveysaste, jonka yli satelliitti voi lentää. Tämä merkitsee sitä, että jos inklinaatio ei ole tarkasti 90°, molempien napojen ympäri on alueita, joiden ylitse satelliitti ei koskaan tule lentämään: ”napareiät”.

Aurinkosynkronisen kiertoradan haittapuoli on puolestaan se, että altimetriahavainnot tehdään aina samaan paikallisaikaan. Esimerkiksi Auringon aiheuttamat vuoro- ja puolivuorokautiset vuorovedet ovat aina samassa vaiheessa (”resonanssi”), jolloin niitä ei voida havaita tämänlaisella radalla olevan satelliitin avulla. Siksi merentutkimussatelliitti TOPEX/Poseidonin ja sen Jason-seuraajasatelliittien radat valittiin ei-aurinkosynkronisiksi.

[9] Jos radan korkeus on alle 1400 km, se ei voi olla täysin varjoton. Keskitalvella tai keskikesällä satelliitti lentää silloin Maan varjon läpi.



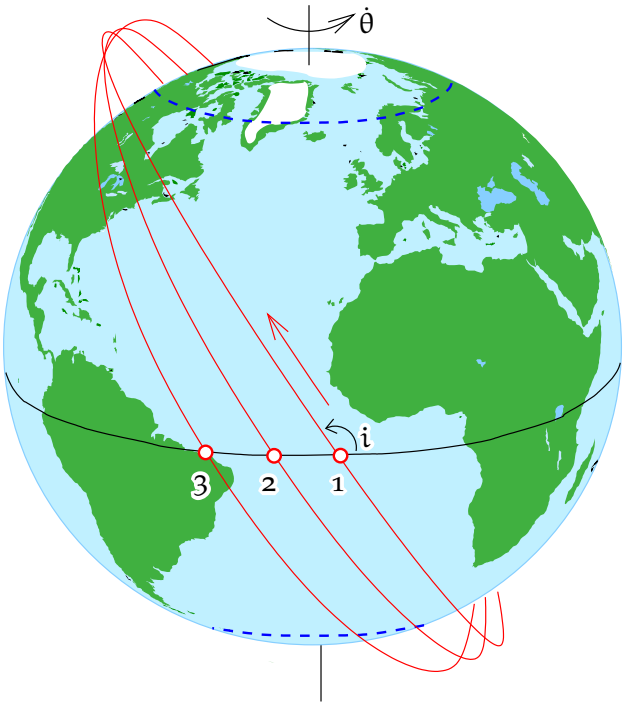
KUVA 13.7. Varjottoman kiertoradan geometria. Kuvan satelliitti lentää pohjoiseen paikkojen yli, joissa on aamu, ja etelään paikkojen yli, joissa on ilta.

13.3.1 Esimerkki

Satelliitti liikkuu aurinkosynkronisella kiertoradalla, toisin sanoen se ylittää jokaisen leveyspiirin päivittäin samaan paikalliseen keskiaurinkoaikaan.

Kysymyksiä

1) Mikä on satelliitin periodi, jos se lentää aina 14 kierroksen jälkeen saman paikan yli?
2) Sama kysymys, mutta jos satelliitti lentää aina saman paikan yli 43 kierroksen (kolmen päivän) jälkeen?
3) Entäs 502 kierroksen (35 päivän) jälkeen?
4) Mikä on satelliitin korkeus ”kolmen päivän kiertoradassa”? Käytä Keplerin kolmatta lakia, yhtälö 13.5. $GM_\oplus = 3\,986\,005 \cdot 10^8\ \mathrm{m^3/s^2}$, ja satelliitin korkeus on $h = a - a_\oplus$, jossa



KUVA 13.8. Retrogradisella radalla maapalloa kiertävä satelliitti, joka ylittää päiväntasaajan etelästä pohjoiseen kolmella peräkkäisellä kierroksella. Kulma radan ja päiväntasaajan välillä eli inklinaatio i, tai retrogradiselle radalle $180° - i$, on myös korkein pohjoinen tai eteläinen leveysaste, jonka satelliitti saavuttaa. Saavuttamattomat "napareiät" on merkitty sinisillä katkoviivoilla.

$a_\oplus = 6\,378\,137\,\mathrm{m}$.

5) Mikä on satelliitin korkeus "35 päivän kiertoradassa"? Entä korkeus*ero* edelliseen nähden?
6) Mikä on kolmen päivän kiertoradan pohjoiseen menevien ratojen keskinäinen etäisyys? Siis kuinka yksityiskohtaisesti altimetri pystyy kuvaamaan merenpinnan?
7) Sama kysymys 35 päivän kiertoradalle.
8) Pohdi:
   (a) Mihin tarkoitukseen käytettäisiin 35 päivän kiertorataa

ja mihin puolestaan kolmen päivän rataa?

(b) Olisiko mahdollista tai helppoa lentää molemmat radat samalla satelliitilla? Katso kysymys 5.

Vastauksia

1) Satelliitti tekee 14 kierrosta vuorokaudessa eli 1440 minuutissa: $P = {}^{1440\,\text{min}}/_{14} = 102{,}857\,\text{min}$.

2) Satelliitti tekee 43 kierrosta 3 vuorokaudessa eli 3×1440 minuutissa: $P = {}^{3 \times 1440\,\text{min}}/_{43} = 100{,}465\,\text{min}$.

3) Satelliitti tekee 502 kierrosta 35 vuorokaudessa eli 35×1440 minuutissa: $P = {}^{35 \times 1440\,\text{min}}/_{502} = 100{,}398\,\text{min}$.

4) Suorita taulun 13.2 octave-koodi. Tulos on 780,604 km.

5) Sama koodi muutoksella `P=100.398*60` antaa 777,421 km. Ero edellisestä on 3,183 km.

6) Satelliitilla on 43 eri maarataa. Tämä antaa niiden väliseksi etäisyydeksi ${}^{360°}/_{43} = 8°{,}372$. Päiväntasaajalla tämä on ${}^{40\,000\,\text{km}}/_{43} = 930\,\text{km}$. Etäisyys on lyhyempi korkeammilla leveysasteilla.

7) ${}^{360°}/_{502} = 0°{,}717$ eli ${}^{40\,000\,\text{km}}/_{502} = 80\,\text{km}$.

8)

(a) 35 päivän kiertorata olisi mainio yksityiskohtaista kartoitusta varten. Kolmen päivän rata soveltuisi esimerkiksi vuoroveden tai säähän liittyvien ilmiöiden havainnoimiseen, mutta spatiaalinen erotuskyky olisi heikompi.

(b) Ratakorkeuksien ero on vain 3 km ja periodien ero 4 s. Tarvittava radan muutos on helposti saavutettavissa jopa pienillä rakettimoottoreilla[10]. Vastaus on siis kyllä. [10]

[10] Paljastetaan, että tarvittava nopeuden kokonaismuutos on $\Delta v = 1.6\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$ eli reipas kävelytahti.

TAULU 13.2. Satelliitin korkeuden laskeminen sen kiertoajasta.

```
format long
GM=3986005e8;
ae=6378137;
P=100.465*60;
fac=4*pi*pi;
a=(GM*P*P/fac)^0.33333333;
h = a - ae;
printf('\n\nRadan korkeus: %8.3f km.\n', h/1000);
```

13.4 *In-flight*-kalibrointi

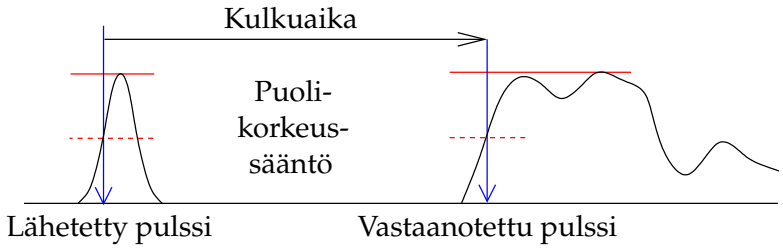
Nykyiset huipputarkat GNSS-paikannetut satelliittien tutka-altimetrit vaativat kunnon *kalibrointia*. Paras tekniikka tähän on *in-flight*-kalibrointi. Siinä käytetään merialuetta tai joskus järvialuetta, jonka vedenpinnan geosentrinen paikka on tiedossa aluetta ympäröivien mareografien GNSS-paikannuksen ja tarkan geoidimallin ansiosta. Esimerkin tällaisista mittauksista antaa Vu ym. (2018).

Yksi syy käyttää *in-flight*-kalibrointia on, että tutka-altimetreilla on tuntematon nollavirhe, joka on seurausta siitä, että signaalin polkua elektroniikan läpi ei tunneta tarkasti. Nollavirhe voi muuttua hitaasti eli ryömiä ajassa sekä riippua lämpötilasta.

13.5 *Retracking*

Satelliittialtimetriamission tulokset julkaistaan jo lennon aikana *geophysical data record* -tiedostoina (GDR), joissa kaikki mittaukseen liittyvät seikat, kuten ilmakehän korjaustermit, vuorovesikorjaukset ja meriaaltoparametrit, ovat annettuja.

Nykykäytäntö on käsitellä vanhemmat altimetriamittaukset uudelleen soveltaen parannettuja menetelmiä hyödyllisten lisätietojen saamiseksi. Koko tutkan paluupulssi analysoidaan uudelleen lähestymista-



Kuva 13.9. Altimetrian paluupulssin analyysi. Klassinen paluupulssin ajanmittaus käyttää ”puolikorkeuspistettä”.

valla nimeltä *retracking* (Altimetry, Retracking).

Analyysimenetelmä käyttää paluupulssin alkunousun pistettä, jonka korkeus on puolet pulssin maksimiarvosta. Tämä on todistetusti hyvä menetelmä saada kulkuaika, joka liittyy *footprintin* keskipisteeseen suoraan satelliitin alla. Pulssin takaosassa on heijastuksia *footprintin* kaukaisemmilta reuna-alueilta.

Kolmessa tilanteessa automaattinen menetelmä ei toimi kunnolla lennon aikana ja tarkempi pulssin analyysi jälkeenpäin kannattaa:

- Saaristoissa, kuten Indonesiassa tai Ahvenanmaalla. Silloin voi esimerkiksi käydä niin, että *footprintin* keskipiste on kuivalla maalla. Silloin ensimmäiset vahvat heijastukset tulevat vinosti lähimmältä rannikolta ja tarkka rantaviivatiedosto on tarpeen tulosten käsittelyssä. Mutta jo avomerellä rantaviivojen lähella, paluupulssi vääristyy.
- Merijääalueilla Pohjoisella ja Eteläisellä jäämerellä. Heijastukset voivat tulla merijään pinnalta, jolloin käsittelyssä on otettava huomioon *freeboard* eli varalaita: kuinka korkealla merijään pinta on veden yläpuolella.
- Mannerjäätiköiden yli. Tässä paluupulssin muoto on hyvin erilainen kuin avomeren yli. Lisäksi paluupulssin kulkuaika vaihtelee nopeasti, kun satelliitti lentää eteenpäin. Vastaanottoikkuna ei pysy mukana[11].

11

Näissä tapauksissa perinteinen tosiaikainen käsittely satelliitissa tuottaa virheellisiä mittauksia tai ei mittauksia lainkaan. *Retrackingilla* mittaukset saadaan pelastettua ja altimetriamittausten kattama alue laajennettua, erityisesti arktisille ja Etelämantereen alueille.

Freeboard on tärkeä suure jään paksuuden määrittämisessä. Kun jään tiheys on noin 920 $^{kg}/_{m^3}$ ja meriveden tiheys noin 1030 $^{kg}/_{m^3}$, jään paksuus on noin 8× *freeboard*[12]. Jos tämän lisäksi on saatavilla kaukokartoitustietoa jääpeitteen pinta-alasta, voidaan laskea merijään kokonaistilavuus ja -massa.

[12]

Arktinen jääpeite on vähentynyt rajusti viime vuosikymmeninä. Kaikkein rajuinta on ollut jään kokonaistilavuuden vähentyminen, katso kuva 13.10. Pinta-alan lisäksi myös jään paksuus vähenee, ja monivuotisesta paksummasta jäästä suuri osa on jo hävinnyt.

13.6 Merentutkimus satelliittialtimetrian avulla

Satelliittialtimetrian ensimmäinen geodeettinen sovellus oli geoidin määritys. Altimetrinen geoidimääritys onnistuu vain, jos oletetaan, että merenpinta

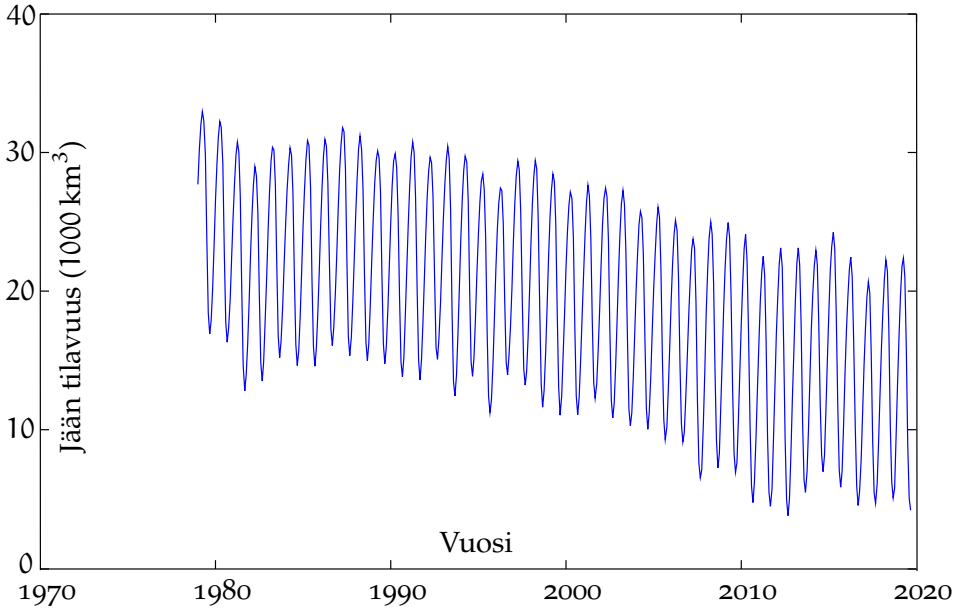
- on vakio ajassa
- yhtyy tasapotentiaalipintaan eli geoidiin.

Käytännössä merenpinta vaihtelee ajassa eikä ole tasapotentiaalipinta. Siksi on kehitetty toisia lähestymistapoja.

- Merenpinnan vaihtelevuutta voidaan tutkia satelliittialtimetrialla käyttämällä kolmea menetelmää:
  - Saman satelliitin *toistuvat maaradat*. Radat voidaan pinota ja tasoittaa yhteen käyttämällä yksinkertaista ratavirheen

[11] Uusimmat satelliitit, kuten Sentinel-3, käyttävät digitaalista maastomallia vastaanottoikkunan ohjaamiseen muualla kuin avomeren yllä.

[12] Olettaen, että jään päällä ei ole lunta. Jään tiheys myös vaihtelee, ja yksivuotisen ja monivuotisen jään tiheydet ovat erilaisia.



KUVA 13.10. Jään tilavuus Pohjoisella jäämerellä. PIOMAS; Schweiger ym. (2011).

korjausmallia. Jäljelle jäävät ratakohtaiset jäännösvirheet kertovat jotain merenpinnan vaihtelevuudesta, vaikkeivät koko tarina.

– *Risteyskohtatasoituksesta* voidaan saada tietoa merenpinnan vaihtelevuudesta. Kun merenpinta vaihtelee, risteyskohtatasoituksesta saadut tulokset huononevat: *a posteriori* (laskennan jälkeen) risteyskohtaerojen neliöllinen summa kasvaa. Varsinainen vaihtelevuuden *tutkimus* tällä menetelmällä on haastavampaa. Sitä voidaan kuitenkin käyttää vaihtelevuuden suuruuden arvioimiseen.
– Nykyisin altimetriasatelliiteissa on aina mukana GNSS-*paikannuslaite*, joka mittaa tutkalaitteiston absoluuttisen geosentrisen sijainnin mittaushetkellä. Sen avulla voi seurata merenpinnan vaihteluita suoraan mittaamalla, olettaen että

mittausten ajallinen ja maantieteellinen tiheys on riittävä.

- Merenpinnan poikkeamia tasapotentiaalipinnasta eli geoidista voidaan tutkia vain, jos on saatavilla riippumatonta tietoa *todellisesta* geoidipinnasta. Mikäli koealueelta on saatavilla hyvät, tiheät painovoimamittaukset, voidaan näistä estimoida geoidi ja sen jälkeen laskea meritopografia.

  Tarvittavan tarkan ja tiheän painovoima-aineiston saaminen kokoon onnistuu laiva- tai ilmagravimetrian avulla. Myös mittausta erikoissatelliitin avulla (gravitaatiogradiometria, GOCE-satelliitti) suunniteltiin pitkään, ja se toteutui vihdoin, katso alaosio 13.7.3.

13.7 Satelliittipainovoimamissiot

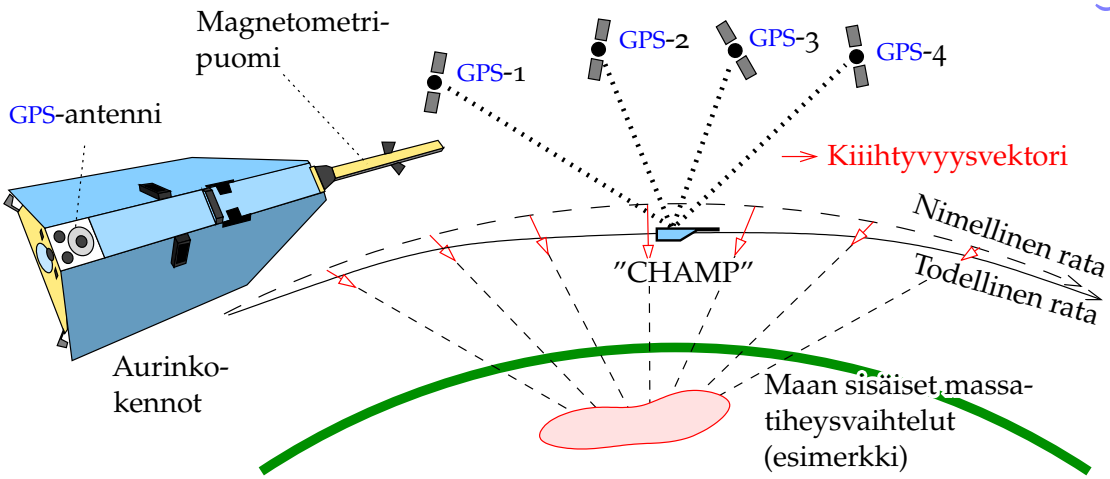
2000-luvun alkuvuosina laukaistiin kolme satelliittimissiota Maan painovoimakentän eli geopotentiaalin hienorakenteen selvittämiseksi. Toisin sanoen, missioiden tavoitteena oli määrittää maailmanlaajuinen geoidimalli, jolla on korkea erotuskyky.

13.7.1 CHAMP

CHAMP (Challenging Minisatellite Payload for Geophysical Research and Applications, 2000-039B) oli saksalainen satelliittiprojekti, jonka vetäjänä oli *Deutsches Geoforschungszentrum* GFZ. Satelliitti laukaistiin radalleen Plesetskistä Venäjältä vuonna 2000. CHAMP-satelliitin radan korkeus oli alussa 454 km, ja se laski lennon aikana noin 300 kilometriin ilmakehän vastuksen takia. Ratatason kaltevuus eli inklinaatio oli 87°. Syyskuun 19. päivänä 2010 satelliitti palasi ilmakehään. Projektin kuvaus: CHAMP Mission.

CHAMP sisälsi GPS-vastaanottimen, jonka avulla määritettiin satelliitin paikka $\mathbf{x}(t)$ avaruudessa ajan t funktiona. Peräkkäisistä satelliitin paikoista voi laskea geometrista kiihtyvyyttä $\mathbf{a}(t)$ differentioimalla:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t).$$



KUVA 13.11. Maan painovoimakentän määrittäminen matalalla lentävän satelliitin GPS-rataseurannan avulla.

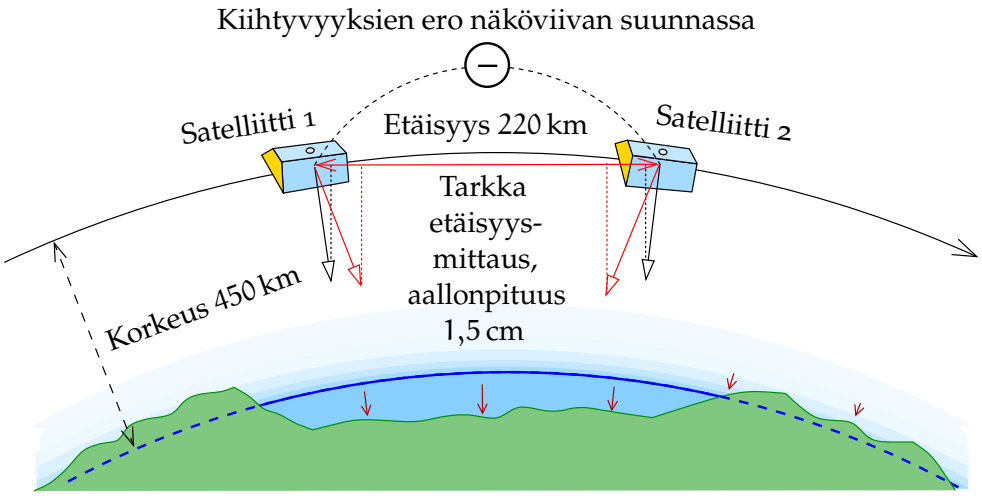
Differentiointi tapahtuu numeerisesti tavalla, joka esitettiin ilmagravimetrian osuudessa, yhtälö 11.8.

Satelliitti sisälsi myös kiihtyvyysmittarin, jonka avulla eliminoitiin ilmakehän aerodynaamisten voimien aiheuttamat satelliitin kiihtyvyydet eli poikkeamat vapaan putoamisen liikkeestä. Jäljelle jäävät silloin vain Maan gravitaatiokentän aiheuttamat kiihtyvyydet, joista lasketaan tarkka geopotentiaali- eli geoidimalli käyttäen aiemmin kuvattuja menetelmiä.

Muutamia CHAMPin dataan perustuvia globaaleja geopotentiaalimalleja on laskettu ja julkaistu.

13.7.2 GRACE

GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment Mission, 2002-012 A ja B) mittasi Maan painovoimakentän *ajallisia muutoksia* erittäin tarkasti, mutta melko karkealla maantieteellisellä erotuskyvyllä. Ajalliset muutokset johtuivat lähinnä Maan "sinisen kalvon", ilmakehän ja vesivaipan, liikkeistä. Mitattavaa suuretta kutsutaan myös *merenpohjan paineeksi*, mikä on hieman yllättävä ilmaisu, kunnes oivaltaa, että se



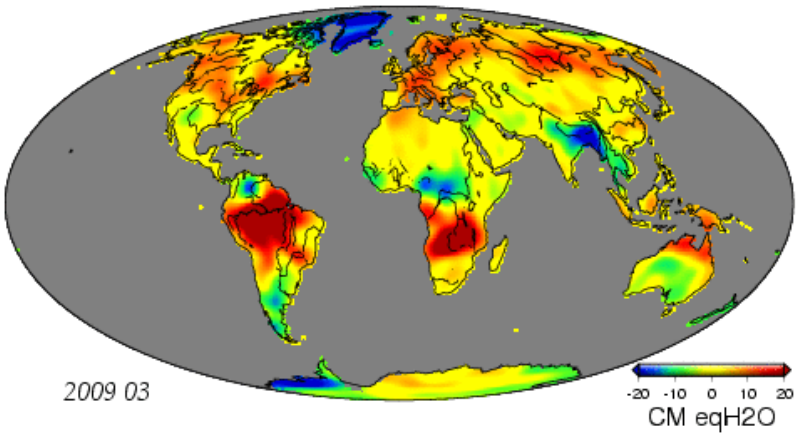
KUVA 13.12. GRACE-satelliittien perusidea: painovoimakentän pienenpienten ajallisten vaihtelujen mittaaminen SST:n (*Satellite-to-Satellite Tracking*in) avulla. Vaihteluita aiheuttavat massasiirtymät Maan "sinisessä kalvossa" eli ilmakehässä ja vesivaipassa, ilmaistuna "merenpohjan kokonaispaineen" vaihteluina (↓).

edustaa todella koko ilma- ja vesipatsaan sisältämää, ajassa vaihtelevaa kokonaismassaa.

Tehollinen aikaresoluutio oli koko maapallon kartoitus kerran kuussa. Projektin kuvaus: GRACE Mission. Projekti oli yhdysvaltalais-saksalainen yhteistyö, jonka päävetäjänä toimi Center for Space Research Texasin yliopistolla Austinissa.

GRACE oli *satelliittipari* ("Tom ja Jerry"), jonka satelliitit lensivät samalla radalla toinen toisensa perässä aluksi noin 500 kilometrin korkeudella ja 220 kilometrin keskinäisellä etäisyydellä. Ratatason kaltevuus oli 89°, eli kyseessä oli lähes polaarinen rata, joka antoi täydellisen globaalin peittävyyden. Satelliittien välisiä etäisyysmuutoksia mittasi mikroaaltolinkki tarkkuudella $\pm 1\,^{\mu m}/_{s}$. Molemmissa satelliiteissa oli myös herkät kiihtyvyysmittarit ilmakehän vastuksen vaikutuksen mittaamiseksi ja poistamiseksi.

Mittausjärjestelmä oli niin herkkä, että jopa millimetrin paksuisen



KUVA 13.13. GRACE-mission tulokset: massan pintakerros vesisenttimetreinä ilmaistuna. Hiirennapsautus antaa animaation (e-kirja).

vesikerroksen liikkeet voitiin huomata, jos kerros vain ulottui mantereen kokoiselle alueelle, noin 1000 km.

Julkaistuissa tuloksissa näkyvät vakuuttavasti esimerkiksi kostean ja kuivan monsuunin mukanaan tuomat kausittaiset vaihtelut vastavaiheessa pohjoisella ja eteläisellä pallonpuoliskolla suurissa trooppisissa jokialtaissa, kuten Amazonas, Kongo, Mekong, Intia ja Indonesia. . . . GRACE Mission, hydrology.

Vuonna 2017 missio päättyi 15 vuoden jalkeen. GRACEn seuraajamissio laukaistiin vuonna 2018, GRACE Follow-On Mission.

13.7.3 GOCE

GOCE (2009-013A, Geopotential and Steady-state Ocean Circulation Explorer) oli satelliiteista kaikkein kunnianhimoisin. Euroopan avaruusjärjestö ESA:n rakentama satelliitti laukaistiin onnistuneesti Plesetskistä maaliskuussa 2009. Radan korkeus oli mission aikana vain 270–235 km, ja satelliitti sisälsi rakettimoottorin (jonimoottorin) ja ajoainevarannon radan ylläpitämiseksi ilmakehän vastusta vastaan. Ratatason kaltevuuskulma oli 96°,7 eli rata oli aurinkosynkroninen[13]. [13]

Satelliitissa oli mukana hyvin herkkää *gravitaatiogradiometri*, joka mittasi tarkasti Maan vetovoiman *gradientin* eri komponentteja eli vetovoimavektorin komponenttien riippuvuuksia paikkakoordinaateista. Gradiometri koostui kuudesta pareittain kehikkoon kiinnitetystä äärimmäisen herkästä kolmiakselisesta kiihtyvyysmittarista. Missio loppui vuonna 2013 ja satelliitti palasi näyttävästi ilmakehään 11. marraskuuta Falklandin saarten yläpuolella (Scuka, 2013).

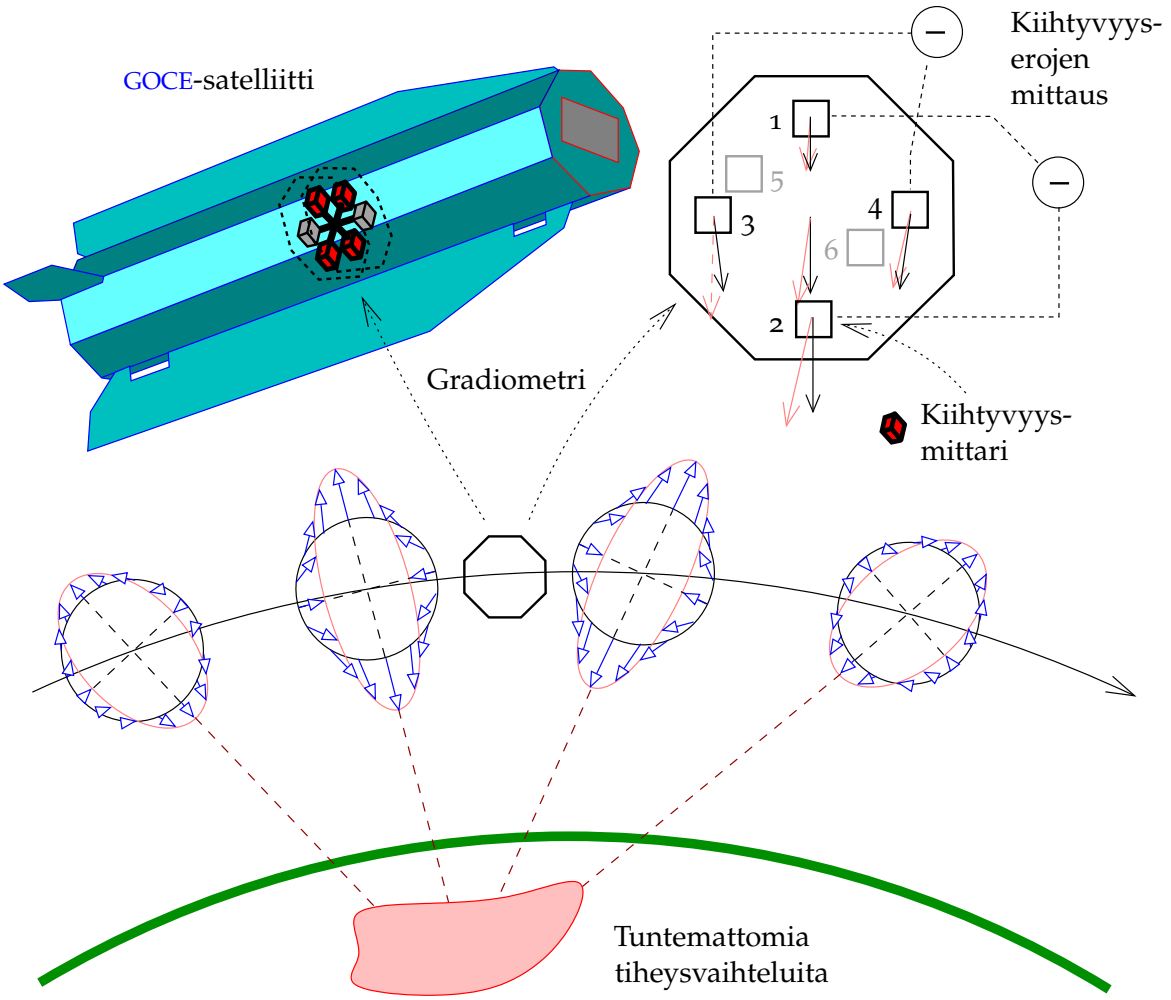
Teoreettisesta analyysista on saatu selville, että gravitaatiogradiometria on paras tapa mitata painovoimakentän paikallisimmat piirteet: parempi kuin rataseuranta GNSS:n avulla. Pienimmät geoidikartan yksityiskohdat, jotka GOCE näki, ovat läpimitaltaan vain noin 100 km, ja niiden tarkkuus on niinkin hyvä kuin ± 2 cm.

Niin tarkan maailmanlaajuisen geoidimallin avulla voidaan laskea merenpinnan poikkeamat geoidista, siis tasapotentiaalipinnasta, vastaavalla tarkkuudella. Nähtiin, että merenpinnan todellinen paikka avaruudessa saadaan satelliittialtimetrian avulla muutaman senttimetrin tarkkuudella. Tämä tasoero merenpinnan ja tasapotentiaalipinnan välillä taas voidaan invertoida *merivirtauksiksi*, katso osio 12.5 ja kuva 12.4. Tämä on GOCE-satelliitin nimen tausta.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Mikä on tutka-altimetrin jalanjälki (”*footprint*”)? Miten se riippuu aallokosta?
2) Mikä on merijään *freeboard*? Miten sitä voidaan käyttää jään tilavuuden määrittämiseksi?

[13] Tämän kaltevuuskulman seurauksena oli kummallakin navalla kalotti, jonka säde oli 6°,7 ja jonka sisältä ei saatu mittauksia. Viime vuosien aikana nama ”tietämättömyyden navat” on saatu vähitellen kartoitetuksi ilmagravimetrian avulla, esimerkiksi Forsberg ym. (2017).



KUVA 13.14. Maan painovoimakentän määrittäminen GOCE-satelliitin gravitaatiogradiometrin avulla.

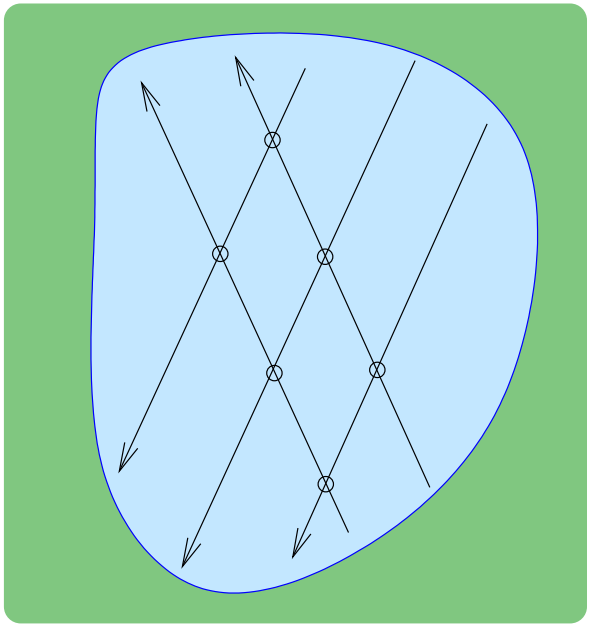
3) Mitä kolme vaihtoehtoista satelliitin ratavirheen korjausmallia on olemassa?
4) Mikä on satelliittialtimetrian risteyskohtatasoituksessa *datumidefekti* ja miten sen voi korjata?
5) Miten Keplerin kolmatta lakia voidaan käyttää satelliittiradan keskikorkeuden määrittämiseksi, jos satelliitin periodi on annettuna?
6) Mikä on satelliittiradan toistojakso?

7) Mikä on J_2 ja miten se vaikuttaa satelliitin liikkeeseen?
8) Mikä on aurinkosynkroninen rata ja miksi se on hyödyllinen?
9) Mikä on retrogradinen rata?
10) Miksi TOPEX/Poseidon- ja Jason-satelliittien radat eivät ole aurinkosynkronisia?
11) Taulukossa 13.1 joidenkin satelliittien toistojakso on kokonaislukumäärä vuorokausia, joidenkin ei. Mitä yhteistä näyttää olevan satelliiteilla, joiden toistajakso ei ole kokonaisluku?
12) Millä kolmella satelliittialtimetrian menetelmällä voidaan tutkia merenpinnan vaihtelevuutta?
13) Maan painovoimakentän hienorakenteen ja ajallisen vaihtelevuuden tutkimiseksi on toistaiseksi lentänyt kolme satelliittimissiota. Esitä ne ja niiden käyttämät menetelmät.

Harjoitus 13−1: Altimetria ja risteyskohtatasoitus

Annettuna on kaksi pohjoiseen menevää satelliittirataa ja kolme etelään menevää rataa. On olemassa kuusi risteyskohtaa, katso kuva 13.15.

1) Jos jokaisen radan ratavirheen korjaukset kuvataan lineaarisena paikan funktiona
$$\Delta h = a + b\tau,$$
montako tuntematonta a ja b tarvitaan yhteensä?
2) Kirjoita auki *havaintoyhtälöt*. Havainnot ovat risteyskohtien erot. Tuntemattomat ovat eri maaratojen kertoimet a ja b.
3) Saadaanko näistä havaintoyhtälöistä yksiselitteistä ratkaisua? Miksei?
4) Kuinka monta tuntematonta on kiinnitettävä, jotta saadaan yksiselitteinen ratkaisu? Mitkä kertoimet kiinnittäisit?
5) Onko ylimääräisiä havaintoja? Oliko viisasta valita ratavirheen korjausmalli, jossa on kaksi tuntematonta maarataa kohden?



KUVA 13.15. Satelliittialtimetrian ratageometrian esimerkki.

Harjoitus 13–2: Satelliittirata

Satelliitti liikkuu aurinkosynkronisella radalla, ja 419 kierroksen ja 30 päivän jälkeen se on taas tarkasti saman paikan yläpuolella.

1) Mikä on satelliitin periodi?
2) Kuinka pitkä on etäisyys lännestä itään kilometreissä pohjoiseen menevien ratojen välillä päiväntasaajalla?
3) Koska aurinkosynkroninen rata eli ole polaarirata, on korkein pohjoinen leveysaste, jonka yli satelliitti voi lentää pienempi kuin 90°. *Mihin kompassisuuntaan* satelliitti lentää siinä pisteessä?

Harjoitus 13–3: Keplerin kolmas laki

1) Paljonko on satelliitin korkeus h, jos sen periodi on 98 minuuttia? Käytä Keplerin kolmatta lakia 13.5,

$$GM_{\oplus}P^2 = 4\pi^2 a^3,$$

$GM_\oplus = 3\,986\,005 \cdot 10^8\,\mathrm{m^3/s^2}$, ja satelliitin korkeus on $h = a - a_\oplus$, jossa $a_\oplus = 6\,378\,137\,\mathrm{m}$.

2) Mikä on satelliitin kiertoradan inklinaatio i, jos annettuna on, että rata on ympyrä ja aurinkosynkroninen? Katso osio 13.3.

Vuorovesi, ilmakehä ja maankuoren liikkeet

14

14.1 Teoreettinen vuorovesi

Vuorovesi on seurausta ulkoisten taivaankappaleiden, Maan tapauksessa Kuun ja Auringon, vetovoimasta sekä Maan vapaasta putoamisesta vetovoiman lähteitä kohtaan. Voimme kirjoittaa vetovoimakentän potentiaalin seuraavasti:

$$V' = \frac{GM}{\ell},$$

jossa ℓ on vetovoiman lähteen etäisyys potentiaalin laskentapisteestä, katso kuva 14.1. GM on Auringon tai Kuun massa kerrottuna Newtonin gravitaatiovakiolla. Vetovoima voidaan ilmaista kiihtyvyys- eli "voimakenttänä", jonka suuruus on

$$a' = \frac{GM}{\ell^2}.$$

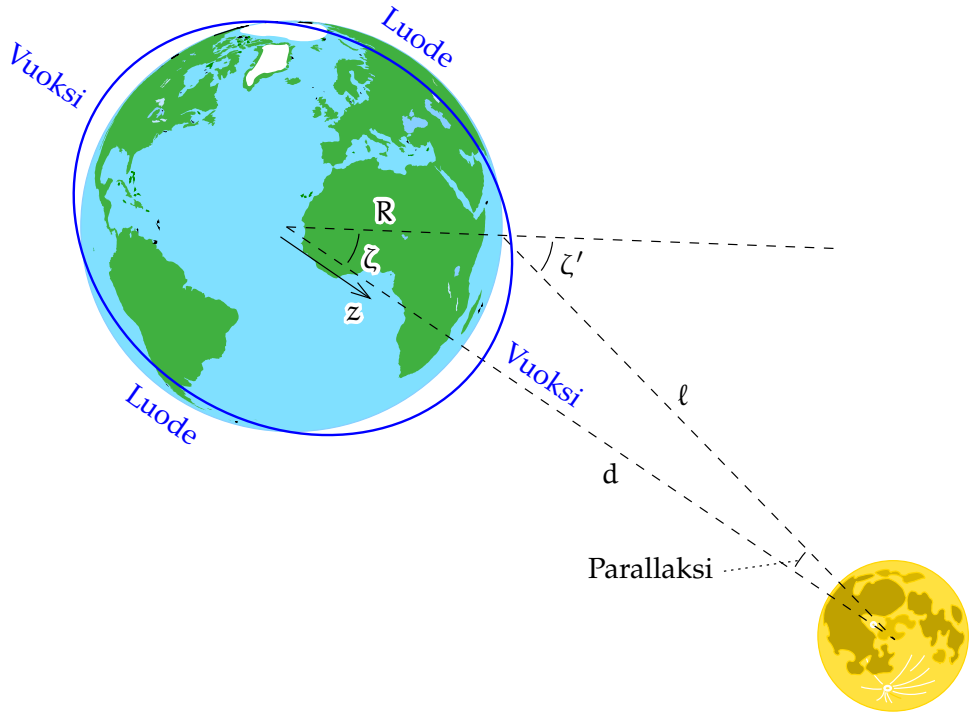
Vapaasti avaruudessa kelluva Maa vastaa tähän putoamalla vapaasti kohti vetovoiman lähdettä kiihtyvyydellä (katso osio 1.4):

$$a'' = \frac{GM}{d^2},$$

jossa d on vetovoiman lähteen etäisyys Maan keskipisteestä.

Kiihtyvyys a'' on vakio. Avaruuden kenttänä siihen voidaan liittää potentiaalin:

$$V'' = \frac{GM}{d^2} z = \frac{GM}{R} \left(\frac{R}{d}\right)^2 \frac{z}{R} = \frac{GM}{R} \left(\frac{R}{d}\right)^2 \cos\zeta,$$



KUVA 14.1. Teoreettinen vuorovesi. ζ' on Kuun (tai Auringon) paikallinen zeniittikulma, ζ vastaava geosentrinen kulma.

jossa z on koordinaatti, joka on määritelty Maan keskipisteen ja vetovoiman lähteen yhdistävää viivaa pitkin, katso kuva 14.1. R on pallon muotoisen Maan säde.

Nettovuorovesipotentiaali, sellaisena kuin massa-alkiot Maan pinnalla tuntevat sen, on nyt

$$V = V' - V'' = \frac{GM}{\ell} - \frac{GM}{R}\left(\frac{R}{d}\right)^2 \cos\zeta = \\ = \frac{GM}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^{n+1} P_n(\cos\zeta) - \frac{GM}{R}\left(\frac{R}{d}\right)^2 \cos\zeta$$

käyttäen kehitelmää 8.7. Tässä termi $n = 0$ on vakio ja siten potentiaalin tapauksessa mielivaltainen, ja se poistetaan. Termi $n = 1$ tuottaa tarkan

kumoamisen. Jää

$$V = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^{n+1} P_n(\cos\zeta),$$

jossa asteluvun 2 termi on hallitseva.

Kirjoitetaan nyt vuorovesi- eli vuoksipotentiaali V seuraavasti:

$$V = \frac{GMR^2}{d^3} P_2(\cos\zeta) + \cdots = \frac{GMR^2}{2d^3} \left(3\cos^2\zeta - 1\right) + \cdots,$$

jossa ζ on paikan Auringon tai Kuun *geosentrinen* zeniittikulma eli paikallinen zeniitikulma ζ', josta parallaksi on korjattu pois, katso kuva 14.1. $P_2(\cos\zeta)$ on toisen asteluvun Legendren polynomi. Auringon ja Kuun tapauksessa korkeampien astelukujen lisätermit $(\cdots)$ voidaan jättää huomiotta, koska ne ovat niin kaukaisia kappaleita: $d \gg R$.

Kosinisääntö pallolla kertoo, että

$$\cos\zeta = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos h,$$

jossa ϕ on leveysaste, δ on Kuun deklinaatio[1] ja h on Kuun tuntikulma[2]. [1] [2]

Pallofunktioiden summauslauseen (Wolfram MathWorld, Spherical Harmonic Addition Theorem) perusteella on

$$P_n(\cos\zeta) = P_n(\sin\phi)\, P_n(\sin\delta) + \\ + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin\phi)\, P_{nm}(\sin\delta) \cos mh,$$

eli kun $n = 2$,

$$P_2(\cos\zeta) = P_2(\sin\phi)\, P_2(\sin\delta) +$$

[1] Deklinaatio on taivaankappaleen leveysaste taivaanpallolla eli sen kulmaetäisyys taivaan ekvaattorilta (Wikipedia, Deklinaatio), tässä tapauksessa katsottuna Maan keskipisteestä.

[2] Tuntikulma on taivaankappaleen meridiaanin ja paikallisen meridiaanin välinen kulma eli pituusasteiden ero mitattuna taivaan ekvaattoria pitkin (Wikipedia, Tuntikulma), tässä tapauksessa katsottuna Maan keskipisteestä. Se häviää, kun taivaankappale on *yläkulminaatiossa* eli paikallisessa meridiaanissa korkeimmillaan.

$$+\tfrac{1}{3}P_{21}(\sin\phi)\,P_{21}(\sin\delta)\cos h+\tfrac{1}{12}P_{22}(\sin\phi)\,P_{22}(\sin\delta)\cos 2h.$$

Taulukon 3.2 mukaan

$$\begin{aligned} P_{21}(\sin\phi) &= 3\sin\phi\cos\phi, & P_{21}(\sin\delta) &= 3\sin\delta\cos\delta,\\ P_{22}(\sin\phi) &= 3\cos^2\phi, & P_{22}(\sin\delta) &= 3\cos^2\delta, \end{aligned}$$

ja saadaan

$$\begin{aligned} P_2(\cos\zeta) &= P_2(\sin\phi)\,P_2(\sin\delta)+\\ &\quad +3\sin\phi\cos\phi\sin\delta\cos\delta\cos h+\tfrac{3}{4}\cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2h=\\ &=\tfrac{1}{2}\left(3\sin^2\phi-1\right)\tfrac{1}{2}\left(3\sin^2\delta-1\right)+\tfrac{3}{4}\sin 2\phi\sin 2\delta\cos h+\\ &\qquad +\tfrac{3}{4}\cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2h. \end{aligned}$$

Tästä

$$V=\frac{GMR^2}{4d^3}\left(\begin{array}{c}\left(3\sin^2\phi-1\right)\left(3\sin^2\delta-1\right)+\\ +3\sin 2\phi\sin 2\delta\cos h+\\ +3\cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2h\end{array}\right).$$

Tämä on *vuoroveden jako osiin Laplacen mukaan*.

Siinä on kolme osaa:

- Hitaasti vaihteleva osa,

$$V_1=\frac{GMR^2}{4d^3}\left(3\sin^2\phi-1\right)\left(3\sin^2\delta-1\right),$$

joka riippuu myös Kuun deklinaatiosta δ ja on näin ollen periodinen 14 päivän (puolen kuukauden) jaksoissa. Käyttämällä pallotrigonometriaa:

$$\begin{aligned} &\sin\delta=\sin\epsilon\sin\ell\\ &\qquad\Longrightarrow\quad \sin^2\delta=\sin^2\epsilon\sin^2\ell=\sin^2\epsilon\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\ell\right), \end{aligned}\tag{14.1}$$

jossa ℓ on Kuun pituus eli longitudi radallaan laskettuna päiväntasaajan ylityspisteestä, ja ϵ on Kuun ratatason kaltevuus

eli inklinaatio päiväntasaajaan nähden, keskimäärin $23^\circ,5$, mutta vaihteleva arvojen $18^\circ,3$ ja $28^\circ,6$ välillä. Näin saadaan

$$V_1 = \frac{GMR^2}{4d^3}\left(3\sin^2\phi - 1\right)\left(3\sin^2\epsilon\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\ell\right) - 1\right),$$

jossa on käytetty tulosta 14.1. Hajotetaan $V_1 = V_{1a} + V_{1b}$ kahteen osaan, joista toinen on vakio-osa[3] ja toinen jaksollinen, puolikuukausittainen osa: [3]

$$V_{1a} = \frac{GMR^2}{4d^3}\left(3\sin^2\phi - 1\right)\left(\tfrac{3}{2}\sin^2\epsilon - 1\right), \qquad (14.2)$$
$$V_{1b} = -\frac{GMR^2}{4d^3}\left(3\sin^2\phi - 1\right)\left(\tfrac{3}{2}\sin^2\epsilon\,\cos 2\ell\right).$$

- Tämän lisäksi on pari termiä, joissa Kuun tuntikulma h esiintyy, periodina noin vuorokausi ja noin puoli vuorokautta:

$$V_2 = \frac{GMR^2}{4d^3}\cdot 3\sin 2\phi\sin 2\delta\cos h,$$
$$V_3 = \frac{GMR^2}{4d^3}\cdot 3\cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2h.$$

Molemmissa on h:n lisäksi δ ”hitaana” muuttujana. Yhtälöt voitaisiin kirjoittaa Kuun longitudin ℓ eri funktioiden summiksi. Käytä taas perustrigonometriaa, yhtälö 14.1:

$$\cos^2\delta = 1 - \sin^2\delta = 1 - \sin^2\epsilon\,\sin^2\ell = $$
$$= 1 - \sin^2\epsilon\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\ell\right),$$
$$\cos 2\ell\cos 2h = \tfrac{1}{2}\left(\cos(2\ell + 2h) + \cos(2\ell - 2h)\right),$$
$$\sin 2\delta = 2\sin\delta\cos\delta = 2\sqrt{\sin^2\delta\left(1 - \sin^2\delta\right)} =$$
$$= 2\sin\epsilon\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\ell\right)\left(1 - \sin^2\epsilon\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\ell\right)\right)},$$

mikä johtaa Kuun longitudin ℓ trigonometriseen kehitelmään ja niin edelleen. Katso esimerkiksi Melchiorin[4] kuuluisa kirja (1978). [4]

[3] Kuun tapauksessa ei tarkasti, koska $\epsilon_{☾}$ on (hitaasti) aikariippuvainen.

TAULUKKO 14.1. Teoreettisen vuoroveden eri jaksoja. Laajasti käytössä olevat symbolit ovat George Darwinin standardisoimia.

	Muuttuva funktio	Jakso		Darwin-symboli		Nimi
		Kuu	Aur.	Kuu	Aur.	
V_{1a}	-	-	-	M_0	S_0	Pysyvä vuorovesi
V_{1b}	$\cos 2\ell$	14^d	182^d	*Mf*[a]	*Ssa*[b]	Deklinaatiov.
V_2	$\cos h$	24^h50^m	24^h	K_1, O_1	S_1, P_1	Päivittäinen
V_3	$\cos 2h$	12^h25^m	12^h	M_2	S_2	Puolipäivittäinen

[a] *Lunar fortnightly*, Kuun puolikuukausittainen

[b] *Solar semi-annual*, Auringon puolivuotuinen

Yllä olevista yhtälöistä erotetaan kerroin

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3GMR^2}{4d^3} = \frac{3}{4}\frac{GM}{d}\left(\frac{R}{d}\right)^2, \tag{14.3}$$

5 ”Doodsonin[5] vakio”. Kuun vakio on $D_{☾} = 26{,}8\,\text{cm} \times \gamma$ ja Auringon $D_{☉} = 12{,}3\,\text{cm} \times \gamma$, jossa $\gamma \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$. Katso kuva 14.2.

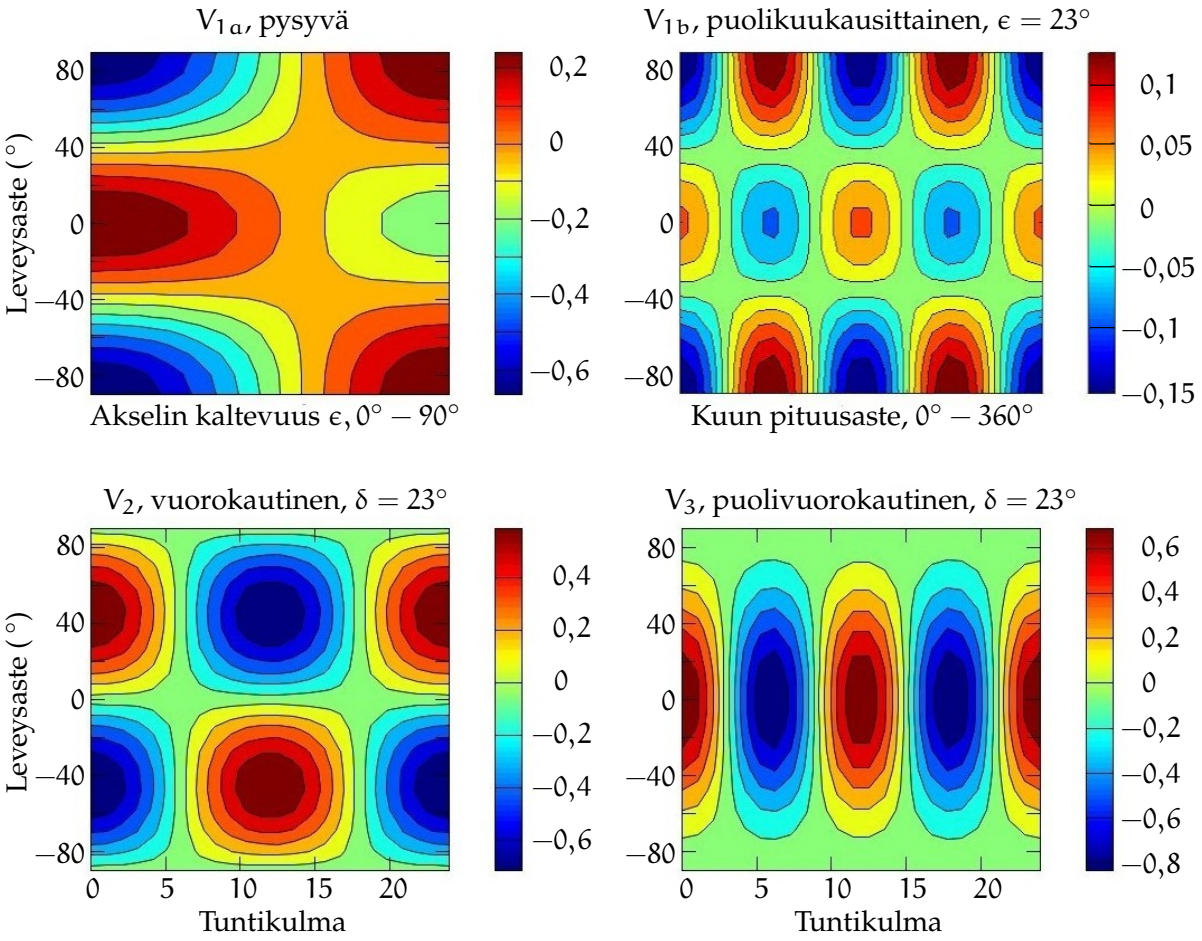
6 *Jaksot* on lueteltu taulukossa 14.1 Darwinin[6] symboleineen.

Käytännössä vuorokautiset ja puolivuorokautiset vuorovedet voidaan jakaa moniin hyvin lähellä toisiaan oleviin ”spektraaliviivoihin”, myös siksi että Kuun rata, kuten myös Maan rata, on merkittävästi eksentrinen.

[4] Paul Jacques Léon Camille paroni Melchior (1925–2004) oli belgialainen geofyysikko ja kiinteän Maan vuoksen tutkija sekä Luxemburgissa sijaitsevan Walferdangen maanalaisen geodynamiikan laboratorion perustaja.

[5] Arthur Thomas Doodson FRS (1890–1968) oli brittiläinen merentutkija, vuorovesiteorian pioneeri ja vuoroveden laskentaan soveltuvien koneiden suunnittelija. Hän oli täysin kuuro.

[6] Sir George Howard Darwin FRS FRSE (1845–1912) oli englantilainen tähtitieteilijä ja matemaatikko. Hän oli kuuluisan *Lajien Synnyn* Charles Darwinin poika.



KUVA 14.2. Teoreettisen vuoroveden pääkomponentit. Nämä arvot on vielä kerrottava Doodsonin vakion D kanssa.

14.2 Vuorovesipotentiaalin aiheuttama deformaatio

Vuorovesipotentiaali eli teoreettinen vuorovesi, mistä puhuttiin jo aiemmin, ei ole sama asia kuin sen aiheuttama kiinteän Maan deformaatio. Tämä deformaatio riippuu Maan sisäisistä elastisuusominaisuuksista. Näitä ominaisuuksia luonnehditaan usein *elastisten Loven*[7] *lukujen* avulla [7]

[7] Augustus Edward Hough Love FRS (1863–1940) oli brittiläinen matemaatikko ja Maan elastisuuden tutkija.

(Love, 1909; Melchior, 1978).

Kirjoitetaan ensin vuorovesipotentiaali $V = V(\phi, \lambda, r)$ seuraavalla tavalla:

$$V(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n V_n(\phi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} V_n^{sis}(\phi, \lambda, r),$$

jossa indeksi n on pallofunktioiden asteluku. $V_n(\phi, \lambda)$ on potentiaalin V asteosuus ja

$$V_n^{sis}(\phi, \lambda, r) \stackrel{def}{=} \left(\frac{r}{R}\right)^n V_n(\phi, \lambda)$$

sen *sisäinen* avaruuspallofunktio asteluvulle n.

8 Kutsutaan kiinteän Maan ainealkion lineaarista[8] siirtymää säteittäiseen suuntaan u_r, pohjoissuuntaan u_ϕ ja itäsuuntaan u_λ. Seuraavat yhtälöt pätevät:

$$u_r(\phi, \lambda, r) = \frac{1}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} H_n(r)\, V_n^{sis}(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=2}^{\infty} H_n(r)\, \zeta_n(\phi, \lambda, r),$$

$$u_\phi(\phi, \lambda, r) = \frac{1}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} L_n(r) \frac{\partial V_n^{sis}(\phi, \lambda, r)}{\partial \phi} = r \sum_{n=2}^{\infty} L_n(r)\, \xi_n(\phi, \lambda, r),$$

$$u_\lambda(\phi, \lambda, r) = \frac{1}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} L_n(r) \frac{\partial V_n^{sis}(\phi, \lambda, r)}{\cos\phi\, \partial \lambda} = r \sum_{n=2}^{\infty} L_n(r)\, \eta_n(\phi, \lambda, r).$$

Tässä r on etäisyys Maan keskipisteestä. Oletetaan, että Loven luvut H_n ja L_n ovat vain r:n funktioita: Maan elastisuusominaisuudet ovat pallosymmetrisiä. Symbolit ζ_n, ξ_n ja η_n edustavat vuorovesipotentiaalin asteluvun n vaikutuksen tasapotentiaalipinnan tasoon ja luotiviivan suunnan komponentteihin.

Maan deformaatio aiheuttaa myös muutoksen, ”epäsuoran vaikutuksen” Kuun alkuperäisen vuorovesipotentiaalin V lisäksi, geopotentiaalissa. Kirjoitetaan

$$\delta V(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=2}^{\infty} K_n(r)\, V_n^{sis}(\phi, \lambda, r),$$

[8] Eli niiden yksikkö on metri eikä aste myös u_ϕ:n ja u_λ:n tapauksessa!

jossa käytetään jo kolmatta Loven lukujen lajia.

Maan pinnalla $r = R$ tehdään seuraava erikoistus:

$$h_n \stackrel{\text{def}}{=} H_n(R), \qquad \ell_n \stackrel{\text{def}}{=} L_n(R), \qquad k_n \stackrel{\text{def}}{=} K_n(R). \tag{14.4}$$

Kuun ja Auringon suuren etäisyyden takia ainoa merkittävä vuorovesipotentiaalin V osa on asteluvun $n = 2$ osuus, "rugbypallo-osuus" V_2^{sis}.

Loven luvut riippuvat vielä *taajuudesta* eli vuoroveden *jaksosta* P:

$$h_n = h_n(P), \qquad \ell_n = \ell_n(P), \qquad k_n = k_n(P).$$

Vuorovedet tarjoavat oivallisen Loven lukujen $h_2(P)$, $\ell_2(P)$ ja $k_2(P)$ empiirisen määrittämisen keinon, koska jaksollisina vaihteluina ne aiheuttavat maapallossa samojen jaksojen, mutta eri amplitudien ja vaihekulmien[9], deformaatioita. Näin saadaan määritetyksi ainakin ne Loven luvut, jotka vastaavat teoreettisessa vuorovedessä esiintyviä jaksoja.

[9]

Luvut h ja ℓ saadaan nykyisin muun muassa GNSS-paikannuksesta. GNSS-laskentaohjelmiin on ohjelmoitu valmiiksi reduktio tätä ilmiötä varten. Painovoimamittauksesta saadaan tietoa koskien erästä h:n ja k:n lineaariyhdistelmää, $\delta = 1 + h - \frac{3}{2}k$: Kuun vuorovesivoima muuttaa suoraan painovoimaa, pystyliike muuttaa painovoimaa sen gradientin kautta, ja myös Maan deformaatio eli massojen siirtyminen muuttaa painovoimaa suoraan.

Käyttökelpoinen tutkimusväline on *pitkä vesivaaka*, kuten Geodeettisen laitoksen laite, kallistusmittari joka on ollut pitkään käytössä Tytyrin kalkkikivikaivoksessa (Tytyri Elämyskaivos) Lohjalla (Kääriäinen ja Ruotsalainen, 1989). Laitteen moderni parannettu versio esitetään julkaisussa Ruotsalainen (2017). Sama koskee herkkiä klinometreja yleensä, kuten Verbaandertin ja Melchiorin heiluri. Klinometri mittaa maankuoren ja paikallisen luotiviivan välisiä suunnanmuutoksia. Tämä voi antaa tietoja h:n ja k:n toisesta lineaariyhdistelmästä, $\gamma = 1 - h + k$.

---

[9] Vaihekulmat voidaan esittää tekemällä Loven luvuista kompleksilukuja.

Luotiviivan *absoluuttisen* suunnan mittaus, esimerkiksi zeniittiputken avulla, voi antaa tietoja lineaariyhdistelmästä $\Lambda = 1 - \ell + k$, tosin vasta erilaisten reduktioiden (Maan asentoparametrit kuten napaliike ja pyörähdysnopeuden vaihtelut) jälkeen, Vondrák ym. (2010). Loven luku ℓ[10] vaikuttaa zeniittiputken vaakasiirtymän kautta paikkaan, jossa luotiviivan suunta on erilainen.

14.3 Vuoroveden pysyvä osa

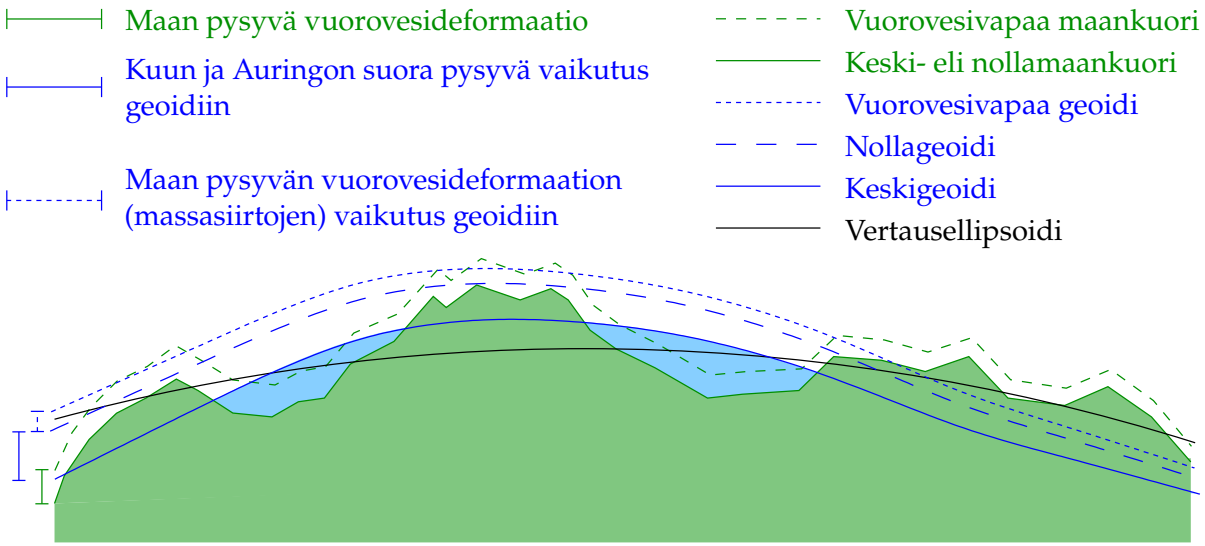
Kuten yllä näytettiin, teoreettinen vuorovesiyhtälö sisältää vakio-osan, joka ei vaihtele edes pitkäperiodisesti. Tietysti maapallo reagoi tähänkin vuorovesivoiman osaan, mutta sitä ei ole mahdollista mitata, koska muodonmuutos ei ole jaksollinen. Lisäksi kiinteän Maan elastisuusominaisuuksien mekaaninen teoria ja tietämyksemme Maan sisäisestä tilasta eivät kerrassaan riitä vasteen teoreettiseen laskentaan.

Tästä syystä on yleisesti hyväksytty käsitys, että vuoroveden pysyvän osan vaikutusta Maan deformaatiotilaan ei tule sisällyttää mihinkään vuorovesireduktioon (Ekman, 1992). Silti monesti, esimerkiksi GNSS-havaintojen käsittelyssä tai Maan painovoimakentän pallofunktiokehitelmien määrittelyssä, vuorovesireduktio sisältää tämänkin termin, jota on teoreettisesti ja käytännössä mahdoton tuntea. Katso Poutanen ym. (1996).

Yleisemmin geodeettisen suureen, esimerkiksi geoidin korkeuden, reduktion vuoroveden pysyvää osaa varten voi suorittaa kolmella eri tavalla:

- Ei suoriteta mitään vuoroveden pysyvän osuuden reduktiota. Näin saatua suuretta kutsutaan nimellä *"mean geoid"* eli *"keskigeoidi"*. Saatu pinta on hydrodynamiikan kannalta tasapainopinta ja suoraan käyttökelpoinen merentutkimuksessa.

[10] Myös Shidan luku. Toshi Shida (1876–1936) oli japanilainen kiinteän Maan vuoksen tutkija.



KUVA 14.3. Käsitteellinen kuva pysyvän vuoroveden eri osista.

- Kuun ja Auringon vuoroveden kentän suora vaikutus poistetaan suureesta kokonaan, mutta sen aiheuttaman Maan deformaation vaikutus jätetään korjaamatta. Näin saatua suuretta kutsutaan nimellä *"zero geoid"* eli "nollageoidi".
- Taivaankappaleen oman voimakentän vaikutus ja sen aiheuttaman deformaation vaikutus lasketaan tietyn deformaatiomallin (Loven lukujen) mukaan ja poistetaan. Näin saatua tulosta kutsutaan nimellä *"tide-free geoid"*, vaikkapa *"vuorovesivapaa geoidi"*. Sen ongelmana on käytetyn elastisuusmallin empiirinen määrittämättömyys.

Katso kuva 14.3. Kannattaa olla kriittinen ja analysoida tarkasti, miten aineistojen reduktio on suoritettu!

14.4 Korkeusjärjestelmien väliset vuorovesikorjaukset

Yhtälöstä 14.2 nähdään, että kun $\epsilon = 23°5$, vuorovesipotentiaalin pysyvä osa on

$$V_{pys} = \frac{GMR^2}{4d^3}\left(3\sin^2\phi - 1\right)\left(\tfrac{3}{2}\sin^2\epsilon - 1\right) \approx$$
$$\approx -0{,}7615 \cdot \frac{3GMR^2}{4d^3}\left(\sin^2\phi - \tfrac{1}{3}\right).$$

Kun Auringon ja Kuun yhdistetty Doodsonin vakio 14.3 on

$$D = \frac{3GM_\odot R^2}{4d_\odot^3} + \frac{3GM_\leftmoon R^2}{4d_\leftmoon^3} =$$
$$= (12{,}3\,\text{cm} + 26{,}8\,\text{cm}) \times \gamma = 39{,}1\,\text{cm} \times \gamma$$

saadaan

$$V_{pys} = 29{,}77\,\text{cm} \times \left(\tfrac{1}{3} - \sin^2\phi\right) \times \gamma.$$

Brunsin yhtälön 5.2 avulla voimme ilmaista tämän pysyväksi vuorovesivaikutukseksi geoidiin:

$$N_{pys} = 29{,}77\,\text{cm} \times \left(\tfrac{1}{3} - \sin^2\phi\right).$$

Tästä $N_{pys}(0°) = 9{,}92\,\text{cm}$ päiväntasaajalla ja $N_{pys}(\pm 90°) = -19{,}85\,\text{cm}$ navoilla.

Tämä ulkoisen Auringon ja Kuun potentiaalin pysyvän osan vaikutus geoidiin on myös erotus yllä määritettyjen keskigeoidin ja nollageoidin välillä:

$$\Delta^{keski}_{nolla}N \overset{def}{=} N_{keski} - N_{nolla} = 29{,}77\,\text{cm} \times \left(\tfrac{1}{3} - \sin^2\phi\right).$$

Korkeuksille H merenpinnasta pätee $H = h - N$, jolloin saadaan

$$\Delta^{keski}_{nolla}H \overset{def}{=} H_{keski} - H_{nolla} = -29{,}77\,\text{cm} \times \left(\tfrac{1}{3} - \sin^2\phi\right),$$

ja kahdelle eri leveysasteelle ϕ_1 ja ϕ_2 saadaan vaikutukseksi korkeuseroon

$$\Delta^{keski}_{nolla}H(\phi_2) - \Delta^{keski}_{nolla}H(\phi_1) = 29{,}77\,\text{cm} \times \left(\sin^2\phi_2 - \sin^2\phi_1\right).$$

Tämä arvo on *lisättävä*, kun mennään nollageoidin korkeusjärjestelmästä keskigeoidin järjestelmään, ja *vähennettävä*, kun mennään keskigeoidin järjestelmästä nollageoidin korkeusjärjestelmään.

Kun seuraavaksi katsotaan *vuorovesivapaata* geoidia ja maankuorta, tarvitaan pysyvän vuorovesideformaation Loven lukuja h ja k, jotka ilmaisevat deformaation ja sen potentiaalin murto-osina alkuperäisestä ulkoisesta vuorovesipotentiaalista[11]. Kuten olemme nähneet, näitä lukuja ei ole mahdollista määrittää empiirisesti. Usein käytetyt arvot ovat $h \approx 0{,}6$, $k \approx 0{,}3$. Tämän kanssa yllä olevat yhtälöt pätevät kertoimella $29{,}77\,\mathrm{cm}$ kerrottuna lineaariyhdistelmällä $\gamma = 1 - h + k \approx 0{,}7$. Tulos on

[11]

$$\Delta^{\text{keski}}_{\text{vvv}} H \overset{\text{def}}{=} H_{\text{keski}} - H_{\text{vvv}} = -20{,}84\,\mathrm{cm} \times \left(\tfrac{1}{3} - \sin^2\phi\right),$$

$$\Delta^{\text{keski}}_{\text{vvv}} H(\phi_2) - \Delta^{\text{keski}}_{\text{vvv}} H(\phi_1) = 20{,}84\,\mathrm{cm} \times \left(\sin^2\phi_2 - \sin^2\phi_1\right).$$

Minkä tahansa muun korjausyhtälön voi johtaa näistä, esimerkiksi

$$\Delta^{\text{nolla}}_{\text{vvv}} H(\phi_2) - \Delta^{\text{nolla}}_{\text{vvv}} H(\phi_1) = -8{,}93\,\mathrm{cm} \times \left(\sin^2\phi_2 - \sin^2\phi_1\right).$$

14.5 Meren ja ilmakehän kuormitus maankuoreen

Vuorovesivoiman aiheuttaman deformaation lisäksi maankuori deformoituu meren ja ilmakehän kuormituksesta. Etenkin rannikon lähellä meren vuorovesiliike aiheuttaa moniperiodisen kuormituksen, joka liikuttaa maankuorta ylös ja alas jopa senttimetrien verran.

Tämä ilmiö voidaan mallintaa laskennallisesti, jos kiinteän Maan elastiset ominaisuudet, meren vuorovesiliike ja rantaviivan tarkka muoto ovat tiedossa. Eräs tunnettu ohjelmisto tähän tarkoitukseen on saksalaisen Hans-Georg Wenzelin[12] laatima Eterna, jota on käytetty myös Suomessa. [12]

Toisaalta, kun on olemassa sopivia työkaluja, vuorovesikuormitus antaa oivan mahdollisuuden *tutkia* myös maankuoren hyvinkin paikallisia elastisia ominaisuuksia.

---

[11] Molemmat tarvitaan: vuorovesideformaatio siirtää sekä maankuorta että geoidia.

[12] Hans-Georg Wenzel (1945–1999) oli saksalainen fysikaalinen geodeetti ja geofyysikko.

Deformaation mittaamiseksi käytetään yleensä rekisteröivää gravimetria. Maankuorihan liikkuu elastisesti ylös ja alas, mikä muuttaa painovoimaa likimäärin ilmagradientin arvon $-0{,}3\,{}^{\mathrm{mGal}}/_{\mathrm{m}}$ suhteessa. Torge (1992) kuvaa menetelmää osiossa 4.2.

GNSS:n käyttö meren vuorovesikuormituksen mittaamiseksi ei ole vielä yleistynyt.

Kuten meri, aiheuttaa myös ilmakehä ilmanpaineen vaihtelujen kautta maankuoren vaihtelevia deformaatioita. Ilmiö on hyvin pieni, korkeintaan pari senttimetriä. Painovoimamittaus ei ole kovin hyvä keino tämän ilmiön tutkimiseksi, koska paikalliseen painovoimaan vaikuttaa moni muukin paikallinen ilmiö, joita ei tunneta kovin tarkasti. Mittaus GNSS:n avulla on lupaavaa, mutta myös vaikeaa.

Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Kuvaile *sanoin* Laplacen jakomenetelmän tuottamaa teoreettisen vuoroveden kolmea osaa.
2) Miten teoreettisen vuoroveden hitaasti vaihteleva osa voidaan edelleen hajottaa kahteen osaan? Esitä *sanoin* osat.
3) Mitkä ovat taivaankappaleen, esimerkiksi Kuun, deklinaatio ja tuntikulma?
4) Mikä on Doodsonin vakio?
5) Mitä Loven luvut ilmaisevat?
6) Miksi vuoroveden pysyvän osuuden aiheuttamaa deformaatiota ei voida määrittää empiirisesti?
7) Esitä kolme eri tapaa ottaa huomioon vuoroveden pysyvä osa, kun määritetään geoidia.

Harjoitus 14−1: Pysyvä vuorovesi

Vuoroveden pysyvän osan yhtälö on

$$V_{1a} = \frac{GMR^2}{4d^3}\left(3\sin^2\phi - 1\right)\left(\tfrac{3}{2}\sin^2\epsilon - 1\right),$$

jossa ϕ on leveysaste ja ϵ maapallon pyörähdysakselin *kaltevuus*, tällä hetkellä noin $23^\circ{,}5$.

1) Millä leveysasteen ϕ arvolla vuoroveden pysyvä osa häviää? Mitä on tulkintasi?
2) Millä kaltevuuden ϵ arvolla vuoroveden pysyvä osa häviää? Mitä on tulkintasi?

Maan painovoimakentän tutkimus

15

15.1 Kansainvälinen tutkimus

Kansainvälisen geodeettisen assosiaation (IAG, *International Association of Geodesy*) puitteissa Maan painovoimakentän tutkimus on tällä hetkellä International Gravity Field Servicen (IGFS) vastuulla. IGFS perustettiin vuonna 2003 IUGG:n yleiskokouksessa Sapporossa Japanissa, ja se toimii IAG:n uuden Komission 2 alaisuudessa, jonka aiheena on painovoimakenttä. Yhdysvaltalainen National Geospatial-Intelligence Agency (NGA) toimii sen teknisenä keskuksena.

Tärkeä ja maineikas IAG:n palvelu on Kansainvälinen gravimetrinen toimisto, *Bureau Gravimétrique International* (BGI), joka sijaitsee Toulousessa Ranskassa (http://bgi.obs-mip.fr/). Toimisto toimii kansainvälisenä välittäjänä, jolle maat voivat lähettää painovoima-aineistonsa. Jos tutkija tarvitsee toisen maan painovoima-aineistoa esimerkiksi geoidimääritystä varten, hän voi pyytää sitä BGI:stä, joka luovuttaa sen alkuperämaan luvalla, mikäli tutkijan oma maa on vastaavalla tavalla antanut omaa painovoima-aineistoaan BGI:n käyttöön.

Ranskan valtio on sijoittanut tähän elintärkeään kansainväliseen toimintaan merkittävästi rahaa.

Toinen tärkeä IAG:n palvelu alalla on International Service for the Geoid (ISG). Se on itse asiassa toiminut jo vuodesta 1992 International Geoid Servicen (IGeS) nimellä International Geoid Commissionin

(IGeC) toimeenpanevana elimenä. ISG:n päämaja on Milanossa Italiassa (http://www.isgeoid.polimi.it/). Palvelun tehtävänä on tukea geoidimääritystä eri maissa. Olemassa olevat geoidiratkaisut kerätään yhteiseen tietokantaan, ja lisäksi järjestetään kansainvälisiä tutkijakouluja geoiditietoisuuden ja geoidilaskennan kehittämiseksi, etenkin kehitysmaissa. Italian valtio on rahoittanut toimintaa merkittävästi.

Molemmat palvelut, BGI ja ISG, ovat International Gravity Field Servicen (IGFS) alaisia: kaksi IAG:n monista virallisista palveluista. Muut IGFS:n palvelut ovat International Center for Earth Tides (ICET), International Center for Global Earth Models (ICGEM) ja International Digital Elevation Model Service (IDEMS).

15.2 Eurooppalainen tutkimus

Euroopassa toimii European Geosciences Union (EGU), joka koordinoi painovoimakenttään ja geoidilaskentaan liittyvää julkaisu- ja kokoustoimintaa. EGU järjestää vuosittain symposioita, joissa on aina myös istuntoja painovoimakenttään ja geoidiin liittyvistä aiheista. Kokouksiin osallistuu myös amerikkalaisia tutkijoita. Vastaavasti American Geophysical Unionin (AGU) syys- ja kevätkokoukset[1] ovat myös eurooppalaisten tutkijoiden suosiossa.

Yksi mainitsemisen arvoinen tutkimuslaitos on Hannoverissa Saksassa sijaitseva Leibnizin yliopiston Geodesian laitos (*Institut für Erdmessung*). Se on toiminut vuodesta 1990 lähtien Kansainvälisen geoidikomission (IGeC) Euroopan alakommission laskentakeskuksena ja tuottanut laadukkaita geoidimalleja Euroopasta (Denker, 1998; European geoid calculations). Työ jatkuu vuodesta 2011 IAG:n alakomissio 2.4a *Gravity and Geoid in Europen* puitteissa.

[1] Syyskokoukset pidetään aina San Franciscossa, kevätkokoukset jossain muualla. AGU, vaikkakin amerikkalainen, on hyvin kosmopoliittinen vaikuttaja.

15.3 Pohjoismainen tutkimus

Pohjoismaissa toimintaa koordinoi *Nordiska Kommissionen för Geodesi* (NKG) ja sen geoidin ja korkeusjärjestelmien työryhmä. Toimintaan kuuluu geoidimääritys, uusien, tarkempien geoidimallien laskennan edellytyksien selvittäminen, uudet vaaitusteknologiat ja postglasiaalisen maannousun tutkimus.

Ryhmä on laskenut Kööpenhaminan laskentakeskuksessaan jo pitkään laadukkaita pohjoismaisia geoidimalleja. Toiseksi viimeinen malli on NKG2004 (Forsberg ja Kaminskis, 1996; Forsberg ja Strykowski, 2010). Uusin malli NKG2015 on eri maiden, muun muassa Ruotsin ja Viron, laskentakeskusten työn tulos. Se julkaistiin lokakuussa 2016.

15.4 Suomalainen tutkimus

Suomessa Maan painovoimakentän tutkimus on ollut pääosin vuonna 1918 perustetun Geodeettisen laitoksen käsissä. Laitos on ollut vastuussa vaaituksen ja painovoiman valtakunnallisista perusmittauksista ja niiden kansainvälisistä kytkennöistä. Vuonna 2001 Geodeettisen laitoksen painovoimaosasto ja geodesian osasto yhdistettiin uudeksi geodesian ja geodynamiikan osastoksi, johon myös painovoimatutkimus kuuluu.

Tutkittujen asioiden joukkoon kuuluvat kiinteän Maan vuorovesi ja ominaisvärähtelyt, postglasiaalinen maannousu ja korkeusjärjestelmät.

Geoidimalleja on laskettu laitoksessa alusta lähtien, aina Hirvosen globaalista mallista (Hirvonen, 1934) toistaiseksi uusimpaan Suomen FIN2005N00-malliin (Bilker-Koivula, 2010). Nämä geoidimallit perustuvat yhteispohjoismaiseen gravimetriseen geoidiin NKG2004, ja ne sovitettiin Suomen alueen GNSS-vaaituspisteisiin korkeuksien muunnospinnaksi.

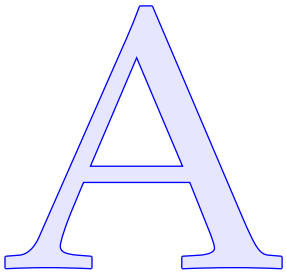
Vuonna 2015 Geodeettinen laitos yhdistettiin Maanmittauslaitokseen sen paikkatieto- ja tutkimuskeskuksena. Englanninkielinen lyhenne on edelleen FGI, Finnish Geospatial Research Institute (https://www.maanmittauslaitos.fi/tutkimus).

Myös Teknillinen korkeakoulu (nykyisin osa Aalto-yliopistoa) on ollut aktiivinen Maan painovoimakentän tutkimuksessa. Vuosina 1928–1949 TKK:n professorina toiminut V. A. Heiskanen toimi myös Isostaattisen laitoksen (*International Isostatic Institute*) johtajana 1936–1949. Lisäksi hän työskenteli Ohion valtionyliopistossa Yhdysvalloissa monien muiden, myös suomalaisten ja suomalaissyntyisten, geodeettien kanssa ensimmäisen suuren maailmanlaajuisen geoidimallin, ”Columbuksen geoidin” laskentatyön parissa (Kakkuri, 2008).

15.5 Oppikirjat

Maan painovoimakentän tutkimuksesta on olemassa monia hyviä oppikirjoja. Heiskasen ja Moritzin suurilta osin jo vanhentuneen klassikon (1967) lisäksi voidaan mainita Wolfgang Torgen kirja (1989). Vaikea mutta hyvä on myös Moritz (1980). Samalla tavalla vaativa on Molodenski ym. (1962). Lukemisen arvoisia ovat myös fysikaalisen geodesian kannalta Vaníček ja Krakiwsky (1987). Alan uudempi kirja on Hofmann-Wellenhof ja Moritz (2006).

Kenttäteoria ja vektorianalyysi lyhyesti



A.1 Vektorilaskenta

Fysiikassa monet suureet ovat *vektorisuureita*, esimerkiksi voima, nopeus ja sähkömagneettinen kenttä. Vektorin määrittelevä ominaisuus on, että koordinaattimuunnoksissa se käyttäytyy identtisesti kahden naapuripisteen välisen sijaintieron kanssa. Olkoon sijaintiero $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, jossa $\mathbf{r}_1$ ja $\mathbf{r}_2$ ovat pisteiden 1 ja 2 paikkavektorit. Koordinaattimuunnoksessa vektori ei objektina muutu, mutta sen *komponenttien* lukuarvot, osio A.2.2, ovat erilaiset eri koordinaatistoissa. Muunnoksen vaikutus komponentteihin on sama, kuin jos vektori olisi kahden pisteen sijaintiero.

Tämä on perimmäinen syy, miksi on mahdollista *piirtää* vektorit *nuoleina*.

Notaatiosta Painetussa tekstissä vektorit kirjoitetaan usein lihavoituna: $\boldsymbol{v}$. Käsin kirjoitetussa tekstissä voidaan käyttää nuolta merkin yläpuolella: $\vec{v}$.

A.1.1 Skalaaritulo

Kahden vektorin välillä voidaan määritellä *skalaaritulo* eli pistetulo, joka on itse skalaariarvo. Fysiikassa skalaari on yksittäinen numeroarvo, vaikkapa paine tai lämpötila. Jos kyse on kahden vektorikentän

skalaaritulosta, puhutaan *skalaarikentästä*: jokainen skalaariarvo on sidottu paikkaan, mutta vaikka koordinaattimuunnos muuttaisi paikan koordinaattiarvot, skalaarin arvo ei muutu: se on *invariantti*.

Esimerkki skalaaritulosta: *työ* ΔE on

$$\Delta E = \langle \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \rangle,$$

voiman $\mathbf{F}$ ja matkan eli polun $\Delta \mathbf{r}$ skalaaritulo. Usein jätetään hakasulut $\langle \cdot \rangle$ pois.

Myöhemmin nähdään, että jos pisteet 1 ja 2, $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, ovat hyvin lähellä toisiaan, voidaan kirjoittaa

$$dE = \langle \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rangle,$$

jossa $d\mathbf{r}$ ja dE ovat infinitesimaaleja polku- ja energia-alkioita. Jos pisteiden A ja B välillä on kaareva polku, tästä voidaan saada integraaliyhtälö, *työintegraali*

$$\Delta E_{AB} = \int_A^B dE = \int_A^B \langle \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rangle.$$

A.1.2 Skalaaritulo muodollisesti

Olkoon

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle$$

vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ skalaaritulo. Pätee ($\mu \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \langle \mu\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} \cdot \mu\mathbf{b} \rangle = \mu \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle, &\qquad \text{(homogeenisuus)} \\ \langle \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \rangle = \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \rangle, &\qquad \text{(osittelulaki)} \\ \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \rangle, &\qquad \text{(vaihdannnaisuus)} \end{aligned}$$

ja kutsutaan

$$\|\mathbf{a}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \rangle}$$

vektorin $\mathbf{a}$ *normiksi* eli pituudeksi.

Pätee myös

$$s = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \alpha,$$

jossa α on vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ suuntien välinen kulma.

A.1.3 *Ulkoinen tulo eli vektoritulo*

Kahden vektorin ulkoinen tulo eli ristitulo on itsekin vektori nimeltä *vektoritulo*, ainakin kulmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Esimerkiksi *pyörähdysmomentti* $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = \langle \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rangle,$$

jossa $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ on liikemomentti, $\mathbf{r}$ kappaleen paikkavektori tietyn origon suhteen, m kappaleen massa ja

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{A.1}$$

on paikan aikaderivaatta eli *nopeus*. Kirjoitetaan

$$\mathbf{L} = m\langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rangle. \tag{A.2}$$

A.1.4 *Vektoritulo muodollisesti*

Olkoon

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle$$

kahden vektorin $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vektoritulo. Silloin ($\mu \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\langle \mu\mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} \times \mu\mathbf{b} \rangle = \mu\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle, &\qquad \text{(homogeenisuus)} \\
\langle \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \rangle = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a} \times \mathbf{c} \rangle, &\qquad \text{(osittelulaki)} \\
\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{b} \times \mathbf{a} \rangle, &\qquad \text{(antivaihdannaisuus)}
\end{aligned}$$

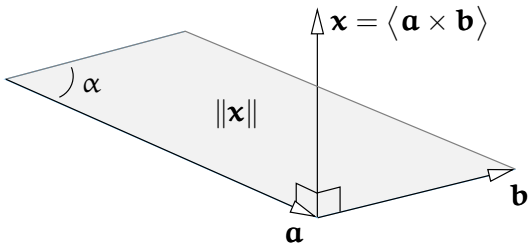
ja siis $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle = 0$.

Tulosvektori $\mathbf{x}$ on aina kohtisuorassa vektoreihin $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ nähden. Vektorin $\mathbf{x}$ pituus vastaa vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ virittämän suunnikkaan pinta-alaa:

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin \alpha, \tag{A.3}$$

jossa α on jälleen vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ suuntien välinen kulma. Jos kulma on nolla, myös vektoritulo on nolla, koska silloin $\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$ sopivalle arvolle μ.

Ellei kulma ole nolla, tarvitaan lisäksi *korkkiruuvisääntö*, joka sanoo, että jos korkkiruuvi käännetään vektorista $\mathbf{a}$ vektoriin $\mathbf{b}$, se etenee tulovektorin $\mathbf{x} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle$ suuntaan.



KUVA A.1. Ulkoinen tulo eli vektoritulo.

A.1.5 *Keplerin toinen laki*

Olkoon $\mathbf{r}$ kappaleen, esimerkiksi planeetan, paikkavektori liikekeskuksen, kuten Auringon, suhteen ja $\dot{\mathbf{r}}$ (yhtälö A.1) sen nopeusvektori. Silloin vektoritulo

$$\langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rangle = \left\langle \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle \tag{A.4}$$

on juuri kaksi kertaa aikayksikössä peitetyn kolmion eli ”alueen” pinta-ala.

Lasketaan tämän tulon, lausekkeen A.4, aikaderivaatta:

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle + \left\langle \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right\rangle = \langle \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} \rangle + \langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \rangle. \tag{A.5}$$

Ensimmäinen termi häviää, koska mielivaltaiselle vektorille $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{a} \rangle = 0$. Toisessa termissä voimme hyödyntää tietoamme, että Auringon vetovoima $\mathbf{F}$, joka aiheuttaa planeetan rataliikkeen, ja vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

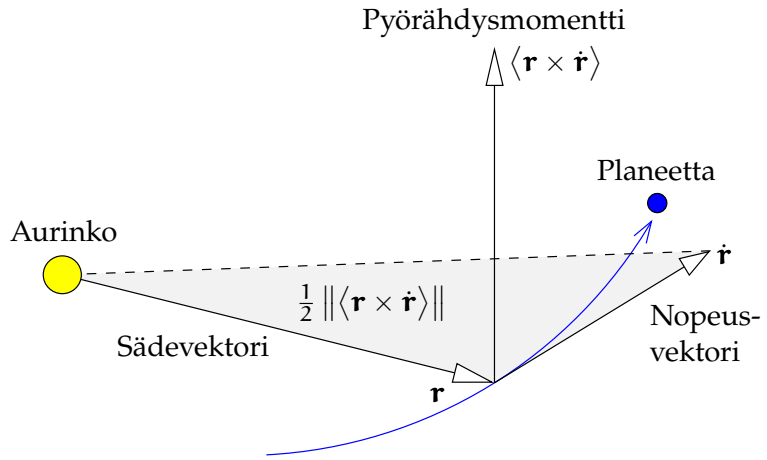
ovat *keskeisiä*:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}.$$

G on universaalinen gravitaatiovakio, M on Auringon massa ja m on planeetan massa.

Sijoitetaan tämä yhtälöön A.5:

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0 - \frac{GM}{\|\mathbf{r}\|^3}\langle \mathbf{r} \times \mathbf{r} \rangle = 0.$$



KUVA A.2. Keplerin toinen laki. Samassa ajassa planeetan sädevektori ”pyyhkii” samankokoisen alueen yli. Kyseessä on pyörähdysmomentin säilyminen.

Siis vasemmalla puolella oleva suure, pyörähdysmomentti $\mathbf{L}$ per massayksikkö m, yhtälö A.2, *säilyy*:

$$\langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rangle = \frac{\mathbf{L}}{m}.$$

Kuten esimerkiksi energian, sähkövarauksen ja monen muun suureen kokonaismäärä, suljetun järjestelmän pyörähdysmomentin kokonaismäärä on vakio.

A.2 Skalaari- ja vektorikenttiä

A.2.1 Määritelmät

Euklidisessä avaruudessa voidaan määrittää funktioita eli *kenttiä*.

Skalaarikenttä on skalaariarvoinen funktio, joka on määritelty koko avaruudessa tai sen osa-alueella. Esimerkki on lämpötila $T(\mathbf{r})$. Siis jokaiselle paikkavektorin arvolle $\mathbf{r}$ kuuluu lämpötila-arvo $T(\mathbf{r})$.

Vektorikenttä on vektoriarvoinen funktio, joka on määritelty avaruudessa. Esimerkki on sähköstaattinen kenttä $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

A.2.2 Avaruuden kanta

Voimme valita avaruudessa kolmen vektorin *kannan*, joka *virittää* kyseessä olevan avaruuden. Yleensä valitaan kolme kantavektoria $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$, jotka ovat keskenään kohtisuoria ja joiden normi eli pituus on 1, jolloin kyseessä on *ortonormaali kanta*. Kahden vektorin ortogonaalisuus merkitsee, että niiden skalaaritulo häviää; siis

$$\mathbf{i} \perp \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \perp \mathbf{k}$$

merkitsee, että

$$\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \rangle = 0. \tag{A.6}$$

Ortonormaalius merkitsee lisäksi, että

$$\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\| = 1. \tag{A.7}$$

Nyt voimme kehittää avaruuden vektoreita *komponentteihinsa*:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

ja myös skalaari- ja vektoritulot voidaan nyt laskea komponenttien avulla:

$$s = \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \rangle = \\ = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i,$$

käyttämällä yllä esitettyjä kantavektorien identiteettejä A.6 ja A.7.

Vektoritulon tapauksessa laskenta on monimutkaisempaa. Ortogonaalisille vektoreille kulma α yhtälössä A.3 on $90°$, siis

$$\|\langle \mathbf{i} \times \mathbf{j} \rangle\| = \|\langle \mathbf{i} \times \mathbf{k} \rangle\| = \|\langle \mathbf{j} \times \mathbf{k} \rangle\| = 1.$$

Korkkiruuvisääntö sanoo nyt, että

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \langle \mathbf{i} \times \mathbf{j} \rangle = -\langle \mathbf{j} \times \mathbf{i} \rangle, \\ \mathbf{i} &= \langle \mathbf{j} \times \mathbf{k} \rangle = -\langle \mathbf{k} \times \mathbf{j} \rangle, \\ \mathbf{j} &= \langle \mathbf{k} \times \mathbf{i} \rangle = -\langle \mathbf{i} \times \mathbf{k} \rangle. \end{aligned}$$

Saamme lopputulokseksi determinantin

$$\mathbf{c} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} =$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k}.$$

Siis

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Nämä lausekkeetkin ovat determinantteja:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

A.2.3 Nabla-operaattori

Paikkavektori $\mathbf{r}$ voidaan kirjoittaa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$-kannalle seuraavasti:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

joka määrittelee avaruuden (x, y, z)-koordinaatit.

Määritellään vektorioperaattori nimeltä *nabla* (∇) seuraavasti:

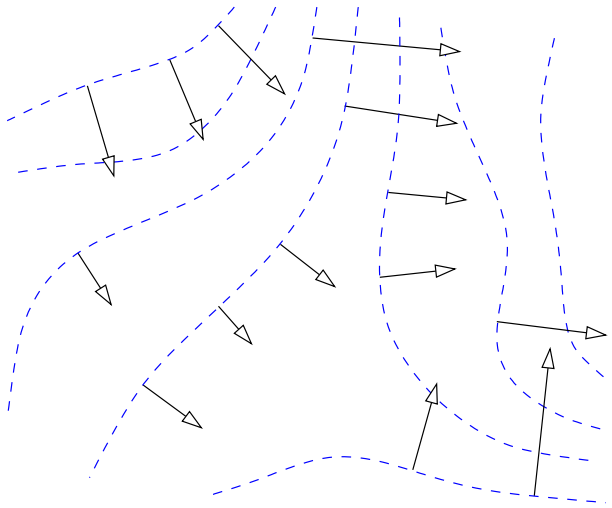
$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Operaattori on sellaisenaan merkityksetön. Se saa merkityksen vasta, kun *operoi* johonkin, jolloin voidaan laskea oikean puolen kolme osittaisderivaattaa.

A.2.4 Gradientti

Olkoon $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ skalaarikenttä avaruudessa. Nabla-operaattori antaa sen *gradientin* $\mathbf{g}$, joka on saman avaruuden vektorikenttä:

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad} V = \nabla V = \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}.$$



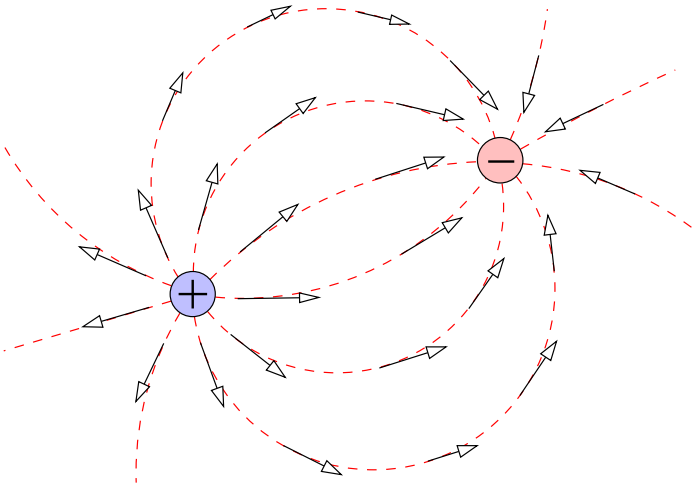
KUVA A.3. Gradientti. Skalaarikentän tasokäyrät sinisinä katkoviivoina.

Siis kenttä $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(x, y, z)$ on kentän V gradienttikenttä. Fysiikassa $\mathbf{g}$ on usein voimakenttä ja V sen potentiaali.

Tulkinta Gradientti kuvaa skalaarikentän *kaltevuutta*. Vektorin suunta on se suunta, johon skalaarikentän arvo muuttuu nopeimmin, ja sen pituus kuvaa muutoksen nopeutta paikan mukaan. Kuvittele kukkulamaisema: maan korkeus merenpinnasta on skalaarikenttä ja sen gradientti osoittaa kaikkialla *ylämäkeen*, pois laaksoista huippuja kohti. $\mathbf{g}$-nuolet ovat sitä pidempiä, mitä jyrkempi on maanpinnan kaltevuus.

Gradientti-operaattori, kuten myös divergenssi ja roottori, on *lineaarinen*:

$$\operatorname{grad}(U + V) = \operatorname{grad} U + \operatorname{grad} V.$$



KUVA A.4. Divergenssi. Positiiviset (”lähteet”) ja negatiiviset divergenssit (”nielut”). Kenttäviivat punaisina katkoviivoina.

A.2.5 *Divergenssi*

Olkoon annettuna vektorikenttä $\mathbf{a}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Muodostetaan tämän ja nabla-operaattorin *skalaaritulo* s:

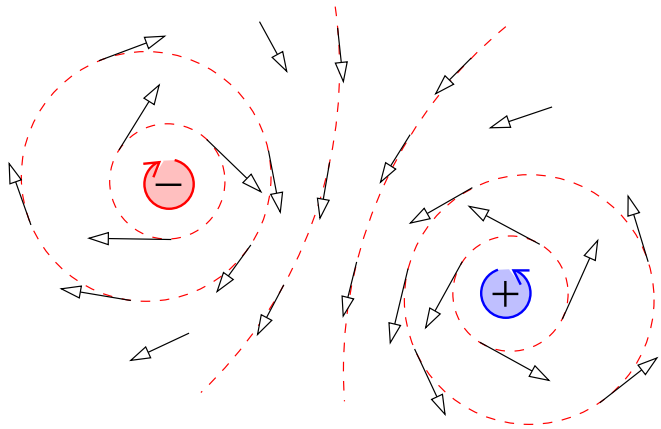
$$s = \operatorname{div} \mathbf{a} = \langle \nabla \cdot \mathbf{a} \rangle = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

Tulkinta Divergenssi kuvaa vektorikentän *lähteitä*, sekä positiivisia että negatiivisia. Ajattele veden virtausnopeus vektorikenttänä. ”Lähteiden” kohdalla divergenssi on positiivinen, ”nielujen” kohdalla negatiivinen. Kaikkialla muualla divergenssi on nolla, koska nestettä ei ilmaannu tyhjästä eikä sitä häviä tyhjään.

A.2.6 *Roottori (engl.* curl*)*

Olkoon taas annettuna vektorikenttä $\mathbf{a}(x, y, z)$. Muodostetaan tämän ja nabla-operaattorin *vektoritulo* $\mathbf{c}$, joka on itse vektorikenttä:

$$\mathbf{c} = \operatorname{rot} \mathbf{a} = \langle \nabla \times \mathbf{a} \rangle = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} =$$



KUVA A.5. Roottori. Positiiviset (vastapäivään) ja negatiiviset (myötäpäivään) pyörteet.

$$= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix} \mathbf{j} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \mathbf{k} =$$
$$= \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

käyttäen determinanttien laskentasääntöjä.

Tulkinta Roottori kuvaa vektorikentässä olevaa *pyörteisyyttä*.

Kuvittele sääkartta, jossa on kuvattu matala- ja korkeapaineita. Vektorikenttämme on tuulikenttä. Tuuli kiertää pohjoisella pallonpuoliskolla myötäpäivään korkeapaineiden ympäri ja vastapäivään matalapaineiden ympäri. Voidaan sanoa, että tuulikentän roottori on korkeapaineiden kohdalla positiivinen ja matalapaineiden kohdalla negatiivinen.

(Tämä on heikko vertauskuva, koska se on kaksiulotteinen. $\mathbb{R}^2$:ssä roottori on skalaari eikä vektori. Samalla tavalla kierron luonnehtimiseksi tarvitaan vain yksi kulma, kun $\mathbb{R}^3$:ssä tarvitaan kolme Eulerin kulmaa.)

A.2.7 *Konservatiiviset kentät*

Mitä tapahtuu, jos vektorikenttä $\mathbf{a}$ on skalaarikentän V gradientti ja yritämme laskea sen roottorin $\mathbf{b}$, joka on sekin vektori? Kirjoita

$$\mathbf{b} = \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} V = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} V$$

ja olkoon

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

Silloin determinantin kehittäminen tuottaa

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}V - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}V = 0, \\ b_2 &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}V - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}V = 0, \\ b_3 &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}V - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}V = 0, \end{aligned}$$

siis

$$\mathbf{b} = \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0\,!$$

Toisin sanoen, jos vektorikenttä $\mathbf{a}(x, y, z)$ on skalaarikentän $V(x, y, z)$ gradientti, *sen roottori häviää*:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} V = \langle \nabla \times \nabla V \rangle = \langle \nabla \times \nabla \rangle V = 0,$$

siis ∇:n vektoritulo itsensä kanssa häviää aivan kuin se olisi tavallinen vektori!

Määritelmä Vektorikenttää $\mathbf{a}$, jonka roottori häviää, kutsutaan *konservatiiviseksi*, ja vastaavaa skalaarikenttää V, $\mathbf{a} = \operatorname{grad} V$, kutsutaan kentän $\mathbf{a}$ *potentiaaliksi*.

Huomataan heti, että jos

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \operatorname{grad} V(x, y, z),$$

silloin myös

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \operatorname{grad}\left(V(x,y,z) + V_0\right),$$

jossa V_0 on mielivaltainen vakio, koska

$$\operatorname{grad} V_0 = \mathbf{i}\frac{\partial V_0}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V_0}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V_0}{\partial z} = 0.$$

Siis potentiaalia *ei ole määritelty yksiselitteisesti*.

A.2.8 Laplacen operaattori

Olkoon konservatiivinen kenttä $\mathbf{a}$, siis rot $\mathbf{a} = 0$. Silloin voimme kirjoittaa

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} V = \nabla V,$$

jossa V on potentiaali.

Ilmaistaan kentän $\mathbf{a}$ *divergenssi* nyt potentiaaliin:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \langle \nabla \cdot \mathbf{a} \rangle = \langle \nabla \cdot \nabla V \rangle = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}V + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}V + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}V = \\ = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V \overset{\text{def}}{=} \Delta V,$$

jossa olemme ottaneet käyttöön *uuden differentiaalioperaattorin*, ranskalaisen Pierre-Simon Laplacen keksimän Delta-operaattorin,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \langle \nabla \cdot \nabla \rangle = \nabla^2.$$

Kun operaattorin kohteena on ”lähdevapaan” kentän potentiaali, kuten gravitaatiopotentiaali tyhjiössä tai sähköstaattinen potentiaali avaruuden alueella, jossa ei ole sähköisiä varauksia, tämän Delta- eli Laplacen operaattorin tulos häviää.

A.3 Integraalit

A.3.1 Käyräintegraali

Aiemmin nähtiin, että työ ΔE voidaan kirjoittaa voiman $\mathbf{F}$ ja matkan $\Delta\mathbf{r}$ skalaaritulona:

$$\Delta E = \langle \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} \rangle.$$

Tämän differentiaalimuoto on

$$dE = \langle \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rangle,$$

josta saa integraalimuodon eli *työintegraalin*

$$\Delta E_{AB} = \int_A^B \langle \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rangle.$$

Tässä lasketaan kappaleen siirtämisen pisteestä A pisteeseen B tuottama työmäärä integroimalla $\langle \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rangle$ polkua AB pitkin.

Jos polkua parametrisoidaan kaaren pituuden s mukaan ja polun tangenttivektoria kutsutaan

$$\mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$

saa myös kirjoittaa

$$\Delta E_{AB} = \int_A^B \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \rangle \, ds,$$

joka on integraalin parametrisoitu versio.

A.3.2 Pintaintegraali

Olkoon taas annettuna joku vektorikenttä $\mathbf{a}$ ja avaruudessa oleva pinta S. Usein pyritään integroimaan pinnan yli vektorikentän *normaalikomponentti* eli vektorin $\mathbf{a}$ projektio pinnan S normaalivektoriin, vektoriin, joka on pinta-alkiossa dS kohtisuorassa pintaan nähden.

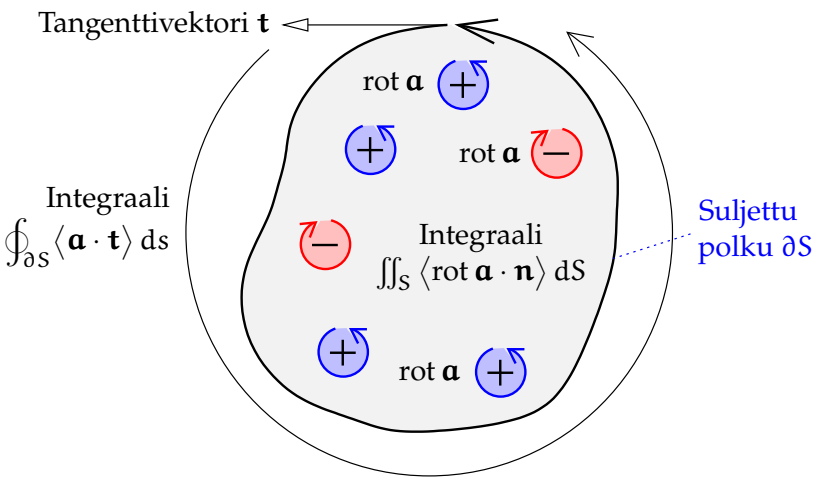
Olkoon pinnan normaalivektori $\mathbf{n}$. Silloin on integroitava

$$\iint_S \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle \, dS,$$

symbolisesti kirjoitettuna

$$\iint_S \langle \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \rangle,$$

jossa kirjoitustapaa $d\mathbf{S}$ kutsutaan *suunnistetuksi pinta-alkioksi*. Se on normaalivektorin $\mathbf{n}$ suuntainen vektori.



KUVA A.6. Stokesin roottorilause.

Kuten käyrää, voidaan myös pintaa *parametrisoida*. Esimerkiksi maapallon pinta, jos se oletetaan pallopinnaksi, voidaan parametrisoida leveysasteen ϕ ja pituusasteen λ avulla: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi, \lambda)$. Tässä tapauksessa kirjoitetaan pinta-alkioksi

$$dS = R^2 \cos\phi \, d\phi \, d\lambda,$$

jossa $R^2 \cos\phi$ on parametriparin (ϕ, λ) *Jacobin determinantti*. Tässä parametrisoinnissa integraali lasketaan seuraavasti:

$$\iint_S \langle \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle \, dS = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle \, R^2 \cos\phi \, d\phi \, d\lambda.$$

Muilla pinnoilla ja parametrisoinneilla on erilaiset Jacobin determinantit. Determinantti edustaa aina ”parametripinta-alkion” $d\phi \, d\lambda$ todellista pinta-alaa ”luonnossa”. Esimerkiksi Maan pinnalla aste-kertaa-aste-ruutu on suurin päiväntasaajan lähistöllä. Napakoordinaateissa (ρ, θ) tasossa ($x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$) Jacobin determinantti on ρ. Tavallisessa pinnan (x, y)-parametrisoinnissa Jacobin determinantti on 1, eli sen voi jättää kokonaan pois.

A.3.3 Stokesin roottorilause

Olkoon S mahdollisesti kaareva pinta avaruudessa ja ∂S sen reunakäyrä. Oletetaan, että pinta ja sen reuna ovat sen verran hyväkäytöksisiä, että kaikki tarvittavat integroinnit ja differentioinnit voi suorittaa. Silloin (myös tunnettu Kelvinin[1] ja Stokesin lauseena):

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle,$$

jossa $\mathbf{r}$ on reunakäyrän paikkavektori. Lauseen parametrisoitu muoto on

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{dS} = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} \rangle \, \mathrm{ds},$$

jossa $\mathbf{n}$ on pinnan S normaali ja $\mathbf{t}$ reunakäyrän ∂S tangenttivektori.

Sanoin Vektorikentän roottorin pintaintegraali pinnan yli on sama kuin kentän suljettu polkuintegraali pinnan reunan ympäri.

Erikoistapaus Konservatiiviselle vektorikentälle $\mathbf{a}$ pätee $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ kaikkialla. Silloin

$$\oint_{\partial S} \langle \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = 0,$$

siis myös

$$\int_{\substack{A \\ \text{polku 1}}}^{B} \langle \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle = \int_{\substack{A \\ \text{polku 2}}}^{B} \langle \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle.$$

Olkoon $\mathbf{a}$ kentän voimavektori, esimerkiksi painovoimakentän aiheuttama kiihtyvyys eli voima per massayksikkö. Silloin tulkinta on

Työintegraali pisteestä A pisteeseen B ei riipu valitusta polusta. Ja suljetun polun ympäri kuljetetun kappaleen tekemä työ on nolla.

Tämä saattaa selittää konservatiivisen voimakentän olemuksen paremmin. Konservatiivinen kenttä voidaan esittää *potentiaalin*

[1] William Thomson, lordi Kelvin PRS FRSE (1824–1907) oli brittiläisfyysikko, matemaatikko, insinööri ja keksijä. Hän on kuuluisa lähinnä ehdotuksestaan absoluuttiseksi lämpötila-asteikoksi vuodesta 1848.

gradienttina $\mathbf{a} = \operatorname{grad} V$, jossa V on kentän potentiaali. Maan painovoimakenttä $\mathbf{g}(x, y, z)$ on Maan painovoimapotentiaalin eli geopotentiaalin $W(x, y, z)$ gradientti. Keskimerenpinnalla — tarkemmin geoidilla — painovoima*potentiaali* on vakio ja painovoima*vektori* $\mathbf{g}$ on kaikkialla kohtisuorassa geoidiin nähden.

A.3.4 Gaussin divergenssilause

Olkoon $\mathcal{V}$ avaruuden osa-alue ja $\partial\mathcal{V}$ sen suljettu reuna: pintojen yhdistelmä. Oletetaan taas, että molemmat ovat matemaattisesti hyväkäytöksisiä. Silloin pätee seuraava lause (Gauss):

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{a} \, \mathrm{d}\mathcal{V} = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle = \iint_{\partial\mathcal{V}} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}S.$$

Sanoin Kaiken, mikä syntyy kappaleen sisällä (”lähteet”, divergenssi), on tultava sen pintojen kautta ulos.

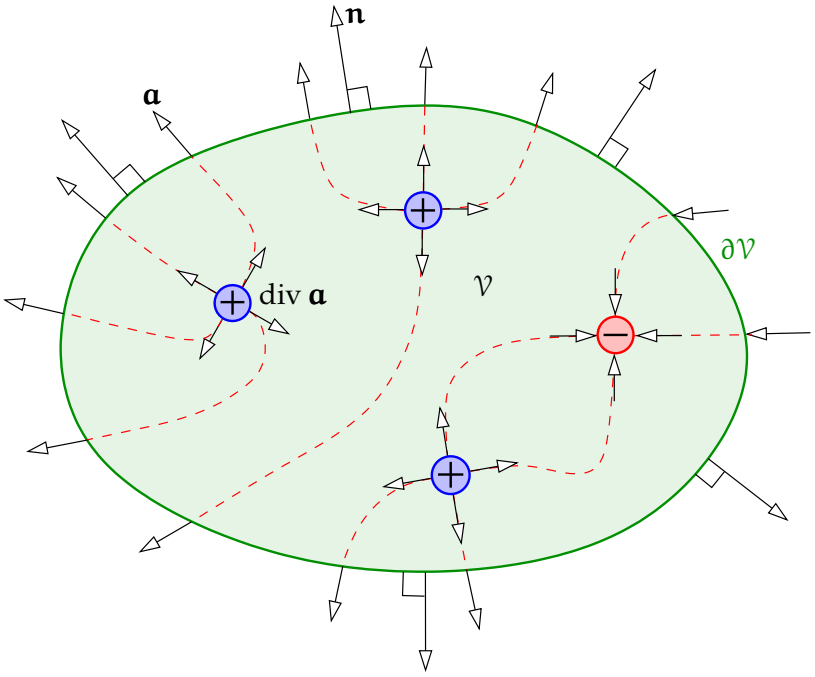
Tavallisesti pinnan $\partial\mathcal{V}$ suunnistus otetaan positiiviseksi ulkoapäin: pinnan normaalivektori $\mathbf{n}$ osoittaa ulospäin.

A.4 Aineen jatkuvuus

Usein käytetty yhtälö hydro- ja aerodynamiikassa on *jatkuvuusyhtälö*. Se ilmaisee, ettei aine voi noin vain hävitä tai lisääntyä. Yleisessä tapauksessa yhtälö on tämän näköinen:

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{\nu}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = 0.$$

Tässä lauseke $\rho\boldsymbol{\nu}$ merkitsee *massavirtausta*, ρ on aineen tiheys ja $\boldsymbol{\nu}$ on virtauksen nopeus. Termi $\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{\nu})$ ilmaisee, paljonko enemmän ainetta lähtee aika-yksikössä tila-alkiosta pois kuin tulee sisään tilavuusyksikköä kohti. Toinen termi, tiheyden ρ aikaderivaatta, merkitsee tila-alkion sisällä olevan massamäärän muutosta ajassa myös tilavuusyksikköä kohti. Termien on oltava keskenään tasapainossa, jotta ”ainekirjanpito” täsmää.



KUVA A.7. Gaussin divergenssilause. $\mathbf{n}$ on ulkopinnan normaalivektori. Gaussin divergenssilause voidaan esittää myös Michael Faraday'n *kenttäviivojen* avulla: kenttäviiva alkaa tai päättyy sähkövarauksen kohdalla eli paikalla, jossa $\operatorname{div} \mathbf{a} \neq 0$, tai kulkee äärettömyyteen pinnan ∂V läpi.

Mikäli virtaava aine on *kokoonpuristumaton*, ρ on vakio:

$$\frac{d}{dt}\rho = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Kun puhutaan nesteen tai kaasun virtauksesta, pitää olla tietoinen, että *pyörteisyys* $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ *ei* välttämättä häviä, eli virtaus ei välttämättä ole pyörrevapaa. Toisin sanoen potentiaalia V, jolle $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} V$, *ei ole välttämättä olemassa*. Itse asiassa pyörteiset virtaukset ovat hyvin yleisiä, ja jopa laminaarisessa virtauksessa tavallisesti $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \neq 0$.

Funktioavaruudet

B

B.1 Abstrakti vektoriavaruus

Abstraktissa vektoriavaruudessa voidaan luoda *kanta*, jonka avulla jokainen vektori avaruudessa voidaan ilmaista kantavektoreiden lineaariyhdistelmäksi. Esimerkiksi jos kanta on konkreettisessa kolmiulotteisessa avaruudessa $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, voidaan kirjoittaa mielivaltainen vektori $\mathbf{r}$ muotoon

$$\mathbf{r} = r_1\boldsymbol{e}_1 + r_2\boldsymbol{e}_2 + r_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} r_i\boldsymbol{e}_i.$$

Koska kolme kantavektoria (jotka eivät ole samassa tasossa) riittää aina, kutsutaan tavallista (euklidista) avaruutta kolmiulotteiseksi.

Vektoriavaruudessa voidaan määrittää *skalaaritulo*, joka on lineaarikuvaus kahdesta vektorista yhteen lukuun (”bilineaarinen muoto”):

$$\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \rangle.$$

Lineaarisuus merkitsee, että

$$\langle (\alpha\mathbf{r}_1 + \beta\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{s} \rangle = \alpha \langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s} \rangle + \beta \langle \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s} \rangle \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ja vaihdannaisuus sitä, että

$$\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \rangle.$$

Jos kantavektorit ovat keskenään *ortogonaaleja*, toisin sanoen $\langle \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \rangle = 0$ jos $i \neq j$, voidaan laskea kertoimet r_i yksinkertaisella tavalla:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \boldsymbol{e}_i, \qquad r_i = \frac{\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{e}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i \rangle} = \frac{\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{e}_i \rangle}{\|\boldsymbol{e}_i\|^2}. \tag{B.1}$$

Jos tämän lisäksi

$$\langle \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i \rangle = \|\boldsymbol{e}_i\|^2 = 1, \qquad i \in \{1, 2, 3\},$$

toisin sanoen kantavektorit ovat *ortonormaaleja*, yhtälö B.1 yksinkertaistuu edelleen:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \boldsymbol{e}_i, \qquad r_i = \langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{e}_i \rangle. \tag{B.2}$$

Suuretta

$$\|\boldsymbol{e}_i\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i \rangle}$$

kutsutaan vektorin $\boldsymbol{e}_i$ *normiksi*.

Toisin kuin tavallinen avaruus, joka on kolmiulotteinen, funktioavaruus on äärettömän ulotteinen *abstrakti* vektoriavaruus, joka auttaa meitä konkretisoimaan tiettyjä abstrakteja, mutta hyvin hyödyllisiä funktioteorian perusasioita.

B.2 Fourier'n funktioavaruus

B.2.1 Kuvaus

Funktiot voidaan katsoa vektoriavaruuden alkioiksi. Jos määritellään kahden funktion f ja g *skalaaritulo* seuraavaksi integraaliksi[1]

$$\langle f \cdot g \rangle = \left\langle \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx, \tag{B.3}$$

[1] Nuolet funktioiden nimien f ja g yläpuolella vahvistavat psykologisesti sen, että funktiot ovat todella "vektoreita". Niitä nuoleja ei normaalisti käytetä.

on helppo todeta, että yllä mainitut skalaaritulon vaatimukset täyttyvät.

Tämän vektoriavaruuden eli *funktioavaruuden* erään kannan muodostavat *Fourier'n kantafunktiot*,

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ e_k &= \cos kx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \\ e_{-k} &= \sin kx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Tämä kanta on ortonormaali (todistus: harjoitus). Se on myös *täydellinen* kanta, jota emme todista. Koska kantavektorien määrä on numeroituvasti ääretön, sanotaan, että tämä funktioavaruus on äärettömän ulotteinen.

Nyt jokainen funktio $f(x)$, joka täyttää tietyt vaatimukset, voidaan kehittää yhtälön B.2 tapaan seuraavasti:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

joka on tuttu Fourier'n sarjakehitelmä, jossa kertoimet ovat

$$\begin{aligned} a_0 = \langle f \cdot e_0 \rangle &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sqrt{2}\cdot\overline{f(x)}, \\ a_k = \langle f \cdot e_k \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \\ b_k = \langle f \cdot e_{-k} \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Tämä on tunnettu tapa laskea Fourier'n sarjan kertoimet.

B.2.2 Esimerkki

Fourier'n analyysin esimerkkinä esitetään askelfunktio välillä $[0, 2\pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \pi), \\ 1 & x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Tämän funktion Fourier'n kertoimet voidaan laskea seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2}\cdot\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2},\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\cos kx\,dx =\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{k\pi}\left(\sin 2k\pi - \sin k\pi\right) = 0,\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\sin kx\,dx =\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{k\pi}\left(\cos k\pi - \cos 2k\pi\right) =\\
&= \frac{1}{k\pi}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{jos k parillinen,}\\ -\dfrac{2}{k\pi} & \text{jos k pariton.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Numeroarvot: $a_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707\,10\ldots$, $b_1 = -2/\pi = -0{,}636\,62\ldots$, $b_3 = -2/3\pi = -0{,}212\,20\ldots$, $b_5 = -0{,}127\,32\ldots$, ja niin edelleen. Kehitelmä on nyt

$$
f(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \tfrac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\ \text{pariton}}}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx.
$$

Näemme, että kehitelmä sisältää vain sinejä eikä lainkaan kosineja. Se on seurausta funktion symmetriaominaisuuksista.

Kuvassa B.1 näytämme tämän funktion katkaistuja kehitelmiä:

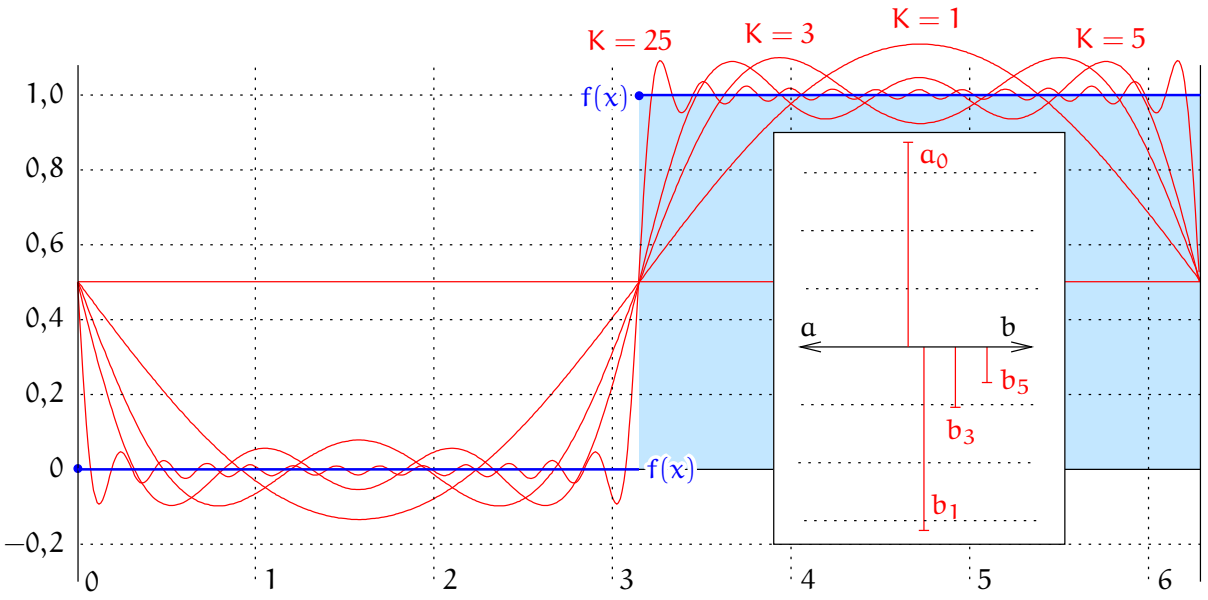
$$
f^{(K)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}a_0\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin kx = \tfrac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\ \text{pariton}}}^{K}\frac{1}{k}\sin kx, \qquad \text{(B.5)}
$$

jossa K on katkaisuparametri.

B.2.3 Suppeneminen

Fourier'n kehitelmä suppenee neliöintegraalin merkityksessä. Jos määritellään katkaistu kehitelmä

$$
f^{(K)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}a_0\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{K}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right),
$$



KUVA B.1. Askelfunktion Fourier'n analyysi. Piirrettyinä ovat katkaistut Fourier'n kehitelmät $f^{(K)}(x)$, yhtälö B.5, K-arvoille 1, 3, 5 ja 25. Upotettuna funktion spektri.

silloin

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f^{(K)}(x) - f(x)\right)^2 \, dx = 0.$$

Tämä *ei* merkitse, että mielivaltaisen pienelle arvolle ε pätee $\left|f^{(K)}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ jokaiselle $x \in [0, 2\pi)$, kun $K \to \infty$. Kuva B.1 kertoo, että jäljelle jää aina pieni pisteen $x = \pi$ ympäristö, jossa on olemassa pisteitä $x' \neq \pi$, joiden absoluuttinen erotus $\left|f^{(K)}(x') - f(x')\right| > 0{,}1$ (tai mikä tahansa positiivinen raja $< 0{,}5$) myös mielivaltaisen suurille K:n arvoille. Sanotaan, että Fourier'n kehitelmä *suppenee*, mutta se ei suppene *tasaisesti*.

Fourier'n kehitelmä suppenee pisteittäisesti "melkein kaikkialla" välillä $x \in [0, 2\pi)$: kaikissa pisteissä paitsi erikoispisteissä $x = 0$ ja $x = \pi$. Määrittelemällä $f(0) = f(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} 0{,}5$ kehitelmä saadaan suppenemaan pisteittäisesti kaikkialla.

Huomaa myös kehitelmän "olkapää" jopa arvolle $K = 25$. Olkapää

kapenee korkeammille K:n arvoille, mutta sen korkeus ei pienene, vaan jää arvoon noin 0,09. Tämä tunnetaan Gibbsin ilmiönä.

B.3 Sturmin ja Liouvillen differentiaaliyhtälöt

B.3.1 Ominaisarvotehtävä

Abstraktissa vektoriavaruudessa voidaan formuloida *ominaisarvotehtävä*. Kun on annettu lineaarinen operaattori (kuvaus) L, voidaan kirjoittaa

$$L\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0,$$

jossa tehtävänä on määrittää *ominaisarvot* λ, joille löytyy yksi tai useampi ratkaisu eli *ominaisvektori* $\mathbf{x}$.

Konkreettisessa n-ulotteisessa vektoriavaruudessa, jossa on ortonormaali kanta $\{\boldsymbol{e}_i, i = 1, \ldots, n\}$, voidaan kirjoittaa vektori

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i,$$

ja lineaarisuuden ansiosta

$$L\boldsymbol{x} = L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot L\boldsymbol{e}_i.$$

Toisaalta voidaan kirjoittaa n eri vektoria $L\boldsymbol{e}_i$ kannalle $\{\boldsymbol{e}_j\}$ seuraavalla tavalla:

$$L\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Tämä määrittää kertoimet a_{ij}, jotka voidaan kerätä $n \times n$ -kokoiseksi matriisiksi A.

Nyt sijoittamalla saadaan

$$L\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right) \boldsymbol{e}_j. \tag{B.6}$$

Myös

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} (\lambda x_j)\, \mathbf{e}_j. \tag{B.7}$$

Yhdistämällä yhtälöt B.6 ja B.7, joiden kaikkien kertoimien on oltava identtisiä, saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - \lambda x_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

eli matriisiyhtälönä

$$A\overline{\mathbf{x}} - \lambda \overline{\mathbf{x}} = 0, \tag{B.8}$$

jossa A on kertoimista a_{ij} koostuva matriisi ja $\overline{\mathbf{x}}$ kertoimista x_i koostuva sarakevektori: $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$.

Tietenkin myös yhtälö B.8 edustaa ominaisarvotehtävää, mutta nyt lineaarisessa vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$, joka koostuu kaikista *kerroinvektoreista* $\overline{\mathbf{x}}$. Jokainen $\overline{\mathbf{x}}$ on vektorin $\mathbf{x}$ numeerinen esitys valitulla kannalla $\{\mathbf{e}_i\}$. Matriisi A taas on operaattorin L numeerinen esitys samalla kannalla[2].

B.3.2 Itseadjungoitu operaattori

Olkoon L lineaarinen operaattori vektoriavaruudessa, jossa on olemassa *skalaaritulo*, siis bilineaarinen muoto $\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle$, joka on symmetrinen eli vaihdannainen.

Silloin L on *itseadjungoitu*, jos jokaiselle vektoriparille $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ pätee

$$\langle \mathbf{x} \cdot L\mathbf{y} \rangle = \langle L\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle.$$

Jos vastaava matriisi A on itseadjungoitu, se merkitsee, että

$$\langle \overline{\mathbf{x}} \cdot A\overline{\mathbf{y}} \rangle = \langle A\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}} \rangle$$

[2] Numeeristen esitysten etuna on tietenkin, että niillä voi oikeasti laskea.

eli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i,$$

mikä on triviaalisti totta, jos

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad i, j \in 1, \ldots, n, \qquad \text{eli } A = A^T.$$

Toisin sanoen

symmetrinen matriisi on itseadjungoitu operaattori.

Lineaarialgebrasta on tuttua, että symmetrisen $n \times n$ -kokoisen matriisin eri ominaisarvoille $\lambda_p \neq \lambda_q$ kuuluvat ominaisvektorit $\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q$ *ovat keskenään ortogonaaleja*: $\mathbf{x}_p \perp \mathbf{x}_q$. Jos kaikki ominaisarvot λ_p, $p = 1, \ldots, n$ ovat erilaisia, ominaisvektorit $\mathbf{x}_p$, $p = 1, \ldots, n$ muodostavat *täydellisen ortogonaalin kannan*[3] vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$.

[3]

Todistus ei ole vaikea. Lähdetään ominaisarvotehtävän yhtälöstä ominaisvektoreille ja -arvoille $\mathbf{x}_p, \lambda_p$:

$$L\mathbf{x}_p = \lambda_p \mathbf{x}_p,$$

ja kerrotaan vasemmalta vektorilla $\mathbf{x}_q$:

$$\langle \mathbf{x}_q \cdot L\mathbf{x}_p \rangle = \lambda_p \langle \mathbf{x}_q \cdot \mathbf{x}_p \rangle.$$

Samoin ominaisvektorille ja -arvolle $\mathbf{x}_q, \lambda_q$ kerrottuna vasemmalta vektorilla $\mathbf{x}_p$:

$$\langle \mathbf{x}_p \cdot L\mathbf{x}_q \rangle = \lambda_q \langle \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_q \rangle.$$

Jos L on itseadjungoitu, on

$$\langle \mathbf{x}_q \cdot L\mathbf{x}_p \rangle = \langle L\mathbf{x}_q \cdot \mathbf{x}_p \rangle = \langle \mathbf{x}_p \cdot L\mathbf{x}_q \rangle \quad \Longrightarrow \quad \lambda_p \langle \mathbf{x}_q \cdot \mathbf{x}_p \rangle = \lambda_q \langle \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_q \rangle.$$

---

[3] Itse asiassa ominaisvektorit voidaan skaalata mielivaltaisesti: jos $\mathbf{x}$ on ominaisvektori, on myös $\mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Näin saadaan *ortonormaali kanta*.

Seuraa, että

$$(\lambda_p - \lambda_q)\left\langle \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_q \right\rangle = 0.$$

Muista, että skalaaritulo on symmetrinen. Jos $\lambda_p \neq \lambda_q$, on siis oltava $\left\langle \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_q \right\rangle = 0$ eli $\mathbf{x}_p \perp \mathbf{x}_q$, mikä oli todistettava.

Esimerkki *Paikan varianssimatriisi tasossa*. Pisteen P koordinaattien varianssimatriisi tasossa on

$$\mathrm{Var}\{\overline{\mathbf{x}}_P\} = \mathrm{Var}\left\{ \begin{bmatrix} \underline{x}_P \\ \underline{y}_P \end{bmatrix} \right\} = \Sigma_{PP} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix},$$

symmetrinen matriisi. Tässä σ_x^2 ja σ_y^2 ovat x- ja y-koordinaattien varianssit eli keskivirheen neliöt, kun σ_{xy} on koordinaattien välinen kovarianssi.

Tämän matriisin Σ_{PP} ominaisarvot ovat *karakteristisen yhtälön*

$$\det(\Sigma_{PP} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \sigma_x^2 - \lambda & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

siis yhtälön

$$(\sigma_x^2 - \lambda)(\sigma_y^2 - \lambda) - \sigma_{xy}^2 = 0$$

ratkaisut. Saadaan

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2 - 4(\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)} = \\ = \tfrac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}.$$

Varianssimatriisin visuaalinen esitys on *varianssi-* eli *virhe-ellipsi*. Sen pääakseleiden puolipituudet ovat $\sqrt{\lambda_1}$ ja $\sqrt{\lambda_2}$, ja pääakseleiden suunnat ovat Σ_{PP}:n ominaisvektorit $\overline{\mathbf{x}}_1$ ja $\overline{\mathbf{x}}_2$, jotka ovat keskenään kohtisuoria. Kun koordinaatiston akselit käännetään $\overline{\mathbf{x}}_{1,2}$-suuntaisiksi, matriisi Σ_{PP} saa muodon

$$\Sigma'_{PP} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Ominaisarvojen summa ja matriisin *jälki* $\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ on *invariantti*, jota kutsutaan *pistevarianssiksi*.

B.3.3 Itseadjungoidut differentiaaliyhtälöt

Funktioavaruudessa on olemassa myös itseadjungoituja eli ”symmetrisiä” differentiaaliyhtälöitä. Itse asiassa fysiikan kuuluisimmat yhtälöt ovat tätä tyyppiä.

Tutki vaikkapa värähtely-yhtälöä, jossa $x(t)$ on paikka ajan funktiona:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{B.9}$$

Ratkaisu on yleistä muotoa (α amplitudi, ϕ vaihevakio)

$$x(t) = \alpha \sin(\omega t - \phi).$$

Välillä $t \in [0, T]$ vaaditaan *jaksollisuutta*:

$$x(0) = x(T), \qquad \frac{d}{dt}x\Big|_{x=0} = \frac{d}{dt}x\Big|_{x=T}.$$

Nämä *reunaehdot* ovat olennainen osa itseadjungoituneisuutta. Silloin ratkaisu löytyy vain tietyille ω:n arvoille. Ilmiön nimi on *kvantisointi*.

Yhtälö B.9 on muodoltaan *ominaisarvotehtävä*:

$$Lx + \omega^2 x = 0,$$

jossa operaattori on

$$L = \frac{d^2}{dt^2}.$$

Näytetään ensin, että tämä operaattori on välillä $[0, T]$ itseadjungoitu. Jos skalaaritulo määritellään seuraavasti

$$\langle \vec{x} \cdot \vec{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T x(t)\, y(t)\, dt,$$

on (osittaisintegrointi):

$$\langle \vec{x} \cdot L\vec{y} \rangle = \int_0^T x(t)\frac{d^2y(t)}{dt^2}dt = \left[x(t)\frac{dy(t)}{dt}\right]_0^T - \int_0^T \frac{dx(t)}{dt}\frac{dy(t)}{dt}dt,$$

$$\langle L\vec{x} \cdot \vec{y} \rangle = \int_0^T \frac{d^2x(t)}{dt^2}y(t)dt = \left[\frac{dx(t)}{dt}y(t)\right]_0^T - \int_0^T \frac{dx(t)}{dt}\frac{dy(t)}{dt}dt.$$

Koska oikealla puolella ensimmäiset termit häviävät ja toiset ovat identtisiä, on

$$\langle \vec{x} \cdot L\vec{y} \rangle = \langle L\vec{x} \cdot \vec{y} \rangle ,$$

mikä oli todistettava.

Itseadjungoidulla operaattorilla on ominaisarvot ja ominaisvektorit. Ominaisvektorit ovat tässä tapauksessa *funktioita*, jotka ovat keskenään ortogonaaleja eri ω-arvoille[4]. Yllä olevilla jaksollisuusehdoilla ne ovat värähtely-yhtälön ratkaisufunktiot

$$\sin(\omega_k t - \phi) = \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t - \phi\right), \tag{B.10}$$

joissa taajuus

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

on kvantisoitu "kvanttiluvun" $k \in \mathbb{N}$ mukaan.

Jos annetaan $T \to \infty$, taajuudet ω_k menevät yhä lähemmäs toisiaan ja lopulta muodostuvat jatkumon.

Fysiikasta löytyy laaja joukko differentiaaliyhtälöitä, jotka ovat jossakin funktioavaruudessa itseadjungoituja. Joukko käy nimellä "Sturmin[5] ja Liouvillen[6] tyypin ongelmat". Niihin kuuluvat värähtely-yhtälö, Legendren yhtälö, Besselin yhtälö ja monet muut. Jokainen generoi luonnollisella tavalla joukon keskenään ortogonaaleja funktioita, jotka toimivat monen osittaisdifferentiaaliyhtälön yleisen ratkaisun kantafunktioina.

---

[4] Itse asiassa samalle ω_k-arvolle löytyy kaksi keskenään ortogonaalista jaksollista ratkaisua

$$\sin \omega_k t = \sin \frac{2\pi k t}{T}, \qquad \cos \omega_k t = \cos \frac{2\pi k t}{T}.$$

Myös niiden mielivaltainen lineaariyhdistelmä on toimiva ratkaisu ja yleistä muotoa B.10.

[5] Jacques Charles François Sturm FRS FAS (1803–1855) oli ranskalainen matemaatikko ja yksi 72 Eiffel-torniin kaiverretusta nimestä.

[6] Joseph Liouville FRS FRSE FAS (1809–1882) oli ranskalainen matemaatikko.

B.4 Legendren polynomit

Myös tavalliset Legendren polynomit $P_n(t)$ muodostavat kannan funktioavaruudessa, jossa skalaaritulon määritelmä on

$$\left\langle \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{+1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

Ne eivät kuitenkaan muodosta orto*normaalia* kantaa, vaan ainoastaan ortog*onaalin* kannan:

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n \cdot P_n \rangle = \int_{-1}^{+1} P_n^2(t)\, dt = \frac{2}{2n+1}.$$

B.5 Pallofunktiot

Pallon pinnalla kaikkien funktioiden voidaan katsoa olevan funktioavaruuden alkioita. Jokainen funktio, joka täyttää tietyt hyvän käytöksen vaatimukset, kuten integroitavuuden, on sen alkio. Funktiot

$$\begin{aligned} R_{nm}(\phi,\lambda) &= P_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \quad m = 0,\ldots,n, \\ S_{nm}(\phi,\lambda) &= P_{nm}(\sin\phi)\sin m\lambda, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \quad m = 1,\ldots,n, \end{aligned}$$

yhdessä muodostavat tämän vektoriavaruuden *täydellisen kannan* siten, että jokainen funktio voidaan kirjoittaa niiden kantafunktioiden — tarvittaessa äärettömäksi — lineaariyhdistelmäksi. Tilanne on analoginen kolmiulotteisen avaruuden kanssa, jossa täydellinen kanta koostuu kolmesta vektorista, jotka eivät ole samassa tasossa.

Vaihtoehtoinen ja tiivimpi kirjoitustapa on

$$Y_{nm}(\phi,\lambda) = \begin{cases} P_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda & \text{jos } m \geqslant 0, \\ P_{n|m|}(\sin\phi)\sin|m|\,\lambda & \text{jos } m < 0, \end{cases}$$

arvoille $n = 0, 1, 2, \ldots$, $m = -n, \ldots, n$.

Tässä funktioavaruudessa määritellään *skalaaritulo*:

$$\left\langle \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma f(\phi,\lambda)\, g(\phi,\lambda)\, d\sigma,$$

jossa σ on yksikköpallon (”suuntapallon” tai jopa ”taivaanpallon”) pinta, $d\sigma = \cos\phi \, d\phi \, d\lambda$ on pallon pinta-ala-alkio ja $\cos\phi$ on koordinaattien (ϕ, λ) Jacobin determinantti.

Tämän määritelmän mukaan voidaan näyttää toteen, että kaksi eri funktiota, Y_{nm} ja $Y_{n'm'}$, ovat ortogonaaleja toisiinsa nähden:

$$\langle Y_{nm} \cdot Y_{n'm'} \rangle = \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma Y_{nm}(\phi, \lambda) \, Y_{n'm'}(\phi, \lambda) \, d\sigma = 0$$

jos $n \neq n'$ tai $m \neq m'$.

Kanta $\{Y_{nm}, n = 0, 1, 2, \ldots, m = -n, \ldots, n\}$ on ortog*onaali*, muttei ortonormaali: vektoreiden pituudet eroavat arvosta 1.

$$\|Y_{nm}\|^2 = \langle Y_{nm} \cdot Y_{nm} \rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma Y_{nm}^2(\phi, \lambda) \, d\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{2n+1} & \text{jos } m = 0, \\ \dfrac{1}{2(2n+1)} \dfrac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} & \text{jos } m \neq 0, \end{cases}$$

katso Heiskanen ja Moritz (1967, yhtälö 1-69). Tämän ortogonaalisuuden todistaminen ei ole suoraviivaista.

Jos nyt jaetaan funktiot Y_{nm} tai vastaavasti R_{nm}, S_{nm} yllä olevien tekijöiden neliöjuurilla, saadaan *täysin normalisoidut* pintapallofunktiot $\overline{Y}_{nm}$, joille pätee

$$\left\|\overline{Y}_{nm}\right\|^2 = \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma \overline{Y}_{nm}^2(\phi, \lambda) \, d\sigma = 1.$$

Niiden avulla on taas helppo laskea annetun yleisen pallopinnan funktion $f(\phi, \lambda)$ kertoimet $\overline{f}_{nm}$. Yläviiva merkitsee, että nämä ovat täysin normalisoituja kertoimia:

$$\overline{f}_{nm} = \langle f \cdot \overline{Y}_{nm} \rangle = \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma f(\phi, \lambda) \, \overline{Y}_{nm}(\phi, \lambda) \, d\sigma. \tag{B.11}$$

Tämä on geometrisessa analogiassa suora *projektio* kannan yksikkövektoreihin.

Yllä olevassa integraalissa $f(\phi, \lambda)$ on funktio f *Maan pinnalla*: jos maapallon säde on R, silloin $f(\phi, \lambda) = f(\phi, \lambda, R)$.

Kehitelmää 2.12 vastaava täysin normalisoitu yhtälö on

$$V(\phi,\lambda,r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} \overline{P}_{nm}(\sin\phi)\left(\overline{a}_{nm}\cos m\lambda + \overline{b}_{nm}\sin m\lambda\right).$$

Voimme kirjoittaa myös

$$\overline{Y}_{nm}(\phi,\lambda) = \begin{cases} \overline{P}_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda & \text{jos } m \geqslant 0, \\ \overline{P}_{n|m|}(\sin\phi)\sin|m|\lambda & \text{jos } m < 0, \end{cases}$$

mikä vastaa täysin normalisoitujen Legendren funktioiden *määritelmää*:

$$\overline{P}_{n0}(\sin\phi) = \sqrt{2n+1}\,P_{n0}(\sin\phi),$$
$$\overline{P}_{nm}(\sin\phi) = \sqrt{2(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_{nm}(\sin\phi), \qquad m > 0.$$

Nyt yllä olevasta potentiaalin yhtälöstä tulee

$$V(\phi,\lambda,r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=-n}^{n} \overline{v}_{nm}\overline{Y}_{nm}(\phi,\lambda),$$

jossa

$$\overline{v}_{nm} = \begin{cases} \overline{a}_{nm} & \text{jos } m \geqslant 0, \\ \overline{b}_{n|m|} & \text{jos } m < 0. \end{cases}$$

Pallolla $r = R$ saadaan

$$V(\phi,\lambda,R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{m=-n}^{n} \overline{v}_{nm}\overline{Y}_{nm}(\phi,\lambda),$$

josta ortogonaalilla projektiolla (yhtälö B.11) seuraa

$$\overline{v}_{nm} = R^{n+1}\left\langle V\cdot\overline{Y}_{nm}\right\rangle = \frac{R^{n+1}}{4\pi}\iint_{\sigma} V(\phi,\lambda,R)\,\overline{Y}_{nm}(\phi,\lambda)\,d\sigma$$

eli

$$\overline{a}_{nm} = \frac{R^{n+1}}{4\pi}\iint_{\sigma} V(\phi,\lambda,R)\,\overline{P}_{nm}(\phi,\lambda)\cos m\lambda\,d\sigma,$$
$$\overline{b}_{nm} = \frac{R^{n+1}}{4\pi}\iint_{\sigma} V(\phi,\lambda,R)\,\overline{P}_{nm}(\phi,\lambda)\sin m\lambda\,d\sigma.$$

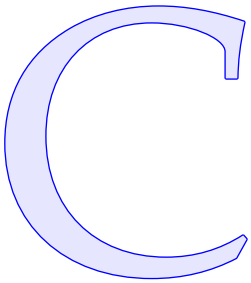
Olenko ymmärtänyt tämän?

1) Identiteetti $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \rangle$ kahdelle vektoriavaruuden alkiolle $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{s}$ ilmaisee seuraavan ominaisuuden: lineaarisuus | vaihdannaisuus | liitännäisyys.

Harjoitus B−1: Fourier'n kantafunktioiden ortonormaalius

Näytä Fourier'n kantafunktioiden, yhtälö B.4, ortonormaalius johtamalla niiden skalaaritulot yhtälön B.3 mukaan.

Miksi FFT toimii?



FFT on faktorointi- eli tekijöihinjakomenetelmä diskreetin Fourier'n muunnoksen laskemiseksi. Menetelmä pienentää tuntuvasti tarvittavien laskentatoimitusten lukumäärää ja nopeuttaa laskentaa. Se kuitenkin edellyttää, että datahilan pistemäärä on jaollinen luku.

FFT-menetelmän valinnassa on vaihtoehtoja. Nopein FFT vaatii hilan, jonka pistemäärä on kahden potenssi. Hila on silloin $2^n \times 2^m$ -kokoinen. Myös vaihtoehtoiset "*mixed radix*" -menetelmät tulevat kysymykseen ja suoriutuvat hyvin, jos hilan koko on jotain 360×480 -tapaista, esimerkiksi $N = 360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$. Jos hilan koko on alkuluku, FFT ei ole parempi kuin tavallinen diskreetti Fourier'n muunnos.

Jos funktio $f(x)$ on annettu väliin $x \in [0, L)$ tasavälisellä hilalla $x_k = {}^{kL}/_{N}$ arvoina $f_k = f(x_k)$, $k = 0, \ldots, N-1$, on diskreetti Fourier'n muunnos yhdessä ulottuvuudessa

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\tilde{\nu}),$$

jossa

$$F(\tilde{\nu}_j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{N}\right), \qquad j = 0, \ldots, N-1. \tag{C.1}$$

Taajuusargumentti, spatiaalitaajuus eli aaltoluku, $\tilde{\nu}_j = {}^{j}/_{L}$, $j = 0, \ldots, N-1$ on määritelty väliin[1] $\left[0, {}^{(N-1)}/_{L}\right]$. i on imaginaarinen yksikkö: [1]

$i^2 = -1$. Käytämme $\exp(x)$ merkitsemään e^x.

Vastaavasti käänteinen diskreetti Fourier'n muunnos,

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\tilde{\nu})\} = f(x),$$

on

$$f(x_k) = \sum_{j=0}^{N-1} F(\tilde{\nu}_j) \exp\left(2\pi i \frac{jk}{N}\right), \qquad k = 0, \ldots, N-1. \tag{C.2}$$

FFT on vain raa'an tehokas tapa laskea molemmat yhtälöt C.1 ja C.2. Yhtälöiden raaka laskeminen vaatii suuruusluokkaa N^2 "standardilaskutoimitusta", kun jokainen standardilaskutoimitus on yksi kertolasku plus yksi yhteen- tai vähennyslasku. Jos N on parillinen, voi kirjoittaa

$$\begin{aligned}
F(\tilde{\nu}_j) &= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}N-1} f_k \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{N}\right) + \sum_{k=\frac{1}{2}N}^{N-1} f_k \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{N}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}N-1} f_k \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{N}\right) + \exp\left(-2\pi i j \frac{\frac{1}{2}N}{N}\right) \sum_{k'=0}^{\frac{1}{2}N-1} f_{k'+\frac{1}{2}N} \exp\left(-2\pi i \frac{jk'}{N}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}N-1} f_k \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{N}\right) + \exp(-\pi i j) \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}N-1} f_{k+\frac{1}{2}N} \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{N}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}N-1} \left[f_k \pm f_{k+\frac{1}{2}N}\right]^j \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{N}\right), \qquad \left\{\begin{array}{l} + \text{ jos j parillinen} \\ - \text{ jos j pariton} \end{array}\right\}
\end{aligned} \tag{C.3}$$

minkä summan laskeminen vaatii vain $N \cdot \frac{1}{2}N$ kerto- sekä yhteen- tai vähennyslaskua, esilaskentoja lukuunottamatta.

Tässä käytettiin Eulerin identiteettiä $\exp(-\pi i) = -1$, siis $e^{-\pi i j} = \left(e^{-\pi i}\right)^j = (-1)^j$, joko $+1$ tai -1[2]. Hakasulkeissa on jokaiselle k:n arvolle

[1] Vaihtoehtoiseksi määrittelyväliksi voidaan valita $\left[-\frac{1}{2}\,{}^{N}/_{L}\,,\ \left(\frac{1}{2}N-1\right)/L\right]$. Tämä onnistuu kuvaamalla $\tilde{\nu}_j \to \tilde{\nu}_j - {}^{N}/_{L}$ eli $j \to j - N$ arvoille $j > \frac{1}{2}N - 1$. Tämän hyvä puoli on, että nyt taajuus nolla on keskellä. Se ei olennaisesti muuta mitään, koska se yksinkertaisesti vain kertoo $F(\tilde{\nu}_j)$ arvolla yksi: $\exp\left(-2\pi i\,{}^{Nk}/_{N}\right) = \exp(-2\pi i k) = 1$, diskreetin Fourier'n muunnoksen jaksollisuusominaisuus.

$k = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}N - 1$ joko summaus parillisille j:n arvolle tai vähennyslasku parittomille j:n arvoille. Yhteensä esilasketaan $\frac{1}{2}N$ summaa ja $\frac{1}{2}N$ erotusta. Myös exp-lausekkeet esilasketaan hakutaulukkoon.

Yhteensä tarvitaan noin $\frac{1}{2}N^2$ standardilaskutoimitusta, puolet alkuperäisestä.

Yhtälö C.3 tunnistetaan Fourier'n sarjaksi, mutta tukipisteiden määrä on N:n sijasta vain $\frac{1}{2}N$. Jos myös $\frac{1}{2}N$ on parillinen, voidaan toistaa yllä kuvattu temppu, jolloin lopputuloksena on lauseke, joka vaatii vain luokkaa $\frac{1}{4}N^2$ laskutoimitusta. Toistetaan taas, ja operaatioiden määrästä tulee $\frac{1}{8}N^2$, $\frac{1}{16}N^2$, $\frac{1}{32}N^2$, jne. . . . Tarkempi analyysi näyttää, että jos N on kahden potenssi, saadaan koko diskreetti Fourier'n muunnos lasketuksi suuruusluokkaa $N \cdot {}^2\log N$ laskutoimituksessa!

Kirjallisuudesta löytyy älykkäitä algoritmeja esitetyn menetelmän toteuttamiseksi, esimerkiksi fftw ("Fastest Fourier Transform in the West", FFTW Home Page; Frigo ja Johnson, 2005).

[2] Näitä arvoja kutsutaan "nyplyskertoimiksi" (engl. "*twiddle factors*").

Helmertin kondensaatio

D

Helmertin kondensaatioyhtälön johtamiseksi johdetaan ensin topografian potentiaalin yhtälö:

$$V_{top}(\phi,\lambda,r) = G\iiint_{top}\frac{\rho(\phi',\lambda',r')}{\ell(\psi,r,r')}d\mathcal{V}' \approx G\rho\iiint_{top}\frac{1}{\ell(\psi,r,r')}d\mathcal{V}',$$

jossa ψ on geosentrinen kulmaetäisyys laskentapisteen (ϕ,λ,r) ja datapisteen (ϕ',λ',r') välillä. Oletetaan vakiotiheys ρ.

Samalla tavalla saadaan kondensaatiokerroksen potentiaalin yhtälö:

$$V_{kond}(\phi,\lambda,r) = G\rho\iiint_{kond}\frac{1}{\ell(\psi,r,R)}d\mathcal{V}'.$$

Integroidaan pallokoordinaateissa:

$$\begin{aligned}
\iiint_{top}\frac{1}{\ell(\psi,r,r')}d\mathcal{V}' &= \int_\sigma\int_R^{R+H(\phi',\lambda')}\frac{1}{\ell(\psi,r,r')}(r')^2\,dr'\,d\sigma',\\
\iiint_{kond}\frac{1}{\ell(\psi,r,R)}d\mathcal{V}' &= \int_\sigma\frac{1}{\ell(\psi,r,R)}\int_R^{R+H(\phi',\lambda')}(r')^2\,dr'\,d\sigma' =\\
&= R^2\int_\sigma\frac{H(\phi',\lambda')}{\ell(\psi,r,R)}\left(1+\frac{H(\phi',\lambda')}{R}+\frac{H^2(\phi',\lambda')}{3R^2}\right)d\sigma', \quad \text{(D.1)}
\end{aligned}$$

jossa H on topografian korkeus.

D.1 Topografian ulkoinen potentiaali

Topografian ulkoisen potentiaalin laskemiseksi käytetään käänteisen etäisyyden kehitelmää (yhtälö 8.7):

$$\frac{1}{\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r'} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n} P_n(\cos\psi).$$

[1] Tämä kehitelmä suppenee tasaisesti[1] ψ:n suhteen, jos $r > r'$. Seuraavassa oletetaan aina suppenemista, vaikka oletus on vaarallinen etenkin rosoisen topografian pinnan lähellä. Jos asian filosofia kiinnostaa, lue Moritz (1980).

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned}
V^{\text{ulk}}_{\text{top}}(\phi,\lambda,r) &= G\rho \iiint_{\text{top}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n} P_n(\cos\psi)\, d\mathcal{V}' = \\
&= G\rho \iint_{\sigma} \left(\int_{R}^{R+H(\phi',\lambda')} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n} (r')^2\, dr' \right) P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \\
&= G\rho \iint_{\sigma} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \frac{1}{n+3} (r')^{n+3} \right]_{r'=R}^{R+H} P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \\
&= G\rho \iint_{\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \frac{1}{n+3} \left((R+H)^{n+3} - R^{n+3} \right) P_n(\cos\psi)\, d\sigma'.
\end{aligned}$$

Nyt käytetään seuraavaa Taylorin kehitelmää:

---

[1] Tasainen suppeneminen tarkoittaa, että kun annettuna on r ja r', jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $N_{\min}$, jolle

$$\left| \frac{1}{\ell} - \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n} P_n(\cos\psi) \right| < \epsilon$$

kaikille $N > N_{\min}$ ja *kaikille* ψ*:n arvoille*. Tämä on tavallista suppenemista vahvempi ominaisuus.

$$
\begin{aligned}
&(R+H)^{n+3} = \\
&= R^{n+3}\left(1+(n+3)\,\frac{H}{R}+\frac{(n+3)\,(n+2)}{2}\frac{H^2}{R^2}+\frac{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)}{2\cdot 3}\frac{H^3}{R^3}+\cdots\right).
\end{aligned}
\tag{D.2}
$$

Sijoitus antaa

$$
\begin{aligned}
&V_{\text{top}}^{\text{ulk}}(\phi,\lambda,r) = G\rho R^2\cdot \\
&\cdot\iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left(\frac{H}{R}+\tfrac{1}{2}\,(n+2)\,\frac{H^2}{R^2}+\tfrac{1}{6}\,(n+2)\,(n+1)\,\frac{H^3}{R^3}+\cdots\right)P_n(\cos\psi)\,d\sigma'.
\end{aligned}
\tag{D.3}
$$

Tämä on siis topografian *ulkoinen potentiaali* — tai topografisten massojen sisällä ulkoisen potentiaalin *harmoninen jatko alaspäin* olettaen, että tämä on matemaattisesti mahdollinen eikä hajaannu. Vuoristoisessa topografiassa tämä voi olla ongelma.

D.2 Topografian sisäinen potentiaali

Samalla tavalla voimme laskea topografian eli merenpinnan ja maaston pinnan välisten massojen sisäisen potentiaalin yhtälö. Avaruusetäisyydelle ℓ käytetään *sisäistä kehitelmää*, yhtälö 8.7, joka pätee jos $r < r'$:

$$
\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^{n+1}P_n(\cos\psi).
$$

Sijoitetaan:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{top}}^{\text{sis}}(\phi,\lambda,r) &= G\rho\iiint_{\text{top}}\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^{n+1}P_n(\cos\psi)\,d\mathcal{V}' = \\
&= G\rho\iint_\sigma \overbrace{\int_R^{R+H(\phi',\lambda')}\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^{n+1}(r')^2\,dr'}^{\text{I}}\,P_n(\cos\psi)\,d\sigma'.
\end{aligned}
$$

Tässä korkeusintegraali I on

$$I = \int_R^{R+H(\phi',\lambda')} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^{n+1} (r')^2 \, dr' =$$

$$= \left[\sum_{\substack{n=0 \\ n\neq 2}}^{\infty} r^n \left(-\frac{(r')^{-(n-2)}}{n-2} \right) + r^2 \ln r' \right]_{r'=R}^{R+H(\phi',\lambda')} =$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{r^n}{n-2} \left(R^{-(n-2)} - (R+H)^{-(n-2)} \right) + r^2 \ln \frac{R+H}{R},$$

antaen

$$V_{\text{top}}^{\text{sis}}(\phi,\lambda,r) =$$

$$= G\rho \iint_\sigma \left(\sum_{\substack{n=0 \\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{r^n}{n-2} \left(R^{-(n-2)} - (R+H)^{-(n-2)} \right) + r^2 \ln \frac{R+H}{R} \right) P_n(\cos\psi) \, d\sigma'.$$

Tähän käytetään Taylorin kehitelmää

$$(R+H)^{-(n-2)} =$$

$$= R^{-(n-2)} \left(1 - (n-2)\frac{H}{R} + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\frac{H^2}{R^2} - \frac{(n-2)(n-1)n}{2\cdot 3}\frac{H^3}{R^3} + \cdots \right).$$

Myös erikoistapaus $n = 2$,

$$r^2 \ln \frac{R+H}{R} = r^2 \left(\frac{H}{R} - \frac{1}{2}\frac{H^2}{R^2} + \frac{1}{3}\frac{H^3}{R^3} - \frac{1}{4}\frac{H^4}{R^4} + \cdots \right) =$$

$$= \frac{r^n}{R^{n-2}} \left(\frac{H}{R} - \frac{n-1}{2}\frac{H^2}{R^2} + \frac{(n-1)n}{2\cdot 3}\frac{H^3}{R^3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4}\frac{H^4}{R^4} + \cdots \right),$$

otetaan siististi mukaan seuraavaan sijoituksella saatuun lausekkeeseen:

$$V_{\text{top}}^{\text{sis}}(\phi,\lambda,r) =$$

$$= G\rho \iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n-2}} \left(\frac{H}{R} - \frac{1}{2}(n-1)\frac{H^2}{R^2} + \frac{1}{6}(n-1)n\frac{H^3}{R^3} - \cdots \right) P_n(\cos\psi) \, d\sigma'. \quad \text{(D.4)}$$

D.3 Kondensaatiokerroksen ulkoinen potentiaali

Tämä lasketaan erikoistamalla yhtälö D.3 tapaukselle $H \to 0$, mutta kuitenkin $\rho \to \infty$ niin, että $\kappa = \rho H$ jää äärelliseksi. Tässä limiitissä kaikki termit, joissa on H^2, H^3 ja korkeammat potenssit menevät nollaan. Tulos on silloin

$$V^{\text{ulk}}_{\text{kond}}(\phi,\lambda,r) = G\rho R^2 \iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{H}{R} P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \\ = GR \iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \kappa P_n(\cos\psi)\, d\sigma'.$$

Aiemmin meillä oli tarkempana κ-yhtälönä 6.4 pallon muotoisen Maan pinnalla:

$$\kappa = \rho H \left(1 + \frac{H}{R} + \tfrac{1}{3}\frac{H^2}{R^2}\right). \tag{6.4}$$

Sijoittamalla tämä edelliseen saadaan (katso myös yhtälö D.1):

$$V^{\text{ulk}}_{\text{kond}} = G\rho R^2 \iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left(\frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2} + \tfrac{1}{3}\frac{H^3}{R^3}\right) P_n(\cos\psi)\, d\sigma'. \tag{D.5}$$

D.4 Helmertin kondensaation kokonaispotentiaali

Tämä saadaan vähentämällä yhtälöt D.5 ja D.3 toisistaan. Tulos, joka pätee *ulkoisessa* avaruudessa[2], on

$$\delta V^{\text{ulk}}_{\text{Helmert}}(\phi,\lambda,r) = V^{\text{ulk}}_{\text{kond}}(\phi,\lambda,r) - V^{\text{ulk}}_{\text{top}}(\phi,\lambda,r) = -G\rho R^2 \cdot \\ \cdot \iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left(\left(\tfrac{1}{2}(n+2)-1\right)\frac{H^2}{R^2} + \left(\tfrac{1}{6}(n+2)(n+1)-\tfrac{1}{3}\right)\frac{H^3}{R^3} + \cdots\right) \cdot \\ \cdot P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \\ = -G\rho \iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left(\tfrac{1}{2}nH^2 + \tfrac{1}{6}n(n+3)\frac{H^3}{R} + \cdots\right) P_n(\cos\psi)\, d\sigma'.$$

[2] Teoriassa ulkoinen avaruus on avaruus koko Maan topografian sisältävän pallon, niin sanotun *Brillouinin pallon*, ulkopuolella. Käytäntö on sallivampi.

Usein määritellään korkeuden H potenssien *asteosuudet* (vertaa asteosuusyhtälö 3.9) seuraavasti:

$$H_n^\nu(\phi,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2n+1}{4\pi} \iint_\sigma H^\nu(\phi',\lambda')\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma', \tag{D.6}$$

jolloin pätee

$$H^\nu(\phi,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^\nu(\phi,\lambda).$$

Silloin

$$\delta V^{\text{ulk}}_{\text{Helmert}} = \\ = -4\pi G\rho \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{2n+1} \left(\tfrac{1}{2} n H_n^2 + \tfrac{1}{6} n\,(n+3)\,\frac{H_n^3}{R} + \cdots\right).$$

Jos topografia on vakio, kaikki termit, joille $n \neq 0$, häviävät. Yllä olevassa kehitelmässä myös ensimmäinen ja toinen termi häviävät. Tässä tapauksessä $n = 0$ sitä seuraavat termit eivät ole edes olemassa: kehitelmä D.2 on binomikehitelmä

$$(R+H)^3 = R^3 + 3R^2H + 3RH^2 + H^3.$$

Siis

$$\delta V^{\text{ulk}}_{\text{Helmert}} = 0$$

kuten oli odotettavissa osion 1.4 perusteella: pallon muotoisen kuoren kondensaatio ei muuta ulkoista kenttää.

D.4.1 Helmertin kondensaation painovoimavaikutus

Lasketaan Helmertin kondensaation potentiaalin vaikutus *painovoimaanomalioihin*:

$$\Delta g^{\text{ulk}}_{\text{Helmert}} = -\frac{\partial}{\partial r}\delta V^{\text{ulk}}_{\text{Helmert}} - \frac{2}{r}\delta V^{\text{ulk}}_{\text{Helmert}} \approx \\ \approx 4\pi G\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{-(n+1)}{r} + \frac{2}{r}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left(\tfrac{1}{2} n H_n^2 + \tfrac{1}{6} n\,(n+3)\,\frac{H_n^3}{R} + \cdots\right) = \\ = -4\pi G\rho \cdot \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left(\tfrac{1}{2} n H_n^2 + \tfrac{1}{6} n\,(n+3)\,\frac{H_n^3}{R} + \cdots\right). \tag{D.7}$$

Nyt myös $n = 1$ antaa nollatuloksen, kuten odotettavissa oli, kun painovoima-anomaliat eivät sisällä mitään asteluvun 1 osuuksia.

Tulos D.7 on likimääräinen eikä tarkoitettu käytettäväksi topografian pinnan lähistöllä. Huomaa vahva *riippuvuus asteluvusta* n: Helmertin kondensaation painovoimavaikutusta hallitsevat lyhyet aallonpituudet eli topografian paikalliset piirteet.

D.4.2 Helmertin kondensaation sisäinen potentiaali

Tämä suure lasketaan *geoidin tasolla*. Se edustaa Helmertin kondensaation *epäsuoraa vaikutusta* eli massojen siirron aiheuttamaa geoidipinnan siirtymistä avaruudessa. Vähennetään yhtälöt D.5 ja D.4 toisistaan:

$$
\begin{aligned}
&\delta V^{\text{sis}}_{\text{Helmert}}(\phi,\lambda,R) = V^{\text{ulk}}_{\text{kond}}(\phi,\lambda,R) - V^{\text{sis}}_{\text{top}}(\phi,\lambda,R) = \\
&= G\rho R^2 \iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2} + \tfrac{1}{3}\frac{H^3}{R^3} \right) P_n(\cos\psi)\, d\sigma' - \\
&\quad - G\rho R^2 \iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{H}{R} - \tfrac{1}{2}(n-1)\frac{H^2}{R^2} + \tfrac{1}{6}(n-1)\,n\frac{H^3}{R^3} - \cdots \right) P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \\
&\quad = G\rho \iint_\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}(n+1)H^2 - \tfrac{1}{6}(n-2)(n+1)\frac{H^3}{R} + \cdots \right) P_n(\cos\psi)\, d\sigma'.
\end{aligned}
$$

Käyttämällä H:n potenssien asteosuuksien määritelmää D.6 saadaan

$$
\delta V^{\text{sis}}_{\text{Helmert}} = 4\pi G\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\tfrac{1}{2}H_n^2 - \tfrac{1}{6}(n-2)\frac{H_n^3}{R} + \cdots \right),
$$

josta saa Brunsin yhtälön 5.2 avulla Helmertin kondensaation *epäsuoran vaikutuksen*:

$$
\begin{aligned}
\delta N_{\text{Helmert}} &= \frac{\delta V^{\text{sis}}_{\text{Helmert}}}{\gamma} = \\
&= \frac{4\pi G\rho}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\tfrac{1}{2}H_n^2 - \tfrac{1}{6}(n-2)\frac{H_n^3}{R} + \cdots \right). \quad \text{(D.8)}
\end{aligned}
$$

Termi $n = 0$ antaa vakiomaaston $H = \overline{H} = H_0$ epäsuoran vaikutuksen: vain ensimmäisen suluissa olevan termin käyttö antaa

$$\delta N_{\text{Helmert, vakio}} \approx \frac{2\pi G\rho}{\gamma}\overline{H}^2,$$

jota *ei* voida jättää huomiotta.

D.5 Dipolimenetelmä

Järkevyyskokeena voidaan kuvata Helmertin kondensaation vaikutus ensimmäisessä approksimaatiossa *dipolitiheyskerroskenttänä* μ. Topografinen massa, pintatiheys $\kappa = \rho H$, siirtyy alaspäin keskimäärin matkan $\frac{1}{2}H$ verran. Efekti olisi sama, jos keskimerenpinta[3] olisi kaksinkertaisen massatiheyskerroksen

$$\mu = \tfrac{1}{2}\rho H^2 \tag{D.9}$$

peitossa. Tämän kerroksen potentiaali on palloapproksimaatiossa (yhtälö 1.18):

$$V = G\iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) dS \approx GR^2 \iint_\sigma \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\ell}\right) d\sigma.$$

Selkeämmin kirjoitettuna pallogeometriassa:

$$V_P = GR^2 \iint_\sigma \mu_Q \frac{\partial}{\partial r_Q}\left(\frac{1}{\ell_{PQ}}\right) d\sigma_Q.$$

Käytetään kehitelmää Legendren polynomeihin, yhtälö 8.7:

$$\frac{1}{\ell_{PQ}} = \frac{1}{r_Q}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi_{PQ}),$$

differentioidaan r_Q:n suhteen ja sijoitetaan:

$$V_P = GR^2 \iint_\sigma \frac{1}{r_Q^2}\mu_Q \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi_{PQ})\, d\sigma_Q.$$

[3] Itse asiassa parempi paikka tähän korvaavaan kerrokseen olisi taso $\frac{1}{4}H$.

Sijoittamalla tähän kaksoistiheyskerroksen yhtälö D.9 μ_Q:n tilalle ja ottamalla limiitti $r_P, r_Q \downarrow R$ saadaan

$$V = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} n \iint_\sigma (2\pi G\rho H)\, H P_n(\cos\psi)\, d\sigma' = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} n \iint_\sigma A_B H P_n(\cos\psi)\, d\sigma'.$$

Olemme jättäneet selventävät P- ja Q-merkinnät pois tarpeettomina.

Symboli A_B ilmaisee sellaisen Bouguer-laatan vetovoimaa, jonka paksuus on H ja ainetiheys ρ.

Kehitetään suure $(A_B H)$ pallofunktiokehitelmäksi. Asteosuusyhtälön 3.9 mukaan

$$(A_B H)_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_\sigma (A_B H)\, P_n(\cos\psi)\, d\sigma',$$

jolloin saadaan

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1} (A_B H)_n \approx \tfrac{1}{2} (A_B H),$$

ainakin korkeampien asteluvun n arvojen osalta, eli alueellisesti vaikkei globaalisti.

Näin saadaan jälleen arvion Helmertin kondensaation epäsuorasta vaikutuksesta. *Epäsuora vaikutus* on kondensaation aiheuttama geoidipinnan muutos, joka geoidin laskennassa kondensaatiomenetelmän avulla on otettava huomioon käänteisellä etumerkillä. Tosin sanoen, jos menetelmä ymmärretään poistamis-entistämis- eli *remove-restore*-menetelmäksi, epäsuora vaikutus edustaa sen entistämisvaihetta:

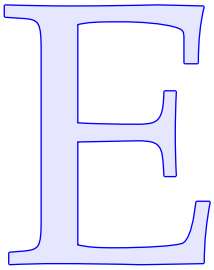
$$\delta N_{\text{Helmert}} = \frac{V}{\gamma} \approx \tfrac{1}{2} \frac{A_B H}{\gamma} = \frac{\pi G \rho H^2}{\gamma}.$$

Vertailun vuoksi tarkempi kehitelmä D.8 antaa suurempien n-arvojen approksimaatiossa

$$\delta N_{\text{Helmert}} \approx \frac{4\pi G\rho}{\gamma} \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} H_n^2 \approx \frac{\pi G\rho}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} H_n^2 = \frac{\pi G \rho H^2}{\gamma},$$

mikä on olennaisesti sama tulos.

Laplacen yhtälö pallokoordinaateissa



E.1 Johtaminen

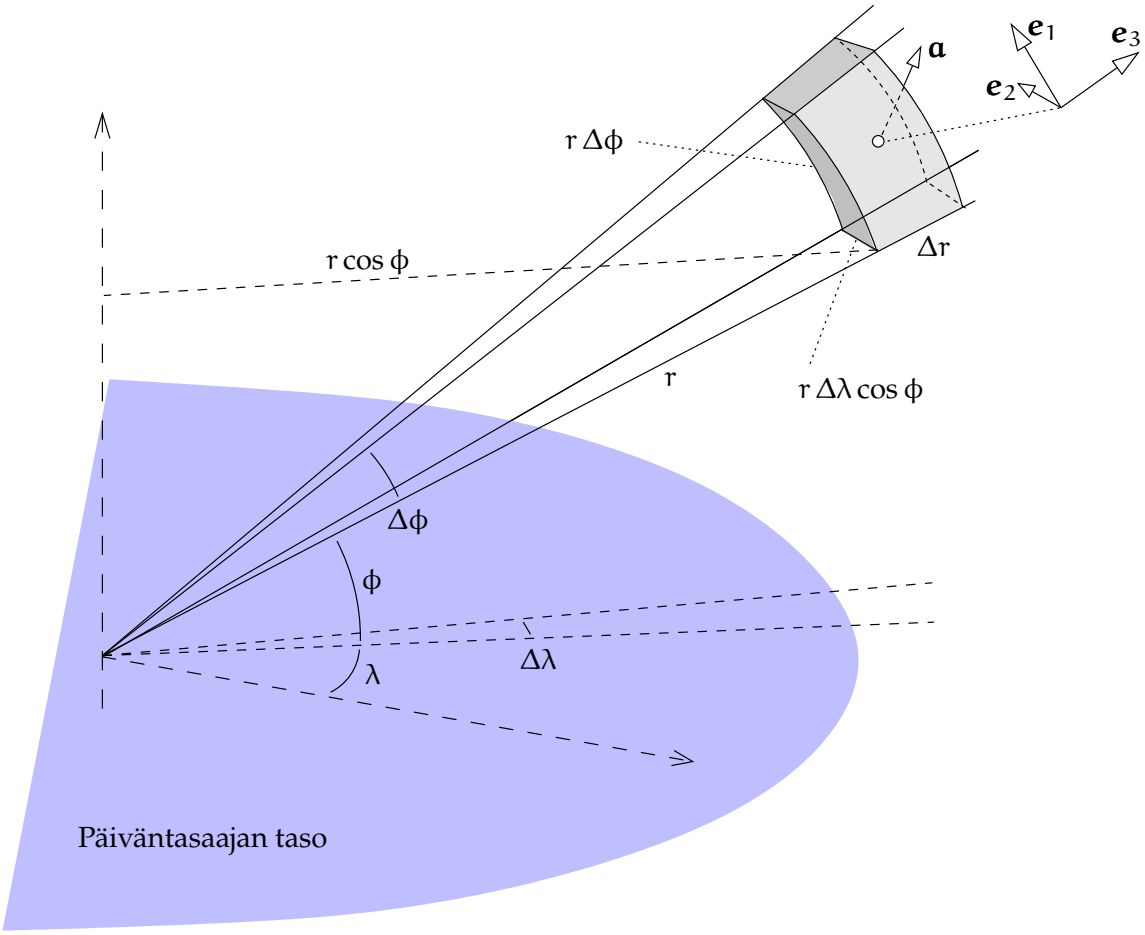
Tarkastellaan pientä tilavuusalkiota, jonka mitat koordinaattisuunnissa ovat $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$ ja Δr. Tutkitaan vektorikentän $\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} \nabla V$ vuon erotusta vastakkaisten tahkojen kautta sisään tulevan ja ulos menevän välillä.

Toimitaan samanlaisella tavalla kuin alaosiossa 1.12.4 käyttämällä kappaletta eli tilavuusalkiota, jonka pinnat on suunnattu koordinaattilinjojen mukaisesti. Annetaan alkion koon mennä nollaan limiitissä käyttäen hyväksi Gaussin divergenssilausetta 1.19. Suure $\operatorname{div} \mathbf{a} = \Delta V$ on *lähdetiheysarvo* avaruudessa, ja sen keskiarvon kerrottuna alkion tilavuuden kanssa on oltava sama kuin kokonaisvuo alkion pintojen kautta.

Määritellään kappaleen kohdalla paikallinen ortonormaali kanta $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, tyyppi *"north-east-up"*. Vektori $\boldsymbol{e}_1$ osoittaa paikalliseen pohjoissuuntaan, vektori $\boldsymbol{e}_2$ itäsuuntaan ja vektori $\boldsymbol{e}_3$ "ylöspäin" eli säteittäissuuntaan. Voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3.$$

Osa vuon f erotuksesta vastakkaisten tahkojen välillä aiheutuu vektorin $\mathbf{a}$ normaalikomponentin muutoksesta tahkojen välillä. Osa on tahkojen



KUVA E.1. Gaussin divergenssilause sovellettuna koordinaattilinjojen mukaiseen tilavuusalkioon.

pinta-alojen ω erotuksen aiheuttamaa:

$$f^+ - f^- \approx \overbrace{\omega\,(a^+ - a^-)}^{\text{I}} + \overbrace{a\,(\omega^+ - \omega^-)}^{\text{II}}.$$

Katso kuva E.1.

- Leveysasteen ϕ suuntainen, ”etelä–pohjoinen”:

$$\omega_\phi^- = r\cos\phi\,\Delta r\,\Delta\lambda, \qquad \omega_\phi^+ = r\cos(\phi+\Delta\phi)\,\Delta r\,\Delta\lambda,$$

erotus

$$\omega_\phi^+ - \omega_\phi^- \approx -r \sin\phi \, \Delta\phi \cdot \Delta r \, \Delta\lambda.$$

Kerro arvolla

$$a_1 = \frac{\partial V}{\partial (r\phi)} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

ja jaa alkion tilavuudella $r^2 \cos\phi \, \Delta r \, \Delta\phi \, \Delta\lambda$, jolloin saadaan

$$\Delta_\phi^{II} V = -\frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \phi}.$$

Tämän lisäksi on tietysti ykkösosuus

$$\Delta_\phi^{I} V = \langle \nabla a_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 \rangle = \frac{a_1^+ - a_1^-}{r \cdot \Delta\phi},$$

jossa

$$a_1^+ - a_1^- = \left[\frac{\partial V}{\partial (r\phi)}\right]_-^+ = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial \phi}\right]_-^+,$$

tuloksena

$$\Delta_\phi^{I} V = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\phi} V\right]_-^+}{\Delta\phi} \approx \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}.$$

- Pituusasteen λ suuntainen, ”länsi–itä”: pinta-ala $\omega_\lambda = r \, \Delta r \, \Delta\phi$ ei muutu pyörähdyssymmetrian takia:

$$\Delta_\lambda^{II} V = 0.$$

On vain

$$\Delta_\lambda^{I} V = \langle \nabla a_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \rangle = \frac{a_2^+ - a_2^-}{r\cos\phi \cdot \Delta\lambda},$$

jossa

$$a_2^+ - a_2^- = \left[\frac{\partial V}{\partial (\lambda r \cos\phi)}\right]_-^+ = \frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right]_-^+.$$

Sijoitus antaa

$$\Delta_\lambda^{I} V = \frac{1}{r\cos\phi} \cdot \frac{1}{r\cos\phi} \cdot \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} V\right]_-^+}{\Delta\lambda} \approx \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}.$$

- Säteittäisessä suunnassa vastakkaisten tahkojen eli ”sisäisen” ja ”ulkoisen” tahkon pinta-alat ovat

$$\omega_r^- = r^2 \cos\phi\,\Delta\phi\,\Delta\lambda, \qquad \omega_r^+ = (r+\Delta r)^2 \cos\phi\,\Delta\phi\,\Delta\lambda,$$

ja erotus on

$$\omega_r^+ - \omega_r^- \approx 2r\,\Delta r \cdot \cos\phi\,\Delta\phi\,\Delta\lambda.$$

Tämä kerrotaan arvolla

$$a_3 = \frac{\partial V}{\partial r}$$

ja jaetaan alkion tilavuudella $r^2 \cos\phi\,\Delta r\,\Delta\phi\,\Delta\lambda$ antaen Laplace-operaattorin kakkososuudeksi

$$\Delta_r^{\mathrm{II}} V = \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Tämän lisäksi on ykkösosuus

$$\Delta_r^{\mathrm{I}} V = \langle \nabla a_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \rangle = \frac{a_3^+ - a_3^-}{\Delta r} = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial r} V\right]_-^+}{\Delta r} \approx \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}.$$

Kaikki tämä antaa lopputulokseksi

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta_r^{\mathrm{I}} V + \Delta_\lambda^{\mathrm{I}} V + \Delta_\phi^{\mathrm{I}} V + \Delta_r^{\mathrm{II}} V + \Delta_\phi^{\mathrm{II}} V = \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \phi},\end{aligned} \tag{E.1}$$

mikä vastaa yhtälöä 2.9.

E.2 Ratkaiseminen

E.2.1 Säteittäisen riippuvuuden erottaminen

Yritetään muuttujien erottamista seuraavasti:

$$V(\phi, \lambda, r) = R(r)\,Y(\phi, \lambda).$$

Sijoitus yhtälöön E.1 ja kertominen lausekkeella r^2/RY antaa

$$\frac{1}{R}\left(r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -\frac{1}{Y}\left(\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} - \tan\phi\frac{\partial Y}{\partial \phi}\right).$$

Tämän on taas pädettävä kaikille arvoille r ja ϕ, ja näin ollen molemmat lausekkeet voivat vain olla yhtä suuria kuin vakio, p. Tämä antaa kaksi yhtälöä:

$$\left(r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial R}{\partial r}\right) - pR = 0,$$
$$\left(\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} - \tan\phi\frac{\partial Y}{\partial \phi}\right) + pY = 0.$$

Ensimmäiselle yhtälölle kokeillaan potenssilakia,

$$R(r) = r^q,$$

joka antaa

$$q\,(q-1)\,r^q + 2qr^q - pr^q = 0 \quad\Longrightarrow\quad (q\,(q+1) - p)\,r^q = 0$$

ratkaisulla

$$p = q\,(q+1)\,.$$

Toisen yhtälön ratkaiseminen funktiolle $Y(\phi, \lambda)$,

$$\left(\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} - \tan\phi\frac{\partial Y}{\partial \phi}\right) + q\,(q+1)\,Y = 0, \qquad \text{(E.2)}$$

on hankalampaa. q:n on oltava kokonaisluku. Kun $n \in \mathbb{N}_0$, löydetään, että on ei-negatiivisia ratkaisuja $q = n$ ja negatiivisia ratkaisuja $q = -(n+1)$, jossa $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tämän kanssa koko erikoisratkaisujen joukko on

$$V_n^{\text{sis}}(\phi, \lambda, r) = r^n Y_n(\phi, \lambda), \quad V_n^{\text{ulk}}(\phi, \lambda, r) = \frac{Y_n(\phi, \lambda)}{r^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

yhtälöt 2.10.

E.2.2 Pintapallofunktioiden ratkaisu

Molemmat ratkaisut q, sekä ei-negatiivinen että negatiivinen, antavat sijoitettuna yhtälöön E.2 saman n-arvon yhtälön:

$$\left(\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} - \tan\phi\frac{\partial Y}{\partial \phi}\right) + n\,(n+1)\,Y = 0.$$

Yritetään muuttujien erottamista:

$$Y(\phi, \lambda) = F(\phi)\, L(\lambda).$$

Sijoitus ja kertominen lausekkeella $\cos^2\phi \big/ FL$ antaa

$$\frac{\cos^2\phi}{F}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2} - \tan\phi\frac{\partial F}{\partial\phi} + n\,(n+1)\,F\right) = -\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}.$$

Molempien puolten on taas oltava sama vakio, jonka oletetaan olevan positiivinen ja jota kutsutaan nimellä m^2:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2} - \tan\phi\frac{\partial F}{\partial\phi} + \left(n\,(n+1) - \frac{m^2}{\cos^2\phi}\right)F = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2} + m^2 L = 0.$$

Ensimmäinen yhtälö tunnetaan Legendren yhtälönä. Sen ratkaisut ovat Legendren funktiot $P_{nm}(\sin\phi)$, jossa kokonaisluku $m = 0, 1, \ldots, n$.
[1] Toinen on klassinen *harmoninen värähtelijä*, jonka ratkaisut ovat[1]

$$L_{m,1}(\lambda) = \cos m\lambda, \qquad L_{m,2}(\lambda) = \sin m\lambda.$$

Näin löytyvät pintapallofunktiot lineaariyhdistelminä

$$Y_n(\phi, \lambda) = \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\,(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,.$$

Yleinen ratkaisu saadaan nyt seuraavasti:

$$V^{\text{sis}}(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\,(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,,$$

$$V^{\text{ulk}}(\phi, \lambda, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin\phi)\,(a_{nm}\cos m\lambda + b_{nm}\sin m\lambda)\,.$$

Tässä a_{nm} ja b_{nm} ovat pallofunktiokertoimia, jotka määrittelevät erikoisratkaisujen lineaariyhdistelmän. Maan ulkoisen gravitaatiokentän esittämiseksi kelpaa fysikaalisesti vain toinen ratkaisu, koska se menee nollaan äärettömyydessä $r \to \infty$.

[1] Tämä selittää myös, miksi vakion m on oltava kokonaisluku: pituusaste λ on jaksollinen periodilla 2π.

Kirjallisuutta

ABCDEFGHIKLMNOPRSTVWY

A

Majid Abrehdary, Lars E. Sjöberg ja Mohammad Bagherbandi. The spherical terrain correction and its effect on the gravimetric-isostatic Moho determination. *Geophysical Journal International*, 204(1):262–273, 2016. URL https://doi.org/10.1093/gji/ggv450. 139

Giancarlo d'Agostino, Sergio Desogus, Alessandro Germak, Claudio Origlia, Danilo Quagliotti, Giovanna Berrino, Gennaro Corrado, Vincenzo d'Errico ja Giuseppe Ricciardi. The new IMGC-02 transportable absolute gravimeter: Measurement apparatus and applications in geophysics and volcanology. *Annals of Geophysics*, 51(1):39–49, 2008. URL https://doi.org/10.4401/ag-3038. 307

Altimetry, Retracking. Radar altimetry tutorial & toolbox. ESA and CNES. URL http://www.altimetry.info/radar-altimetry-tutorial/data-flow/data-processing/retracking/. Avattu 1. maaliskuuta 2022. 365

Ole Balthasar Andersen, Per Knudsen ja Philippa Berry. The DNSC08GRA global marine gravity field from double retracked satellite altimetry. *Journal of Geodesy*, 84:191–199, 2010. URL https://doi.org/10.1007/s00190-009-0355-9. 245

Marella de Angelis, Andrea Bertoldi, Luigi Cacciapuoti, Andrea Giorgini, Giacomo Lamporesi, Marco Prevedelli, Gilberto Saccorotti, Fiodor Sorrentino ja Gugliemo M. Tino. Precision gravimetry with atomic sensors. *Measurement Science and Technology*, 20(2):022001, 2009. URL http://dx.doi.org/10.1088/0957-0233/20/2/022001. 307

B

Georges Balmino, Nicole Vales, Sylvain Bonvalot ja Anne Briais. Spherical harmonic modeling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies. *Journal of Geodesy*, 86:499–520, 2012. URL https://doi.org/10.1007/s00190-011-0533-4. 63, 138

Tulu Besha Bedada. *Absolute geopotential height system for Ethiopia*. Väitöskirja, University of Edinburgh, 2010. URL https://era.ed.ac.uk/bitstream/handle/1842/4726/Bedada2010_small.pdf. Avattu 22. syyskuuta 2021. 247

Narciso Benitez, Thomas J. Broadhurst, Holland C. Ford, Mark Clampin, George Hartig, Garth D. Illingworth ym. Hubble Looks Through Cosmic Zoom Lens, 2003. URL https://esahubble.org/images/op00301a/. © 2003 ESA/Hubble (CC BY 4.0). Avattu 22. syyskuuta 2021. 2

BGI, EGM2008. EGM2008 anomaly maps visualization. URL http://bgi.obs-mip.fr/data-products/outils/egm2008-anomaly-maps-visualization/. Avattu 17. syyskuuta 2021. 123, 133

BGI, WGM2012. WGM2012 maps visualization/extraction. URL http://bgi.obs-mip.fr/data-products/outils/wgm2012-maps-visualizationextraction/. Avattu 17. syyskuuta 2021. 151

Mirjam Bilker-Koivula. Development of the Finnish Height Conversion Surface FIN2005N00. *Nordic Journal of Surveying and Real Estate Research*, 7 (1):76–88, 2010. URL https://journal.fi/njs/article/download/3663/3432. Avattu 22. syyskuuta 2021. 395

Mirjam Bilker-Koivula ja Matti Ollikainen. Suomen geoidimallit ja niiden käyttäminen korkeuden muunnoksissa. Tiedote 29, Geodeettinen laitos, 2009. URL https://www.maanmittauslaitos.fi/sites/maanmittauslaitos.fi/files/fgi/GLtiedote29.pdf. Avattu 11. toukokuuta 2019. 245, 326

Gian Paolo Bottoni ja Riccardo Barzaghi. Fast collocation. *Bulletin Géodésique*, 67(2):119–126, 1993. URL https://doi.org/10.1007/BF01371375. 288

Vsevolod V. Brovar, Maria I. Yurkina, M. Heifets, Mihail S. Molodenski ja Helmut Moritz. M. S. Molodensky In Memoriam. Online PDF, Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz Folge 88, 2000.

URL http://www.helmut-moritz.at/SciencePage/Molodensky.pdf. Helmut Moritz ja Maria I. Yurkina, toim. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 168

John M. Brozena. The Greenland Aerogeophysics Project: Airborne gravity, topographic and magnetic mapping of an entire continent. International Association of Geodesy Symposia 110, sivut 203–214, Wien, Itävalta, 20. elokuuta 1992. Springer, New York, NY. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9255-2_19. 317

John M. Brozena ja Mary F. Peters. State-of-the-art airborne gravimetry. International Association of Geodesy Symposia 113, sivut 187–197, Graz, Itävalta, 1994. Springer-Verlag. URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-79721-7_20. 317

John M. Brozena, Mary F. Peters ja Richard Salman. Arctic airborne gravity measurements program. Kokoelmassa Segawa ym. (1996), sivut 131–146. URL https://doi.org/10.1007/978-3-662-03482-8_20. 317

Heinrich Bruns. *Die Figur der Erde: Ein Beitrag zur europäischen Gradmessung*. Stankievicz, Berlin, 1878. URL https://play.google.com/books/reader?id=DP0-AAAAYAAJ&hl=en&pg=GBS.PP5. Avattu 31. tammikuuta 2020. 94

Blažej Bucha, Christian Hirt ja Michael Kuhn. Cap integration in spectral gravity forward modelling: near- and far-zone gravity effects via Molodensky's truncation coefficients. *Journal of Geodesy*, 93:65–83, 2019. URL https://doi.org/10.1007/s00190-018-1139-x. 220

C

Levke Caesar, Stefan Rahmstorf, Alexander Robinson, Georg Feulner ja Vincent S. Saba. Observed fingerprint of a weakening Atlantic Ocean overturning circulation. *Nature*, 556:191–196, 2018. URL https://doi.org/10.1038/s41586-018-0006-5. 333

Henry Cavendish. Experiments to determine the density of the earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 88, 1798. URL https://doi.org/10.1098/rstl.1798.0022. 4

CHAMP Mission. CHAMP – CHAllenging Minisatellite Payload. Deutsches Geoforschungszentrum, Helmholtz-Zentrum Potsdam. URL https://www.gfz-potsdam.de/champ/. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 368

Climate Research Unit. University of East Anglia. URL https://crudata.uea.ac.uk/cru/data/soi/. Avattu 13. tammikuuta 2022. 346

Bernard J. Coakley, Steve C. Kenyon ja René Forsberg. Updating the Arctic Gravity Project grid with new airborne and Extended Continental Shelf data. *AGU Fall Meeting Abstracts*, sivu C3, joulukuu 2013. URL https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2013AGUFM.G13C..03C/abstract. Avattu 17. tammikuuta 2020. 317

John J. O'Connor ja Edmund F. Robertson. George Green (1793–1841). MacTutor History of Mathematics archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, 1998. URL https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Green/. Avattu 22. syyskuuta 2021. 28

D

Benjamin D. DeJong, Paul R. Bierman, Wayne L. Newell, Tammy, M. Rittenour, Shannon A. Mahan, Greg Balco ja Dylan H. Rood. Pleistocene relative sea levels in the Chesapeake Bay region and their implications for the next century. *GSA Today*, 25(8):4–10, 2015. URL https://doi.org/10.1130/GSATG223A.1. 335

Heiner Denker. Evaluation and improvement of the EGG97 quasigeoid model for Europe by GPS and leveling data. Kokoelmassa Vermeer ja Ádám (1998), sivut 53–61. 394

E

Eiffel Tower, 72 names. List of the 72 names on the Eiffel Tower. URL https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_the_72_names_on_the_Eiffel_Tower. Avattu 7. huhtikuuta 2019. 16, 33, 45, 57, 90

Martin Ekman. Postglacial rebound and sea level phenomena with special reference to Fennoscandia and the Baltic Sea. Kokoelmassa Kakkuri (1993), sivut 7–70. 331, 386

Encyclopaedia Britannica, Moho. URL https://www.britannica.com/science/Moho. Avattu 22. tammikuuta 2020. 157

European geoid calculations. Leibniz Universität Hannover, Institute of Geodesy. URL https://www.ife.uni-hannover.de/en/research/main-research-focus/regional-gravity-field-and-geoid-modelling/european-geoid-calculations/. Avattu 11. toukokuuta 2019. 394

F

Loránd Eötvös. *Three Fundamental Papers of Loránd Eötvös*. Loránd Eötvös Geophysical Institute of Hungary, 1998. ISBN 963-7135-02-2. Toimittaja Zoltán Szabó. 319

Graham Farmelo. *The Strangest Man*. Basic Books, reprint painos, 2011. ISBN 978-0-4650-2210-6. 27

William E. Farrell ja James A. Clark. On postglacial sea level. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 46(3):647–667, 1976. URL https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1976.tb01252.x. 336

Will E. Featherstone. Software for computing five existing types of deterministically modified integration kernel for gravimetric geoid determination. *Computers and Geosciences*, 29:183–193, 2003. URL https://doi.org/10.1016/S0098-3004(02)00074-2. 222

FFTW Home Page. URL https://www.fftw.org. Avattu 15. toukokuuta 2019. 433

René Forsberg. A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Report 355, Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying, 1984. URL https://earthsciences.osu.edu/sites/earthsciences.osu.edu/files/report-355.pdf. Avattu 17. helmikuuta 2020. 249

René Forsberg ja Jānis Kaminskis. Geoid of the Nordic and Baltic region from gravimetry and satellite altimetry. Kokoelmassa Segawa ym. (1996), sivut 540–547. URL https://doi.org/10.1007/978-3-662-03482-8_72. 395

René Forsberg ja Gabriel Strykowski. NKG Gravity Data Base and NKG Geoid. Technical University of Denmark, DTU Space, National Space Institute, 2010. URL https://www.nordicgeodeticcommission.com/wp-content/uploads/2014/10/8-WG_geoid_2010_March_presentation_ForsbergStrykowski.pdf. Avattu 11. toukokuuta 2019. 395

Rene Forsberg, Arne V. Olesen, Fausto Ferraccioli, Tom Jordan, Hugh Corr ja Kenichi Matsuoka. PolarGap 2015/16 - Filling the GOCE polar gap in Antarctica and ASIRAS flight around South Pole. Final report, European Space Agency, 2017. URL https://earth.esa.int/documents/10174/134665/PolarGap-2015-2016-final-report. Avattu 8. tammikuuta 2020. 372

René Forsberg ja Carl Christian Tscherning. An overview manual for the GRAVSOFT Geodetic Gravity Field Modelling Programs, 2008. URL https://www.academia.edu/9206363/An_overview_manual_for_the_GRAVSOFT_Geodetic_Gravity_Field_Modelling_Programs. Avattu 11. toukokuuta 2019. 245

René Forsberg ja Martin Vermeer. A generalized Strang van Hees approach to fast geopotential inversion. *Manuscripta geodaetica*, 17:302–314, 1992. 241

Jean-Pierre Friedelmeyer. Du côté des lettres (2) : une lettre de Sophie Germain à Carl Friedrich Gauss (20 février 1807), et la réponse de celui-ci (30 avril 1807), 2014. URL https://images.math.cnrs.fr/Du-cote-des-lettres-une-lettre-de-Sophie-Germain-a-Carl-Friedrich-Gauss-20. Avattu 22. syyskuuta 2021. 94

Matteo Frigo ja Steven G. Johnson. The design and implementation of FFTW3. *Proceedings IEEE*, 93(2):216–231, 2005. URL http://www.fftw.org/fftw-paper-ieee.pdf. Avattu 14. helmikuuta 2020. 433

G

Emmanuel S. Garcia, David T. Sandwell ja Walter H. F. Smith. Retracking CryoSat-2, Envisat and Jason-1 radar altimetry waveforms for improved gravity field recovery. *Geophysical Journal International*, 2014. URL https://doi.org/10.1093/gji/ggt469. 247

Andrea Gatti, Mirko Reguzzoni, Fernando Sansò ja Federica Migliaccio. Space-wise grids of gravity gradients from GOCE data at nominal satellite altitude. Presented at the 5th International GOCE User Workshop, UNESCO, Pariisi, Ranska, 25.–28. marraskuuta 2014. URL https://www.researchgate.net/publication/275029640_SPACE-WISE_GRIDS_OF_GRAVITY_GRADIENTS_FROM_GOCE_DATA_AT_NOMINAL_SATELLITE_ALTITUDE. Avattu 11. toukokuuta 2019. 286

Olav R. Godø, Annette Samuelsen, Gavin J. Macaulay, Ruben Patel, Solfrid Sætre Hjøllo, John Horne, Stein Kaartvedt ja Johnny A. Johannessen. Mesoscale eddies are oases for higher trophic marine life. *PLoS One*, 7(1): e30161, 2012. URL https://doi.org/10.1371/journal.pone.0030161. 334

GRACE Follow-On Mission. Jet Propulsion Laboratory. URL https://gracefo.jpl.nasa.gov/mission/overview/. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 371

GRACE Mission. Measuring Earth's Surface Mass and Water Changes. Jet Propulsion Laboratory. URL https://grace.jpl.nasa.gov/. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 370

GRACE Mission, hydrology. NASA. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Global_Gravity_Anomaly_Animation_over_LAND.gif. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 371

George Green. *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. 1828. URL https://play.google.com/books/reader?id=GwYXAAAAYAAJ. Avattu 23. huhtikuuta 2019. 28

Green's Windmill. Green's windmill and science centre. URL https://www.greensmill.org.uk/. Avattu 10. toukokuuta 2019. 28

GWR Instruments, Inc., *i*GRAV® Gravity Sensors. URL https://www.gwrinstruments.com/igrav-gravity-sensors.html. Avattu 22. syyskuuta 2022. 312

H

Roger Haagmans, Erik de Min ja Martin van Gelderen. Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes' integral. *Manuscripta geodaetica*, 18:227–241, 1993. 241

John C. Harrison ja M. Dickinson. Fourier transform methods in local gravity modelling. *Bulletin Géodésique*, 63:149–166, 1989. URL https://doi.org/10.1007/BF02519148. 249

Markku Heikkinen. Solving the shape of the Earth by using digital density models. Tiedonanto 81:2, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1981. 101, 102, 104, 314

Weikko A. Heiskanen. The latest achievements of physical geodesy. *Journal of Geophysical Research*, 65(9):2827–2836, 1960. URL https://doi.org/10.1029/JZ065i009p02827. 153

Weikko A. Heiskanen ja Helmut Moritz. *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, London, 1967. 35, 52, 53, 57, 68, 71, 78, 79, 80, 81, 94, 95, 97, 98, 103, 104, 105, 106, 112, 116, 152, 155, 175, 177, 178, 182, 191, 198, 200, 204, 208, 209, 290, 396, 427

Willem Frederik Hermans. *Beyond Sleep*. Harry N. Abrams, reprint painos, 2007. ISBN 978-1-5856-7583-8. 144

Christian Hirt ja Michael Kuhn. Band-limited topographic mass distribution generates full-spectrum gravity field: Gravity forward modeling in the spectral and spatial domains revisited. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 119, 2014. URL https://doi.org/10.1002/2013JB010900. 138

Reino A. Hirvonen. *The continental undulations of the geoid*. Väitöskirja, Teknillinen korkeakoulu, 1934. Geodeettisen laitoksen julkaisu 19. 395

Reino A. Hirvonen. *Relative Bestimmungen der Schwerkraft in Finnland in den Jahren 1931, 1933 und 1935*. Julkaisu 23, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1937. 296

Bernhard Hofmann-Wellenhof ja Helmut Moritz. *Physical Geodesy*. Springer-Verlag Wien GmbH, 2006. Toinen tarkistettu laitos. 396

Humboldt University Berlin. Friedrich Robert Helmert with a relative pendulum, 2017. URL https://www.researchgate.net/publication/318994932_Friedrich_Robert_Helmert_founder_of_modern_geodesy_on_the_occasion_of_the_centenary_of_his_death. © 2017 Humboldt-Universität zu Berlin, Universitätsbibliothek (CC BY 3.0). Avattu 19. toukokuuta 2019. 142

Erkki Hytönen. *Absolute gravity measurement with long wire pendulum*. Väitöskirja, Helsingin yliopisto, 1972. Geodeettisen laitoksen julkaisu 75. 297

Pasi Häkli, Jyrki Puupponen, Hannu Koivula ja Markku Poutanen. Suomen geoidimallit ja niiden käyttäminen korkeuden muunnoksissa. Tiedote 30, Geodeettinen laitos, 2009. URL https://www.maanmittauslaitos.fi/sites/maanmittauslaitos.fi/files/fgi/GLtiedote30.pdf. Avattu 26. tammikuuta 2020. 326

I

International Intercomparison of Absolute Gravimeters. University of Luxembourg, European Center for Geodynamics and Seismology. URL http://www.ecgs.lu/international-intercomparison-of-absolute-gravimeters/. Avattu 6. helmikuuta 2020. 310

ISG, Geoid Schools. International Service for the Geoid. URL http://www.isgeoid.polimi.it/Schools/schools.html. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 245

K

Juhani Kakkuri, toim. *Geodesy and Geophysics, lecture notes, NKG Autumn School 1992*, Geodeettisen laitoksen julkaisu 115, 1993. 455, 466, 467

Juhani Kakkuri. *Maapallon mittaaja: V. A. Heiskasen elämä*. Keuruu, 2008. Ursan julkaisu 108, ISBN 978-952-5329-71-1, 159 sivua. 144, 396

Steve C. Kenyon, René Forsberg, Arne V. Olesen ja Simon A. Holmes. NGA's use of aerogravity to advance the next generation of Earth Gravitational Models. *AGU Fall Meeting Abstracts*, sivu A4, joulukuu 2012. URL https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2012AGUFM.G12A..04K/abstract. Avattu 11. toukokuuta 2019. 317

Mikhail G. Kogan, Michel Diament, Aline Bulot ja Georges Balmino. Thermal isostasy in the South Atlantic Ocean from geoid anomalies. *Earth and Planetary Science Letters*, 74:280–290, 1985. URL https://doi.org/10.1016/0012-821X(85)90028-7. 153

Taru Kolehmainen. Kehottaa vai kehoittaa – vuosisatainen pulma. *Kielikello*, (1), 2008. URL https://www.kielikello.fi/-/kehottaa-vai-kehoittaa-vuosisatainen-pulma. Avattu 6. elokuuta 2019. 71

Michael Kuhn, Will Featherstone ja Jonathan Kirby. Complete spherical Bouguer gravity anomalies over Australia. *Australian Journal of Earth Sciences*, 56(2):213–223, 2009. URL https://espace.curtin.edu.au/handle/20.500.11937/34751. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 138, 139

Aimo Kuivamäki, Paavo Vuorela ja Markku Paananen. Indications of postglacial and recent bedrock movements in Finland and Russian Karelia. Tiedonanto YST-99, Geological Survey of Finland, 1998. URL http://tupa.gtk.fi/julkaisu/ydinjate/yst_099.pdf. Avattu 17. tammikuuta 2020. 340

Erkki Kääriäinen. *The Second Levelling of Finland in 1935–1955*. Julkaisu 61, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1966. 163, 164, 178

Jussi Kääriäinen ja Hannu Ruotsalainen. *Tilt Measurements in the Underground Laboratory Lohja 2, Finland, in 1977–1987*. Julkaisu 110, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1989. 385

L

Augustus Edward Hough Love. The Yielding of the Earth to Disturbing Forces. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 82(551):73–88, 1909. URL https://doi.org/10.1098/rspa.1909.0008. 384

Biao Lu, Franz Barthelmes, Svetozar Petrovic, Christoph Förste, Frank Flechtner, Zhicai Luo, Kaifei He ja Min Li. Airborne gravimetry of GEOHALO mission: Data processing and gravity field modeling. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 122:10 586–10 604, 2017. URL https://doi.org/10.1002/2017JB014425. 316

M

Paul J. Melchior. *The Tides of the Planet Earth*. Pergamon Press, Oxford, 1978. ISBN 978-0-0802-6248-2. 381, 384

Jerry X. Mitrovica, Mark E. Tamisiea, James L. Davis ja Glenn A. Milne. Recent mass balance of polar ice sheets inferred from patterns of global sea level change. *Nature*, 409:1026–1029, helmikuu 2001. URL https://doi.org/10.1038/35059054. 338

Mihail S. Molodenski, Vladimir F. Eremeev ja Maria I. Yurkina. *Methods for the Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*. Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem, 1962. (Englanninnos venäjänkielisestä alkuperäisteoksesta). 127, 171, 220, 396

David Monniaux. Autograv CG5, 2011. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Autograv_CG5_P1150838.JPG. © 2011 David Monniaux (GFDL). Avattu 13. toukokuuta 2019. 297

Helmut Moritz. *Advanced Physical Geodesy*. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1980. ISBN 978-3-87-907106-7. 396, 436

Walter Heinrich Munk. The U.S. Commission on Ocean Policy, Testimony, 18. huhtikuuta 2002. URL https://govinfo.library.unt.edu/oceancommission/meetings/apr18_19_02/munk_statement.pdf. Avattu 14. toukokuuta 2019. 345

Jaakko Mäkinen, Andreas Engfeldt, Linda Engman, Bjørn Geir Harsson, Tõnis Oja, Sven Rekkedal, Knut Røthing, Paavo Rouhiainen, Hannu Ruotsalainen, H. Skatt, Gabriel Strykowski, Heikki Virtanen, Karin Wieczerkowski ja Detlef Wolf. The Fennoscandian Land Uplift Gravity Lines: comparison of observed gravity change with observed vertical motion and with GIA models. Raportti, *Nordiska Kommissionen för Geodesi*, 2010. URL https://www.nordicgeodeticcommission.com/wp-content/uploads/2014/10/1-Makinen_et_al_land_uplift_gravity_lines.pdf. Avattu 22. syyskuuta 2021. 328

Silja Märdla. *Regional Geoid Modelling by the Least Squares Modified Hotine Formula Using Gridded Gravity Disturbances*. Väitöskirja, Tallinnan teknillinen korkeakoulu, 2017. URL https://digikogu.taltech.ee/en/Item/baba5f3f-22ce-43b4-8f81-7b1fe015ac19. Avattu 17. syyskuuta 2021. 128, 215

N

R. Steven Nerem, Don P. Chambers, C. Choe ja Gary T. Mitchum. Estimating mean sea level change from the TOPEX and Jason altimeter missions. *Marine Geodesy*, 33(1):435, 2010. URL https://doi.org/10.1080/01490419.2010.491031. 346

NOAA, Ocean currents. How does the ocean affect climate and weather on land? NOAA Ocean Exploration and Research. URL https://oceanexplorer.noaa.gov/facts/climate.html. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 334

O

Per-Anders Olsson, Kristian Breili, Vegard Ophaug, Holger Steffen, Mirjam Bilker-Koivula, Emil Nielsen, Tõnis Oja ja Ludger Timmen. Postglacial gravity change in Fennoscandia – three decades of repeated absolute gravity observations. *Geophysical Journal International*, 217:1141–1156, 2019. URL https://doi.org/10.1093/gji/ggz054. 328

P

Robert Ladislav Parker. The rapid calculation of potential anomalies. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 31:447–455, 1972. URL https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1973.tb06513.x. 250

M. K. Paul. A method of evaluating the truncation error coefficients for geoidal height. *Bulletin Géodésique*, 110:413–425, 1973. URL https://doi.org/10.1007/BF02521951. 221

Nikolaos K. Pavlis, Simon A. Holmes, Steve C. Kenyon ja John K. Factor. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research*, 117(B4), 2012. URL https://doi.org/10.1029/2011JB008916. 76

W. R. Peltier. Home page, W. R. Peltier, FRSC. URL https://www.atmosp.physics.utoronto.ca/~peltier/data.php. Avattu 22. syyskuuta 2021. 336

W. Richard Peltier. Closure of the budget of global sea level rise over the GRACE era: the importance and magnitudes of the required corrections for global glacial isostatic adjustment. *Quaternary Science Reviews*, 28(17–18): 1658–1674, 2009. URL https://doi.org/10.1016/j.quascirev.2009.04.004. Special issue: Quaternary Ice Sheet-Ocean Interactions and Landscape Responses. 335

Uuno Pesonen. *Relative Bestimmungen der Schwerkraft in Finnland in den Jahren 1926–1929*. Julkaisu 13, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1930. 296

PIOMAS. Polar Science Center, PIOMAS Arctic Sea Ice Volume Reanalysis. URL http://psc.apl.washington.edu/research/projects/arctic-sea-ice-volume-anomaly/. Avattu 11. toukokuuta 2019. 367

Markku Poutanen, Martin Vermeer ja Jaakko Mäkinen. The Permanent Tide in GPS Positioning. *Journal of Geodesy*, 70:499–504, 1996. URL https://doi.org/10.1007/BF00863622. 386

John Henry Pratt. II. On the attraction of the Himalaya mountains, and of the elevated regions beyond them, upon the plumb-line in India. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 145:53–100, 1855. URL https://doi.org/10.1098/rstl.1855.0002. 143

John Henry Pratt. II. On the deflection of the plumb-line in India caused by the attraction of the Himalaya mountains and the elevated regions beyond, and its modification by the compensating effect of a deficiency of matter below the mountain mass. *Proceedings of the Royal Society of London*, 9: 493–496, 1859. URL https://doi.org/10.1098/rspl.1857.0096. 143

John Henry Pratt. On the degree of uncertainty which local attraction, if not allowed for, occasions in the map of a country, and in the mean figure of the earth as determined by geodesy ; a method of obtaining the mean figure free from ambiguity by a comparison of the Anglo-Gallic, Russian, and Indian Arcs ; and speculations on the constitution of the earth's crust. *Proceedings of the Royal Society of London*, 13:253–276, 1864. URL https://doi.org/10.1098/rspl.1863.0061. 143

Katharina Predehl, Gesine Grosche, Sebastian M. F. Raupach, Stefan Droste, Osama Terra, Jānis Alnis, Thomas Legero, Theodor W. Hänsch, Thomas Udem, Ronald Holzwarth ja Harald Schnatz. A 920 km Optical Fiber Link for Frequency Metrology at the 19th Decimal Place. *Science*, 27. huhtikuuta 2012. URL https://doi.org/10.1126/science.1218442. 185

Ilya Prutkin. Gravitational and magnetic models of the core-mantle boundary and their correlation. *Journal of Geodynamics*, 45:146–153, 2008. URL https://www.researchgate.net/publication/257097255_Gravitational_and_magnetic_models_of_the_core-mantle_boundary_and_their_correlation. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 153

R

Richard H. Rapp. The decay of the spectrum of the gravitational potential and the topography for the Earth. *Geophysical Journal International*, 99(3):449–455, 1989. URL https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1989.tb02031.x. 284

Jean Richer. Observations astronomiques et physiques faites en l'isle de Caïenne. Julkaisussa *Ouvrages de Mathematique de M. Picard*. P. Gosse ja J. Neaulme, 1731. URL http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/815403. Avattu 11. toukokuuta 2019. 296

Robert A. Rohde. Post-glacial sea level rise, 2005. URL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Post-Glacial_Sea_Level.png. © 2005 Robert A. Rohde (GFDL). Avattu 21. heinäkuuta 2019. 339

Chester F. Ropelewski ja Phil D. Jones. An extension of the Tahiti-Darwin Southern Oscillation Index. *Monthly Weather Review*, 115:2161–2165, 1987. URL https://doi.org/10.1175/1520-0493(1987)115<2161:AEOTTS>2.0.CO;2. Avattu 13. tammikuuta 2022. 346

Reiner Rummel ja Fernando Sansó, toim. *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography. Proceedings, International Summer School of Theoretical Geodesy*, Lecture Notes in Earth Sciences, 50, Trieste, Italia, 25. touko– 6. kesäkuuta 1992. Springer-Verlag. URL https://doi.org/10.1007/BFb0117924. 334

Hannu Ruotsalainen. Interferometric water level tilt meter development in Finland and comparison with combined earth tide and ocean loading models. *Pure and Applied Geophysics*, 2017. URL https://doi.org/10.1007/s00024-017-1562-6. 385

S

Oliver Sacks. Henry Cavendish: An early case of Asperger's syndrome? *Neurology*, 57(7):1347–1347, 2001. URL https://doi.org/10.1212/WNL.57.7.1347. 4

Ernst J. O. Schrama. *The Role of Orbit Errors in Processing of Satellite Altimeter Data*. Väitöskirja, Delft University of Technology, 1989. URL https://www.ncgeo.nl/downloads/33Schrama.pdf. Avattu 11. toukokuuta 2019. 357

Axel R. Schweiger, Ron Lindsay, Linjun Zhang, Mike Steele, Harry Stern ja Ron Kwok. Uncertainty in modeled Arctic sea ice volume. *Journal of Geophysical Research*, 116(C00D06), 2011. URL http://dx.doi.org/10.1029/2011JC007084. 367

Daniel Scuka. GOCE burning: Last orbital view. ESA blog, 2013. URL https://blogs.esa.int/rocketscience/2013/11/11/goce-burning-last-orbital-view/. Avattu 22. syyskuuta 2021. 372

Sea Level Research Group. University of Colorado. URL https://sealevel.colorado.edu/. Avattu 22. syyskuuta 2021. 346

Jiro Segawa, Hiromi Fujimoto ja Shuhei Okubo, toim. *Proceedings, IAG International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy (GraGeoMar96)*, International Association of Geodesy Symposia 117, Tokyo, Japani, 30. syys–5. lokakuuta 1996. Springer-Verlag. 453, 456

SourceForge, Maxima. Maxima, a computer algebra system. URL https://maxima.sourceforge.io/. Avattu 22. syyskuuta 2021. 352

Giorgio Spada ja Daniele Melini. SELEN: a program for solving the "Sea Level Equation". User manual for version 2.9, Computational Infrastructure for Geodynamics (CIG), 2015. URL http://geodynamics.org/cig/software/selen/selen-manual.pdf. Avattu 1. maaliskuuta 2020. 336

Govert Strang van Hees. Stokes' Formula Using Fast Fourier Techniques. *Manuscripta geodaetica*, 15:235–239, 1990. 236

T

Wolfgang Torge. *Gravimetry*. de Gruyter, Berlin, New York, 1989. ISBN 978-3-11-010702-9. 396

Wolfgang Torge. Gravity and tectonics. Kokoelmassa Kakkuri (1993), sivut 131–172. 390

Carl Christian Tscherning ja Richard H. Rapp. Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variances. Raportti 208, Dept. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, OH, USA, 1974. URL https://earthsciences.osu.edu/sites/earthsciences.osu.edu/files/report-208.pdf. Avattu 17. tammikuuta 2020. 285

Tytyri Elämyskaivos. URL https://www.tytyrielamyskaivos.fi. Avattu 17. syyskuuta 2021. 385

VW

Peter Vaníček ja Edward Krakiwsky. *Geodesy – The Concepts*. Elsevier Science Publishers, toinen painos, 1987. ISBN 978-0-4448-7777-2. 396

Dave Watts. Fourifier, 2004. URL https://ejectamenta.com/imaging-experiments/fourifier/. Avattu 17. syyskuuta 2021. 244

Lianxing Wen ja Don L. Anderson. Layered mantle convection: A model for geoid and topography. *Earth and Planetary Science Letters*, 146(3–4):367–377, 1997. ISSN 0012-821X. URL http://222.195.83.195/wen/Reprints/WenAnderson97EPSL.pdf. Avattu 4. maaliskuuta 2020. 153

Felix Andries Vening Meinesz. Gravity survey by submarine via Panama to Java. *The Geographical Journal*, 71(2):144–156, 1928. URL https://doi.org/10.2307/1782700. 296

Hans-Georg Wenzel. Ultra high degree geopotential model GPM3E97A to degree and order 1800 tailored to Europe. Kokoelmassa Vermeer ja Ádám (1998), sivut 71–80. 81

Martin Vermeer. Chronometric levelling. Tiedonanto 83:2, Geodeettinen laitos, 1983a. 184, 308

Martin Vermeer. A new Seasat altimetric geoid for the Baltic. Tiedonanto 83:4, Geodeettinen laitos, 1983b. 343

Martin Vermeer. *Geoid studies on Finland and the Baltic*. Väitöskirja, Helsingin yliopisto, 1984. Tiedonanto 84:3, Geodeettinen laitos. 33, 111

Martin Vermeer. FGI studies on satellite gravity gradiometry. 3. Regional high resolution geopotential recovery in geographical coordinates using a Taylor expansion FFT technique. Tiedonanto 92:1, Geodeettinen laitos, 1992. 241

Martin Vermeer. Geoid determination using frequency domain techniques. Kokoelmassa Kakkuri (1993), sivut 183–200. 232

Martin Vermeer ja József Ádám, toim. *Proceedings, Second Continental Workshop on the Geoid in Europe*, Tiedonanto 98:4, Geodeettinen laitos, Masala, 10. – 14. maaliskuuta 1998. 454, 467

Paul Wessel, W. H. F. Smith, Remco Scharroo, J. Luis ja F. Wobbe. Generic Mapping Tools: Improved Version Released. *EOS Trans. AGU*, 94(45): 409–410, 2013. URL http://dx.doi.org/10.1002/2013EO450001. ii

Karin Wieczerkowski, Jerry X. Mitrovica ja Detlef Wolf. A revised relaxation-time spectrum for Fennoscandia. *Geophysical Journal International*, 139:69–86, 1999. URL https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.1999.00924.x. 339

Wikipedia, The Aerospace Corporation. URL https://en.wikipedia.org/wiki/The_Aerospace_Corporation. Avattu 23. huhtikuuta 2019. 218

Wikipedia, Deklinaatio. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Deklinaatio_(t%C3%A4htitiede). Avattu 29. helmikuuta 2020. 379

Wikipedia, Dislokaatio. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Dislokaatio. Avattu 23. huhtikuuta 2019. 302

Wikipedia, Earth normal modes. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Seismic_wave#Normal_modes. Avattu 16. maaliskuuta 2020. 312

Wikipedia, Heilurikello. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Heilurikello. Avattu 23. huhtikuuta 2019. 295

Wikipedia, John Pratt. URL https://en.wikipedia.org/wiki/John_Pratt_(Archdeacon_of_Calcutta). Avattu 23. huhtikuuta 2019. 143

Wikipedia, Kaksoisrakokoe. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Kaksoisrakokoe. Avattu 18. helmikuuta 2020. 308

Wikipedia, Merenpinnan nousu. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Merenpinnan_nousu. Avattu 23. huhtikuuta 2019. 335

Wikipedia, Mu-metal. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Mu-metal. Avattu 23. huhtikuuta 2019. 311

Wikipedia, Saros-jakso. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Saros-jakso. Avattu 23. huhtikuuta 2019. 325

Wikipedia, Seasat conspiracy theory. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Seasat#Conspiracy_theory. Avattu 23. huhtikuuta 2019. 343

Wikipedia, Strengthening mechanisms of materials. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Strengthening_mechanisms_of_materials. Avattu 10. toukokuuta 2019. 302

Wikipedia, Sverdrup. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Sverdrup_(mittayksikk%C3%B6). Avattu 23. helmikuuta 2020. 332

Wikipedia, Tuntikulma. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Tuntikulma. Avattu 29. helmikuuta 2020. 379

Wikipedia, Zero-length springs. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Spring_(device)#Zero-length_springs. Avattu 23. huhtikuuta 2019. 300

Heikki Virtanen. On superconducting gravimeter observations above 8 mHz at the Metsähovi station. Tiedonanto 98:5, Geodeettinen laitos, Masala, 1998. 312

Heikki Virtanen. *Studies of Earth dynamics with superconducting gravimeter*. Väitöskirja, Helsingin yliopisto, 2006. URL http://urn.fi/URN:ISBN:952-10-3057-7. Julkaisu 133, Geodeettinen laitos. Avattu 11. toukokuuta 2019. 312

Heikki Virtanen ja Jussi Kääriäinen. The installation and first results from the superconducting gravimeter GWR20 at the Metsähovi station, Finland. Tiedonanto 95:1, Geodeettinen laitos, Helsinki, 1995. 312

Wolfram Demonstrations, Difference formula for cosine. URL https://demonstrations.wolfram.com/DifferenceFormulaForCosine/. Avattu 7. huhtikuuta 2019. 195

Wolfram Functions, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$. URL https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Cos/23/02/0001/. Avattu 25. helmikuuta 2020. 196

Wolfram MathWorld, Spherical Harmonic Addition Theorem. URL https://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonicAdditionTheorem.html. Avattu 11. toukokuuta 2019. 379

Jan Vondrák, Cyril Ron ja Vojtěch Štefka. Earth orientation parameters based on EOC-4 astrometric catalog. *Acta Geodynamica et Geomaterialia*, 7(3): 245–251, 2010. URL https://www.irsm.cas.cz/materialy/acta_content/2010_03/2_Vondrak.pdf. Avattu 20. helmikuuta 2020. 386

L. Wong ja R. Gore. Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 18(1):81–91, 1969. URL https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1969.tb00264.x. 218

Phuong Lan Vu, Frédéric Frappart, José Darrozes, Vincent Marieu, Fabien Blarel, Guillaume Ramillien, Pascal Bonnefond ja Florence Birol. Multi-satellite altimeter validation along the French Atlantic Coast in the Southern Bay of Biscay from ERS-2 to SARAL. *Remote Sensing*, 93(10), 2018. URL http://dx.doi.org/10.3390/rs10010093. 364

Guy Wöppelmann, Camille Letetrel, Alvaro Santamaría-Gómez, Marie-Noëlle Bouin, Xavier Collilieux, Zuheir Altamimi, Simon D. P. Williams ja Belén Martín-Míguez. Rates of sea-level change over the past century in a geocentric reference frame. *Geophysical Research Letters*, 36(12), 2009. URL https://doi.org/10.1029/2009GL038720. 326

Y

YouTube, Hammer vs. Feather, 2010. URL https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=KDp1tiUsZw8#! Avattu 7. huhtikuuta 2019. 4

Dah-Ning Yuan, William L. Sjogren, Alex S. Konopliv ja Algis B. Kucinskas. Gravity field of Mars: A 75th degree and order model. *Journal of Geophysical Research*, 106(E10):23 377–23 401, 2001. URL https://doi.org/10.1029/2000JE001302. 284

Hakemisto

ABCDEFGHIJKLMNOPRSTUVWYZÖ

A
aaltoyhtälö
    aineen, 42
    elektronin relativistinen, 27
Aalto-yliopisto, 396
Abell 1689, 2
action at a distance, 1
aine, säilyminen, 23
aineaallon vaihekulma, 308
    on kello, 308
aineaallot, koherenssi, 184
ainetiheysfunktio, 11
Airy, George Biddell, 143
Airyn isostaattinen hypoteesi, laskentakaavoja, 144
Airyn ja Heiskasen hypoteesi, 145, 151
Airyn ja Heiskasen malli, 144
ajan hidastussuhde (suhteellisuusteoria), 184
AltiKa (altimetri), 345
altimetriamissiot (taulukko), 344
altimetriasatelliitti, radan valinta, 358
altimetriatutkan kalibrointi, 364
    in-flight, 364
American Geophysical Union (AGU), 394
Amsterdam (Alankomaat), NAP-datumi, 163, 325
Andersen, Ole Balthasar, 245
anomaalinen suure, 87, 109, 110
antiaine, 27
Apollo-projekti, 4
Arabelos, Dimitris, 245
Arkhimedeen laki, 146
arretointi (gravimetri), 303
Aspergerin oireyhtymä, 4
astatisoinnin idea (kuva), 303
astatisointisuhde, 300, 302
asteluku, harmoninen, 54
astenosfääri, 335
asteosuusyhtälö, 71
    todistus, 71
astevarianssi
    häiriöpotentiaalin, 276, 278, 282
    kirjoitustapa, 278
    painovoima-anomalioiden, 283, 284
astevarianssikaava, 284
atomikello, 184
atsimuutti (kuva), 259
aurinkoaika, 361
autokovarianssi, 256
avaruusdomeeni (Fourier), 46, 234
avaruuspallofunktio, 53

B
ballistinen gravimetria
    havaintoyhtälöt, 306, 307
    normaaliyhtälöt, 307
    tuntemattomat, 306
”before present” (BP), 335
Bergensbanen (Norja), 147

BGI, 123, 133, 151, 393
Bjerhammar, Arne, 285
Bjerhammarin pallo, 285
Blue Road Geotraverse -projekti, 329
Bosen ja Einsteinin kondensaatti, 184, 308
Bouguer, Pierre, 128
Bouguer-anomalia
  batymetria, 131
  esimerkki, 137
  Etelä-Suomi, 133
  interpolointi, 132
  laskennan vaiheet, 136
  maastokorjattu, 134
  miksi, 131
  ominaisuudet, 132
  pallo-, 138
    systematiikka, 139
  prediktio, 132
  systematiikka, 132, 133
  yksinkertainen, 132
Bouguer-hypoteesi, maannousun, 328, 329
Bouguer-laatta
  approksimaationa, 131
    kuva, 131
  ilman, 313
  kaksinkertainen, 177
  puolinainen, 137
  vetovoima, 130
    kuva, 129
Bouguer-pallokuori, vetovoima, 138
Bouguer-reduktio, 128, 210
  epäsuora vaikutus, 152, 210
  palloreduktion massaefekti, 139
  yksinkertainen, 132
Boulderin yliopisto, Colorado, Yhdysvallat, 304, 346
Bruns, Ernst Heinrich, 94, 112
Brunsin pystygradienttiyhtälö, 94
Brunsin yhtälö, 112
Bureau Gravimétrique International, 123, 133, 151, 393

C

Cavendish, Henry, 3, 357
Center for Space Research, U. of Texas, Yhdysvallat, 370
CHAMP (satelliitti), 368
  GPS-vastaanotin, 368
  kiihtyvyysmittari, 369
  kuva, 369
Chasles, Michel, 33
Chaslesin lause, 33
  massajakauman moniselitteisyys, 35
  tasapotentiaalipinta reunana, 33
Columbuksen geoidi (malli), 144, 396
Coriolis, Gaspard-Gustave, 90
corioliskiihtyvyys
  ilmagravimetriassa, 316
  merivirtauksen, 331
  suunta, 332
coriolisvoima, 90
CryoSat-2 (satelliitti), 345

D

Darwin, Sir George, 382
Defense Mapping Agency (DMA), Yhdysvaltojen, 75
deformaatio, viskoosi (GIA), 340
deklinaatio, Kuun, 379
delta, Kroneckerin ja Diracin, 287
deltafunktio, Diracin, 27
  Poissonin ytimen limiitti, 204
dipoli
  Maan keskuksessa, 70
  potentiaalikenttä, 69
dipolimomentti, 19
dipolitiheyskerros, 19
Dirac, Paul, 27
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 34
dislokaatio (kide), 302
divergenssi (operaattori)
  konservatiivisen kentän, 408
  kuva, 405
  on lähdefunktio, 22
  tulkinta, 405
  vektorikentän, 405
Doodson, Arthur Thomas, 382
Doodsonin vakio, 382
  numeroarvo, 388

E

EGM96 (geopotentiaalimalli), 75
  kertoimia, keskivirheitä, 78

EGM2008 (geopotentiaalimalli), 63, 76, 123, 133
Eiffel-torni, 94
  72 nimeä, 16, 33, 45, 57, 90, 425
Einstein, Albert, 4
Einsteinin summauskonventio, 263
eksentrisyys, radan, 358
ekvivalenssiperiaate, 4, 91
El Niño Southern Oscillation (ENSO), 323
elastisuusominaisuudet
  Maan, 383
  maankuoren, 389
ellipsoidifunktiokehitelmä
  määritelmä, 77
  keskipakoispotentiaali, 97
  laskenta, 81
  normaalipotentiaali, 81
  standardimuoto, 80
  suppeneminen, 81
RMS *Empress of Ireland*, 163
ennustusvarianssi, 269, 274
  määritelmä, 263
  minimointi, 265
entistämisvaihe (”*restore*”), 215
Envisat (satelliitti), 344
epäsuora vaikutus, 128
erotus
  geoidi – ilmageoidi, 175
  korkeusanomalia – geoidikorkeus, 174
  korkeusanomalia – ilmageoidin korkeus, 174
  kvasigeoidi – geoidi, 175
  ortometrinen korkeus – normaalikorkeus, 176
ERS-1/2 (satelliitteja), 344
estimaattori, 263
  keskivirhe, 269
  optimaalinen, 264
Etelämanner
  mannerjäätikkö, 335
  sulamisvesi, 338
Eterna (ohjelmisto), 389
Eulerin identiteetti, 432
Eulerin kirjoitustapa, 93
European Geosciences Union (EGU), 394
European Space Agency (ESA)
  CryoSat-2, 345
  ERS-1/2, 344
  GOCE, 371
    meritopografiakartta, 334
  Sentinel-3A, 345
eustaattinen nousu, keskimerenpinnan, 327, 337
evaluointifunktionaali, 254
Everest, Mount, 148
eötvös (yksikkö), 118, 319
Eötvös, Loránd, 91
Eötvösin tensori, 318

F

Falklandin saaret, 372
Faller, James E., 304
Faraday, Michael, 22, 413
Fast Collocation, 288
Fastest Fourier Transform in the West (fftw, ohjelmisto), 433
Fennoskandia
  korkeuksien käyttöikä, 325
  mannerjäätikkö, 148, 335
  painovoimalinja, 330
Fennoskandian kilpi, isostaattiset anomaliat, 151
Fermat’n suuri lause, 94
FIN2000 (geoidimalli), 245, 326
  kuva, 246
  maannousun epookki, 326
  rakentaminen, 325
  tarkkuus, 245
FIN2005N00 (geoidimalli), 245, 395
  tarkkuus, 245
Finnish Geospatial Research Institute (FGI), 395
fluxion, 327
footprint, altimetrin, 347, 365
Forsberg, René, 245
Fourier, Joseph, 45
Fourier’n kantafunktiot
  kaksiulotteinen, 46
  kantana, 417
  rekursiivinen laskenta, 58
Fourier’n kerroin, 45
Fourier’n muunnos

artefaktit, 243
askelfunktio, 419
diskreetti, 232, 234, 431
jaksollisuus, 233, 241, 242
käänteinen, 432
ja ikkunointi, 244
ja käänteismuunnos, 232
kirjoitustapa, 231
ℓ^{-3}:n, 249
Fourier'n sarja, 417
Fourier'n sinikehitelmä, 45
Francis, Olivier, 310
funktioavaruus, 416
pallon pinnalla, 426
skalaaritulo, 424
ympyrän reunalla, 417
funktionaali
määritelmä, 254
häiriopotentiaalin, 254
lineaarinen
määritelmä, 254
potentiaalin, 34
spektraaliesitys, 280
funktioteoria, 416
fysikaalinen geodesia
geometria ja fysiikka, 50
oppikirjat, 396
potentiaalikonventio, 10
fysikaalinen teoria, mikä on, 1
fysikaalisen geodesian perusyhtälö, 116, 119

G

Galilei, Galileo, 4
Gauss, Carl Friedrich, 21
Gaussin divergenssilause, 412
esitys, 21
kahdeksan yksikön kuutio, 26
kirjanpito, 23
koordinaattimöykky, 446
kuva, 22, 413
laatikko, 24
pallo, 25
potentiaaliversio, 23
Geodeettinen laitos, painovoimakentän tutkimus, 395
Geodetic Reference System 1980, *katso* GRS80
geofysikaalinen reduktio, 128
geoidi
määritelmä, 91, 165
klassinen, 324
geoidilaskennan koulutus kehitysmaissa, 394
geoidilaskennan tutkijakoulu, kansainvälinen, 394
geoidimalli
Columbuksen, 144
laskenta, 243
maailmanlaajuinen korkean erotuskyvyn, 368
Suomen, 111
geoidimääritys
1-D-FFT, 241
FFT, 245
tutkimusryhmät, 243
gravimetrinen, 34, 191
periaate, 190
2-D laskentakehys, 193
klassinen, 128
maankuoren vakiotiheys, 178
NKG, 395
ohjelmisto, 244
pallokalotti, 217
satelliittialtimetria, 366
spektraalinäkökulma, 75
spherical FFT
monivyöhyke, 236
Taylorin kehitelmä, 238
vertailupiste, 326
geoidin ja korkeusjärjestelmien työryhmä (NKG), 395
geoidin korkeus eli undulaatio
määritelmä, 110
maailmanlaajuisesti, 110
satelliittialtimetriasta, 245
Suomessa, 110
geoidin nousu, 327, 328
geologinen kartta, tiheysarvot, 178
geophysical data record (GDR), 348, 364
geopotentiaali
kuvan terävyys, 63

spektraaliesitys, 72
tasapotentiaalipinta, 91
geopotentiaaliluku
määritelmä, 162
energiatasona, 163
ja vaaittu korkeus, 165
GEOS-3 (satelliitti), 343
Geosat (satelliitti), 343
geostrofinen tasapaino, 332
geostrofiset yhtälöt, 332
Germain, Marie-Sophie, 93
Germainin kaarevuus, 93
GFZ (*German Research Centre for Geosciences*), 368
Gibbs, Josiah Willard, 219
Gibbsin ilmiö
askelfunktio, 420
Fourier'n muunnos, 243
ydinmodifikaatio, 219
glacial isostatic adjustment (GIA), 327, 338
$GM_{\oplus}$, paras arvo, 6
GNSS
altimetriasatelliitilla, 367
gravimetristen asemien korkeus, 128
ilmagravimetriassa, 315
korkeudenmäärityksessä, 243
mareografin paikannus, 327, 330
meren vuorovesikuormituksen mittaus, 390
GNSS-vaaitus, 326
GOCE (satelliitti)
kuvaus, 371
erotuskyky, 318, 372
kuva, 373
meritopografia, 334
merivirtaukset ja lämmönkuljetus, 333
nimi, 372
tarkkuus, 372
GPS
CHAMP-satelliitilla, 368
vertausjärjestelmä, 101
GRACE (satelliittipari)
kuvaus, 369, 370
kiihyvyysmittari, 370
mikroaaltolinkki, 370
tulokset, video, 371
GRACE:n seuraajamissio, 371
gradientti
painovoimahäiriön, 293
potentiaalin pystysuuntainen, 34
vetovoiman, 372
gradientti (operaattori), 9
kuva, 404
lineaarisuus, 404
skalaarikentän, 403
tulkinta, 404
gravimetri
absoluuttinen eli ballistinen, 304
toimintaperiaate, 305
häkki, 304
laserinterferometri, 304
superjousi, 304
astatisoitu, 299, 301
keksintö, 301
atomi- eli kvantti-
toimintaperiaate, 307, 309
ambiguiteettiongelma, 308
kuva, 309
FG5, 304
valokuva, 306
heiluri-, 296
sukellusvenemittaus, 296
herkkyys, 298, 299
ilmakehän vetovoima, 313
ilmanpaineen vaihtelut, 313
IMGC-02, 307
JILA, 304
jousi
hetkellinen pituus, 301
lepopituus, 298, 299
pidennys, 298
tasapainopituus, 298, 299
jousi- eli relatiivinen, 297, 300
aineen ominaisuudet, 302
arretointi, 303
käynti, 302
termostointi, 303
kalibrointi, 312
LaCoste-Romberg, 299, 301, 305
puomi, 299
rekisteröivä, 390

suprajohtava, 311
toimintaperiaate, 311
stabiilius, 312
trendi, 312
vaimennus, 303, 315, 316
gravitaatio
kenttäteoria, 1
on vetovoima, 5
teoria, 1
gravitaatioaalto, 17
gravitaatiogradiometri (GOCE)
kiihtyvyysmittari, 372
kuva, 373
kuvaus, 372
teoria, 372
gravitaatiokenttä
konservatiivisuus, 5
stationaarisuus, 5
gravitaatiolinssi, 2
gravitaation laki, 3
gravitaatiovakio, universaalinen, 3
GRAVSOFT (ohjelmisto), 244
Green, George, 28
Greenin ensimmäinen lause, 28
Greenin funktio
geopotentiaalin, 338
merenpinnan, 337
pystysiirtymän, 338
Greenin kolmas lause, 29
kappaleen ulkoavaruudelle, 32
piste rajapinnalla, 30
sisäinen piste, 29, 31
ulkoinen piste, 29
Greenin toinen lause, 28
Greenin vastaavan kerroksen lause, 33
Greenland Aerogeophysics Project (GAP), 317
Greenwichin meridiaani, 50
GRS80
määritelmä, 101
$GM_{\oplus}$, 6
ilmakehän massa, 314
pallofunktiokertoimet, 104
Grönlanti
ilmagravimetria, 317
mannerjäätikkö, 335
sulamisvesi, 338
Guyana, Ranskan, 295
GWR *i*Grav (gravimetri), 312
GWR20 (gravimetri), 312

H

Haiyang-2A (satelliitti), 345
hakutaulukko (FFT), 433
Hardangerin ylänkö (Norja), 147
harmoninen jatkaminen alaspäin
Helmertin kondensaatio, 437
lauseke $r\Delta g$, 203
olemassaolo, 202, 212
painovoima-anomalian, 213
ulkoisen kentän, 214, 215
harmoninen kenttä
määritelmä, 16
lauseke $r\Delta g$, 202
pystysuuntainen siirto, 46, 47
säteittäinen siirto, 74
vaimennus korkeuden mukaan, 55
kuva, 47
harmoninen värähtelijä, 44, 450
hauta, syvänmeren, 296
Hayford, John Fillmore, 143
heiluri
heilahdusaika, 295
mittauksen absoluuttisuus, 297
tukipiste, 297
heilurikello, 295
heiluriyhtälö, 295
Heiskanen, Veikko Aleksanteri, 144, 396
helikopteri (ilmagravimetria), 316
Helmert, Friedrich Robert, 140
Helmertin kondensaatio, 209
kuvaus, 140
dipolitiheyskerroksena, 442
epäsuora vaikutus, 441
dipolimenetelmä, 443
vakiomaasto, 442
kokonaispotentiaali, 439
kondensaatiokerroksen potentiaali, 435
kuva, 141
massan säilyminen, 141
painovoimavaikutus, 441
topografian potentiaali, 435

Helmertin korkeus
määritys, 176
approksimaationa, 177
Helsingin observatorio, pääkiintopiste, 163, 164
Helsingin satama (N60), 325
hila (Fourier)
häiriöpotentiaalin, 234
interpolointi, 234
muodostus, 232
painovoima-anomalioiden, 232
Stokesin ytimen, 233
Hirvonen, Reino Antero, 266
Hirvosen geoidimalli, 395
Hofmann-Wellenhof, Bernhard, 396
mid-Holocene highstand, 335
homogeeninen prediktio, 272, 273
homogeenisuus, painovoimadatan, 317
homogeenisuusolettamus, 257
ja kovarianssifunktio, 258
Hubblen avaruusteleskooppi, 2
huonosti asetettu ongelma, 212
Huygens, Christiaan, 295
häiriöpotentiaali, 109
määritelmä, 105
asteluvut 0 ja 1, 106, 117
asteosuudet, 106
isotropia, 276
pallofunktiokehitelmä, 105

I
IAG, 245, 393
ikkunointi, datan (Fourier), 242
ikkunointifunktio (Fourier), 243
ilma-anomalia
määritelmä, 121
Etelä-Suomi, 123
käyttö, 122
laskenta, 122
ilmageoidi, 174
ilmagravimetri, 303
ilmagravimetria
kuvaus, 315
corioliskiihtyvyys, 316
GNSS, 315
gravimetrinen kartoitus, 247
homogeenisuus, 317
koneessa mitattu painovoima, 315
lentokoneen liikkeet, 315
lentokorkeus, 316
painovoima, 315
pystykiihtyvyyden epävarmuus, 316
ilmakehä
kokonaismassa, 314
massan pintatiheys, 313
ilmakehän kuormitus, 390
ilmakehän vastuksen kompensaatio, 317
inklinaatio, ratatason, 358, 362
Kuun, 381
Institut für Erdmessung (Hannover, Saksa), 243, 394
International Geodynamics and Earth Tide Service (IGETS), 312
International Geoid Commission (IGeC), 393
Euroopan alakommissio, 394
International Geoid Service (IGeS), 393
International Gravity Field Service (IGFS), 393, 394
International Service for the Geoid (ISG), 393
International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG), 393
invariantti, 398, 423
inversiolasku (FFT), 240
isoakselin puolikas, radan, 358
isostaattinen anomalia
määritelmä, 150
Etelä-Suomi, 151
isostaattinen geoidi, 152
miksi kiinnostaa, 153
isostaattinen hypoteesi, 152
isostaattinen kompensaatio, 145
määritelmä, 142
prosenttimäärä, 153
Isostaattinen laitos, 396
isostaattinen reduktio
kuvaus, 153
epäsuora vaikutus, 152, 156, 210
jäännöskenttä, 150
kogeoidi, 152
massan säilyminen, 150
massatiheyskerrosmenetelmä, 153

kuva, 155
tavoitteet, 150
isostasia
kuva, 143
mannerjäätiköt, 148
nykykäsitys, 148, 149
paleotutkimus, 148
isostasiahypoteesi, 142
isotrooppinen prosessi, 266
isotrooppinen tiheysjakauma, 9
isotropia ja spektraaliesitys, 199
isotropiaolettamus, 260
Italian valtio (ISG, rahoitus), 394
itseadjungoitu differentiaaliyhtälö, 424
itseadjungoitu operaattori
määritelmä, 421
symmetrinen matriisi, 422
Itämeri
ilmagravimetria, 317
merenpinnan heilahtelu, 331
meritopografia, 330, 331
Seasat-aineisto, 343
suolaisuusgradientti, 331

J

J_2 (dynaaminen litistyneisyys), 77, 101, 359
Jaavanmeri (Hollannin Intia, Indonesia), 296
Jacobi, Carl Gustav Jacob, 67
Jacobin determinantti
määritelmä, 410
Bouguer-laatan muunnos, 129
karttaprojektiokoordinaatit, 231
napakoordinaatit, 410
pallokoordinaatit (ϕ, λ), 229
pallokoordinaatit (ψ, α), 67
Jason (satelliittien sarja)
kuvaus, 345
radan valinta, 360
jatkuvuusyhtälö, 412
Jerry (GRACE-satellitti), 370
jokiallas, trooppinen, 371
jousivaaka, lineaarinen, 298
juuri, vuoriston, 142
ainetiheys, 143
syvyys, 144, 146
jälki, matriisin, 423
järjestysluku, harmoninen, 54
jää, monivuotinen, 366
jääkuorman historia, 338
jäännösmaastomallinnus (RTM), 213, 214
epäsuora vaikutus, 215
interpolointimenetelmänä, 215
jäännöspainovoimakenttä, 215
jäätiköiden vetäytyminen, 148

K

Kaivopuisto (Helsinki), pääkiintopiste, 163, 164, 325
kaksoisrakokoe (kvanttiteoria), 308
kalotti, pallo- (geoidimääritys), 217
kaltevuus, Maan pyörähdysakselin, 391
Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio (IAG), 245, 393
Kansainvälinen gravimetrinen toimisto (BGI), 123, 133, 151, 393
kappale (laaja), potentiaali, 6
kappale (pistemäinen), potentiaali, 5
kappale, ulkoinen potentiaali, 35
karakteristinen yhtälö, 423
Kartastokoordinaattijärjestelmä (KKJ), 122
karttaprojektiokoordinaatit (kuva), 230
Kater, Henry, 296
kaukovaikutus, 1
Kaula, William, 284
kenkälaatikkomaailma, 44, 45
kenttä, käsite, 41
kenttäteoria, gravitaation, 1
kenttäviiva, 22, 413
kenttäyhtälöt
gravitaation, 1, 16
sähkömagnetismin, 16, 17
Kepler, Johannes, 357
Simpsonin sääntö, 223
Keplerin kolmas laki, 357
octave-skripti, 364
Keplerin rata-alkiot, 358
Keplerin toinen laki, 400
kuva, 401
kertoma, 57
keskigeoidi, 386
keskimerenpinta

määritelmä, 323
käsite, 324
globaali, 326
keskisijainti, 117
keskipakoispotentiaali, 88
lauseke, 90
keskipakoisvoima, 89, 108
lauseke, 90
kuva, 89
kiertoheiluri (Cavendish), 4
kiihtyvyys, GNSS:n mittaama, 315, 316
kiihtyvyysmittari satelliitilla, 317
kiinteä kappale, 11
kenttä äärettömyydellä, 12
kokonaismassa, 13
potentiaali, 11
vetovoima, 12
KKJ, 122
Knudsen, Per, 245
kogeoidi, 128
kohina (määritelmä), 262
kohinavarianssimatriisi, 263, 273
kokoonpuristumattomuus, 23, 413
Kolkata (Intia), 143
kollokaatio, pienimmän neliösumman (LSC), 245
kuvaus, 261
FFT, 285
joustavuus, 273
kuva, 268
ratkaisu, 269
teoria, 272
kommutoiva kaavio
FFT, 234
poistamis-entistämismenetelmä, 216
pystysuuntainen siirto, 47
säteittäinen siirto, 74
kompensaatiosyvyys, 146, 151
komponentit, vektorin, 402
kondensaatiokerros, ulkoinen potentiaali, 439
konfokaalisuus, 52
konservatiivinen kenttä
määritelmä, 5, 407
divergenssi, 408
potentiaali, 407
potentiaalin gradienttina, 411
konvektio, Maan vaipassa, 153
konvoluutio
kirjoitustapa, 231
laskenta FFT:llä, 239
konvoluutiolause, 231
koordinaatit
ellipsoidiset, 52
geodeettiset, 50
määritelmä, 52
luonnolliset, 96, 97
kuva, 96
koordinaattiaika (suhteellisuusteoria), 184
korkeuden potenssien asteosuudet, 440
korkeuksien muunnospinta, 326, 395
korkeus
ja geopotentiaaliluku, 165
vertausellipsoidista, 51, 111
korkeusanomalia
määritelmä, 167
kolmiulotteinen, 121
telluroidikuvaus, 120
korkeusjärjestelmä, kansallinen, 325
korkkiruuvisääntö, vektoritulon, 399, 402
korrelaatio, kvasigeoidi & topografia, 172, 173
korrelaatiopituus, 266, 267
kosinisääntö pallolla, 235, 379
puolikulman, 235
kovarianssifunktio
määritelmä, 259
empiirinen, 284
Gaussin ja Markovin, 267
globaali, 286
Hirvosen, 266, 269
kuva, 267
häiriöpotentiaalin, 275, 292
avaruudessa, 280, 282
isotropia, 276
painovoima-anomalioiden, 282
spektraaliesitys, 276
Kronstadt (Venäjä) datumi, 163
kulmaetäisyys, geosentrinen, 235
kuva, 259
kvadratuuri, blokkikeskiarvo, 223

kvadrupoli Maan keskuksessa, 70
kvasigeoidi
käsite, 121, 173
kuva, 172
käynti (gravimetri), 302
Kääriäinen, Jussi, 317
Kööpenhamina (Tanska), geoidimääritys, 395

L
laattatektoniikka, 149
LaCoste, Lucien, 301
LAGEOS (satelliitti), 358
lankaheiluri, hyvin pitkä, 297
Laplace, Pierre-Simon, 16, 408
Laplacen operaattori (Δ), 408
määritelmä, 16, 41
lineaarisuus, 254
Laplacen yhtälö, 16
määritelmä, 41
ellipsoidisissa koordinaateissa, 77
kentän paikallinen käyttäytyminen, 42
koordinaattimuunnos, 42
lineaarisuus, 42
napakoordinaateissa, 48
pallokoordinaateissa, 53, 445
perusratkaisut, 53
ratkaiseminen, 41
suorakulmaisissa koordinaateissa, 43
Lappi, astemittaus, 129
lattalukemien ero, 181
Laurentian mannerjäätikkö, 335
Legendre, Adrien-Marie, 57
Legendren funktio, 53, 57
toisen lajin, 77
taulukko, 79
täysin normalisoitu, 428
Legendren liitännäisfunktio
etumerkkialueet, 85
etumerkkivälit, 61
kuva, 60
symmetriat, 59, 64, 84
taulukko, 60
täysin normalisoitu, 68
Legendren polynomi
etumerkkivälit, 59
kuva, 58
symmetriat, 59
taulukko, 58
täysin normalisoitu, 68
Legendren polynomit
generoiva funktio, 200
geometria, 199
kantana, 426
ortogonaalisuus
välillä $[-1, +1]$, 67
yksikköpallolla, 68
ortonormaalius yksikköpallolla, 68
Legendren yhtälö, 450
Lego™-palikka, 25
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1
Leibnizin yliopisto (Hannover, Saksa), 394
leveysaste
geosentrinen, 50
redukoitu, 100
määritelmä, 52
tyypit
kuva, 99
suhteet, 100
liikelaki, Newtonin, 4
linearisointi, ilma-anomalian, 122
Liouville, Joseph, 425
longitudi, Kuun, 380
Love, Augustus, 383
Loven luku
elastinen, 339, 383
H_n, 384
K_n, 385
L_n, 384
määritys, 385
GNSS, 385
riippuvuus vuoroveden jaksosta, 385
viskoosi, 340
LSC, *katso* kollokaatio, pienimmän neliösumman
lumenluonti, 312
lunar laser ranging (LLR), 304
luonnollinen anomalia, 358
luotiviiva
määritelmä, 87
kaarevuus, 94, 95

kuva, 94
taipuminen vuoreen päin, 143
luotiviivan poikkeama
määritelmä, 87, 109
funktionaalina, 255
havaittu, 111
ja geoidi, 110, 125, 198
merellä, 343
sisäinen vyöhyke, 224
Suomessa, 110
luotiviivan suunta, 109
absoluuttinen, 386
lähde, vektorikentän, 23, 405
kuva, 405

M
Maa
dipolimomentti, 70
hitaustensori, 71
kaarevuussäde, poikittainen, 51
kokonaismassa, 76, 101
kvadrupolimomentti, 71
litistyneisyys, 100
magneettikenttä, 153
pyörähdysnopeus, 101
reologia, 338
sisäinen massajakauma, 35
säde, 18
ulkoinen potentiaali, 152
Maa-ellipsoidi
ensimmäinen eksentrisyys, 51
isoakselin puolikas, 100
napasäde, 100
pikkuakselin puolikas, 100
päiväntasaajasäde, 51, 100
maailmaneetteri, 1
Maan massakeskipiste origona, 70, 117
Maan muoto, 91
maannousu
absoluuttinen, 327
postglasiaalinen
mekanismi, 329
suhteellinen, 327
vaikutus korkeusjärjestelmään, 325
maantieteellinen keskiarvo
määritelmä, 257
M, 258
M′, 260
maantieteellinen varianssi, 257
maastokorjaus (TC)
määritelmä, 132
arvot, 135
esimerkki, 137
etumerkki, 134
FFT, 247, 248
konvoluutio, 249
pallogeometriassa, 139
prismamenetelmä, 134, 135, 248
systemaattinen virhe, 134
ulkoisessa tilassa, 250
yhtälö, 134
maaston potentiaali, 15
maaston vaikutus ilmagravimetriassa, 317
maastopisteen potentiaali, 162
makea jokivesi, vaihtelu, 323
Malediivit (Intian valtameri), 336
mannerjäätiköt ja merenpinta, 335
mareografi
havaintosuure, 336
maannousu, 327
Mars (planeetta), painovoimakenttä, 284
massapintatiheys, SI-yksikkö, 18
massapiste
maanalainen, 33
vetovoimavektori, 10
massapisteiden joukko, potentiaali, 11
massatiheyskerros
Helmertin kondensaatio, 140
kaksinkertainen, 19, 20
yksinkertainen, 18
massaviiva, potentiaali, 13
Mauna Kea (Havaji), 160
Maupertuis, Pierre de, 129
Maxwell, James Clerk, 16
mean geoid, 386
Meissnerin ilmiö, 311
Melchior, Paul, 381
meren vuorovesikuormitus, 389
merenpinnan jäännösvaihtelu, 349
merenpinnan nousu, 326
globaali, 345
Holoseeni, kuva, 339

merenpinnan vaihtelu, 323
merenpintayhtälö, 336
  Greenin funktio, 337, 339
  konvoluutio, 337
  kuva, 336
  yhtälö, 336
merenpohjan paine, 369
meridiaaniellipsi
  kuva, 99
  polttopisteet, 52
meridiaanikonvergenssi, 235
merigravimetri, 303
merijään kaukokartoitus, 366
meritopografia, 332
  määritelmä, 324
  ajallinen muutos, 328
  GOCEn tuottama kartta, 334
  ja lämmönkuljetus, 331
  ja merivirtaukset, 333
  kartoitus, 344
  määritys, 330
merivirtaus
  inversiotehtävä, 372
  poikittaiskallistus, 332
  vaihtelu, 333
merkitsevä aallonkorkeus (SWH), 347
mesomittakaavan pyörre, 323, 333
metalliväsymys, 302
metallurgia, 302
Metsähovin tutkimusasema, 312
  N2000 pääkiintopiste, 163, 325
  suprajohtava gravimetri, 312
mikrogal (µGal), 117
mikroseismiikka, vaikutus gravimetriin, 302, 304
Milano (Italia), ISG:n päämaja, 394
milligal (mGal), 117
mittainvarianssi, 17
Mohorovičić, Andrija, 156
Mohorovičićin rajapinta (”Moho”), 156, 250
Molodenski, Mihail Sergejevitš, 33
  kirja, 396
  valokuva, 168
Molodenskin katkaisukertoimet, 221
Molodenskin menetelmä
  korkeusanomalia, 212
  laskentapiste vertaustasoksi, 212
  linearisointi, 210
  painovoiman pystygradientti, 208
Molodenskin oivallus, 168, 171
  graafinen aasinsilta, 171
Molodenskin teoria, 33, 120, 127, 167
monopoli Maan keskuksessa, 70
monsuuni, 371
moodin relaksaatioaika, 340
moodin vahvuusluku, 340
Moritz, Helmut, 396
mu-metalli, 311
Munk, Walter, 345
muuttujien erottaminen
  napakoordinaatit, 48
  pallokoordinaatit, 448
  pallon pintakoordinaatit, 450
  suorakulmaiset koordinaatit, 43
Mäkinen, Jaakko, 166

N

N60 (korkeusjärjestelmä), 162, 325
  maannousu, 325
  vertauspinta, 245
N2000 (korkeusjärjestelmä), 163, 245, 325
nabla (∇, operaattori), 9, 403
National Geospatial-Intelligence Agency (NGA), Yhdysvaltojen, 75, 393
National Imagery and Mapping Agency (NIMA), Yhdysvaltojen, 75
NAVD88, North American Vertical Datum 1988, 163
Neumann, Carl Gottfried, 73
Newton, Isaac, 3
Newtonin gravitaation laki, 3
Newtonin gravitaatioteoria, 1
Newtonin liikelaki, 4
nielu, vektorikentän, 23, 405
  kuva, 405
Niethammer, Theodor, 178
Niethammerin menetelmä, 178
NKG2004 (geoidimalli), 395
NKG2015 (geoidimalli), 395
NN (korkeusjärjestelmä), 163
nollageoidi, 387
nollapituusjousi, 300, 302

keksintö, 301
miten rakennetaan, 300
nollapotentiaali, konventio
keskimerenpinnalla, 17
äärettömyydellä, 17
nopea Fourier'n muunnos (FFT)
algoritmit, 433
geoidimääritys, 234
ja konvoluutio, 232
kollokaatio, 285, 288
kommutoiva kaavio, 234
maastokorjaus, 247, 250
mixed-radix, 431
radix 2, 431
Nordiska Kommissionen för Geodesi (NKG), 395
Norjanmeri, 147
Normaal Amsterdams Peil (NAP), 163
normaaligravitaatiopotentiaalin pallofunktiokehitelmä, 103
normaalikorjaus (NC)
kiintopisteväli, 183
yhtälö, 182
normaalikorkeus
määritelmä, 172
laskenta, 182
iterointi, 179
operationaalisuus, 173
tarkka laskenta, 179
normaaliluotiviiva
kaarevuus, 95, 169
suunta, 110
normaalipainovoima, 100
määritelmä, 87
GRS80, 101
lineaarisuus luotiviivaa pitkin, 168, 171, 179
merenpinnalla, 122
tunnetussa paikassa, 114, 115
vertausellipsoidin pinnalla, 99
normaalipainovoimakenttä
ilmakehän massa, 314
kuva, 88
normaalipainovoimavektori, 169
normaalipotentiaali, 100
määritelmä, 87
GRS80, 101
päiväntasaajan yläpuolella, 102, 103
vertausellipsoidin pinnalla, 169
normi, vektorin, 5, 398, 416
Nottingham (Iso-Brittannia), 28
nouseva solmu, radan, 358
Nouvel, Henri SJ, 163
nypläyskerroin (FFT), 433
näytteenottotiheys, spatiaalinen, 253

O

octave (ohjelmointikieli), 65
Ohio (Yhdysvallat), 144, 267
Ohion valtionyliopisto (OSU), 75, 76, 396
ominaisaika (suhteellisuusteoria), 184
ominaisarvotehtävä
itseadjungoidun operaattorin, 422
lineaarisen operaattorin, 420
matriisin, 421
paikan varianssimatriisin, 423
ominaisvärähtelyt, kiinteän Maan, 312, 395
optimaalisuus, pienimmän neliösumman, 265
ortometrinen korjaus (OC), 181
kiintopisteväli, 183
yhtälö, 182
ortometrinen korkeus
määritelmä, 97, 165
laskenta, 165, 181
iterointi, 166, 176, 177
maaston tiheyshypoteesi, 173
tarkka laskenta, 176
ortonormaali kanta (määritelmä), 5, 402
OSU-malli, 76

P

painovoima
määritelmä, 304
absoluuttinen mittaus, Suomi, 310
päiväntasaajalla, 102
tropiikissa, 296
vaaituslinjaa pitkin, 183
vaihtelujen suuruus, 118
painovoima vastaan gravitaatio, 89, 91
painovoima-anomalia
määritelmä, 119

asteosuudet, 117
blokkikeskiarvo, 222
tarkkuus, 273
erikoiskeskiarvo, 224
funktionaalina, 255
globaali keskiarvo, 257
harmoninen jatkaminen, 204
havainnot, 269
ilmakehäreduktio, 314
laskenta, 121
lauseke, 115
reunaehtona, 119
satelliittialtimetriasta, 245
painovoimagradientti, 319
eötvös-yksikkö, 118
Kuun ja Auringon, 320
painovoimagradienttitensori, 318
mittaus, 319
painovoimahäiriö
määritelmä, 113
havaitseminen, 114
spektraaliesitys, 114
painovoimakaava, 87, 100, 122
vanha, 102
painovoimakartoitus, 309
painovoimakenttä
ajallinen muutos, 369
havaintojen tiheys, 253
hienorakenne, 368
ja geopotentiaali, 412
jäännös-, 215
määritys
CHAMP, 369
GOCE, 373
oppikirjat, 396
tilastollinen käyttäytyminen, 266
tutkimus
Euroopassa, 394
kansainvälisesti, 393
Suomessa, 395
TKK:ssa, 396
vuorien, 142
painovoimamittaus, vertauspinnat (kuva), 115
painovoiman pystygradientti, 102
anomaalinen
reduktio merenpintaan, 209
ydin, 205
ilmassa, 318
kallion sisällä, 176
painovoimapotentiaali, 90
pakonopeus, 85
pallo, pinnoitettu
sisäinen potentiaali, 21
sisäinen vetovoima, 19
ulkoinen potentiaali, 21
ulkoinen vetovoima, 19
pallofunktio
aallonpituus, 62
etumerkki, 62
Laplacen, 53
nollakohdat, 62
puoliaallonpituus, 62
taulukko, 64
ruutufunktio, 61, 62
sektorifunktio, 61, 62
symmetriat, 62
vyöhykefunktio, 61, 62
pallofunktiokehitelmä
ensimmäisen asteen osa, 69
ensimmäiset termit, 104
erotuskyky, 63
globaali, 75
kerroin, 54
malli, 76
nollannen asteen osa, 69
pyörähdyssymmetria, 65, 67
pallofunktiokerroin
funktionaalina, 255
täysin normalisoitu, 427
pallokoordinaatit, 50
kuva, 51
pallokuori
kuva, 7
potentiaali, 6, 7
potentiaali ja vetovoima, kuva, 9
vetovoima, 8
Paulin kertoimet, 221
Peltier, W. Richard, 336
Peltier'n ilmiö, 335
perigeumin argumentti, 358
Peru, astemittaus, 129

pinta
normaalisuunta, 19
normaalivektori, 409
potentiaalin normaaliderivaatta, 19
suunnistus, 412
pinta-alkio, suunnistettu, 409
pintapallofunktio, 53, 450
esitys, 61
karttana, 63
kirjoitustapa, 54
piirtäminen, 65, 66
täysin normalisoitu, 427
pintapallofunktiot kantana, 426
pistemassaoletus, taivaanmekaniikan, 13
pistetulo, *katso* skalaaritulo
pitkä vesivaaka, 385
Pizzetti, Paolo, 100
plastisuus, 302
Plesetskin kosmodromi (Venäjä)
CHAMP, 368
GOCE, 371
Pohjoinen jäämeri
jään tilavuus, 366, 367
jääpeite, 366
Pointe-au-Père (Rimouski, Quebec, Kanada), 163
Poisson, Siméon Denis, 16
Poissonin integraali
funktiolle $r\Delta g$, 202
harmonisen kentän laskemiseksi pinta-arvoista, 201
spektraalimuoto, 203
Poissonin ydin painovoima-anomalioille, 203–205
Poissonin yhtälö
määritelmä, 16
geopotentiaalille, 91
poistamis-entistämismenetelmä, 128, 215, 216
poistamisvaihe (”*remove*”), 213
polynomisovitus, geoidipinnan, 326
potentiaali
määritelmä, 5
harmoninen jatkaminen ylöspäin, 279
sanan alkuperä, 28
yksiselitteisyys, 408
potentiaalienergia, 10
potkurilentokone (ilmagravimetria), 316
Potsdamin järjestelmä, 297, 309
PRARE (paikannuslaite), 344
Pratt, John Henry, 143
Prattin ja Hayfordin hypoteesi, 143, 144
prekessio, ratatason, 359
Prey, Adalbert, 177
Prey-reduktio, 177
Principia (kirja), 3
pullataikinamalli, maannousun, 328
punnitseminen, maapallon, 357
punnitus, vierailijoiden, 312
puskutraktori (vertauskuva), 139, 213, 214
putoavat atomit, painovoimapotentiaali, 308
pyörreilmiö, 90
pyörteisyys
vektorikentän, 406
virtauksen, 413
pyörähdysmomentti
säilyminen, 401
kuva, 401
vektoritulona, 399
pyörähdyspotentiaali, 88
Päijänne, 166
pääkiintopiste
N60, 164, 325
N2000, 325

R
rajoitettu kantaja, 231
Raman-ilmiö, 308
Ranskan tiedeakatemia, 129
Ranskan valtio (BGI, rahoitus), 393
Rapp, Richard H., 76
regularisointi, ulkopuolisen kentän, 212
rekursio
Fourier’n kantafunktioiden laskenta, 59
Legendren polynomien laskenta, 57
normaalikorkeuden määritelmä, 172
ortometrisen korkeuden määritelmä, 176
remove-restore-menetelmä, 128, 215, 216
remove-vaihe, 213

residual terrain modelling (RTM), 213, 214
restore-vaihe, 215
reuna-arvotehtävä
  määritelmä, 34, 42
  Dirichletin, 34, 202
  fysikaalisen geodesian, 118
  kolmas, 116, 118
  Neumannin, 73, 75
  reunapinta, valinta, 127
  spektraaliratkaisu, 119
  vapaan reunan, 115
reunaehto
  jaksollisuus, 424
  kenkälaatikko, 45
  painovoima-anomalia, 119
reunustaminen, datan ja ytimen (Fourier), 242
reversioheiluri, Katerin, 296
Richer, Jean, 295
risteyskohtatasoitus
  a priori epävarmuudet, 354
  datumidefekti, 354
  esimerkki, 349, 355
  havaintoyhtälö, 349
  maailmanlaajuinen, 356
  merenpinnan vaihtelevuus, 367
  pakkoehto, 351, 354
  pienimmän neliösumman ratkaisu, 351
  rautalankamalli, 354
  sallitut datumimuunnokset, 356, 357
  vakio ja trendi, 353
  vakio ratakorjaus, 349
ristikovarianssi, 256
ristitulo, *katso* vektoritulo
Robin, Victor Gustave, 119
Romberg, Arnold, 301
Romberg, Werner, 223
roottori (operaattori)
  gradientin, 407
  kuva, 406
  tulkinta, 406
  tuulikentän, 406
  vektorikentän, 405
Royal Society of Edinburgh, 17
Royal Society of London, 3, 17, 120
runkomittaus gravimetriassa, 309

S

Sacks, Oliver, 4
San Francisco (Yhdysvallat), 394
Sandwell, David, 247
Sapporo (Japani), 393
SARAL (satelliitti), 345
saros (Kuun rataliikkeen jaksollisuus), 325
satelliittialtimetria
  kuvaus, 343, 347
  geoidi, 366
  havaintoyhtälö, 349
  ja vaaitus, 351, 354
  mannerjäätikön yli, 365
  merenpinnan vaihtelevuus, 366
  merijää, 365
  mittausmenetelmä, 345
  mittausten reduktio, 348
  paluupulssi
    analyysi, 364, 365
    puolikorkeuspiste, 365
  ratakorjaus, 346
  retracking, 365, 366
  saaristoissa, 365
  toistuvat maaradat, 366
  tulokset, 364
satelliittipainovoimamissio, 368
  erot ilmagravimetrian verrattuna, 317
  FFT, 247
  radan korkeus, 317
satelliittirata
  aurinkosynkroninen, 360, 361
  napareiät, 360, 362
  resonanssi, 360
  retrogradinen, 360, 362
  toistojakso, 358
  valinta, 357
  varjoton, 360, 361
Saturnus (planeetta), rengas, 295
Schrödinger, Erwin, 42
Schrödingerin kissa, 42, 309
Schwarzschild, Karl, 183
Schwarzschildin metriikka, 183
Scrippsin merentutkimuslaitos, 247

Seasat (satelliitti), 343
seismiikka, deglasiaation aikainen, 340
seisminen tomografia, 152
sekakovarianssi, 283
Sentinel-3A (satelliitti), 345
sferoidi
    Brunsin, 104
    Helmertin, 104
Shida, Toshi, 386
signaali (määritelmä), 262
signaalikovarianssimatriisi, 262
signaalivarianssi, 266
signaalivarianssimatriisi, 261
    painovoima-anomalioiden, 268
significant wave height (SWH), 347
Simpson, Thomas, 223
Simpsonin sääntö
    blokkikeskiarvo, 223
    solmupistepainot, 224
sininen kalvo, Maan, 369
skalaarikenttä (määritelmä), 401
skalaaritulo
    määritelmä, 397
    kahden funktion, 416
    Legendren polynomien, 67, 426
    lineaarisuus, 415
    ominaisuudet, 398
    pallon pinnalla, 426
    vaihdannaisuus, 415
Skylab (avaruusasema), 343
Solheim, Dag, 245
Somigliana, Carlo, 100
Somiglianan ja Pizzettin yhtälö, 100
spatiaaliaallonpituus (Fourier), 233
spatiaalitaajuus (Fourier), 233, 249
spektraalikerroin, 54
spektraaliosuusfunktio, 71
SST (*Satellite-to-Satellite Tracking*), 370
stereografinen karttaprojektio, 230
Sterneck, Robert von, 296
stokastinen prosessi
    määritelmä, 255
    ergodisuus, 258
    Maan pinnalla, 256, 257
    stationaarisuus, 261
    varianssifunktio, 256
Stokes, George Gabriel, 119
Stokesin roottorilause, 411
    kuva, 410
Stokesin ydin, 120, 190
    deltojen funktiona, 236
    kaksiulotteinen, 195
        kuva, 196
    Maan pinnalla, 192
    modifioitu, 218
        kuva, 219
    sileys, 222
    spektraalimuoto, 191
    suljettu lauseke, 191
    Taylorin sarjakehitelmä, 238
Stokesin yhtälö
    2-D-simulaatio, 198
    differentiointi, 198
    geoidin korkeus, 190
    geoidin nousu, 328
    häiriöpotentiaali, 119
    integroinnin geometria, 191
    ja harmonisuus, 209
    kollokaatiossa, 272
    konvoluutio, 229
    sisäinen vyöhyke, 223
    spektraalimuoto, 189
    tasokoordinaateissa, 231
    ulkoavaruudessa, 191
Strang van Hees, Govert, 236
Sturm, Jacques, 425
Sturmin ja Liouvillen ongelma, 425
suhteellisuusteoria, 1
    yleinen, 17, 183
sukellusveneestä laukaistava ohjus, 344
sulkuvirhe (gravimetria), 303
Suomenlahti, ilmagravimetria, 317
suppeneminen, tasainen, 419, 436
suuntapallo, 427
sverdrup (yksikkö), 333
symmetrinen matriisi
    ominaisvektorit, 422
    on itseadjungoitu operaattori, 422
Synthetic Aperture Radar Altimeter (SRAL), 345
sähkövirrat Maan ytimessä, 153
säilymislaki, 23

T
taajuusdomeeni (Fourier), 46, 233
taivaanpallo, 427
tangenttitason koordinaatit, 229
tarkkavaaitus
  korkeusjärjestelmän luominen, 325
  mareografien välillä, 330
tasapotentiaalipinnat
  kuva, 113
  yhdensuuntaisuus, 165
tasapotentiaalipinta, 91
  kaarevuus, 92, 319
    kuva, 93
tasaus (gravimetri), 300
teetauko, 312
Teknillinen korkeakoulu (TKK), 396
telluroidi
  määritelmä, 120
  kuva, 172
telluroidikuvaus, 120, 172
termostointi (gravimetri), 303
teräksen valmistus, 302
tide-free geoid, 387
Tihonov, Andrei Nikolajevitš, 354
Tihonovin regularisointi, 355
Toeplitz, Otto, 287
Toeplitz-sirkulantti matriisi, 287
Tom (GRACE-satelliitti), 370
TOPEX/Poseidon (satelliitti)
  kuvaus, 344
  keskimerenpinta, 324
  radan valinta, 360
  tulokset, 346
topografia
  pallofunktiokehitelmä, 63
  sisäinen potentiaali, 437
    Taylorin sarjakehitelmä, 438
  ulkoinen potentiaali, 436
  ulkoinen Taylorin sarjakehitelmä, 436
topografian siirto geoidin sisään, 209
Torge, Wolfgang, 396
torsiovaaka
  Cavendish, 4
  Eötvös, 319
Toulouse (Ranska), BGI:n päämaja, 393
Trieste (Italia) datumi, 163
Tscherning, Carl Christian, 244
Tscherningin ja Rappin kaava, 285
tuntikulma, Kuun, 379
tutkijakoulu, kansainvälinen, 245
tuulen ajama veden nousu, vaihtelu, 323
Tuvalu (Tyynimeri), 336
Tytyrin kaivos, Lohja, 385
työ skalaaritulona, 398
työintegraali, 398, 409
  ei riipu polusta, 411
  parametrisoitu, 409

U
ulkoinen tulo, *katso* vektoritulo

VW
vaaitus
  periaate, 161
    kuva, 161
  geostrofinen, 330
  relativistinen, 184
  steerinen, 330
vaaituskoje, 161
vajoaminen, maan, 335
vakautettu alusta (gravimetri), 303, 315
valegeoidi, 178
Walferdange (Luxemburg), 310
valohilakello, 184, 185
vapaa-ilmahypoteesi, maannousun, 328, 329
varalaita (*freeboard*), merijää, 345, 365, 366
vastaavuus, integraali- ja spektraaliyhtälöt, 191
vastajuuri, meren, 147
vektori, epävirallinen määritelmä, 397
vektoriavaruus
  abstrakti, 415
  bilineaarinen muoto, 415
  kanta, 415
  ortogonaali kanta, 416
  ortonormaali kanta, 416
  skalaaritulo, 5, 415
vektorikenttä
  määritelmä, 401
  normaalikomponentti, 409
vektoritulo, 399

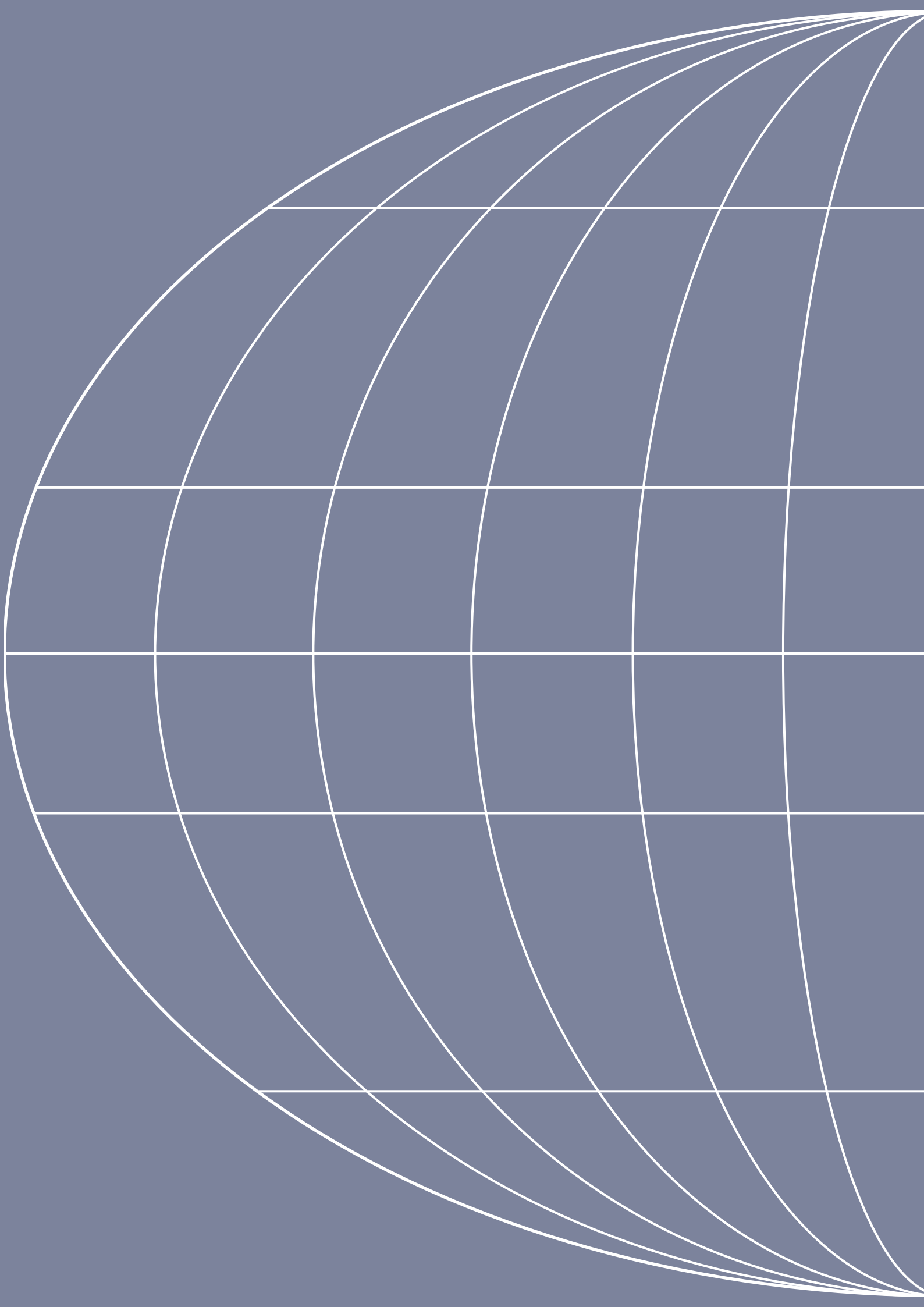
kuva, 400
ominaisuudet, 399
Vening Meinesz, Felix Andries, 152, 199
sukellusvenemittaus, 296
Vening Meineszin integraaliyhtälöt, 199
Wenzel, Hans-Georg, 389
Verbaandertin ja Melchiorin heiluri, 385
verkkohierarkia gravimetriassa, 309
vertailu, absoluuttigravimetrien, 307, 310
valokuva, 310
vertausellipsoidi
pinnan normaalipotentiaali, 169
tasapotentiaalipintana, 87, 100, 110
vanha, 102
vertauspinnat painovoimamittauksessa (kuva), 115
vertauspinta-ajattelu, 121
vesi, olomuodot, 334
vesi, ylöspäin virtaaminen, 166
vesihöyryradiometri, 348
vipuliike, mantereen reunan, 335
virtausnopeus (vektorikenttä), 23, 405
viskoosi relaksaatiomoodi, 340
Von Sterneckin koje, 296
World Geodetic System 1984 (WGS84), 101
vuo, 23
vuoroveden jako osiin Laplacen mukaan, 380
vuoroveden kenttä, 320
Kuun ja Auringon, 387
Maan deformaatio, 383
vuorovesi
puolikuukausittainen, 381
puolivuorokautinen, 381, 382
pysyvä osa, 381, 386
käsitteet, 387
deformaatio, 386
nollakohdat, 391
numeroarvo, 387
reduktio, 386
vaikutus geoidiin, 388
vaikutus korkeuseroon, 388
teoreettinen, 378
jaksot, 382
kuva, 383
vuorokautinen, 381, 382
vuorovesipotentiaali, 379
asteluku, 385
epäsuora vaikutus, 384, 387
vuorovesireduktio, pysyvä deformaatio, 386
vuorovesivapaa geoidi, 387, 389
vuorovesivapaa maankuori, 389
välivahvistin, valokuitukaapelissa, 185
värähtely-yhtälö
astatisoitu gravimetri, 302
itseadjungoitu, 424
jousigravimetri, 298
kvantisointi, 425
ominaisarvotehtävänä, 424

Y

ydinfunktion hilamatriisi (FFT), 240
ydinmodifikaatio
asteluku, 218
edistynyt, 220
kertoimet, 220
kuva, 219
pehmeä leikkaus, 220
terävä leikkaus, 219
Wong-Gore, 218
yhden maapallon ongelma, 257
yksikköpallo, 427
yläkulminaatio, Kuun, 379
ylösalainen ilmapuntari, vaihtelu, 323
ympyräkeskiarvo, $M_{\bigcirc}$, 286
ympyrälevy, vetovoima, 130

Z

zeniittiputki, 386
zero geoid, 387

Ö

öljyteollisuus, gravimetria, 245