Sähkömagneettisen säteilyn sironnan suora ongelma

Juho Kannala

21.6.2004

Sisältö

1 Johdanto

Tässä erikoistyössä käsitellään sähkömagneettisen säteilyn sironnan teoriaa. Tarkastelun kohteena ovat aikaharmoniset kentät ja sironnan suora ongelma. Aikaharmonisten kenttien riippuvuus ajasta on sinimuotoista ja sironnan suoralla ongelmalla tarkoitetaan sironneen kentän selvittämistä, kun sirottaja ja sisääntuleva kenttä tunnetaan. Sirottaja voi olla homogeenisen aineen (esim. ilma) ympäröimä este (esim. metallikappale) tai epähomogeeninen väliaine. Vastaavasti sironnan käänteisongelmaksi kutsutaan ongelmaa, jossa sironnut kenttä tunnetaan kohteen ulkopuolella ja tehtävänä on selvittää esteen muoto tai epähomogeenisen väliaineen taitekerroin. Tässä työssä ei käsitellä käänteisongelman ratkaisemista.

Erikoistyössä keskitytään määrittelemään sirontaongelmat matemaattisesti ja johdetaan joitain perustuloksia. Kappaleessa 2 selvitetään hieman käsiteltävien matemaattisten ongelmien fysikaalista taustaa Maxwellin yhtälöistä lähtien. Kappaleessa 3 esitetään tuloksia, joita tarvitaan pohjaksi skalaarikenttiä monimutkaisempien vektorikenttien käsittelyssä. Lopulta kappaleessa 4 käsitellään sähkömagneettisen säteilyn siroamista esteestä ja kappaleessa 5 sirontaa epähomogeenisessa väliaineessa. Tekstissä käsitellään paljon kompleksiarvoisia vektorikenttiä käyttäen erilaisia vektorilaskennan kaavoja ja lauseita. Niinpä liitteessä A on selitetty joitain vektoriarvoisiin funktioihin liittyviä käsitteitä ja liitteeseen B on koottu tarpeellisia laskukaavoja.

Erikoistyö pohjautuu hyvin pitkälle lähteeseen [CK98]. Myös lähteessä [CK83] käsitellään sähkömagneettisen säteilyn sironnan teoriaa samaan tapaan, joiltain osin hiukan yksityiskohtaisemminkin. Kirjan [CK98] esitystapa on hyvin tiivis. Niinpä erityisesti kappaleessa 4 on kirjoitettu useita kirjan todistuksia auki käyttäen enemmän välivaiheita. Kolmas erikoistyön aihepiiriin läheisesti liittyvä teos on [Mül69]. Myös siitä löytyvät useimmat työssä esitetyt tulokset ja todistukset niihin. Sähkömagneettisen säteilyn fysikaalista taustaa kuvataan laajemmin kirjoissa [Jon86], [Jac98] ja [Van93]. Suomenkielisiä sähkömagnetiikan perusoppikirjoja ovat esimerkiksi [SL95] ja [SL96], joista jälkimmäinen sivuaa hiukan myös tämän erikoistyön aihepiiriä ja on havainnollisuutensa vuoksi tutustumisen arvoinen.

2 Maxwellin yhtälöt

Koko sähkömagneettisten kenttien teoria pohjautuu Maxwellin yhtälöihin. Yhtälöt ovat saaneet nimensä James Clerk Maxwellin mukaan, joka ensimmäisenä havaitsi niiden keskeisen merkityksen. Sähkömagneettisia ilmiöitä kuvaavat neljä keskeistä vektorikenttää ovat sähkökentän voimakkuus $\mathcal{E}$, sähkövuon tiheys $\mathcal{D}$, magneettikentän voimakkuus $\mathcal{H}$ ja magneettivuon tiheys $\mathcal{B}$. Nämä kentät riippuvat yleisesti sekä ajasta t että paikasta $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Maxwellin yhtälöt kirjoitetaan yleensä seuraavassa muodossa [SL96]

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho, \tag{2.1a}$$
$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0, \tag{2.1b}$$
$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \tag{2.1c}$$
$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J}, \tag{2.1d}$$

jossa $\mathcal{J}$ on virrantiheys ja ρ varaustiheys. Kaksi ensimmäistä yhtälöä kertovat, että varaukset ovat sähkövuon lähteitä ja että magneettivuolla ei ole lähteitä. Kolmas yhtälö pukee matemaattiseen muotoon Faradayn induktiolain; muuttuva magneettivuon tiheys synnyttää pyörteisen sähkökentän. Neljäs yhtälö kertoo, että yleistetty virrantiheys, aidon virrantiheyden $\mathcal{J}$ ja kenttävirrantiheyden $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$ summa, on yhtä suuri kuin magneettikentän voimakkuuden pyörteisyys. Neljänteen yhtälöön sisältyy käänteisilmiö Faradayn laille; muuttuva sähkövuon tiheys synnyttää pyörteisen magneettikentän.

Isotrooppisessa[1] aineessa sähkökentän ja sähkövuon sekä magneettikentän ja magneettivuon välistä suhdetta kuvaavat väliaineyhtälöt

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E} \quad \text{ja} \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}, \tag{2.2}$$

jossa skalaarifunktiot ϵ ja μ ovat aineen permittiivisyys ja permeabiliteetti. Homogeenisessa aineessa ne ovat vakioita.

Ensimmäisen ja toisen Maxwellin yhtälön voidaan ajatella tietyssä mielessä seuraavan kahdesta jälkimmäisestä yhtälöstä ja varauksen säilymislaista

$$\nabla \cdot \mathcal{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{2.3}$$

Nimittäin, kun oletetaan kentät kahdesti jatkuvasti derivoituviksi ja otetaan yhtälöistä (2.1c) ja (2.1d) divergenssi, saadaan

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{ja} \quad \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{J} = 0 \ .$$

Sijoittamalla jälkimmäiseen varauksen säilymislaki (2.3) saadaan edelleen

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathcal{D} - \rho) = 0.$$

Jos siis yhtälöt (2.1a) ja (2.1b) ovat voimassa jollain ajan hetkellä, ovat ne voimassa kaikilla ajan hetkillä yhtälöiden (2.1c), (2.1d) ja (2.3) perusteella.

Usein tarkastellaan aikaharmonisia kenttiä, joiden aikariippuvuus on sinimuotoista taajuudella ω. Tällöin Maxwellin yhtälöt hieman yksinkertaistuvat ja tilanteen analysointi on helpompaa. Yleisempää muotoa olevien kenttien voidaan myös ajatella olevan eri taajuuksisten aikaharmonisten kenttien lineaarikombinaatioita. Merkintöjen selkeyden vuoksi määritellään aikaharmoniset ken-

[1] isotrooppinen = aallon etenemisnopeus aineessa ei riipu etenemissuunnasta tai polarisaatiosta

tät kompleksisen kentän reaaliosana seuraavasti

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{x},t) &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})\right), \\
\mathcal{D}(\mathbf{x},t) &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{x})\right), \\
\mathcal{H}(\mathbf{x},t) &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x})\right), \\
\mathcal{B}(\mathbf{x},t) &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\right), \\
\mathcal{J}(\mathbf{x},t) &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right), \\
\rho(\mathbf{x},t) &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t}\hat{\rho}(\mathbf{x})\right).
\end{aligned}$$

Kun nämä kompleksiset aikaharmoniset kentät sijoitetaan Maxwellin yhtälöihin, supistuu aikariippuvuus pois ja paikkariippuville kentille saadaan

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{D}} = \hat{\rho}, \tag{2.4a}$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0, \tag{2.4b}$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = i\omega\hat{\mathbf{B}}, \tag{2.4c}$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = -i\omega\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{J}}, \tag{2.4d}$$

josta varaustiheys $\hat{\rho}$ voidaan eliminoida ottamalla viimeisestä yhtälöstä divergenssi ja sijoittamalla se ensimmäiseen, eli

$$\hat{\rho} = \frac{1}{i\omega}\nabla \cdot \hat{\mathbf{J}} \tag{2.5}$$

Johtavassa materiaalissa sähkökenttä synnyttää virtaa. Olettaen, että kenttien voimakkuudet eivät ole kovin suuria, voidaan tätä johtavuusvirtaa kuvata Ohmin lailla

$$\mathcal{J} = \sigma\mathcal{E}. \tag{2.6}$$

Käyttämällä Ohmin lakia voidaan virrantiheys $\hat{\mathbf{J}}$ jakaa sähkökentän aiheuttamaan johtavuusvirtaan ja muuhun virtaan $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}}$,

$$\hat{\mathbf{J}} = \sigma\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}} \tag{2.7}$$

Muuta virtaa voi olla esimerkiksi elektronisuihku tai johdinlangassa kulkeva virta. Sijoitetaan yhtälöt (2.2), (2.5) ja (2.7) yhtälöihin (2.4), jolloin ne saavat muodon

$$\nabla \cdot (\epsilon\hat{\mathbf{E}}) = \frac{1}{i\omega}\nabla \cdot (\sigma\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}}), \tag{2.8a}$$

$$\nabla \cdot (\mu\hat{\mathbf{H}}) = 0, \tag{2.8b}$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = i\omega\mu\hat{\mathbf{H}}, \tag{2.8c}$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = -i\omega\epsilon\hat{\mathbf{E}} + \sigma\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}}. \tag{2.8d}$$

Usein johtavuusvirta huomioidaan määrittelemällä kompleksinen permittiivisyys

$$\hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega}, \tag{2.9}$$

jolloin yhtälöt (2.8) voidaan kirjoittaa

$$\nabla \cdot (\hat{\epsilon}\hat{\mathbf{E}}) = \frac{1}{i\omega}\nabla \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}}, \tag{2.10a}$$

$$\nabla \cdot (\mu\hat{\mathbf{H}}) = 0, \tag{2.10b}$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = i\omega\mu\hat{\mathbf{H}}, \tag{2.10c}$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = -i\omega\hat{\epsilon}\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}}. \tag{2.10d}$$

Yhtälöistä (2.10) tarvitaan vain kaksi jälkimmäistä, sillä ottamalla niiden divergenssi saadaan kaksi muuta yhtälöä.

Jatkossa (kappaleet 3 ja 4) tarkastellaan aikaharmonisia kenttiä isotrooppisessa homogeenisessa väliaineessa, jossa $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$. Tällöin $\hat{\epsilon}$ ja μ ovat vakioita ja merkinnöillä

$$\mathbf{E} = \hat{\epsilon}^{1/2}\hat{\mathbf{E}} \qquad\qquad \mathbf{H} = \mu^{1/2}\hat{\mathbf{H}}$$

saadaan yhtälöt (2.10c) ja (2.10d) muotoon

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0}, \tag{2.11a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{2.11b}$$

jossa

$$k = \omega\sqrt{\mu\hat{\epsilon}}\ . \tag{2.12}$$

Jotta merkinnät ovat fysikaalisesti mielekkäitä (yhtälöiden (2.11) ratkaisujen pitää vaimentua johtavassa aineessa), täytyy kompleksisen permittiivisyyden $\hat{\epsilon}$ neliöjuuri valita siten että $\mathrm{Im}(k) \geq 0$. Yhtälöitä (2.11) kutsutaan aikaharmonisiksi Maxwellin yhtälöiksi homogeenisessa väliaineessa.

3 Helmholtzin yhtälö

Etsittäessä aaltoyhtälölle

$$\Delta v(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

aikaharmonisia ratkaisuja, $v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, päädytään Helmholtzin yhtälöön

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \tag{3.1}$$

jossa vakio $k = \omega/c$ on reaalinen. Tässä kappaleessa tutkitaan Helmholtzin yhtälöä, koska osoittautuu, että sen ratkaisujen käyttäytymisen ymmärtäminen on tärkeää myös sähkömagneettisten sirontaongelmien käsittelyssä. Liitteessä B esitetyt Greenin kaavat ja Gaussin lause ovat tärkeitä työkaluja monissa todistuksissa ja siksi määritellään aluksi, mitä paloittain sileäreunaisella alueella tarkoitetaan [SV02, Mül69, CK83]. [2]

Määritelmä 3.1 *Joukko* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *on käyrä, jos on olemassa jatkuva bijektio* $\mathbf{x} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *siten, että* $\Gamma = \mathbf{x}([0, 1])$. *Käyrä on* suljettu, *jos* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1)$. *Kuvausta* $\mathbf{x}$ *sanotaan käyrän parametrisoinniksi.*

[2] Seuraavat määritelmät ovat yhdistelmä mainituissa kirjoissa esitetyistä muotoiluista. Ajatuksena on esittää selkeästi riittävät mutta ei liian tiukat vaatimukset alueille, joissa jatkossa esiteltävät lauseet pätevät.

Määritelmä 3.2 *Säännöllinen käyränkaari on käyrä, jolla on jatkuvasti derivoituva parametrisointi* $\mathbf{x}$ *siten, että* $|\mathbf{x}'(t)| > 0$ *kaikilla* $t \in [0,1]$.

Määritelmä 3.3 *Käyrä on säännöllinen, jos se koostuu äärellisestä määrästä säännöllisiä käyränkaaria.*

Määritelmä 3.4 *Säännöllinen pinnanpala* S *on joukko, joka voidaan jossain karteesisessa koordinaatistossa esittää muodossa*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in G,\ x_3 = g(x_1, x_2)\},$$

jossa $G \subset \mathbb{R}^2$ *on kompakti joukko, jonka reuna on säännöllinen suljettu käyrä ja* $g \in C^2(G)$.

Määritelmä 3.5 *Rajoitetun alueen*[3] $D \subset \mathbb{R}^3$ *reuna* ∂D *on paloittain sileä, jos se on yhdiste äärellisestä määrästä säännöllisiä pinnanpaloja.*

3.1 Perusratkaisut ja Sommerfeldin säteilyehto

Helmholtzin yhtälön perusratkaisuiksi sanotaan funktioita, jotka toteuttavat yhtälön

$$-(\Delta + k^2)u(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}),$$

jossa δ on *Diracin deltafunktio* [SV02]. Perusratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Voidaan osoittaa, että säteittäisesti symmetriset lineaarisesti riippumattomat ratkaisut ovat

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad \text{ja} \quad \frac{e^{-ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

Näistä kuitenkin vain ensimmäinen toteuttaa Sommerfeldin säteilyehdon, joka määritellään seuraavaksi [CK98].

Määritelmä 3.6 (Sommerfeldin säteilyehto) *Helmholtzin yhtälön ratkaisu* $u(\mathbf{x})$, *joka on määritelty jonkin pallon ulkopuolella, toteuttaa Sommerfeldin säteilyehdon ja on* säteilevä *jos*

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \tag{3.2}$$

tasaisesti kaikissa suunnissa $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ *kun* $r = |\mathbf{x}|$.[4]

Säteilyehto karakterisoi poispäin kulkevat aallot. Ensimmäistä pallosymmetristä ratkaisua vastaava aikariippuva aalto $\mathrm{Re}(e^{ik|\mathbf{x}|-i\omega t}/(4\pi|\mathbf{x}|))$ on origosta poispäin etenevä palloaalto. Ratkaisua $e^{-ik|\mathbf{x}|}/(4\pi|\mathbf{x}|)$ vastaava aalto sen sijaan on sisäänpäin etenevä aalto. Toisaalta säteilyehto takaa, että ratkaisu vaimenee äärettömyydessä seuraavan lauseen mukaisesti.

Lemma 3.7 *Olkoon* u *Sommerfeldin säteilyehdon toteuttava Helmholtzin yhtälön ratkaisu. Tällöin*

$$\int_{\partial\Omega_r} |u|^2 \, ds = O(1), \quad r \to \infty. \tag{3.3}$$

[3] Alue on avoin ja yhtenäinen joukko.

[4] eli $\forall \epsilon > 0 \quad \exists R_0 > 0 \quad \text{s.e.} \quad |\mathbf{x} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - ik\,|\mathbf{x}|\,u(\mathbf{x})| < \epsilon \quad \text{kun} \quad |\mathbf{x}| > R_0$

Todistus:
Olkoon Ω_r r-säteinen origokeskinen pallo. Säteilyehdosta seuraa

$$\int_{\partial\Omega_r} \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + k^2 |u|^2 + 2k\,\mathrm{Im}\left(u\frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}\right) ds = \int_{\partial\Omega_r} \left|\frac{\partial u}{\partial\nu} - iku\right|^2 ds \to 0, \quad r \to \infty$$

Olkoon D niin suuri pallo, että $u \in C^2(\mathbb{R}^3\backslash D)$ ja u toteuttaa Helmholtzin yhtälön alueessa $\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}$. Valitaan r riittävän suureksi ja sovelletaan Greenin kaavaa (B.15) alueessa $D_r = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3\backslash\bar{D} : |\mathbf{y}| < r\}$, jolloin

$$\int_{\partial\Omega_r} u\frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}\, ds = \int_{\partial D} u\frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}\, ds - k^2\int_{D_r} |u|^2\, d\mathbf{y} + \int_{D_r} |\nabla u|^2\, d\mathbf{y}. \tag{3.4}$$

Kun sijoitetaan tämän yhtälön imaginääriosa edelliseen saadaan

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\partial\Omega_r} \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + k^2 |u|^2\, ds = -2k\,\mathrm{Im}\int_{\partial D} u\frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}\, ds. \tag{3.5}$$

Koska yhtälön vasemmalla puolen molemmat termit ovat positiivisia, täytyy niiden kummankin erikseen olla rajoitettuja. Eli (3.3) pätee. □

Säteilyehto myös rajaa Helmholtzin yhtälön ulkoalueen reuna-arvo-ongelmien ratkaisut yksikäsitteisiksi. Tämän todistamisessa käytetään Rellichin lemmaa.

Lemma 3.8 (Rellich) *Olkoon D rajoitettu joukko, joka on rajoittamattoman alueen avoin komplementti. Olkoon $u \in C^2(\mathbb{R}^3\backslash\bar{D})$ Helmholtzin yhtälön ratkaisu, joka toteuttaa*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{|\mathbf{x}|=r} |u(\mathbf{x})|^2\, ds(\mathbf{x}) = 0\ . \tag{3.6}$$

Tällöin $u = 0$ koko alueessa $\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}$.

Todistus:
Katso [CK83] tai [CK98]. □

Lause 3.9 *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu joukko, joka on rajoittamattoman paloittain sileäreunaisen alueen avoin komplementti.*[5] *Olkoot f ja g D:n reunalla määriteltyjä jatkuvia funktioita. Ongelmalla*

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\backslash\bar{D}$$

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D_1 \subset \partial D$$
$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial\nu} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D\backslash\partial D_1$$

on enintään yksi säteilyehdon (3.2) *toteuttava ratkaisu $u \in C^2(\mathbb{R}^3\backslash D)$.*

Todistus:
Tehdään vastaoletus, että ratkaisuja on kaksi. Tällöin niiden erotus u on säteilyehdon toteuttava ratkaisu ongelmalle, jossa reunaehdot $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = 0$. Siispä reunaehtojen perusteella

$$\int_{\partial D} u\frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}\, ds = 0.$$

Toisaalta myös nyt pätee (3.5), joten ehto (3.6) toteutuu. Rellichin lemman perusteella $u = 0$, joten ratkaisuja on enintään yksi. □

[5] Huomataan, että näin määriteltynä D:n ei tarvitse olla yhtenäinen.

3.2 Säteilevä perusratkaisu ja Helmholtzin esityslause

Jatkossa tarvitaan säteilyehdon täyttävää Helmholtzin yhtälön perusratkaisua, jonka singulariteetti on siirretty pisteeseen $\mathbf{y}$. Määritellään siis

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \,. \tag{3.7}$$

Funktio $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ toteuttaa yhtälön

$$-(\Delta + k^2)\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ja on äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Tämän ominaisuuden voi todeta esimerkiksi lauseen A.3 perusteella.

Tarkastellaan $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:n asymptoottista käyttäytymistä, kun $\mathbf{y}$ on kiinnitetty ja $|\mathbf{x}| \to \infty$. Funktion $(1+s)^t$ Taylorin sarjaa käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^t &= ((\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))^{t/2} \\ &= \left(|\mathbf{x}|^2 \left(1 - 2\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|^2} \right) \right)^{t/2} \\ &= |\mathbf{x}|^t - t\,|\mathbf{x}|^{t-1}\,\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} + O\left(|\mathbf{x}|^{t-2} \right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tämän perusteella

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi\,|\mathbf{x}|} e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right). \tag{3.9}$$

Vastaavasti saadaan gradientille

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\frac{ik}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \right) (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &= ik\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right) \\ &= ik\frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi\,|\mathbf{x}|} e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Esitellään vielä Helmholtzin esityslause, joka kertoo, että rajoitetun sileäreunaisen alueen sisällä Helmholtzin yhtälön ratkaisu voidaan esittää pintaintegraalina, jonka arvoon vaikuttavat ainoastaan ratkaisun ja sen normaaliderivaatan arvot alueen reunalla.

Lause 3.10 (Helmholtzin esityslause) *Olkoon D rajoitettu alue, jonka reuna on paloittain sileä, ja $u \in C^2(\bar{D})$. Tällöin*

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = &\int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \\ &- \int_D \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\Delta + k^2)u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in D. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Todistus:
Katso esimerkiksi [CK98]. □

3.3 Greenin funktio

Perusratkaisu ϕ on Helmholtzin operaattorin $(\Delta + k^2)$ Greenin funktio ja sen avulla voidaan etsiä epähomogeeniselle Helmholtzin yhtälölle ratkaisu. Tarkastellaan siis epähomogeenista yhtälöä

$$(\Delta + k^2)u(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,, \tag{3.12}$$

jossa f on jatkuva ja kompaktikantajainen funktio eli $f \in C_0(\mathbb{R}^3)$. Merkitään $F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$. Funktion f voi ajatella ilmaisevan aaltojen lähteet. Greenin kaava (B.16) voidaan kirjoittaa myös seuraavaan muotoon

$$\int_G (v\,(\Delta + k^2)u - u\,(\Delta + k^2)v)\,d\mathbf{y} = \int_{\partial G} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,ds.$$

Sijoitetaan tähän $v(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ja oletetaan, että u toteuttaa yhtälön (3.12), jolloin

$$\begin{aligned}&\int_G (-\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,f(\mathbf{y}) + u(\mathbf{y})\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}))\,d\mathbf{y} \\ &= \int_{\partial G} (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu} - u(\mathbf{y})\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})})\,ds(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Valitaan integroimisalueeksi G origokeskinen r-säteinen pallo Ω_r. Kun $|\mathbf{x}| < r$ niin

$$\begin{aligned}u(\mathbf{x}) = &\int_{\Omega_r} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\ &+ \int_{\partial\Omega_r} (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu} - u(\mathbf{y})\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})})\,ds(\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Kun $r \to \infty$ niin $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_F \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ toteuttaa yhtälön (3.13), koska tällöin pintaintegraali häviää. Voisimme $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:n sijaan käyttää Greenin funktiona myös toista perusratkaisua $e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}/(4\pi\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$. Näin saatu ratkaisu u ei kuitenkaan toteuttaisi Sommerfeldin säteilyehtoa.

Jotta $u(\mathbf{x}) = \int_F \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ olisi yhtälön (3.12) ratkaisu klassisessa mielessä, täytyisi sen olla kahdesti derivoituva. Pelkkä f:n jatkuvuus ei kuitenkaan takaa tätä, vaan vaaditaan Hölder-jatkuvuutta.

Määritelmä 3.11 *Reaali- tai kompleksiarvoinen funktio u, joka on määritelty joukossa $G \subset \mathbb{R}^3$, on Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha \in (0, 1]$, jos on olemassa vakio c siten, että*

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq c\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha \quad \forall\,\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G. \tag{3.14}$$

Käytetään merkintää $C^{0,\alpha}(G)$ joukossa G Hölder-jatkuville funktioille eksponentilla α. Merkintä $C^{p,\alpha}(G)$ puolestaan tarkoittaa p-kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita, joiden p:nnen kertaluvun derivaatat ovat Hölder-jatkuvia eksponentilla α. Seuraavaa lausetta tarvitaan myös myöhemmin.

Lause 3.12 *Olkoon f jatkuva ja integroituva funktio $\mathbb{R}^3$:ssa. Määritellään u seuraavasti*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Jos $f \in C_0(\mathbb{R}^3)$ niin $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ ja derivoinnin ja integroinnin järjestyksen saa vaihtaa. Jos $f \in C_0(\mathbb{R}^3) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ niin $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ ja

$$(\Delta + k^2)u(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Jos edelleen $f \in C_0(\mathbb{R}^3) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ niin $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$.

Todistus:
Lause on peräisin kirjasta [CK98], jossa sitä ei kuitenkaan todisteta vaan viitataan edelleen teokseen Gilbarg, Trudinger: Elliptic partial differential equations of second order, Springer 1977. Tapaus $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ jos $f \in C_0(\mathbb{R}^3) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ todistetaan myös esimerkiksi kirjassa [Mül69] (Lemma 10 sivulla 41). $\square$

3.4 Yleistetty Helmholtzin yhtälö

Epähomogeenisessa väliaineessa aaltoliikkeen nopeus ei välttämättä ole vakio. Tällöin Helmholtzin yhtälö (3.1) ei sovi kuvaamaan tilannetta ja tarkastelun kohteeksi täytyy ottaa seuraavan kaltainen yleisempi yhtälö

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2\, n(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.15}$$

Funktion n voi ajatella kuvaavan aineen epätasaisuutta ja funktion f aaltojen lähteitä. Johdetaan seuraavaksi muutama lause, joita tulemme tarvitsemaan myöhemmin kappaleessa 5.2. Ensin kuitenkin vain todetaan seuraava lemma.

Lemma 3.13 (Yksikäsitteisen jatkamisen periaate) *Olkoon G alue $\mathbb{R}^3$:ssa ja $u_1, \ldots, u_P \in C^2(G)$ reaaliarvoisia funktioita, jotka toteuttavat epäyhtälön*

$$|\Delta u_p(\mathbf{x})| \leq c \sum_{q=1}^{P} (|u_q(\mathbf{x})| + |\nabla u_q(\mathbf{x})|), \quad \forall\, \mathbf{x} \in G \tag{3.16}$$

kaikilla $p = 1, \ldots, P$ jollain vakiolla c. Jos u_p häviää pisteen $\mathbf{x}_0 \in G$ ympäristössä kaikilla $p = 1, \ldots, P$ niin silloin u_p on identtisesti nolla G:ssä kaikilla p.

Todistus:
Katso [CK98]. $\square$

Lause 3.14 *Olkoon vakio $k > 0$ ja $n \in C(\mathbb{R}^3)$ siten, että $(1-n) \in C_0(\mathbb{R}^3)$ ja $\mathrm{Im}(n) \geq 0$. Tällöin ongelman*

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 n(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{3.17}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \tag{3.18}$$

ainoa ratkaisu on $u(\mathbf{x}) = 0$.

Todistus:
Jos u on (3.17):n ratkaisu niin huomataan että $u_1 := \mathrm{Re}(u)$ ja $u_2 := \mathrm{Im}(u)$ toteuttavat ehdon (3.16), koska n on rajoitettu. Siispä lemman 3.13 perusteella riittää osoittaa, että u häviää jossain $\mathbb{R}^3$:n avoimessa osajoukossa.

Olkoon D niin suuri origokeskinen pallo, että $n = 1$ alueessa $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$. Soveltamalla Greenin kaavaa (B.15) pallossa D saadaan

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds = \int_D |\nabla u|^2 - k^2 \bar{n} \, |u|^2 \, d\mathbf{y},$$

josta seuraa

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds(\mathbf{y}) = k^2 \int_D \operatorname{Im}(n) \, |u|^2 \, d\mathbf{y} \geq 0. \tag{3.19}$$

Toisaalta samalla tavalla kuin johdettiin (3.5) voidaan johtaa

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\partial \Omega_r} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 \, |u|^2 \, ds = -2k \operatorname{Im} \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds, \tag{3.20}$$

Yhtälöistä (3.19) ja (3.20) nähdään, että ehto (3.6) toteutuu. Koska u toteuttaa $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$:ssä tavallisen Helmholtzin yhtälön (3.1), niin Rellichin lemman mukaan u häviää $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$:ssä. Siispä $u(\mathbf{x}) = 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. $\square$

Lause 3.15 *Olkoon vakio $k > 0$ ja $n \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ siten, että $(1-n) \in C_0(\mathbb{R}^3)$ ja $\operatorname{Im}(n) \geq 0$. Jos $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ on ongelman (3.17)-(3.18) ratkaisu niin se toteuttaa yhtälön*

$$u(\mathbf{x}) = -k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})(1 - n(\mathbf{y}))u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.21}$$

Kääntäen, jos $u \in C(\mathbb{R}^3)$ on (3.21):n ratkaisu, niin silloin $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ja u on ongelman (3.17)-(3.18) ratkaisu.

Todistus:
"(3.17)-(3.18)⇒(3.21)"
Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ mielivaltainen. Olkoon D niin suuri pallo, että se sisältää $\mathbf{x}$:n ja että $n = 1$ sen ulkopuolella. Helmholtzin esityslauseen mukaan

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = & \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \\ & - k^2 \int_D \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})(1 - n(\mathbf{y}))u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in D, \end{aligned}$$

koska $(\Delta + k^2)u = k^2(1 - n)u$. Yhtälö (3.21) seuraa, kun näytetään, että pintaintegraali häviää säteilyehdon perusteella. Olkoon Ω_r riittävän suuri pallo ja määritellään $D_r = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D} : |\mathbf{y}| < r\}$. Soveltamalla Greenin toista kaavaa (B.16) alueessa D_r saadaan

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \\ & = \int_{\partial \Omega_r} \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} \right) ds(\mathbf{y}) \\ & = \int_{\partial \Omega_r} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu} - iku(\mathbf{y}) \right) ds(\mathbf{y}) \\ & \quad + \int_{\partial \Omega_r} u(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{y})} - ik\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) ds \\ & =: I_1 + I_2 \to 0, \quad r \to \infty. \end{aligned}$$

Sillä Schwarzin epäyhtälön avulla

$$|I_1| \le \int_{\partial\Omega_r} |\phi|^2 \; ds \int_{\partial\Omega_r} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 \; ds \to 0, \quad r \to \infty$$

$$|I_2| \le \int_{\partial\Omega_r} |u|^2 \; ds \int_{\partial\Omega_r} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu(\mathbf{y})} - ik\phi \right|^2 \; ds \to 0, \quad r \to \infty$$

koska sekä u että $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ toteuttavat Sommerfeldin säteilyehdon.
"(3.21)⇒(3.17)-(3.18)"
Koska n on nyt myös Hölder-jatkuva, seuraa lauseesta 3.12, että $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ja

$$(\Delta + k^2)u(\mathbf{x}) = k^2(1 - n(\mathbf{x}))u(\mathbf{x}).$$

Siispä u toteuttaa (3.17):n. Yhtälön (3.21) ratkaisuna u toteuttaa myös (3.18):n, koska $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ toteuttaa sen ja $(1 - n)$:n kantaja on kompakti. □

Lauseista 3.14 ja 3.15 seuraa suoraan seuraava tulos.

Seuraus 3.16 *Yhtälön* (3.21) *ainoa ratkaisu on* $u = 0$.

3.5 Yhteys aikaharmonisiin Maxwellin yhtälöihin

Kappaleessa 2 nähtiin, että homogeenisessa isotrooppisessa väliaineessa Maxwellin yhtälöiden aikaharmonisten ratkaisujen paikkariippuvien kenttien $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{H}$ tulee toteuttaa aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt (2.11). Seuraavaksi todistettava lause kertoo, että tällöin sekä $\mathbf{E}$ että $\mathbf{H}$ toteuttavat myös *Helmholtzin vektoriyhtälön.*

Lause 3.17 *Olkoon* $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(D)$ *aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden* (2.11) *ratkaisu alueessa* $D \subset \mathbb{R}^3$. *Tällöin* $\mathbf{E}$ *ja* $\mathbf{H}$ *ovat lähteettömiä ja toteuttavat Helmholtzin vektoriyhtälöt*

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0 \;, \tag{3.22}$$

$$\Delta\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0 \;, \tag{3.23}$$

alueessa D.
Kääntäen, jos $\mathbf{E}$ *(tai* $\mathbf{H}$*) on Helmholtzin yhtälön ratkaisu, jolle* $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ *(tai* $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$*), niin silloin* $\mathbf{E}$ *ja* $\mathbf{H} := \frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{E}$ *(tai* $\mathbf{H}$ *ja* $\mathbf{E} := -\frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{H}$*) toteuttavat aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt.*

Todistus:
"⇒"
Oletetaan, että $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^2(D)$. Myöhemmin nähdään, että tämä ei ole lisäoletus, koska (2.11):n ratkaisut ovat aina äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita (ks. Lause 4.3). Ottamalla yhtälöistä (2.11) divergenssi nähdään kaavan (B.10) avulla, että $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ja $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Eli kentät ovat lähteettömiä. Tällöin voidaan soveltaa kenttään $\mathbf{E}$ kaavaa (B.11):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\Delta\mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = \Delta\mathbf{E} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

Käyttämällä peräkkäin yhtälöitä (2.11) saadaan edelleen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \Delta\mathbf{E} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\
&= \Delta\mathbf{E} + \nabla \times (ik\mathbf{H}) \\
&= \Delta\mathbf{E} + ik(-ik\mathbf{E}) \\
&= \Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E}
\end{aligned}
$$

Helmholtzin yhtälö $\mathbf{H}$:lle saadaan vastaavasti.
"$\Leftarrow$"
Oletetaan, että on annettu lähteetön Helmholtzin yhtälön ratkaisu $\mathbf{E}$. Ensimmäisen Maxwellin yhtälön toteutuminen nähdään heti $\mathbf{H}$:n määritelmästä $\mathbf{H} := \frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{E}$. Toinen yhtälö seuraa ottamalla $\mathbf{H}$:n roottori ja soveltamalla kaavaa (B.11). Tapaus, jossa on annettu $\mathbf{H}$ $\mathbf{E}$:n sijaan, menee samaan tapaan. □

4 Sironnan suora esteongelma

4.1 Ongelmanasettelu

Homogeenisessa väliaineessa tarkastelun kohteena on yleensä ns. sironnan esteongelma. Tällöin tutkitaan säteilyn sirontaa kappaleesta D, jota ympäröi homogeeninen johtamaton väliaine ($\sigma = 0$).[6] Oletuksena on, että sisääntuleva kenttä $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$ tunnetaan. Tarkoituksena on määrittää sironnut kenttä $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ siten, että kokonaiskenttä

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \ , \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s$$

toteuttaa aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt alueessa $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ja sopivan reunaehdon kappaleen reunalla. Jos oletetaan kappale täydelliseksi johteeksi, jonka pinnalla sähkökentän tangentiaalinen komponentti häviää, täytyy vaatia reunaehto

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial D \ . \tag{4.1}$$

Tässä $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ on pinnan ∂D ulkonormaali pisteessä $\mathbf{x}$. Myös muita reunaehtoja on mahdollista käyttää kuvaamaan erilaisia fysikaalisia tilanteita, mutta niitä ei tässä erikoistyössä käsitellä [CK98],[CK83].

Sironneen kentän ratkaisemista, kun esteen muoto tunnetaan, kutsutaan suoraksi esteongelmaksi ja se on Maxwellin yhtälöiden ulkoalueen reuna-arvo-ongelma. Jotta ongelman ratkaisu olisi yksikäsitteinen ja fysikaalisesti mielekäs, täytyy lisäksi vaatia, että sirontaratkaisu toteuttaa *Silver-Müllerin säteilyehdon*, joka on Sommerfeldin säteilyehdon yleistys vektorikentille.

Kappaleessa 4.2 määritellään Silver-Müllerin säteilyehto ja johdetaan integraaliesitykset aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden ratkaisuille sisä- ja ulkoalueessa. Ulkoalueen integraaliesityksen tärkein anti on se, että Maxwellin yhtälöiden ratkaisut rajoittamattomassa alueessa voidaan lausua pintaintegraalina rajoitetun pinnan yli. Tämän periaatteen pohjalta on mahdollista osoittaa suoran esteongelman ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys ja kehittää numeerisia ratkaisumenetelmiä [CK98], [CK83]. Tätä käsitellään hieman enemmän kappaleessa 4.3.

[6] Tällöin yhtälöissä (2.11) k on reaalinen ja kappaleen 3 tulokset pätevät.

4.2 Integraaliesitykset ja säteilyehto

Lause 4.1 *Olkoon D rajoitettu alue, jonka reuna on paloittain sileä*[7]*. Merkitään $\boldsymbol{\nu}$:llä reunan ∂D yksikköulkonormaalia. Vektorikentille $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ pätee* Stratton-Chu kaava

$$
\begin{aligned}
&- \nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) \\
&+ \nabla \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) \\
&- ik \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) \\
&+ \nabla \times \int_{D} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{y}) - ik\mathbf{H}(\mathbf{y})) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
&- \nabla \int_{D} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
&+ ik \int_{D} (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) + ik\mathbf{E}(\mathbf{y})) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

jossa tilavuusintegraalit ovat heikosti singulaarisia. Vastaavanlainen kaava, jossa $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{H}$ vaihtavat paikkaa, on myös voimassa.

Todistus:
[8] Käsitellään ensin tapaus $\mathbf{x} \in D$. Olkoon $\mathbf{x} \in D$ mielivaltainen ja määritellään alue $D_\rho := \{\mathbf{y} \in D : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > \rho\}$. Eli D:stä leikataan pois pallonkuoren $\partial\Omega(\mathbf{x}; \rho) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \rho\}$ rajaama alue $\mathbf{x}$:n ympäriltä. Perusratkaisun $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ määritelmästä (3.7) seuraa, että $\nabla_\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\nabla_\mathbf{y} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Siispä alueessa D_ρ vektorikentille $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(D)$ pätee (kaavojen (B.5) ja (B.4) mukaan)

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mathbf{y} \times (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y})) &= \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{y}) - \nabla_\mathbf{x} \times (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y})) \\
\nabla_\mathbf{y} \cdot (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y})) &= \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}) - \nabla_\mathbf{x} \cdot (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y})) \\
\nabla_\mathbf{y} \times (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{H}(\mathbf{y})) &= \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) - \nabla_\mathbf{x} \times (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{H}(\mathbf{y})) \ .
\end{aligned}
$$

Otetaan ensimmäisestä yhtälöstä roottori, toisesta gradientti ja kerrotaan kolmas ik:lla ja lasketaan saadut kolme yhtälöä puolittain yhteen. Käyttämällä oikealla puolella kaavaa (B.11) ja tietoa $\Delta_\mathbf{x}(\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y})) = -k^2 \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y})$ päädytään yhtälöön

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\mathbf{x} \times \nabla_\mathbf{y} \times (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y})) \\
&\quad - \nabla_\mathbf{x} (\nabla_\mathbf{x} \cdot (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y})) \\
&\quad + ik \nabla_\mathbf{y} \times (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{H}(\mathbf{y}))) \\
&= \nabla_\mathbf{x} \times (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{y}) - ik\mathbf{H}(\mathbf{y}))) \\
&\quad - \nabla_\mathbf{x} (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})) \\
&\quad + ik \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) + ik\mathbf{E}(\mathbf{y}))
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

---

[7] Vertaa teoreemaan 6.1 kirjassa [CK98]. Paloittain sileä reuna riittänee tässä?

[8] Vertaa lauseen 6.1 todistukseen kirjassa [CK98]. Jos Gaussin lauseen oletukset ovat kuten liitteessä A, tapausta $\mathbf{E}, \mathbf{H} \notin C^1(\bar{D})$ ei tarvinne käsitellä erikseen. Vaikka kaava (4.3) ei olekaan voimassa reunalla, Gaussin lausetta voidaan silti soveltaa.

Integroidaan tämä yhtälö puolittain alueen D_ρ yli ja vaihdetaan derivoinnin ja integroinnin järjestystä. Näin voidaan tehdä, koska singulariteetti on poistettu (ks. liite A). Vasemmalla puolella voidaan käyttää Gaussin lausetta (kaavat (B.12) ja (B.13)). Saadaan

$$\begin{aligned} &\nabla \times \int_{\partial D \cup \partial\Omega(\mathbf{x};\rho)} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ &- \nabla \int_{\partial D \cup \partial\Omega(\mathbf{x};\rho)} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ &+ ik \int_{\partial D \cup \partial\Omega(\mathbf{x};\rho)} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ = &\nabla \times \int_{D_\rho} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{y}) - ik\mathbf{H}(\mathbf{y}))\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\ &- \nabla \int_{D_\rho} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\ &+ ik\nabla \times \int_{D_\rho} (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) + ik\mathbf{E}(\mathbf{y}))\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

jossa pallonkuorella $\partial\Omega(\mathbf{x};\rho)$ normaalivektori $\boldsymbol{\nu}$ on määritelty osoittamaan *sisäänpäin.* Kun $\mathbf{y} \in \partial\Omega(\mathbf{x};\rho)$, niin

$$\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho}\ , \quad \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\left(\frac{1}{\rho} - ik\right)\frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\ ,$$

joten käyttämällä kaavaa (B.8) nähdään

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{x}} \times (\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})) - \nabla_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})) \\ &= \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})(\mathbf{E}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})) - (\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}})(\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{E}(\mathbf{y})) \\ &\quad - (\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}))\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ &= -(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{4\pi\rho^2}\mathbf{E}(\mathbf{y}) + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \to 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Yhtälöstä (4.5) seuraa integraalilaskun väliarvolauseen nojalla, että

$$\nabla \times \int_{\partial\Omega(\mathbf{x};\rho))} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \tag{4.6}$$

$$- \nabla \int_{\partial\Omega(\mathbf{x};\rho)} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \tag{4.7}$$

$$+ ik \int_{\partial\Omega(\mathbf{x};\rho)} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \to \mathbf{E}(\mathbf{x})\ , \quad \rho \to 0\ , \tag{4.8}$$

jolloin (4.2) seuraa (4.4):sta.

Tapaus $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ on yksinkertaisempi. Yhtälö (4.3) voidaan integroida koko alueen D yli, koska singulariteettia ei ole. Soveltamalla Gaussin lausetta kuten (4.4):ssa saadaan yhtälön (4.2) oikealle puolelle suoraan $\mathbf{0}$. □

Jos $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ on aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden ratkaisu alueessa D, tilavuusintegraalit kaavasta (4.2) häviävät. Muokkaamalla jäljelle jääviä reunaintegraaleja päädytään seuraavaan lauseeseen.

Lause 4.2 *Olkoon D rajoitettu alue, jonka reuna on paloittain sileä. Merkitään $\boldsymbol{\nu}$:llä reunan ∂D yksikköulkonormaalia. Olkoon $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden* (2.11) *ratkaisu alueessa D. Tällöin pätee*[9]

$$\begin{aligned} &-\nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ &+ \frac{1}{ik}\nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.9}$$

ja

$$\begin{aligned} &-\nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ &- \frac{1}{ik}\nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}\ . \end{cases} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Todistus:
[10] Käsitellään ensin tapaus $\mathbf{x} \in D$. Määritellään jälleen $D_\rho := \{\mathbf{y} \in D : |\mathbf{x}-\mathbf{y}| > \rho\}$, $\partial\Omega(\mathbf{x};\rho) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \rho\}$ ja merkitään pallonkuoren $\partial\Omega(\mathbf{x};\rho)$ ***sisäänpäin*** osoittavaa yksikkönormaalia $\boldsymbol{\nu}$:llä. Käyttämällä Gaussin lausetta ja toista Maxwellin yhtälöä saadaan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) &= \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) = \\ &\int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{y}) \times \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) = \\ \int_{D_\rho} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{H}(\mathbf{y}) \times \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} &- \underbrace{\int_{\partial\Omega(\mathbf{x};\rho)} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y})}_{=0,\ \text{koska}\ \boldsymbol{\nu}||\nabla_{\mathbf{x}}\phi\quad \textit{kun}\ \mathbf{y}\in\partial\Omega(\mathbf{x};\rho)} = \\ &\int_{D_\rho} (\nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}(\mathbf{y})) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} = \\ \int_{D_\rho} ik\mathbf{E}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} &= ik\int_{D_\rho} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} = \\ ik\int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) &+ \underbrace{ik\int_{\partial\Omega(\mathbf{x};\rho)} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y})}_{=:I_\rho}\ . \end{aligned}$$

Tässä neljäs yhtäsuuruus seuraa kaavasta (B.7) ja siitä, että

$$\nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}} \times \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}. \tag{4.11}$$

Kuudes yhtäsuuruus seuraa $\mathbf{E}$:n lähteettömyydestä. Koska

$$|I_\rho| \le k\int_{\partial\Omega(\mathbf{x};\rho)} \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho}\, |\mathbf{E}(\mathbf{y})|\ ds(\mathbf{y}) \to 0, \quad \rho \to 0$$

[9] Selkeyden vuoksi kirjoitamme peräkkäiset roottorit usein ilman sulkuja $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{a}$.

[10] Kaava (4.12) johdetaan tässä eri tavalla kuin kirjoissa [CK98] ja [CK83]. Mielestäni kirjan [CK98] todistus on ongelmallinen, jos $\mathbf{E}, \mathbf{H} \notin C^1(\bar{D})$.

niin

$$\nabla \cdot \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) = ik \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y})\ . \tag{4.12}$$

Käyttäen nyt kaavaa (B.11) ja yhtälöä (4.12) saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{ik}\nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) = \\
&\frac{1}{ik}\int_{\partial D} -\Delta_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})) + \nabla_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})))\, ds(\mathbf{y}) = \\
&-ik\int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) + \nabla \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Kun tämä yhtälö ja aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt sijoitetaan kaavaan (4.2) saadaan haluttu yhtälö (4.9) tapauksessa $\mathbf{x} \in D$. Esitys (4.10) $\mathbf{H}$:lle seuraa (4.9):sta, kun tiedetään, että $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x})$. Nimittäin,

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) \\
&= -\frac{1}{ik}\nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&\quad + \frac{1}{(ik)^2}\nabla \times \int_{\partial D} \nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times (\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\, ds(\mathbf{y}) \\
&= -\frac{1}{ik}\nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&\quad + \frac{1}{k^2}\nabla \times \int_{\partial D} \Delta_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\, ds(\mathbf{y}) \\
&\quad + \frac{1}{(ik)^2}\nabla \times \nabla \int_{\partial D} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\, ds(\mathbf{y}) \\
&= -\frac{1}{ik}\nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&\quad - \nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}),
\end{aligned}$$

jossa viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että gradienttikentän roottori on aina nolla.

Tapauksessa $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$ yhtälön (4.12) johtaminen on hieman yksinkertaisempaa, koska singulariteetti jää D:n ulkopuolelle. Niinpä yhtälö (4.13) pätee myös kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$. Tällöin yhtälöissä (4.9) ja (4.10) tapaus $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$ saadaan samaan tapaan kuin edellä tapaus $\mathbf{x} \in D$, kun sovelletaan oikeaa muotoa yhtälöstä (4.2). □

Lauseen 4.2 avulla saadaan seuraava tulos, johon viitattiinkin jo lauseen 3.17 todistuksessa.

Lause 4.3 *Olkoon* $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ *aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden ratkaisu alueessa* D. *Tällöin* $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^\infty(D)$.

Todistus:
Jokaisella pisteellä $\mathbf{x} \in D$ on ympäristö $\Omega(\mathbf{x};\rho) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \rho\} \subset$

D, joka on rajoitettu ja sileäreunainen. Tässä ympäristössä voidaan soveltaa lausetta 4.2. Tällöin $\mathbf{E}$:n ja $\mathbf{H}$:n äärettömästi derivoituvuus seuraa $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$:n äärettömästi derivoituvuudesta esitysten (4.9) ja (4.10) perusteella. (Derivoinnit muuttujien x_i suhteen voi viedä integraalin sisään, ks. liite A.) Koska $\mathbf{x} \in D$ oli mielivaltainen, ovat $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{H}$ äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituvia koko alueessa D. □

Seuraavaksi määritellään Silver-Müllerin säteilyehto ja aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden säteilevät ratkaisut.

Määritelmä 4.4 *Aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden ratkaisu, joka on määritelty jonkin pallon ulkopuolella, on* säteilevä *ja toteuttaa Silver-Müllerin säteilyehdon, jos ainakin toinen*[11] *seuraavista ehdoista toteutuu*

$$\lim_{r\to\infty} r(\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{E}) = \mathbf{0}\ , \tag{4.14}$$

$$\lim_{r\to\infty} r(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{H}) = \mathbf{0}\ . \tag{4.15}$$

Tässä on merkitty $r = |\mathbf{x}|$ ja vaaditaan, että suppeneminen on tasaista kaikissa suunnissa $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

Ennen kuin johdetaan lausetta 4.2 vastaavan esityslauseen ulkoalueessa todistetaan seuraava lemma, joka muistuttaa lemmaa 3.7.

Lemma 4.5 *Olkoon $\mathbf{E},\mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3\backslash\Omega_R)$ aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden ratkaisu, joka on määritelty R-säteisen pallon ulkopuolella ja täyttää säteilyehdon (4.14). Merkitään $\partial\Omega_r$:llä r-säteisen origokeskisen pallon pintaa. Tällöin pätee*

$$\int_{\partial\Omega_r} |\mathbf{E}|^2\, ds = O(1)\,, \quad r\to\infty \tag{4.16}$$

Todistus:
Merkitään $\boldsymbol{\nu}$:llä $\partial\Omega_r$:n yksikköulkonormaalia. Ehdosta (4.14) seuraa

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_r} |\mathbf{H}\times\boldsymbol{\nu}|^2 + |\mathbf{E}|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\bar{\mathbf{H}}\times\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{E}\right)\, ds = \\ &\int_{\partial\Omega_r} |\mathbf{H}\times\boldsymbol{\nu}-\mathbf{E}|^2\, ds = \frac{1}{r^2}\int_{\partial\Omega_r} |r(\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{E})|^2\, ds \ \to 0, \quad r\ \to\infty\end{aligned} \tag{4.17}$$

Valitaan $r > R$ ja määritellään alue $D_r := \{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3 : R < |\mathbf{y}| < r\}$. Huomataan, että $\bar{\mathbf{H}}\times\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{E} = \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{H}}$, jolloin soveltamalla Gaussin lausetta alueessa D_r saadaan Maxwellin yhtälöiden avulla

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_r} \bar{\mathbf{H}}\times\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{E}\, ds &= \\ \int_{\partial\Omega_R} \bar{\mathbf{H}}\times\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{E}\, ds + \int_{D_r} \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{H}})\, d\mathbf{y} &= \\ \int_{\partial\Omega_R} \bar{\mathbf{H}}\times\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{E}\, ds + \int_{D_r} \bar{\mathbf{H}}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\bar{\mathbf{H}})\, d\mathbf{y} &= \\ \int_{\partial\Omega_R} \bar{\mathbf{H}}\times\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{E}\, ds + ik\int_{D_r} |\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{E}|^2\, d\mathbf{y}&\end{aligned} \tag{4.18}$$

[11] Myöhemmin nähdään, että aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden ratkaisuille joko molemmat ehdot toteutuvat tai ei kumpikaan toteudu.

Yhtälöstä (4.17) saadaan

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\partial\Omega_r} |\mathbf{H}\times\boldsymbol{\nu}|^2 + |\mathbf{E}|^2 \; ds = \lim_{r\to\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\int_{\partial\Omega_r} \bar{\mathbf{H}}\times\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{E}\,ds\right) .$$

Sijoittamalla oikealle puolen yhtälön (4.18) reaaliosa saadaan

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\partial\Omega_r} |\mathbf{H}\times\boldsymbol{\nu}|^2 + |\mathbf{E}|^2 \; ds = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_{\partial\Omega_R} \bar{\mathbf{H}}\times\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{E}\,ds\right) . \tag{4.19}$$

Vasemmalla puolen molemmat termit ovat positiivisia. Niiden täytyy kumman-kin olla rajoitettuja, koska niiden summa lähestyy äärellistä raja-arvoa. On siis todistettu haluttu käyttäytyminen kentälle $\mathbf{E}$. □

Lause 4.6 *Olkoon D rajoitettu joukko, joka on rajoittamattoman paloittain sileäreunaisen alueen avoin komplementti. Merkitään $\boldsymbol{\nu}$:llä reunan ∂D yksikköulkonormaalia, joka osoittaa D:n komplementtiin päin. Olkoon $\mathbf{E},\mathbf{H}\in C^1(\mathbb{R}^3\backslash\bar{D})\cap C(\mathbb{R}^3\backslash D)$ aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden* (2.11) *ratkaisu, joka on* säteilevä. *Tällöin pätee*

$$\begin{aligned}&\nabla\times\int_{\partial D}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\;ds(\mathbf{y})\\&-\frac{1}{ik}\nabla\times\nabla\times\int_{\partial D}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\;ds(\mathbf{y}) = \begin{cases}\mathbf{0} & \mathbf{x}\in D\\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}\end{cases}\end{aligned} \tag{4.20}$$

ja

$$\begin{aligned}&\nabla\times\int_{\partial D}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\;ds(\mathbf{y})\\&+\frac{1}{ik}\nabla\times\nabla\times\int_{\partial D}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\;ds(\mathbf{y}) = \begin{cases}\mathbf{0} & \mathbf{x}\in D\\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.21}$$

Todistus:
Oletetaan ensin, että ehto (4.14) toteutuu. Kiinnitetään $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$. Valitaan r niin suureksi, että D ja $\mathbf{x}$ jäävät r-säteisen origokeskisen pallon Ω_r sisään.

Todistetaan aluksi, että tällöin pätee (vertaa yhtälöön (4.12))

$$\nabla\cdot\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\;ds(\mathbf{y}) = ik\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\;ds(\mathbf{y}) \;. \tag{4.22}$$

Käyttämällä kaavoja (B.4) ja (B.5) nähdään, että

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})) = -\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot(\nabla_{\mathbf{y}}\times\mathbf{H}(\mathbf{y}))+\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\times(\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{H}(\mathbf{y})).$$

Integroimalla puolittain ja käyttämällä toista Maxwellin yhtälöä (2.11b) saadaan edelleen

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\;ds(\mathbf{y}) &=\\ ik\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\;ds(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot(\nabla_{\mathbf{y}}\times(\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{H}(\mathbf{y})))\;ds(\mathbf{y})\;,\end{aligned}$$

jossa jälkimmäinen integraali yli suljetun pinnan $\partial\Omega_r$ häviää Stokesin lauseen perusteella ja päädytään yhtälöön (4.22).

Vastaavalla laskulla kuin yhtälössä (4.13) saadaan yhtälöstä (4.22), että

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{ik}\nabla\times\nabla\times\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y}) = \\
-ik\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})+\nabla\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Niinpä soveltamalla lausetta 4.2 alueessa $\Omega_r\backslash\bar{D}$ nähdään, että

$$
\begin{aligned}
\left.\begin{array}{ll}\mathbf{x}\in D & \mathbf{0}\\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\backslash\bar{D} & \mathbf{E}(\mathbf{x})\end{array}\right\} &= \nabla\times\int_{\partial D}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
&-\frac{1}{ik}\nabla\times\nabla\times\int_{\partial D}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
&-\nabla\times\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y}) \qquad (4.24)\\
&+\nabla\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
&-ik\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\ .
\end{aligned}
$$

Yhtälö (4.20) saadaan, kun näytetään, että lausekkeen kolme viimeistä termiä häviävät r:n lähestyessä ääretöntä. Muokataan termejä hieman. Aloitetaan viemällä yhtälön (4.24) kolmannessa termissä roottori integraalin sisään ja käyttämällä kaavoja (B.2) ja (B.3),

$$
\begin{aligned}
&-\nabla\times\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
=&\int_{\partial\Omega_r}(\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\times\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}))\times\mathbf{E}(\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
&+\int_{\partial\Omega_r}(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{y}))\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
&-\int_{\partial\Omega_r}(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
=&\int_{\partial\Omega_r}(\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\times\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}))\times\mathbf{E}(\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
&-\nabla\int_{\partial\Omega_r}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
&-\int_{\partial\Omega_r}ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{E}(\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\\
&-\int_{\partial\Omega_r}\mathbf{E}(\mathbf{y})(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})-ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\,ds(\mathbf{y})\ .
\end{aligned}
$$

Tämän avulla saadaan yhtälön (4.24) kolme viimeistä termiä kirjoitettua seuraavasti

$$
\begin{aligned}
&- \nabla \times \int_{\partial\Omega_r} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&+ \nabla \int_{\partial\Omega_r} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&- ik \int_{\partial\Omega_r} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
= &\int_{\partial\Omega_r} (\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&- \int_{\partial\Omega_r} (\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})) \times \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&+ \nabla \int_{\partial\Omega_r} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&- ik \int_{\partial\Omega_r} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
= &\int_{\partial\Omega_r} (\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&- \nabla \int_{\partial\Omega_r} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&- \int_{\partial\Omega_r} ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{E}(\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&- \int_{\partial\Omega_r} \mathbf{E}(\mathbf{y})(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) - ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\, ds(\mathbf{y}) \\
&+ \nabla \int_{\partial\Omega_r} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&+ \int_{\partial\Omega_r} ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{E}(\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&- \int_{\partial\Omega_r} ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) + \mathbf{E}(\mathbf{y}))\, ds(\mathbf{y}) \\
= &\int_{\partial\Omega_r} (\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&- \int_{\partial\Omega_r} \mathbf{E}(\mathbf{y})(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) - ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\, ds(\mathbf{y}) \\
&- \int_{\partial\Omega_r} ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) + \mathbf{E}(\mathbf{y}))\, ds(\mathbf{y}) \\
= &\,\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3\ ,
\end{aligned}
$$

jossa välivaiheissa on käytetty kaavoja (B.3) ja (B.5) ja lopuksi on viimeisen muodon pintaintegraaleille otettu käyttöön merkinnät $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ ja $\mathbf{I}_3$.

Kun $\mathbf{x}$ on kiinnitetty ja $\mathbf{y} \in \partial\Omega_r$ niin $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$ ja $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{y}|}\right)$. Samoin kuin saatiin (3.10) saadaan tällöin

$$
\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{y}|^2}\right), \tag{4.25}
$$

ja edelleen

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})-ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})=O\left(\frac{1}{|\mathbf{y}|^2}\right), \tag{4.26}$$

$$\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\times\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})=O\left(\frac{1}{|\mathbf{y}|^2}\right). \tag{4.27}$$

Käyttämällä Schwartzin epäyhtälöä saadaan yhtälöiden (4.26) ja (4.27) sekä lemman 4.5 perusteella

$$\begin{aligned}
|\mathbf{I}_1| &= \left|\int_{\partial\Omega_r}(\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\times\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}))\times\mathbf{E}(\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\right| \\
&\le \|\ |\nabla_{\mathbf{y}}\phi\times\boldsymbol{\nu}|\ \|_{L^2(\partial\Omega_r)}\|\ |\mathbf{E}|\ \|_{L^2(\partial\Omega_r)}\ \to 0,\quad r\to\infty\ , \\
|\mathbf{I}_2| &= \left|\int_{\partial\Omega_r}\mathbf{E}(\mathbf{y})(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})-ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\,ds(\mathbf{y})\right| \\
&\le \|\ |\mathbf{E}|\ \|_{L^2(\partial\Omega_r)}\|\ |\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\phi-ik\phi|\ \|_{L^2(\partial\Omega_r)}\ \to 0,\quad r\to\infty\ ,
\end{aligned}$$

Schwarzin epäyhtälön ja säteilyehdon (4.14) perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
|\mathbf{I}_3| &= \left|\int_{\partial\Omega_r}ik\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})\times\mathbf{H}(\mathbf{y})+\mathbf{E}(\mathbf{y}))\,ds(\mathbf{y})\right| \\
&\le |k|\int_{\partial\Omega_r}|\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})|\,|\mathbf{H}(\mathbf{y})\times\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})-\mathbf{E}(\mathbf{y})|\ ds(\mathbf{y}) \\
&\le |k|\int_{\partial\Omega_r}|\phi|^2\ ds\int_{\partial\Omega_r}|\mathbf{H}\times\boldsymbol{\nu}-\mathbf{E}|^2\ ds\ \to 0,\quad r\to\infty\ .
\end{aligned}$$

Nyt on siis todistettu kaava (4.20) olettaen ehto (4.14). Kaava (4.21) seuraa jälleen (4.20):sta, koska $\mathbf{H}=\frac{1}{ik}\nabla\times\mathbf{E}$.

Jos oletetaan, että ehto (4.15) toteutuu (4.14):n sijaan, voidaan määritellä kentät $\tilde{\mathbf{E}}:=-\mathbf{H}$ ja $\tilde{\mathbf{H}}:=\mathbf{E}$, jotka toteuttavat aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt sekä säteilyehdon (4.14). Näin lauseen todistus palautuu edellä käsiteltyyn tapaukseen. □

Nyt voidaan todistaa ehtojen (4.14) ja (4.15) yhtäpitävyys aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden ratkaisuille ulkoalueessa.

Lause 4.7 *Säteilyehdot* (4.14) *ja* (4.15) *ovat yhtäpitävät.*

Todistus:
Olkoon ratkaisu $\mathbf{E},\mathbf{H}\in C^1(\mathbb{R}^3\backslash\Omega_R)$ määritelty R-säteisen pallon Ω_R ulkopuolella. Lauseen 4.6 mukaan voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\int_{\partial\Omega_R}\mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})+\int_{\partial\Omega_R}\mathbf{E}_{\mathrm{e}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y}) \tag{4.28}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x})=\int_{\partial\Omega_R}\mathbf{H}_{\mathrm{e}}\,ds(\mathbf{y})-\int_{\partial\Omega_R}\mathbf{H}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,ds(\mathbf{y})\ , \tag{4.29}$$

kun määritellään

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &:= \nabla_{\mathbf{x}}\times(\mathbf{a}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})), &\quad \mathbf{H}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &:= \frac{1}{ik}\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\
\mathbf{H}_{\mathrm{e}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &:= \nabla_{\mathbf{x}}\times(\mathbf{b}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})), &\quad \mathbf{E}_{\mathrm{e}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &:= -\frac{1}{ik}\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{H}_{\mathrm{e}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ ,
\end{aligned}$$

jossa on merkitty

$$\mathbf{a}(\mathbf{y}) := \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{b}(\mathbf{y}) := \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y}) \ .$$

Kaavojen (B.5) ja (3.10) perusteella saadaan

$$\nabla_{\mathbf{x}} \times (\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{a}(\mathbf{y})) = ik\frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}\left(e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{a}(\mathbf{y}) + O\left(\frac{|\mathbf{a}(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}|}\right)\right) \tag{4.30}$$

ja kaksoisroottorille pätee

$$\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times (\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{a}(\mathbf{y})) = k^2\frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}\left(e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{a}(\mathbf{y}) \times \hat{\mathbf{x}}) + O\left(\frac{|\mathbf{a}(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}|}\right)\right). \tag{4.31}$$

Kun $\mathbf{y} \in \partial\Omega_R$ niin $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ on rajoitettu ja kaavojen (4.30) ja (4.31) perusteella

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times \mathbf{x} - r\mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) =& \frac{1}{ik}\left(\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \times (\mathbf{a}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}))\right) \times \mathbf{x} \\ & - |\mathbf{x}|\, \nabla_{\mathbf{x}} \times (\mathbf{a}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})) \\ =& O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \ ,\end{aligned}$$

Siispä

$$\mathbf{H}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times \mathbf{x} - r\mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \to \infty$$

tasaisesti kaikissa suunnissa $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ kaikilla $\mathbf{y} \in \partial\Omega_R$. Vastaavasti saadaan myös

$$\mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times \mathbf{x} + r\mathbf{H}_{\mathrm{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \to \infty \tag{4.32}$$

Täysin samanlainen asymptoottinen käyttäytyminen saadaan parille $\mathbf{E}_{\mathrm{e}}, \mathbf{H}_{\mathrm{e}}$ [CK98]. Eli kumpikin pari $\mathbf{E}_{\mathrm{m}}, \mathbf{H}_{\mathrm{m}}$ ja $\mathbf{E}_{\mathrm{e}}, \mathbf{H}_{\mathrm{e}}$ toteuttaa molemmat Silver-Müllerin ehdot kaikilla $\mathbf{y} \in \partial\Omega_R$. Esityksien (4.28) ja (4.29) perusteella myös ratkaisu $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ toteuttaa ne molemmat. Eli (4.14) ja (4.15) ovat yhtäpitävät. □

4.3 Ongelman ratkaisuista

Kappaleessa 4.1 esitelty suora esteongelma voidaan tiivistää seuraavasti, kun este oletetaan täydelliseksi johteeksi.

Ulkoalueen esteongelma
Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu joukko, joka on rajoittamattoman paloittain sileäreunaisen alueen avoin komplementti. Tehtävänä on etsiä aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) - ik\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) + ik\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$$

säteilevä *ratkaisu* $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s \in C^1(\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3\backslash D)$*, joka toteuttaa reunaehdon*

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \times \mathbf{E}_s(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D,$$

jossa kenttä $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ *on tunnettu.*

Kokonaiskentälle reunaehto on muotoa (4.1), mutta sironneelle kentälle reunaehto riippuu sisääntulevasta aallosta $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$. Tässä on siis otettu tangentiaaliselle vektorikentälle $-\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \times \mathbf{E}_i(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \partial D$ käyttöön merkintä $\mathbf{c}(\mathbf{x})$.

Rellichin lemman avulla voidaan todistaa, että ulkoalueen esteongelmalla on korkeintaan yksi ratkaisu.

Lause 4.8 *Ulkoalueen esteongelmalla on korkeintaan yksi ratkaisu.*

Todistus:
Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että ongelmalla on ratkaisut $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ ja $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$. Tällöin myös $\tilde{\mathbf{E}} := \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2,\ \tilde{\mathbf{H}} := \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ on Maxwellin yhtälöiden ratkaisu alueessa $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$, mutta reunaehdolla

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial D\ . \tag{4.33}$$

Kuten lemman 4.5 todistuksessa saatiin yhtälö (4.19), saadaan [12]

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\partial\Omega_r} \left|\tilde{\mathbf{H}} \times \boldsymbol{\nu}\right|^2 + \left|\tilde{\mathbf{E}}\right|^2 ds = 2\,\mathrm{Re} \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu} \times \tilde{\mathbf{E}} \cdot \bar{\tilde{\mathbf{H}}}\, ds\ . \tag{4.34}$$

Yhtälöistä (4.33) ja (4.34) seuraa

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\partial\Omega_r} \left|\tilde{\mathbf{E}}\right|^2 ds = 0\ .$$

Nyt lauseesta 3.17 ja Rellichin lemmasta seuraa, että $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$. Tästä seuraa edelleen, että $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$ ja ratkaisut $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ ja $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ ovatkin samat koko alueessa $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$. □

Olettaen että D:n reuna ja funktio $\mathbf{c}$ ovat riittävän sileitä voidaan osoittaa, että ulkoalueen esteongelmalla on aina ratkaisu ja että ratkaisu riippuu jatkuvasti reunadatasta [CK98]. Tässä todistusta ei käsitellä vaan viitataan kirjoihin [CK98] ja [CK83]. Lyhyesti mainitaan kuitenkin todistuksen perimmäinen idea, koska se myös hieman valottaa lähestymistapoja ongelman numeeriseen ratkaisuun. Ulkoalueen esteongelman ratkaisua etsitään muodossa

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \int_{\partial D} \mathbf{a}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&\quad + i\eta\, \nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times (S_0^2 \mathbf{a})(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
\mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x})\ ,
\end{aligned}$$

jossa parametri $\eta \neq 0$ ja S_0 on integraalioperaattori

$$(S_0 \mathbf{a})(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, ds(\mathbf{y})\ .$$

Funktiolle $\mathbf{a}$ on mahdollista johtaa integraaliyhtälö, jolla voidaan osoittaa aina olevan yksikäsitteinen ratkaisu. Samaista reunaintegraaliyhtälöä voidaan ratkaista myös numeerisesti. Oleellista on, että näin aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden rajoittamattomassa kolmiulotteisessa alueessa määrittelemä ongelma saadaan muutettua integraaliyhtälöksi yli kaksiulotteisen ja rajoitetun pinnan.

[12] Skalaarikolmitulossa pisteen ja ristin paikan saa vaihtaa!

5 Sironta epähomogeenisessa väliaineessa

Väliaineen sähköiset ominaisuudet voivat vaihdella paikan funktiona. Tällöin myös sähkömagneettisen aaltoliikkeen etenemisnopeus on erilainen eri kohdissa, mikä saa aikaan säteilyn siroamista. Sironnan suorana ongelmana on selvittää sironnut kenttä, kun sisääntuleva kenttä ja väliaineen ominaisuudet tunnetaan. Seuraavassa oletetaan, että väliaineen ominaisuudet muuttuvat jatkuvasti ja että kaukana origosta väliainetta voi pitää homogeenisena eristeenä. Kappaleessa 5.1 määritellään sirontaongelma matemaattisesti ja kappaleessa 5.2 osoitetaan ongelmalla olevan yksikäsitteinen ratkaisu.

5.1 Ongelman määrittely

Tarkastellaan epähomogeenista isotrooppista ainetta $\mathbb{R}^3$:ssa, jossa permittiivisyys on $\epsilon(\mathbf{x})$ ja johtavuus $\sigma(\mathbf{x})$. Useimmilla materiaaleilla magneettinen permebiliteetti on lähes sama kuin tyhjiössä, joten oletetaan, että $\mu > 0$ on vakio kaikkialla.[13] Lisäksi oletetaan, että riittävän kaukana origosta permittiivisyys on vakio ja johtavuus nolla eli

$$\exists R > 0 \quad \text{s.e.} \quad \epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon_0 > 0 \quad \text{ja} \quad \sigma(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{kun} \quad |\mathbf{x}| > R. \tag{5.1}$$

Sijoittamalla yhtälöihin (2.10c) ja (2.10d)

$$\hat{\mathbf{E}} = \epsilon_0^{-1/2}\mathbf{E} \quad \text{ja} \quad \hat{\mathbf{H}} = \mu^{-1/2}\mathbf{H}$$

ja merkitsemällä

$$k = \omega\sqrt{\mu\,\epsilon_0} > 0, \tag{5.2}$$

$$n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\epsilon(\mathbf{x}) + i\frac{\sigma(\mathbf{x})}{\omega}\right) \tag{5.3}$$

saadaan aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt epähomogeenisessa aineessa

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0},$$
$$\nabla \times \mathbf{H} + ik\,n(\mathbf{x})\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Oletuksesta (5.1) seuraa, että funktiolla $m := 1 - n$ on kompakti kantaja. Koska $\sigma(\mathbf{x}) > 0$ niin $\mathrm{Im}(n) > 0$. Vielä oletetaan, että $n \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$, ja määritellään ongelma seuraavasti.

Väliaineongelma
Olkoon $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$ homogeenisten aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden (2.11) ratkaisu kaikkialla $\mathbb{R}^3$:ssa. Tehtävänä on etsiä ratkaisu $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ yhtälöille

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0}, \tag{5.4a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + ik\,n(\mathbf{x})\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{5.4b}$$

siten, että sironnut kenttä

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_i, \qquad \mathbf{H}_s = \mathbf{H} - \mathbf{H}_i, \tag{5.5}$$

[13] Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys voidaan osoittaa myös yleisemmässä tapauksessa $\mu = \mu(\mathbf{x})$, ks. [Mül69].

toteuttaa säteilyehdon [14]

$$\lim_{r\to\infty} r(\mathbf{E}_s \times \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_s) = \mathbf{0} \;, \tag{5.6}$$

tasaisesti kaikissa suunnissa $\hat{\mathbf{x}}$.

5.2 Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Todistetaan aluksi seuraava lause.

Lause 5.1 *Olkoon* $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ *väliaineongelman* (5.4)-(5.6) *ratkaisu. Tällöin* $\mathbf{E}$ *toteuttaa integraaliyhtälön*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) =& \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(1-n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\ &+ \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{n(\mathbf{y})} \nabla n(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Todistus:
Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ mielivaltainen ja B niin suuri origokeskinen pallo, että se sisältää pisteen $\mathbf{x}$ ja funktion $(1-n)$:n kantajan. Soveltamalla kaavaa (4.2) ratkaisuun $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) =& -\nabla \times \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ &+ \nabla \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ &- ik \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ &+ \nabla \int_{B} \frac{1}{n(\mathbf{y})} \nabla n(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\ &- k^2 \int_B \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(1-n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y},\end{aligned} \tag{5.8}$$

sillä $\nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = ik(1-n)\mathbf{E}$ ja $n\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla n \cdot \mathbf{E}$. Soveltamalla kaavaa (4.2) edelleen ratkaisuun $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i(\mathbf{x}) =& -\nabla \times \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}_i(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ &+ \nabla \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\ &- ik \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}_i(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{5.9}$$

Pallon B ulkopuolella $n = 1$ ja siellä myös sironnut kenttä $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ toteuttaa homogeenisen aineen aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt (2.11), jolloin lauseen

[14] Koska säteilyehdot (4.14) ja (4.15) osoitettiin yhtäpitäviksi, voidaan käyttää kumpaa hyvänsä. Säteilyehdon (4.14) suora todistaminen lauseessa 5.2 tuotti kuitenkin vaikeuksia, vaikka [CK98] toteaa sen seuraavan helposti.

4.6 mukaan saadaan (kaava (4.23) pätee pinnalla ∂B)

$$
\begin{aligned}
0 = &- \nabla \times \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}_s(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&+ \nabla \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}) \\
&- ik \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}_s(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, ds(\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Koska $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$, saadaan haluttu yhtälö (5.7) laskemalla (5.9) ja (5.10) puolittain yhteen ja sijoittamalla tulos yhtälöön (5.8). □

Seuraavaksi osoitetaan, että ratkaisemalla yhtälö (5.7) saadaan myös ongelman (5.4)-(5.6) ratkaisu. Niinpä integraaliyhtälö (5.7) on eräs mahdollinen lähtökohta suoran väliaineongelman numeeriselle ratkaisemiselle.

Lause 5.2 *Olkoon* $\mathbf{E} \in C(\mathbb{R}^3)$ *yhtälön* (5.7) *ratkaisu. Tällöin* $\mathbf{E}$ *ja* $\mathbf{H} := \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{E}$ *ovat väliaineongelman* (5.4)-(5.6) *ratkaisu.*

Todistus:
Koska $(1-n)$:llä on kompakti kantaja, niin lauseen 3.12 mukaan $\mathbf{E} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$. Samaisen lauseen mukaan voidaan seuraavassa derivointi viedä integraalin sisään ja saadaan

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})(1 - n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} (1 - n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot ((1 - n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})(1 - n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot ((1 - n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y},
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

jossa viimeinen yhtäsuuruus seuraa käyttämällä Gaussin divergenssilausetta ja $(1-n)$:n kompaktikantajaisuutta. Edelleen lauseen 3.12 perusteella

$$
(\Delta + k^2) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{n(\mathbf{y})} \nabla n(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = -\frac{1}{n(\mathbf{x})} \nabla n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}). \tag{5.12}
$$

Ottamalla yhtälöstä (5.7) divergenssi nähdään yhtälöiden (5.11) ja (5.12) avulla, että

$$
u := \frac{1}{n} \nabla \cdot (n\mathbf{E})
$$

toteuttaa integraaliyhtälön (3.21). Siispä seurauksen 3.16 mukaan

$$
\nabla \cdot (n\mathbf{E}) = 0 \tag{5.13}
$$

ja yhtälö (5.7) voidaan kirjoittaa muodossa

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}) = &\mathbf{E}_i(\mathbf{x}) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})(1 - n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\
&+ \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Koska $\mathbf{H} := \frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{E}$ niin

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) + ik\nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(1-n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \tag{5.15}$$

josta lauseen 3.12 perusteella seuraa $\mathbf{H} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$, koska oli $\mathbf{E} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$. Käyttäen ensin yhtälöitä (5.14) ja (5.15), sitten kaavaa (B.11) ja lopuksi yhtälöä (5.13) saadaan

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) + ik\mathbf{E}(\mathbf{x}) =& ik(\nabla\times\nabla\times -k^2)\int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(1-n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\
&- ik\nabla \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\
=& - ik(\Delta + k^2)\int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(1-n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\
&- ik\nabla \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot(n(\mathbf{y})\mathbf{E}(\mathbf{y}))\,d\mathbf{y} \\
=& ik(1-n(\mathbf{x}))\mathbf{E}(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

joten $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ toteuttaa yhtälöt (5.4).

Vielä täytyy osoittaa säteilyehto. Määritelmän (5.5) mukaan seuraa yhtälöistä (5.7) ja (5.15), että

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_s(\mathbf{x}) =& - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(1-n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\
&+ \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{n(\mathbf{y})}\nabla n(\mathbf{y})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \\
\mathbf{H}_s(\mathbf{x}) =& ik\nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})(1-n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Kun merkitään yhtälöissä esiintyviä kompaktikantajaisia funktioita seuraavasti

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(\mathbf{y}) &:= (1-n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y}), \\
b(\mathbf{y}) &:= \frac{1}{n(\mathbf{y})}\nabla n(\mathbf{y})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{y}),
\end{aligned}$$

saadaan kaavojen (3.9), (3.10) ja (4.30) avulla

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_s(\mathbf{x})\times\mathbf{x} + |\mathbf{x}|\,\mathbf{H}_s(\mathbf{x}) =& - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{a}(\mathbf{y})\times\mathbf{x}\,d\mathbf{y} \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} b(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\times\mathbf{x}\,d\mathbf{y} \\
&+ ik\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|\,\nabla\times(\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{a}(\mathbf{y}))\,d\mathbf{y} \\
=& \int_{\mathbb{R}^3} \Big(- k^2 e^{ik|\mathbf{x}|}e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}\mathbf{a}(\mathbf{y})\times\hat{\mathbf{x}} \\
&\quad + b(\mathbf{y})ike^{ik|\mathbf{x}|}e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}} \\
&\quad + ik\,|\mathbf{x}|\,ik\frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}\times\mathbf{a}(\mathbf{y})\Big)\,d\mathbf{y} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \\
=& O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right).
\end{aligned}$$

Siis säteilyehto toteutuu. □

Hieman samaan tapaan kuin todistettiin lause 3.14 voidaan yksikäsitteisen jatkamisen periaatteen avulla todistaa seuraava lause.

Lause 5.3 *Väliaineongelmalla* (5.4)-(5.6) *on korkeintaan yksi ratkaisu.*

Todistus:
Katso [CK98] □

Ratkaisun olemassaolon todistamisessa voidaan nyt käyttää hyväksi ongelman muotoilua integraaliyhtälönä. Funktionaalianalyysistä tunnetaan nimittäin seuraavat tulokset.

Määritelmä 5.4 *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^3$ paloittain sileäreunainen rajoitettu alue. Integraalioperaattori $T : C(\bar{G}) \to C(\bar{G})$,*

$$(Tu)(\mathbf{x}) = \int_G K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \bar{G}, \tag{5.16}$$

on heikosti singulaarinen, *jos ydin $K : (\bar{G} \times \bar{G}) \backslash \{\mathbf{x} = \mathbf{y}\} \to \mathbb{C}$ on jatkuva ja on olemassa vakio $\lambda \in [0, 3)$ siten, että K toteuttaa epäyhtälön*

$$|K(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq c\, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-\lambda}, \tag{5.17}$$

jollain vakiolla c.

Lause 5.5 *Heikosti singulaarinen integraalioperaattori $T : C(\bar{G}) \to C(\bar{G})$ on kompakti.*

Todistus:
Katso [Vai03]. □

Lause 5.6 *Olkoon $T : V \to V$ kompakti lineaarinen operaattori normiavaruudessa V. Yhtälöllä*

$$u = Tu + v \tag{5.18}$$

on ratkaisu u kaikilla $v \in V$ jos ja vain jos vastaavalla homogeenisella yhtälöllä

$$u = Tu \tag{5.19}$$

on ainoastaan ratkaisu $u = 0$. Tässä tapauksessa operaattorilla $(I - T)$ on rajoitettu käänteisoperaattori.

Todistus:
Katso [Kre89]. □

Siispä sironnan väliaineongelman ratkaisuista voidaan todeta seuraavaa.

Lause 5.7 *Väliaineongelmalla* (5.4)-(5.6) *on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, joka riippuu jatkuvasti sisääntulevasta kentästä $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$.*

Todistus:
Olkoon B jokin pallo, jonka ulkopuolella $n = 1$. Kun määritellään integraalioperaattori $T_e : C(\bar{B}) \to C(\bar{B})$ seuraavasti

$$\begin{aligned}(T_e\mathbf{E})(\mathbf{x}) = &- k^2 \int_B \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})(1 - n(\mathbf{y}))\mathbf{E}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\ &+ \int_B \nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{1}{n(\mathbf{y})} \nabla n(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \bar{B},\end{aligned} \tag{5.20}$$

voidaan yhtälö (5.7) kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (T_e\mathbf{E})(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{B}, \tag{5.21}$$

koska lauseen 3.12 mukaan derivoinnin voi (5.7):n viimeisessä termissä viedä integraalin sisään. Kun yleistetään määritelmä 5.4 operaattoreille, jotka operoivat vektoriarvoisiin funktioihin, nähdään, että T_e on heikosti singulaarinen.Siispä se on kompakti. Lauseista 5.2 ja 5.3 seuraa, että homogeenisella yhtälöllä $\mathbf{E} = T_e\mathbf{E}$ on vain ratkaisu $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Siispä lauseen 5.6 mukaan kaikilla $\mathbf{E}_i$ yhtälöllä (5.21) on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu

$$\mathbf{E} = (I - T_e)^{-1}\mathbf{E}_i, \tag{5.22}$$

joka riippuu jatkuvasti $\mathbf{E}_i$:stä. Lauseen 5.2 mukaan väliaineongelman ratkaisu saadaan, kun asetetaan $\mathbf{H} = \frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{E}$. Ratkaisu $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ voidaan määritellä koko $\mathbb{R}^3$:ssa, koska palloa B voidaan suurentaa mielivaltaisen suureksi. $\square$

6 Lopuksi

Työssä määriteltiin kaksi sähkömagneettisen säteilyn sirontaongelmaa ja osoitettiin niillä olevan yksikäsitteinen ratkaisu. Toinen ongelma kuvasi kentän siroamista homogeenisen eristeen ympäröimästä johdekappaleesta ja toinen sirontaa epähomogeenisessa väliaineessa. Esitetyt todistukset pohjautuivat kirjaan [CK98]. Koska sähkö- ja magneettikentät ovat vektorikenttiä, muodostuvat todistukset helposti työläämmiksi kuin vastaavat todistukset skalaarikentille. Niinpä osa tuloksista jouduttiin esittämään ilman todistusta. Tavoitteena oli kuitenkin käsitellä aihetta siinä määrin täsmällisesti, että lukijalle muodostuisi käsitys todistusten rakenteesta ja ongelmien matemaattisen muotoilun taustalla olevista oletuksista.

A Kompleksiarvoiset vektorikentät

Olkoon $G \subset \mathbb{R}^3$ alue, jossa on määritelty funktio $\mathbf{F} : G \to \mathbb{C}^3$. Avaruuksissa $\mathbb{R}^3$ ja $\mathbb{C}^3$ on normi määritelty tavalliseen tapaan sisätulon avulla:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >} = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$$

Pistetulon kahden vektorin välillä sen sijaan määrittelemme ilman kompleksikonjugointia

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3, \quad \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^3.$$

Määritellään seuraavaksi, mitä kompleksiarvoisen vektorikentän jatkuvuudella ja derivoituvuudella täsmällisesti tarkoitetaan.

Määritelmä A.1 *Funktio $\mathbf{F} : G \to \mathbb{C}^3$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0 \in G$ jos*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad |\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)| < \epsilon \quad \text{kun} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$$

Määritelmä A.2 *Funktio $\mathbf{F} : G \to \mathbb{C}^3$ on derivoituva pisteessä $\mathbf{x}_0 \in G$ jos on olemassa sellainen rajoitettu lineaarikuvaus $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3$ että*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.e.} \quad |\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}| < \epsilon\, |\mathbf{h}| \quad \text{kun} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$$

Lineaarikuvausta $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ sanotaan $\mathbf{F}$:n derivaataksi pisteessä $\mathbf{x}_0$. $\mathbf{F}$ on jatkuvasti *derivoituva G:ssä, jos kuvaus $\mathbf{F}' : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$ on jatkuva.*

Vastaavasti voidaan määritellä funktion $\mathbf{F}' : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$ derivaatta $\mathbf{F}'' : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3))$ (eli $\mathbf{F}$:n toinen derivaatta) ja niin edelleen. Funktion $\mathbf{F}$ derivoituvuutta voidaan kuitenkin tutkia myös seuraavan tuloksen kautta [Kiv97].

Lause A.3 *Olkoot funktiolla $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jatkuvat osittaisderivaatat*[15] *kertalukuun n asti alueessa $G \subset \mathbb{R}^3$. Tällöin u on G:ssä n kertaa jatkuvasti derivoituva ja merkitään $u \in C^n(G)$.*

Vektorikentän $\mathbf{F}$ n kertaa jatkuvasti derivoituvuus tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että $\mathbf{F}$:n karteesisten komponenttien reaali- ja imaginääriosat ovat n kertaa jatkuvasti derivoituvia alueessa G. Myös tällöin merkitään $\mathbf{F} \in C^n(G)$.

Muotoa $\int_G \mathbf{F}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ ja $\int_{S \subset G} \mathbf{F}(\mathbf{x})ds(\mathbf{x})$ olevat integraalit voidaan tulkita siten, että integroidaan $\mathbf{F}$:n karteesisten komponenttien reaali- ja imaginääriosat erikseen, jolloin kysymyksessä ovat tavanomaiset avaruus- ja pintaintegraalit.

Olkoot $\mathbf{F} : G \to \mathbb{C}^3$ ja $\phi : G \times G \to \mathbb{C}$ jatkuvia funktioita ja integroituvia alueessa D. Usein voi olla tarpeen derivoida muotoa $\int_D \mathbf{F}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}$ olevia lausekkeita muuttujan $\mathbf{x}$ suhteen. Jos $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ on jatkuvasti derivoituva muuttujan $\mathbf{x}$ suhteen ja sekä $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ että $\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i}$ ovat rajoitettuja integroimisalueessa D, niin Lebesquen dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa, että

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_D \mathbf{F}(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_D \mathbf{F}(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} d\mathbf{y}$$

[Rud74]. Myös pintaintegraalin tapauksessa integroinnin ja derivoinnin järjestyksen vaihtaminen on sallittua vastaavin oletuksin.

[15] $\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}, \quad i_k \in \{1, 2, 3\}, \quad$ kaikkiaan 3^n kappaletta

B Vektorilaskennan kaavoja

B.1 Skalaarikolmitulo ja vektorikolmitulo

Seuraavat tutut kaavat pätevät myös $\mathbb{C}^3$:n vektoreille

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \tag{B.1}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \tag{B.2}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \tag{B.3}$$

B.2 Derivointikaavoja

Olkoot $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ kerran jatkuvasti derivoituvia vektoriarvoisia funktioita ja ψ kerran jatkuvasti derivoituva skalaarifunktio. Tällöin pätevät seuraavat laskusäännöt.

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a} \tag{B.4}$$

$$\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a} \tag{B.5}$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \tag{B.6}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \tag{B.7}$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} \tag{B.8}$$

Jos $\mathbf{a}$ ja ψ ovat kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia niin

$$\nabla \times \nabla \psi = 0 \tag{B.9}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \tag{B.10}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}\ . \tag{B.11}$$

B.3 Gaussin lause

Olkoon $G \in \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna ∂G on paloittain sileä. Funktiolle $\mathbf{A} : \bar{G} \to \mathbb{C}^3$, $\mathbf{A} \in C(\bar{G}) \cap C^1(G)$, pätee Gaussin lause

$$\int_G \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int_{\partial G} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})\ ds(\mathbf{x}), \tag{B.12}$$

jossa $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ on pinnan ∂G yksikköulkonormaali ja $ds(\mathbf{x})$ on pinnan pinta-ala-alkio pisteessä $\mathbf{x}$.

Gaussin lause pätee myös seuraavissa muodoissa [AW01]:

$$\int_G \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int_{\partial G} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \times \mathbf{A}(\mathbf{x})\ ds(\mathbf{x}) \tag{B.13}$$

$$\int_G \nabla \psi(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int_{\partial G} \psi(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\ ds(\mathbf{x}) \tag{B.14}$$

B.4 Greenin kaavat

Olkoon $G \in \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna ∂G on paloittain sileä. Olkoot $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$. Sijoittamalla Gaussin divergenssilauseeseen vuorotellen

$\mathbf{A} = v\nabla u$ ja $\mathbf{A} = v\nabla u - u\nabla v$ saadaan seuraavat Greenin kaavat

$$\int_G (\nabla v \cdot \nabla u + v\,\Delta u)\,d\mathbf{x} = \int_{\partial G} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds, \tag{B.15}$$

$$\int_G (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,d\mathbf{x} = \int_{\partial G} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,ds, \tag{B.16}$$

jossa $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla u$ on u:n derivaatta ulkonormaalin suuntaan.

B.5 Stokesin lause

Olkoon S pinnanpala, jonka parametriesitys on paloittain kahdesti jatkuvasti derivoituva ja joka on siinä mielessä suunnistuva, että reunan δS ja pinnan normaalin $\boldsymbol{\nu}$ suunta voidaan ristiriidatta valita toisiinsa nähden positiivisesti suunnistetuiksi [Kiv97]. Olkoon $\mathbf{A}$ jatkuvasti derivoituva vektorikenttä, joka on määritelty pinnalla S reuna δS mukaanluettuna. Tällöin on voimassa *Stokesin lause*

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\ ds(\mathbf{x}) = \oint_{\delta S} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}(\mathbf{x})\ . \tag{B.17}$$

Viitteet

[AW01] Arfken, G. B. ja Weber, H. J., *Mathematical methods for physicists, 5th ed.* Academic Press, 2001.

[CK83] Colton, D. ja Kress, R., *Integral equation methods in scattering theory.* John Wiley & Sons, 1983.

[CK98] Colton, D. ja Kress, R., *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory.* Springer Verlag, 1998.

[Jac98] Jackson, J. D., *Classical electrodynamics, 3rd ed.* John Wiley & Sons, 1998.

[Jon86] Jones, D. S., *Acoustic and electromagnetic waves.* Oxford University Press, 1986.

[Kiv97] Kivelä, S. K., *Vektorimuuttujan analyysi.* Otatieto, 1997.

[Kre89] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley & Sons, 1989.

[Mül69] Müller, C., *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves.* Springer Verlag, 1969.

[Rud74] Rudin, W., *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Inc., 1974.

[SL95] Sihvola, A. ja Lindell, I., *Sähkömagneettinen kenttäteoria 1. Staattiset kentät.* Otatieto, 1995.

[SL96] Sihvola, A. ja Lindell, I., *Sähkömagneettinen kenttäteoria 2. Dynaamiset kentät.* Otatieto, 1996.

[SV02] Saranen, J. ja Vainikko, G., *Periodic integral and pseudodifferential equations with numerical approximation.* Springer Verlag, 2002.

[Vai03] Vainikko, G., Kurssin Integraaliyhtälöt luentomuistiinpanot, TKK 2003.

[Van93] Vanderlinde, J., *Classical electromagnetic theory.* John Wiley & Sons, 1993.