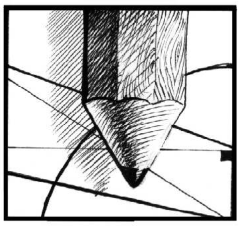

Pelataan niukkaa

Tuomas Korppi

Esinäytös

Henkilöt: $\forall$ ja $\exists$, pelureita.

$\exists$: Pelataan niukkaa, sano joku luku.
$\forall$: Viisi!
$\exists$: Kuusi! Voitin niukasti.

$\exists$: Pelataan uudestaan. Sano joku luku.
$\forall$: Miljoona!
$\exists$: Miljoona yksi! Voitin niukasti.

$\exists$: Pelataan vielä kerran. Sano joku luku.
$\forall$: Miljardi!
$\exists$: Miljardi yksi! Voitin niukasti.

Niukka on ala-asteiden pihoilla pelattu kahden hengen peli, jossa suuremman luvun sanonut voittaa. Kuten lukija pystyikin jo päättelemään, pelaajalla, joka sanoo luvun viimeisenä, on menetelmä, jolla hän voittaa pelin varmasti. Jos ensimmäinen pelaaja sanoo luvun a, sanoo jälkimmäinen pelaaja luvun $a + 1$. Tällaista varmaan voittoon johtavaa menetelmää kutsutaan *voittostrategiaksi.*

Useita matemaattisia ilmiöitä voidaan mieltää pelien avulla. Esimerkiksi se, että jälkimmäisellä pelaajalla on voittostrategia niukka-pelissä, heijastelee sitä tosiasiaa, että jokaista lukua kohti on olemassa toinen, suurempi luku.

$\forall$: $\exists$ pystyy sanomaan suurempia lukuja kuin minä. En taida enää pelata niukkaa.

$\exists$: On olemassa muitakin pelejä. Joissain niistä voittaa sanomalla pieniä lukuja.

$\forall$: Minä taidankin olla hyvä sanomaan pieniä lukuja. Pelataan jotain sellaista.

$\exists$: [Hykertelee itsekseen: Nyt se hölmö meni lankaan. Voitan niukan, koska jokaista lukua kohti on olemassa toinen, suurempi luku. Mutta aivan vastaavasti jokaista positiivista lukua kohti on olemassa toinen, pienempi positiivinen luku. Itse asiassa minkä tahansa kahden keskenään erisuuren reaaliluvun välissä on reaaliluku.]

Välipelissä $\forall$ sanoo ensin reaaliluvut x ja y, joille $x < y$. Sitten $\exists$ sanoo reaaliluvun z. Pelaaja $\exists$ voittaa välipelin, jos $x < z < y$. Muutoin $\forall$ voittaa.

$\exists$: Pelataan välipeliä, sano luvut x ja y, joille $x < y$.

$\forall$: 1 ja 2!

$\exists$: $1,07$! Koska $1 < 1,07 < 2$, minä voitin.

$\exists$:llä on välipelissä voittostrategia: Jos $\forall$ sanoo luvut x ja y, $x < y$ (koska luonnehdimme systeemiä, jolla $\exists$ voittaa, tekipä $\forall$ mitä tahansa, emme voi tässä olettaa luvuilta x ja y muuta, kuin sääntöjen vaatimuksen $x < y$), voi $\exists$ sanoa z:na lukujen x ja y keskiarvon $x/2 + y/2$, joka on x:n ja y:n välissä. Tarkemmin tämä voidaan perustella seuraavasti: Koska $x/2 < y/2$, pätee

$$x = x/2 + x/2 < x/2 + y/2 < y/2 + y/2 = y,$$

joten $\exists$:n voittostrategia todella toimii.

$\exists$: Pelataan uudestaan.

$\forall$: 1 ja 1,07!

$\exists$: 1,035! Voitin.

——

$\exists$: Pelataan uudestaan.

$\forall$: 1 ja 1,035!

$\exists$: 1,0175! Voitin.

Välipeli heijastelee sitä tosiasiaa, että kahden erisuuren reaaliluvun välissä on aina reaalilukuja. Välipelin avulla voidaan osoittaa, että ei ole olemassa pienintä positiivista reaalilukua.

$\forall$: Luku on positiivinen, jos se on suurempi kuin nolla.

$\exists$: Nolla ei ole positiivinen luku.

$\forall$: Kylläpä sitä ollaan negatiivisella päällä.

$\exists$: Nolla ei ole myöskään negatiivinen. Nolla on nolla.

Jos $\forall$ väittää, että y on pienin positiivinen reaaliluku, voi $\exists$ haastaa $\forall$:n välipeliin. $\forall$ uskoo, että lukujen 0 ja y välissä ei ole reaalilukuja, ja niinpä hän sanoo luvut 0 ja y. Nyt $\exists$ kumoaa $\forall$:n uskomuksen sanomalla luvun $y/2$, joka on positiivinen, y:tä pienempi reaaliluku.

$\forall$: 0,000001 on kyllä kaikkein pienin positiivinen reaaliluku.

$\exists$: Katsotaanpa, pelataan välipeliä.

$\forall$: OK. 0 ja 0,000001!

$\exists$: 0,0000005! Voitin.

$\forall$: Myönnetään, 0,000001 ei olekaan pienin positiivinen reaaliluku.

——

$\exists$: Pelataan vielä.

$\forall$: Pidetään hiukan taukoa, että Tuomaskin saa suunvuoron ja pääsee esittelemään tämän tekstin.

$\exists$: Lupaa, että pelaat minun kanssa myöhemmin.

$\forall$: Minä lupaan.

Muutos on jatkuvaa, jos muutosta tapahtuu sitä vähemmän, mitä vähemmän aikaa kuluu. Tässä kirjoitelmassa tutkimme pelejä, joiden avulla edellinen luonnehdinta ”sitä vähemmän, mitä vähemmän aikaa kuluu” voidaan ilmaista matemaattisen täsmällisesti. Aloitamme luvulla, jossa pohditaan jatkuvuutta yleisellä tasolla. Sen jälkeen esittelemme jatkuvuuspelin ja päästämme lukijan etsimään sen voittostrategioita.

$\forall$: Kuulostaapa vaikealta. Osaakohan lukija etsiä voittostrategoita?

$\exists$: Katso nyt seuraavia lukuja. Niissähän on kaikenlaisia johdattelevia tehtäviä.

$\forall$: Niinpä. Tehtäviin paneutuminen saa ihmeitä aikaan.

Lopuksi tutkimme jatkuvuuden ja jatkuvuuspelin välistä yhteyttä sekä jatkuvuuspelin muunnelmia.

Jatkuvuus

Siirryt polkupyörällä pisteestä a pisteeseen b. Nopeutesi on 36 kilometriä tunnissa. Jos tutkit matkallasi minuutin mittaista ajanjaksoa, huomaat kulkeneesi $60\,\mathrm{s} \cdot 36\,\mathrm{km/h} = 600\,\mathrm{m}$. Jos tutkit sekuntin mittaista ajanjaksoa, huomaat kulkeneesi 10 metriä. Sekuntin sadasosassa olet kulkenut 10 senttiä, ja sekuntin miljoonasosassa vain 0,001 senttimetriä.

Kun tutkit yhä lyhyempiä ajanjaksoja, huomaat kulkeneesi yhä vähemmän. Tällaista liikettä kutsutaan jatkuvaksi[1].

$\exists$: Höh, onko ihmekään, että tyyppi liikkuu polkupyörällä vain 0,001 senttimetriä. Autolla pääsisi paljon lujempaa.

$\forall$: Hyss! Jos alamme puhumaan autoista tässä tekstissä, karkoitamme ympäristötietoiset lukijat.

Jos ajaisimme autolla, vauhtimme olisi kenties 120 kilometriä tunnissa. Minuutissa liikkuisimme 2 kilometriä ja sekuntissa 33,33 metriä. Vaikka lukuarvot ovat hiukan suurempia kuin pyöräillessä, sama ilmiö toistuu: Kun tutkimme yhä lyhyempiä ajanjaksoja, huomaamme kulkeneemme yhä lyhyempiä matkoja. Myös auton liike on jatkuvaa.

[1] Korkeampaa fysiikkaa tunteville lukijoille huomautan, että tämän luvun esimerkeissä liikutaan klassisen newtonilaisen fysiikan maailmassa, joka ei ole kvantittunut, ja jossa valonnopeus ei ole universaali nopeuksien yläraja. Tarkoitukseni on valaista matemaattisia ideoita, ei kuvailla todellisuutta.

$\forall$: 120 kilometriä tunnissa on aika nopeaa. Kyllä auto ajaa kaikkina aikaväleinä vähintään yhden senttimetrin.

$\exists$: Ei. Jos tutkimme aikaväliä, jonka pituus on $0,0002$ sekuntia, auto ajaa tuona aikana

$$0,0002\,\mathrm{s}\cdot 120\,\mathrm{km/h} = 0,0002\,\mathrm{s}\cdot 33\frac{1}{3}\,\mathrm{m/s} < 0,01\,\mathrm{m}.$$

$\forall$: No kyllä se ainakin ajaa kaikkina aikaväleinä vähintään yhden millimetrin.

$\exists$: Eikä. Jos tutkimme aikaväliä, jonka pituus on $0,00002$ sekuntia, auto ajaa tuona aikana alle yhden millimetrin.

$\forall$: No kyllä se nyt ainakin ajaa kaikkina aikaväleinä vähintään $0,1$ millimetriä

$\exists$: Eikä. Jos tutkimme aikaväliä, jonka pituus on $0,000002$ sekuntia, auto ajaa tuona aikana alle $0,1$ millimetriä.

Tehtävä 1.

Etsi yleinen menetelmä, jolla $\exists$ voittaa ylläkuvatun väittelyn.

- Ensin $\forall$ sanoo pituuden ℓ, joka on suurempi kuin 0.
- Mikä nollaa suurempi aikaväli t väittelijän $\exists$ pitää sen jälkeen sanoa, että pätisi seuraavaa:

  Jos auto kulkee 120 kilometriä tunnissa, se kulkee ajassa t vähemmän kuin pituuden ℓ.

Ei tee eroa, vaikka emme kulkisikaan vakionopeudella. Voimme hidastaa ylämäessä,

$\exists$: Ja kiihdyttää alamäessä!

mutta yhä huomaamme kulkeneemme yhä lyhyempiä matkoja, kun tarkastelemme yhä lyhyempiä ajanjaksoja. Myös vaihtelevalla nopeudella liikkuminen on jatkuvaa.

Kaikki kuviteltavissa oleva liikkuminen ei ole jatkuvaa. Kun Mr. Spock astelee siirtimeen (siirrin tunnetaan myös nimellä teleport[2]) Star Trek -televisiosarjassa, hänen liikkeensä on jatkuvaa. Siirrin siirtää Spockin silmänräpäyksessä vieraalle planeetalle. Tällöin Spockin liikkeessä on epäjatkuvuuskohta. Vaikka tarkastelisimme kuinka pientä teleport-operaation sisältävää ajanjaksoa tahansa, havaitsisimme Spockin siirtyneen tuona ajanjaksona tuhansia kilometrejä.

Oletetaan, että kuljemme yksiulotteisesti. Tällöin sijaintimme voidaan ilmaista yhdellä koordinaatilla. Merkitään symbolilla $f(t)$ kulkijamme paikkaa yksiulotteisessa koordinaatistossa ajanhetkellä t. Oletetaan että olemme matkamme alussa origossa, ja että matkamme alkuhetki on hetki 0.

$\exists$: Nyt Tuomas olettaa, että lukija on Aatami tai Eeva.

$\forall$: Ei, haluttu ajanhetki voidaan sopia nollahetkeksi. Jos mittaamme aikaa esimerkiksi tunteina, on hetki 1 se hetki, jona on kulunut yksi tunti sovitusta nollahetkestä, ja niin edelleen.

$\exists$: Minusta olisi paljon coolimpaa sopia alkuhetkeksi -1.

$\forall$: Kyllä kai niinkin voisi tehdä, jos vaan haluaisi.

Jos nopeutemme on koko ajan 36 kilometriä tunnissa, voidaan f määrittää helposti kaavalla

$$f(t) = 36\,\mathrm{km/h}\cdot t.$$

Tasaisella nopeudella liikkuminenkin on helppoa määritellä: Liike on liikettä tasaisella nopeudella, jos on olemassa nopeus v, jolle

$$f(t) = vt \text{ kaikilla } t.$$

Tasaisella kiihtyvyydellä liikkuminenkin voidaan määritellä. Liike on liikettä tasaisella kiihtyvyydellä, jos on olemassa nopeus v ja kiihtyvyys a, joille

$$f(t) = vt + \frac{1}{2}at^2 \text{ kaikilla } t.$$

$\exists$: Mitä tasaisella kiihtyvyydellä liikkuminen tarkoittaa?

$\forall$: Se tarkoittaa sitä, että nopeus kasvaa vakiotahtia.

$\exists$: Ai vähän samaan tapaan, kuin paikan koordinaatti kasvaa vakiotahtia tasaisella nopeudella liikuttaessa?

$\forall$: Juuri niin.

Jatkuvaa liikettä on paljon muutakin kuin tasaisella nopeudella ja tasaisella kiihtyvyydellä tapahtuva liike. Jos hidastat polkemisnopeuttasi aina välillä ihaillaksesi maisemia, on liikeesi jatkuvaa, mutta sinun vaikeampi löytää kaavaa kuvaamaan paikkaasi ajan funktiona.

$\exists$: Jos vain ihailee maisemia, ei siinä paljoa kaavoja muodosteta.

$\forall$: Minä kyllä luulen Tuomaksen tarkoittaneen, että tässä tapauksessa liikefunktio on sen verran monimutkainen, että sille on vaikea löytää kaavaa.

[2] Teleport on kuvitteellinen laite, joka siirtää henkilön paikasta toiseen ilman, että siirrossa kuluu aikaa

Tai ajattele kärpäsen hyörinää katossa. Senkin liike on jatkuvaa, mutta sen liikettä kuvaava kaava olisi hyvin monimutkainen.

Kuinka sitten voisi kehittää matemaattisen teorian, jonka avulla voimme tehdä eron jatkuvan muutoksen (polkupyöräily, kärpäsen lento) ja ei-jatkuvan muutoksen (Spockin teleporttaus) välille? Kysymys ei ole kovin helppo, ja matemaatikot ryhtyivät ratkomaan sitä joskus 1600-luvulla. Tyydyttävä teoria saatiin kehitettyä vasta pari sataa vuotta myöhemmin.

$\exists$: Ja vielä tänäkin päivänä yliopisto-opettajat repivät hiuksia päästään yrittäessään opettaa sitä uusille opiskelijoille.

Jatkuvaa ja epäjatkuvaa muutosta voi tapahtua muuallakin kuin pelkästään liikuttaessa. Jos esimerkiksi ämpäriin valuu vettä putkesta, voidaan prosessia ajatella jatkuvana funktiona f, jossa lähtöjoukon pisteet ovat ajanhetkiä ja funktion arvot ovat vesimääriä ämpärissä kullakin ajanhetkellä.

$\forall$: Minkähänlaista olisi sitten epäjatkuva veden määrän muutos?

$\exists$: Jos vaikka ilkeä demoni loitsisi ämpärin tyhjäksi.

$\forall$: Tai hyvä haltia voisi taikoa puoli litraa lisää vettä silmänräpäyksessä.

Matemaattista teoriaa muodostettaessa kannattaa abstrahoida pois se, millaisia suureita tutkimme. Paikkaa 1-ulotteisessa koordinaatistossa ja veden määrää ämpärissä voidaan kumpiakin kuvata reaaliluvulla. Näin ollen oletamme, että f:n arvot ovat reaalilukuja, ja unohdamme sen, että käytännön tilanteissa ne voivat olla paikkoja 1-ulotteisessa maailmankaikkeudessa tai veden määriä ämpärissä. Samalla tavalla abstrahoimme pois myös sen, että funktion f lähtöjoukon pisteet ovat ajanhetkiä, ja oletamme niidenkin olevan vain reaalilukuja.

$\exists$: Onkohan tästä viimeisestä askeleesta hyötyä? Voisikohan olla tilanne, jossa kahden seikan välillä on jatkuva riippuvuussuhde ilman, että toinen seikoista on aika?

$\forall$: Kai sellaisenkin tilanteen voisi löytää, jos olisi tarpeeksi mielikuvitusta. Taidamme jättää kysymyksen lukijalle harjoitustehtäväksi.

Näin olemme saaneet muutettua kysymyksen

> Kuinka jatkuvuus määritellään matemaattisesti?

hiukan yksinkertaisempaan muotoon

> Kuinka funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvuus määritellään matemaattisesti?

$\exists$: Nyt Tuomas kyllä huijaa pikkaisen. Kärpäsen lento ei ole yksiulotteista, vaan kärpäsen paikka pitää ilmaista kolmella koordinaatilla.

$\forall$: Tällaisessa tapauksessa kärpäsen paikkafunktioita on kolme, $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $Z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joista ensimmäinen antaa paikan x-, toinen y- ja kolmas z-koordinaatin. Jotta kärpäsen lento olisi jatkuvaa, täytyy kaikkein kolmen funktion olla jatkuvia.

$\exists$: Osaisimme siis ratkaista tämänkin kysymyksen, jos tietäsimme, milloin $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva.

$\forall$: Hmm... Itse asiassa Tuomas huijaa hiukan toisellakin tavalla.

$\exists$: Kuinka niin?

$\forall$: Tuomas olettaa, että f on määritelty kaikilla reaalilukuarvoilla.

$\exists$: Se vastaisi jatkuvan liikkeen tapauksessa tilannetta, jossa liikkuja on aloittanut matkansa hamaassa menneisyydessä, eikä lopeta matkaansa koskaan.

$\forall$: Jos liikkuja aloittaa matkansa hetkellä 0 ja lopettaa matkansa hetkellä 1, voimme kuvitella, että hän seisoo kaikilla negatiivisilla ajanhetkillä pisteessä, jossa hän oli hetkellä 0, ja että hän on ykköstä suuremmilla ajanhetkillä paikassa, jossa hän on hetkellä 1.

$\exists$: Tuo on tietty fiktiota, mutta sen avulla saamme jatkuvan liikkeen ahdettua Tuomaksen matemaattiseen viitekehykseen.

Palataan pohtimaan Spockin teleporttausta. Hetkellä, jolla Spock teleporttaa, on Spockin liikkeessä epäjatkuvuuskohta. Jotta saisimme kysymämme kysymyksen vieläkin hiukan yksinkertaisemmaksi, unohdamme funktion f jatkuvuuden joksikin aikaa. Valitsemme ajanhetken t_0 ja kysymme:

> Kuinka määritellään matemaattisesti, että Spockin liikkeessä on epäjatkuvuuskohta hetkellä t_0?

Kun abstrahoimme pois fysikaalisen painolastin kysymyksestä, se muuttuu seuraavaan helpommin käsiteltävään muotoon. Olkoon x_0 piste reaaliakselilla.

> Kuinka määritellään matemaattisesti, että funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on epäjatkuvuuskohta pisteessä x_0?

Sanomme, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0, jos f:llä ei ole epäjatkuvuuskohtaa pisteessä x_0. Näin olleen mielenkiinnon kohteenamme oleva kysymys muuttuu muotoon

Kuinka määritellään matemaattisesti, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0?

Jos saamme tämän kysymyksen ratkaistua, voidaan yleinen ongelma jatkuvuudesta ratkaista.

∃: Joo! Funktio on jatkuva, jos sillä ei ole epäjatkuvuuskohtaa missään.

∀: Tai sama toisella tavoin ilmaistuna: Funktio on jatkuva, jos se on jatkuva lähtöjoukon jokaisessa pisteessä.

∃: Ja koko ongelma on ratkaistu! Voidaan taas jatkaa pelaamista.

∀: Äläpä vielä innostu. Emme nimittäin vielä tiedä, kuinka jatkuvuus jossain pisteessä määritellään.

∃: Ai niin. Emme tiedä, kuinka epäjatkuvuuskohta määritellään, joten emme myöskään tiedä, kuinka jatkuvuus jossain pisteessä määritellään.

Yksinkertaistetaan vielä tilannetta hiukan. Oletetaan, että tutkitaan funktion f jatkuvuutta pisteessä 0, ja oletetaan, että $f(0) = 0$.

∃: Minähän sanoin, että olisi coolia valita matkan alkamishetkeksi -1.

∀: Mitä tekemistä sillä on tämän kanssa?

∃: Koska Tuomas tutkii jatkuvuutta pisteessä 0, hänen olettaa, että liikkumisprosessi on ollut käynnissä jo negatiivisillakin ajanhetkillä.

Kysytään

Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(0) = 0$. Milloin funktio f on jatkuva pisteessä 0?

Tähän kysymykseen vastaa jatkuvuuspeli.

∃: Ja yleiseen kysymykseen jatkuvuudesta pisteessä x_0 vastaa peli, jonka säännöt ovat seuraavat: Ensin ∀ valitsee arv...

∀: Hyss! Sitä ei saa paljastaa vielä. Tuomas on jättänyt kyseisen pelin muotoilemisen lukijalle tehtäväksi 11.

∃: Hyvä on. Keskitytään sitten vielä kysymykseen, milloin funktio f, jolle $f(0) = 0$, on jatkuva pisteessä 0.

Jatkuvuuspeli

Alla tutkimme jatkuvuuspeliä[3], jossa voittostrategian olemassaolo heijastelee funktion jatkuvuutta ja epäjatkuvuutta pisteessä 0. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(0) = 0$. Funktio f on jatkuva pisteessä 0, jos f:n arvot ovat lähellä nollaa, kun funktion arvoja tarkastellaan lähtöjoukon pisteissä, jotka ovat lähellä nollaa. Edellinen luonnehdinta jatkuvuudelle pisteessä 0 on epämääräinen johtuen epämääräisestä sanasta "lähellä", ja tulemme saamaan pelin avulla täsmällisemmän luonnehdinnan.

Aloitamme kuitenkin pelkästä jatkuvuuspelistä, ja palaamme ominaisuuteen "f on jatkuva pisteessä 0" luvussa 5.

Määritelmä 1. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(0) = 0$. Funktion f jatkuvuuspelin säännöt ovat seuraavat:

- Ensin ∀ sanoo jonkun positiivisen reaaliluvun, jota merkitään symbolilla ϵ.

  ∀: ϵ lausutaan 'epsilon'.

- Seuraavaksi ∃ sanoo jonkun positiivisen reaaliluvun, jota merkitään symbolilla δ.

  ∃: δ lausutaan 'delta'.

- Sitten ∀ sanoo reaaliluvun, jota merkitään symbolilla x, ja joka toteuttaa ehdon $|x| < \delta$.

  ∀: x lausutaan 'äks'.

  ∃: Kyllä lukija sen tietää, pölhö.

Nyt ∃ voittaa pelin, jos $|f(x)| < \epsilon$. Muutoin ∀ voittaa pelin.

∀: Lukija, älä säikähdä, vaikka et vielä ymmärtäisikään jatkuvuuspelin ja jatkuvuuden välistä yhteyttä.

∃: Pelien pelaaminen on hauskaa, vaikka peleillä ei olisikaan yhteyttä mihinkään suurempaan.

∀: Jatka vain lukemista.

Nyt tunnemme jatkuvuuspelin säännöt. Vilkaistaan seuraavaksi ihan nopeasti, miltä tyypillinen jatkuvuuspeli näyttää.

∃: Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(0) = 0$, ja $f(x) = \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$.

∀: Pelaan ϵ:n arvon $1,5$!

∃: Pelaan δ:n arvon 1!

[3] Jatkuvuuspeli kiertelee folklorena paikoissa, joissa jatkuvuuden alkeita opetetaan. Minulla ei ole harmainta aavistusta sen alkuperäisestä kehittäjästä. Oppikirjoista löytyy yleensä pelimääritelmän kanssa yhtäpitävä, mutta erilainen ja hiukan abstraktimpi määritelmä jatkuvuudelle.

∀: Pelaan x:n arvon $-0,5$! Koska $|-0,5| = 0,5 < 1 = \delta$, siirtoni on sääntöjen mukainen.

∃: Kumpihan voittaa? Lasketaan!

∀: $|f(x)| = |\frac{1}{-0,5}| = |-2| = 2 > 1,5 = \epsilon$. Voitin!

Palataan vielä jatkuvuuspelin sääntöihin. Luvuilta δ ja ϵ ei vaadita muuta kuin se, että ne ovat positiivisia reaalilukuja.

∀ ja ∃: Osaamme kyllä valita positiivisia reaalilukuja!

Pelaajan ∀ valinnan x täytyy toteuttaa ehto $|x| < \delta$.

∀: Tuossa δ voi olla mikä tahansa tahansa positiivinen reaaliluku. Pystynköhän aina valitsemaan luvun x, joka toteuttaa ehdon $|x| < \delta$?

∃: $|x| < \delta$ tarkoittaa samaa kuin $-\delta < x < \delta$. Muistelehan hiukan välipeliä.

Tehtävä 2.

Jatkuvuuspelin sääntöjen mukaan ∀:n valinnan x täytyy toteuttaa ehto $|x| < \delta$. Valinta $x = 0$ toteuttaa aina edellisen ehdon, koska δ on positiivinen. Niinpä ∀:n on aina mahdollista pelata sääntöjen mukaan. Onko ∀:n sääntöjen puitteissa mahdollista valita aina positiivinen x? Entä negatiivien x?

∀: Lukija, kun teet tehtäviä, muista aina perustella itsellesi, miksi löytämäsi ratkaisu on oikea.

∃: Voit myös katsoa ratkaisun tämän kirjoitelman lopusta.

∀: Kannattaa kuitenkin ensin yrittää itse ratkaista tehtävä. Vaikka et keksisikään ratkaisua, on malliratkaisun ymmärtäminen helpompaa, kun on itse ensin pohtinut hiukan.

∃: Kun lunttaa malleista, on helppo voittaa.

∀: Tuomas on antanut malliratkaisut ilman perusteluja, ja sinun täytyy itse keksiä perustelu, miksi ehdotettu malliratkaisu toimii.

∃: Jos sinulla on hahmotusvaikeuksia, voit myös piirrellä kuvia tilanteesta.

∀: Siis sellaisia, joissa on funktion kuvaaja koordinaatistossa, ja jossa ϵ on merkitty y-akselille ja δ on merkitty x-akselille. Koska tutkit itseisarvoja, voi olla hyödyllistä myös merkitä y-akselille $-\epsilon$ ja x-akselille $-\delta$.

Ja ei kun pelaamaan

Edellisen luvun lopussa totesimme, että jatkuvuuspelissä molemmat pelaajat pystyvät aina noudattamaan sääntöjä. Seuraavaksi alamme tutkia sitä, kuinka pelaajien kannattaa pelata voittaakseen.

∃: Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^3$ kaikilla x.

∀: Selvä, pelaan ϵ:n arvon $0,1$!

∃: Pelaan δ:n arvon $0,05$!

∀: Pelaan x:n arvon $-0,01$! Koska $|x| = |-0,01| < 0,05 = \delta$, on lausahdukseni sääntöjen mukainen.

∃: $|f(x)| = |(-0,01)^3| = |0,000001| < 0,1 = \epsilon$, voitin!

Tehtävä 3.

Palataan edellisessä esimerkkipelissä kohtaan, jossa ∃ on valinnut δ:n arvon $0,05$, ja ∀ pohtii omaa x:n arvon valintaansa. Olisiko ∀:n mahdollista valita (sääntöjen puitteissa) sellainen x, jolla hän voittaisi pelin?

∀: Jatkuvuuspelin säännöt vaativat, että $f(0) = 0$. Muistiko lukija tarkistaa, että edellisen esimerkkipelin f toteuttaa tämän ehdon?

Mikäli lukija teki edellisen tehtävän, hän havaitsi, että ∃ pystyi luomaan tilanteen, jossa hän voittaa varmasti. Seuraavaksi on lukijan vuoro luoda tällaisia tilanteita.

Tehtävä 4.

1. **∃:** Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = 5x$ kaikilla x.

   ∀: $\epsilon = 0,1$!

   ∃: Lukija, olisitko kiltti ja auttaisiko minua löytämään sellaisen δ:n arvon, jolla voitan pelin varmasti?

2. **∃:** Pelataan uudestaan samalle funktiolle.

   ∀: $\epsilon = 0,001$!

   ∃: Lukija, autatko uudelleen? Tahdon taas voittaa varmasti.

3. **∃:** Pelataan vielä kerran samalle funktiolle.

   ∀: $\epsilon = 0,000001$!

   ∃: Lukija, tänne ja heti! Tahdon voittaa!

Nyt olemme tutkineet, kuinka ∃:n kannattaa pelata tietyissä tilanteissa. Seuraavaksi etsitään menetelmiä, joilla ∃ voittaa koko pelin.

$\exists$: Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 50x$ kaikilla x.

$\forall$: $\epsilon = 0,1$!

$\exists$: $\delta = 0,002$!

$\forall$: $x = 0,001$! Koska $x = 0,001 < 0,002 = \delta$, on lausahdukseni sääntöjen mukainen.

$\exists$: $|f(x)| = 50 \cdot 0,001 = 0,05 < 0,1 = \epsilon$. Voitin.

$\forall$: Pelataan uudestaan. $\epsilon = 0,01$!

$\exists$: $\delta = 0,0002$!

$\forall$: $x = 0,00019$! Koska $x = 0,00019 < 0,0002 = \delta$, on lausahdukseni sääntöjen mukainen.

$\exists$: $|f(x)| = 50 \cdot 0,00019 < 0,01 = \epsilon$. Voitin.

$\forall$: Pelataan uudestaan. $\epsilon = 0,001$!

$\exists$: $\delta = 0,00002$!.

$\forall$: $x = 0,000019999$! Koska $x = 0,000019999 < 0,00002 = \delta$, on lausahdukseni sääntöjen mukainen.

$\exists$: $|f(x)| = 50 \cdot 0,000019999 < 0,001 = \epsilon$. Voitin.

$\forall$: Sinä voitat koko ajan. Miten ihmeessä teet sen?

$\exists$: Katsos, jos sinä sanot minkä tahansa ϵ:n arvon, minä valitsen δ:n arvon $\epsilon/50$.

$\forall$: Niinpä. Säännöt vaativat, että $|x| < \delta = \epsilon/50$, jolloin

$$|f(x)| = 50|x| < 50\delta = 50\epsilon/50 = \epsilon.$$

Valitsinpa minkä tahansa sääntöjen salliman x:n arvon, on väistämättä $|f(x)| < \epsilon$. Sinä ryökäle voitat, yritinpä pelata kuinka hyvin tahansa.

$\exists$: Joo. δ:n valinta $\epsilon/50$ on voittostrategia tälle funktiolle.

Tehtävä 5.

Etsi pelaajalle $\exists$ voittostrategia jatkuvuuspelissä seuraaville funktioille f.

$\exists$: Ei voittostrategian löytäminen ole sen vaikeampaa kuin edellisen tehtävän tekeminenkään. Nyt täytyy vain varautua edeltä käsin kaikkiin juoniin, joita $\forall$ voi ϵ:n valinnan kanssa keksiä.

1. $f(x) = 0$ kaikilla x.
2. $f(x) = x$ kaikilla x.
3. $f(x) = 100000x$ kaikilla x.
4. $f(x) = 6x$, jos $x \le 0$, ja $f(x) = 100x$, jos $x > 0$.
5. $f(x) = x^2$ kaikilla x.
6. $f(x) = \sqrt{|x|}$ kaikilla x.
7. $f(x) = x$, jos x on rationaalinen ja $f(x) = 0$, jos x on irrationaalinen.
8. $f(x) = 0$, jos $x < 1$, ja $f(x) = 1000000$, jos $x \ge 1$.
9. $f(x) = x^2 + x$ kaikilla x.

$\exists$: Kylläpä tuo edellinen kohta oli hankala. Ihan tuli hiki pelatessa.

$\forall$: Miltähän sitten lukijasta tuntuu?

$\exists$: Enpä tiedä. Pitäisiköhän lukijaa varoittaa?

$\forall$: Joo. Lukija! Jos edellinen kohta tuntuu liian hankalalta, voit jättää sen tekemättä.

10. $f(0) = 0$, ja $f(x) = 5x\sin(\frac{1}{x})$, kun $x \neq 0$.

$\forall$: Onkohan tuossa sinin lähtöarvo asteita vai radiaaneja?

$\exists$: En minä tiedä. Luulisin, että Tuomas käyttää radiaaneja.

$\forall$: f taitaa olla eri funktio riippuen siitä, kumpi vaihtoehto valitaan, mutta pelin idea on sama kummassakin tapauksessa.

$\exists$: Sovitaan sitten, että sinin lähtöarvo on radiaaneja.

$\forall$: Kylläpä mieleni olisi tehnyt sanoa edellisissä tehtävissä äärettömän pieni ϵ. Sellaisen yli olisi tosi helppoa päästä $|f(x)|$:llä.

$\exists$: Niin, mutta positiivisten reaalilukujen joukossa ei ole äärettömän pieniä lukuja. Muistathan, kuinka kävi välipelissä? Ei ole olemassa pienintä positiivista reaalilukua.

$\forall$: Ikävää. Minun on tyydyttävä hyvin pieneen ϵ:hen.

$\exists$: Mutta useissa tapauksissa on olemassa riittävän pieni ϵ. Katso vaikka seuraavaa esimerkkiä.

Esimerkki 1. Olkoon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = 0$, jos $x = 0$, ja $f(x) = 100 + |x|$, jos $x \neq 0$. $\forall$:lla on seuraava voittostrategia:

- Ensin $\forall$ sanoo ϵ:nä luvun 50.
- Sitten $\exists$ sanoo jonkun luvun δ. (Koska $\forall$:n voittostrategian tulee johtaa $\forall$:n voittoon tekipä $\exists$ mitä tahansa, emme voi olettaa luvusta δ muuta kuin että se on positiivinen reaaliluku.)
- Sitten $\forall$ valitsee x:nä luvun $\delta/2$. Koska $|x| = \delta/2 < \delta$, on $\forall$:n lausahdus luvallinen. (Olennaista on se, että sanoipa $\exists$ minkä luvun δ tahansa, menetelmämme antaa $\forall$:lle toimivan x:n valinnan.)

Nyt $|f(x)| = 100 + |x| > 50 = \epsilon$, joten $\forall$ voittaa pelin. Siis menetelmämme johtaa $\forall$:n voittoon yrittipä $\exists$ mitä tahansa, joten $\forall$:lla on voittostrategia.

$\exists$: Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f(x) = 0$, jos $x = 0$, ja $f(x) = 100 + |x|$ muutoin.

$\forall$: [Hykertelee itsekseen: Nyt minä kyllä voitan varmasti.] $\epsilon = 50$!

$\exists$: $\delta = 0,01$!

$\forall$: $x = 0,005$! Nyt $|x| < \delta$, joten pelaan sääntöjen mukaan. $|f(x)| = 100 + 0,005 > 50 = \epsilon$. Voitinpas kerrankin!

Tehtävä 6.

Etsi pelaajalle $\forall$ voittostrategia jatkuvuuspelissä seuraaville funktioille f.

1. $f(x) = 0$, kun $x \leq 0$, ja $f(x) = 1$, kun $x > 0$.
2. $f(x) = 0$, kun $x \geq 0$, ja $f(x) = \frac{1}{100000}$, kun $x < 0$.
3. $f(x) = 0$, kun x on rationaaliluku, ja $f(x) = 1$, kun x on irrationaaliluku.
4. $f(x) = 0$, kun $x = 0$, ja $f(x) = \frac{1}{100000} - |x|$, kun $x \neq 0$.
5. $f(x) = 0$, kun $x = 0$, ja $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$, kun $x \neq 0$.

Jatkuvuuspeli ja jatkuvuus

$\exists$: Tämä luku taitaa olla tylsää teoriaa. Lähdenpä tästä suoraan seuraavaan lukuun pelaamaan pelejä.

$\forall$: Älähän nyt. Vaikka tätä lukua ei välttämättä tarvitakaan pelatessa, täällä selitetään, mitä järkeä tässä pelaamistouhussa ylipäätänsä on.

$\exists$: No katsotaan sitten.

Jatkuvuuspelissä $\exists$ yrittää osoittaa, että väite ”funktion f arvot ovat lähellä nollaa, kun tutkitaan arvoja pisteissä, jotka ovat lähellä nollaa” on tosi. $\forall$ yrittää osoittaa, että kyseinen väite on epätosi. $\forall$ yrittää toisin sanoen osoittaa, että lähellä nollaa olisi pisteitä, joissa funktio f saa kaukana nollasta olevia arvoja.

$\forall$ yrittää valita sellaisen luvun ϵ, että lähellä nollaa olisi pisteitä, joissa funktio saa arvoja, jotka ovat kaukana nollasta, vähintään ϵ:n päässä.

$\forall$: Minun on tietysti edullista valita hyvin pieni ϵ:n arvo, jotta $|f(x)|$:llä olisi helppo päästä sen yli.

Sitten $\exists$ valitsee luvun δ, joka kuvaa sitä, kuinka lähellä nollaa olevia lähtöjoukon pisteitä $\forall$ voi tutkia.

$\exists$: Minun on tietysti edullista valita hyvin pieni δ:n arvo, että $\forall$:lla olisi mahdollisimman vähän valinnanvaraa x:n kanssa.

Sitten $\forall$ valitsee luvun x, joka on lähellä nollaa, alle δ:n etäisyydellä nollasta.

$\forall$: Yritän tietysti valita sellaisen luvun x, että $|f(x)|$ on vähintään ϵ.

$\exists$ voittaa, jos $|f(x)|$ on lähellä nollaa, kun ”lähellä” tarkoittaa, että $|f(x)| < \epsilon$.

Yksittäinen peli voidaan mieltää yksittäisenä kokeena, jossa tutkitaan f:n jatkuvuutta. Funktio f on jatkuva pisteessä 0, mikäli $\exists$:llä on menetelmä, jolla hän kykenee kääntämään kaikki kokeet omaksi voitokseen. Funktio f on epäjatkuva pisteessä 0, mikäli sellainen menetelmä on $\forall$:lla.

Määritelmä 2. Funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, on jatkuva pisteessä 0, jos $\exists$:llä on voittostrategia jatkuvuuspelissä funktiolle f. Funktio f on epäjatkuva pisteessä 0, jos $\forall$:lla on voittostrategia jatkuvuuspelissä funktiolle f.

$\forall$: Nyt Tuomas meni määrittelemään jatkuvuuden meidän peliemme avulla.

$\exists$: Meille tulee kyllä aika paljon puuhaa, jos joudumme pelaamaan aina kun joku funktio halutaan osoittaa jatkuvaksi tai epäjatkuvaksi.

$\forall$: Ja yhden funktion osoittaminen jatkuvaksi tai epäjatkuvaksi vaatii äärettömän monta peliä, yhden jokaista mahdollista valintasarjaa (ϵ, δ, x) kohti.

$\exists$: Huh huh! Mutta onko asia siltikään noin? Yleisen menetelmän voi todeta oikeaksi käymättä läpi kaikkia vaihtoehtoja. Sitä kutsutaan matemaattiseksi päättelyksi.

$\forall$: Ai siksikö Tuomas käyttää x:ää, ϵ:tä ja δ:aa konkreettisten numeroarvojen sijaan?

$\exists$: Niin tietysti, pöhkö! Hän voi käsitellä noiden symbolien avulla äärettömän monta konkreettisia numeroarvoja sisältävää erikoistapausta kirjoittamalla vain pari riviä tekstiä.

—

$\exists$: Oletetaan, että Spock kulkee hetkillä t, $t < 0$, tasaisella nopeudella 1 eteenpäin, ja että hän hetkellä 0 teleporttaa 10 mittayksikköä eteenpäin, ja jatkaa matkaansa tämän jälkeen tasaisella nopeudella 1. Hetkellä 0 Spock on paikassa 0, ja tämän jälkeen hän on siirtynyt 10 yksikköä eteenpäin. Minkähänlainen on Spockin liikefunktio?

$\forall$: Nyt $f(t) = t$, jos $t \leq 0$ ja $f(t) = 10 + t$, jos $t > 10$.

$\exists$: Pelataan jatkuvuuspeli Spockin liikefunktiolle.

$\forall$: $\epsilon = 5$!

$\exists$: $\delta = 0,1$!

$\forall$: $x = 0,01$!

$\exists$: Hups! Nyt muuten x on funktion f lähtöjoukon piste, eli ajanhetki.

$\forall$: On kyllä hiukan harhaanjohtava notaatio. Kuitenkin hetkellä $x = 0,01$ Spock on paikassa $f(0,01) = 10 + 0,01$, eli yli $\epsilon = 5$:n yksikön päässä paikasta 0. Voitin.

—

$\exists$: Oletko muuten miettinyt, että silmänräpäyksellinen eteenpäinsiirtyminen ei ole ainoa esimerkki niistä tavoista, joilla funktio voi olla epäjatkuva pisteessä 0. Ajatellaanpa esimerkiksi tehtävän 6.5 funktiota $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$, jos $x \neq 0$, ja $f(0) = 0$.

$\forall$: Miltähän näyttäisi, jos Spock kulkisi tuon funktion osoittamalla tavalla?

$\exists$: Hetkellä 0 hän olisi paikassa 0, ja muilla hetkillä hän poukkoilisi pisteiden -1 ja 1 välissä.

$\forall$: Rajoitutaan ensin tutkimaan negatiivisia ajanhetkiä. Spockin poukkoilu yhä kiihtyisi ja kiihtyisi, kun tarkastelisimme ajanjaksoja, jotka olisivat yhä lähempänä ja lähempänä nollaa.

$\exists$: Positiivisilla arvoilla taas poukkoilu yhä hidastuisi ja hidastuisi.

$\forall$: Olisi se kyllä aika hassun näköistä. Tästä kyllä kannattaa piirtää kuva koordinaatistoon.

$\exists$: Kuka sitä viitsisi piirellä käsin enää nykyaikana? Ainakin minä aion käyttää graafista laskinta.

$\forall$: Funktion kuvaajan hahmotteleminen käsin voi olla ihan opettavaista.

—

$\forall$: Muistatko vielä sen väittelyn, jossa mietimme, kulkeeko 120 kilometriä tunnissa kulkeva auto niin lyhyitä matkoja kuin ikinä voin keksiä?

$\exists$: Joo. Jos ilmaisemme ajan tunneissa ja paikan kilometreissä, auton liikettä kuvaa funktio $f(x) = 120x$. Mitä siitä?

$\forall$: Silloinhan minä valitsin lyhyen etäisyyden, jota jatkuvuuspelissämme vastaa ϵ, ja sinä valitsit lyhyen ajanjakson, jota jatkuvuuspelissämme vastaa δ.

$\exists$: Niin, mutta silloin sinä et valinnut x:ää. Silloin tutkimme vain funktion arvoa $f(\delta)$.

$\forall$: Pelasimme siis seuraavaa peliä: Ensin minä valitsen luvun $\epsilon > 0$, ja sitten sinä valitset luvun $\delta > 0$. Sinä voitat, jos $|f(\delta)| < \epsilon$, ja minä voitat muulloin.

$\exists$: Kuinkahan kävisi, jos pelaisimme tätä peliä tehtävän 6 funktioille?

Tehtävä 7.

Tutki edellisessä dialogissa kuvattua peliä. Millä tehtävän 6 funktioista $\exists$:llä on voittostrategia tässä pelissä, ja millä tehtävän 6 funktioista $\forall$:lla on voittostrategia?

$\exists$: Ylläoleva peli, jossa valitaan vain ϵ ja δ, ei taida kuvata kunnolla jatkuvuutta.

$\exists$: Lukija, keksitkö esimerkkifunktiota f niin, että ylläolevassa pelissä funktiolle f minun kannattaisikin valita hyvin suuri δ?

$\forall$: Jatkuvuuspelissä minä saan lisäksi valita luvun x. Kuinka kävisi jatkuvuuspelissä lukijan esimerkkifunktiolle f, jos $\exists$ yrittäisi valita suuren δ:n?

$\exists$: Taidamme jättää kysymyksen lukijalle.

Muutetaan sääntöjä

$\forall$: Tuo lurjus $\exists$ voittaa koko ajan. Nyt muutetaan kyllä sääntöjä.

$\exists$: Mutta minä valitsen vain yhden suureen, ja sinä saat valita kaksi.

$\forall$: Mutta on edullista valita myöhäisessä vaiheessa, ja sinä saat valita δ:n minun ϵ:n valintani jälkeen.

$\exists$: Ok, pelataan sitten niin, että minä valitsen δ:n ennen kuin sinä valitset ϵ:n.

Tehtävä 8.

Lokaali triviaalisuuspeli on muuten samanlainen kuin jatkuvuuspeli, mutta $\exists$ sanoo luvun δ ennen kuin $\forall$ sanoo luvun ϵ. Kummalla pelaajalla on voittostrategia lokaalissa triviaalisuuspelissä seuraaville funktiolle f?

$\forall$: Kuinkas se lokaali triviaalisuuspeli nyt oikein menikään?

$\exists$: Minä aloitan valitsemalla luvun δ, $\delta > 0$.

$\forall$: Hmm... ja seuraavaksi on minun vuoroni valita ϵ, $\epsilon > 0$.

$\forall$: Mutta sittenhän on minun vuoroni uudestaan. Valitsen luvun x, $|x| < \delta$

$\exists$: Ja sitten $|f(x)| < \epsilon$, ja minä voitan taas.

$\forall$: Äläpä ole niin varma. Hyvällä pelistrategialla voi käydä niin, että $|f(x)| \geq \epsilon$, ja minä voitan.

1. $f(x) = 0$ kaikilla x.
2. $f(x) = x$ kaikilla x.
3. $f(x) = 0$ jos $x < 1$, ja $f(x) = 1$ muutoin.
4. $f(x) = 0$, jos $-1/10 < x < 1/10$, ja $f(x) = 1$ muutoin.

$\exists$: Löydätkö yleistä luonnehdintaa sille, millainen funktion f olisi oltava, että minulla olisi voittostrategia lokaalissa triviaalisuuspelissä?

$\exists$: Nyt on minun vuoroni muuttaa sääntöjä.

$\forall$: Eikä, sinä voitat vieläkin liikaa.

$\exists$: Tehdäänpä seuraavasti! Sinä saat valita sekä ϵ:n että δ:n.

$\forall$: (Onkohan tähän koira haudattuna?) Haluat siis valita vain x:n? Jos valitset aina $x = 0$, voitat varmasti.

$\exists$: Ok, en valitse arvoa $x = 0$.

Tehtävä 9.

Kasautumispistepeli on muuten samanlainen kuin jatkuvuuspeli, mutta pelaaja $\forall$ saa valita luvut ϵ ja δ, ja pelaaja $\exists$ saa valita luvun x, mutta x:n pitää toteuttaa ehdot $x \neq 0$ ja $|x| < \delta$.

$\forall$: Käydäänpä vielä läpi kasautumispistepelin säännöt. Ensin minä valitsen luvut $\epsilon > 0$ ja $\delta > 0$.

$\exists$: Ja sitten minä valitsen luvun x, jolle $|x| < \delta$.

$\forall$: Muista, että lupasit olla valitsematta nollaa.

$\exists$: Niinpä. Minä valitsen luvun x, jolle $|x| < \delta$ ja $x \neq 0$.

$\forall$: Ja sitten tuo $\exists$ voittaa, jos $|f(x)| < \epsilon$. Muutoin minä voitan.

Millä esimerkin 1 ja tehtävien 5 ja 6 funktioista pelaajalla $\exists$ on voittostrategia kasautumispistepelissä? Tutki kasautumispistepeliä myös tehtävän 7 ratkaisussa mainitulle funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x}$.

$\exists$: On tylsää tutkia jatkuvuutta aina vain lähtöjoukon pisteessä 0.

$\forall$: Joo, pitäisi kai kehittää peli, jolla jatkuvuutta voisi tutkia muuallakin.

$\forall$: Vaikeaa, luvun x etäisyys nollasta saadaan kaavalla $|x|$. Mutta entäs luvun x etäisyys luvusta a?

$\exists$: Helppoa! Se on tietysti $|x - a|$.

Tehtävä 10.

Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka saa arvon 0 pisteessä a. Funktio g on jatkuva pisteessä a, jos funktion g arvot ovat lähellä arvoa 0, kun funktiota tarkastellaan lähellä pistettä a. Määrittele peli, jolla voidaan testata, onko g jatkuva pisteessä a.

$\exists$: Arvon 0 pisteessä a? Mitä se tarkoittaa?

$\forall$: Se taitaa tarkoittaa sitä, että ensin valitaan reaaliluku a ja sitten määritellään peli sellaisille funktioille g, joille $g(a) = 0$.

$\exists$: Niin. Alussahan Tuomas valitsi luvun $a = 0$, ja määritteli pelin sellaisille funktioille f, joille $f(0) = 0$.

$\forall$: Entä jos lukija on vieläkin sekaisin?

$\exists$: Hän voi vaikka määritellä jatkuvuuden pisteessä $a = 1$ sellaisille funktioille g, joille $g(1) = 0$.

$\forall$: Näppärää! Ja sitten ykkösen paikalle voidaan laittaa muita lukuja.

Määriteltyäsi pelin kokeile määritelmäsi oikeellisuuta jatkuviksi ja epäjatkuviksi tietämilläsi funktioilla.

∃: Entä jos haluaisimme tutkia sellaisen funktion jatkuvuutta, joka saa tarkastelupisteessä jonkun muun arvon kuin 0?

∀: Kai siihenkin olisi kehitettävissä peli.

∃: Jos a on tarkastelupiste, ja x on sinun valitsemasi piste, pelissä tarvitaan arvojen $f(a)$ ja $f(x)$ etäisyyttä.

Tehtävä 11.

Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, ja a jokin reaaliakselin piste. Funktio g on jatkuva pisteessä a, jos funktion g arvot ovat lähellä arvoa $g(a)$, kun funktiota tarkastellaan lähellä pistettä a. Määrittele peli, jolla voidaan testata, onko g jatkuva pisteessä a.
Määriteltyäsi pelin kokeile määritelmäsi oikeellisuuta jatkuviksi ja epäjatkuviksi tietämilläsi funktioilla.

∀: Sellainenkin peli olisi hieno, jolla voisi tutkia, onko funktio jatkuva.

∃: Emmekö tarkastelekaan juuri sitä edellisen tehtävän pelissä?

∀: Itse asiassa emme. Tarkastelemme jatkuvuutta jossain tietyssä pisteessä. Funktio on jatkuva, jos se on jatkuva lähtöjoukon jokaisessa pisteessä.

∃: Ratkaiseva ongelma lieneekin, että kumpi meistä saa valita pelissä tarkastelupisteen, ja missä vaiheessa peliä.

Tehtävä 12.

Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa $\mathbb{R}$:n pisteessä. Määrittele peli, jolla voidaan testata, onko f jatkuva.
Määriteltyäsi pelin kokeile määritelmäsi oikeellisuutta jatkuviksi ja epäjatkuviksi tietämilläsi funktioilla.

∃: Samalla tavalla kai voisi tutkia lukujonon suppenemistakin.

∀: Erona on vain se, että jatkuvuuspelissä δ kannattaa valita ...

∃: ... hyvin pieneksi! Tiedän kyllä oikein hyvin.

∀: Joo. Suppenemispelissä pitäisi tarkastella pienten δ:n arvojen sijaan suuria x_n:ien indeksejä n.

Tehtävä 13.

Määrittele peli, jolla voidaan testata, suppeneeko lukujono $x_1, x_2, x_3, \ldots$ kohti nollaa.
Määriteltyäsi pelin kokeile määritelmäsi oikeellisuutta suppeneviksi ja ei-suppeneviksi tietämilläsi lukujonoilla.

Vastaukset

∃: Tämähän on käytännöllinen luku. Täältä näkee, kuinka kannattaa pelata.

∀: Mutta muista, että täällä on esitetty vain yhdet toimivat strategiat. Ne eivät ole ainoita oikeita.

1: Kun ∀ sanoo ℓ metriä, sanoo ∃ esimerkiksi $t = \ell/40$ sekuntia.

2: On. Luku $\delta/2$ on sääntöjen mukainen positiivinen valinta ja $-\delta/2$ on sääntöjen mukainen negatiivinen valinta.

∃: Itse asiassa positiiviseksi valinnaksi kelpaa myös $\delta/3$ ja $\frac{2}{3}\delta$.

∀: Tässä kysyttiin pelkästään sääntöjen sallimia valintoja. Minua kiinostaa se, millaisilla valinnoilla voitan!

3: ∀:n ei ole mahdollista valita voittavaa x:ää. Koska sääntöjen mukaan pitää olla $|x| < \delta = 0.05$, on $|f(x)| = |x^3| = |x|^3 \leq 0,05^3 < 0,1 = \epsilon$.

∀: Muista, että x voi olla joko positiivinen tai negatiivinen.

∃: Kannattaa miettiä molemmat vaihtoehdot erikseen läpi.

∀: Entä tapaus $x = 0$?

∃: Sekin täytyy ottaa huomioon, mutta se on helppo tapaus.

4.1 $\delta = 0,02$

4.2 $\delta = 0,0002$

4.3 $\delta = 0,0000002$

∀: Tässä Tuomas on luetellut pelkästään suurimmat toimivat δ:t. Myös mitkä tahansa pienemmät kelpaavat.

5.1: Kun ∀ on sanonut luvun ϵ, ∃ sanoo $\delta = 1$ ja voittaa varmasti.

∀: Edellisen kohdan peli on aika tyhmä. ∃ voittaa varmasti, sanoi hän mitä tahansa.

5.2: Kun ∀ on sanonut luvun ϵ, sanoo ∃ lukuna δ luvun ϵ.

5.3: Kun ∀ on sanonut luvun ϵ, sanoo ∃ lukuna δ luvun $\epsilon/100000$.

5.4: Kun ∀ on sanonut luvun ϵ, sanoo ∃ lukuna δ luvun $\epsilon/100$.

$\exists$: Koska $|6x| \leq |100x|$ kaikilla x, pätee $|f(x)| \leq 100|x|$ kaikilla x.

5.5: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, toimii $\exists$ seuraavasti: Jos $\epsilon > 1$, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun 1. Muutoin $\exists$ sanoo lukuna δ luvun ϵ.

$\exists$: Myös valinta $\delta = \sqrt{\epsilon}$ toimii, mutta Tuomas taitaa hiukan kikkailla.

5.6: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun ϵ^2.

$\exists$: Neliöjuurifunktion kuvaaja nollassa on niin jyrkkä, että mikään δ:n valintastrategia tyyppiä $c\epsilon$ ei toimi.

$\forall$: Mitä tarkoittaa strategia tyyppiä $c\epsilon$?

$\exists$: Se tarkoittaa esimerkiksi strategiaa, jossa valitaan aina $0,1\epsilon$, tai $0,01\epsilon$, tai jotain sellaista.

$\forall$: Mutta, jos $\epsilon = 0,1$, voidaan valita $0,1\epsilon$, jos $\epsilon = 0,01$, voidaan valita $0,01\epsilon$ ja niin edelleen.

$\exists$: Eipäs. Jos puhun strategiasta tyyppiä $c\epsilon$, täytyy saman luvun c toimia kaikilla ϵ:in arvoilla.

5.7: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun $\epsilon/2$.

$\exists$: Onpa hyvä, että tarkastellaan jatkuvuutta nollassa. Tämä funktio ei taitaisikaan olla jatkuva missään muussa pisteessä.

$\forall$: Mitä tarkoittaa "jatkuvuus jossain muussa pisteessä?"

$\exists$: Katso tehtäviä 10 ja 11.

$\forall$: Taidan kuitenkin odottaa, että lukija pääsee sinne saakka. Matemaattista tekstiä lukiessa ei kannata pomppia liikaa.

5.8: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun 1.

5.9: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ pienemmän luvuista $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}\epsilon$.

$\exists$: Kun δ on kuten yllä ja $|x| < \delta$, pätee tällöin $|x| < \frac{1}{2}\epsilon$ ja $|x^2| < \frac{1}{2}\epsilon$.

$\forall$: Lukija, muista myös, että kaikilla x pätee $|x + x^2| \leq |x| + |x^2|$.

5.10: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun $\epsilon/5$.

$\exists$: Muista, että $|5x \sin(1/x)| \leq |5x|$, koska $|\sin(1/x)| \leq 1$.

6.1: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/2$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, sanoo $\forall$ lukuna x vaikkapa luvun $\delta/2$.

6.2: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/200000$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, sanoo $\forall$ lukuna x luvun $-\delta/2$.

$\forall$: Tässä pitää olla tarkkana, kun f saa nollasta eroavia arvoja pelkästään negatiivisella puolella.

6.3: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/2$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, sanoo $\forall$ luvun $\delta/2$, jos δ on irrationaalinen ja luvun $\delta/\sqrt{2}$, jos δ on rationaalinen.

$\forall$: Rationaaliluku jaettuna $\sqrt{2}$:lla on irrationaalinen, koska $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

6.4: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/3$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, sanoo $\forall$ lukuna x pienemmän luvuista $1/300000$, $\delta/2$.

$\forall$: x:n valinnan kanssa pitää olla varovainen, ettei vahingossa sano arvoa x, jolla $f(x) = 0$. Sellaisia arvoja on kokonaista kolme kappaletta.

6.5: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/2$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, valitsee $\forall$ kokonaisluvun n, jolle $2\pi n > 1/\delta$, ja sanoo x:nä luvun $\frac{1}{2\pi n}$.

$\forall$: Pitää muistaa, että $\cos(\alpha) = 1$ aina, kun α on 2π:n monikerta.

7. $\forall$:illa on voittostrategia kohdassa 6.1. ($\epsilon = 1/2$). $\exists$:llä on voittostategia kohdissa 6.2 (δ mikä tahansa), 6.3 (δ rationaalinen), 6.4 ($\delta = 1/100000$) ja 6.5 ($\delta = 1/(\frac{1}{2}\pi)$.)

Esimerkki: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(0) = 0$, ja $f(x) = \frac{1}{x}$, jos $x \neq 0$. Nyt pelaajan $\exists$ tulee voittaakseen valita lukuna δ luku, joka on suurempi kuin $\frac{1}{\epsilon}$. Jos ϵ on pieni, on $\frac{1}{\epsilon}$ suuri.

$\forall$: Tuossa sinun kannattaa valita suuri δ.

$\exists$: Kuinkahan kävisi jatkuvuuspelissä, jos yrittäisin valita suuren δ:n?

$\forall$: Ei se auttaisi, koska minä voisin valita pienen positiivisen x:n, ja sitten $|f(x)| = \frac{1}{x}$ olisi suuri.

$\exists$: Jatkuvuuspelissä välillämme taitaa vallita kauhun tasapaino.

$\forall$: Sinä voit halutessasi valita pienen δ:n, ja pakottaa minut valitsemaan itseisarvoltaan pienen x:n.

$\exists$: Sinäkin voit aina halutessasi valita itseisarvoltaan pienen x:n, koska minä en pysty rajaamaan valintaasi muutoin kuin pakottamalla sinut valitsemaan itseisarvoltaan pienen x:n.

∀: Jommalle kummalle on yleensä edullista saada jatkuvuuspelissä x:n itseisarvosta arvosta pieni, ja kumpi tahansa saa tässä suhteessa tahtonsa läpi. Niinpä x:n itseisarvo on jatkuvuuspelissä yleensä pieni.

∃: Tämä taitaa olla juuri se ilmiö, johon Tuomas viittaa, kun hän sanoo, että jatkuvuuspelissä tarkastellaan funktion arvoja lähellä pistettä 0.

∀: Tämän tehtävän [Tehtävä 7, Tuom. huom.] pelissä ei vastaavaa kauhun tasapainoa ole, koska sinä saat määrätä tarkastelupisteen aivan yksin.

8.1: ∃ voittaa millä strategialla tahansa.

8.2: ∀:lla on voittostrategia: ∃ on sanonut luvun δ. ∀ sanoo luvun ϵ, joka on pienempi kuin δ, ja luvun x, joka on lukujen δ ja ϵ välissä.

8.3: ∃:llä on voittostrategia. Hän sanoo lukuna δ luvun, joka on pienempi kuin 1.

8.4: ∃:llä on voittostrategia. Hän sanoo lukuna δ luvun, joka on pienempi kuin 1/10.

Yleinen luonnehdita: ∃:llä on voittostrategia, jos on olemassa $a > 0$, jolle $f(x) = 0$ aina, kun $|x| < a$. Muutoin ∀:lla on voittostrategia.

∀: Pystyn voittamaan aina, jos on olemassa x, $|x| < \delta$, jolle $f(x) \neq 0$.

9: Pelaajalla ∃ on voittostrategiat kasautumispistepelissä kaikilla tehtävän 5 funktioilla, sekä tehtävien 6.1, 6.2, 6.3 ja 6.5 funktioilla. Esimerkin 1 funktiolla, tehtävän 6.4 funktiolla, sekä funktiolla $f(x) = \frac{1}{x}$ voittostrategia on pelaajalla ∀.

∃: Onpa Tuomas lyhytsanainen.

∀: Joo, lukijalle jää aika paljon duunia.

——-

∀: Muistatko sen kauhun tasapaino -keskustelun, jonka kävimme tehtävän 7 ratkaisussa?

∃: Tässäkin taitaa syntyä vastaava kauhun tasapaino. Kumpi tahansa saa halutessaan pakotettua x:n itseisarvon pieneksi.

∀: Pelkkä x:n itseisarvon pieni koko ei vielä taida vielä määrätä pelin lopputulosta.

∃: Vaikka x:n itseisarvo olisikin pieni, jää x:n tarkan arvon valintaan pelivaraa.

∀: Kasautumispistepelissä sinä saat käyttää tuon pelivaran, ja jatkuvuuspelissä minä.

∃: Siksi minä voitan kasautumispistepelin helpommin kuin jatkuvuuspelin.

10: Pelin säännöt: ∀ sanoo positiivisen reaaliluvun ϵ. ∃ sanoo positiivisen reaaliluvun δ. ∀ sanoo reaaliluvun x, jolle $|x - a| < \delta$. ∃ voittaa, jos $|f(x)| < \epsilon$. ∀ voittaa muutoin.

11: Pelin säännöt: ∀ sanoo positiivisen reaaliluvun ϵ. ∃ sanoo positiivisen reaaliluvun δ. ∀ sanoo reaaliluvun x, jolle $|x - a| < \delta$. ∃ voittaa, jos $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. ∀ voittaa muutoin.

12: Pelin säännöt: ∀ sanoo positiivisen reaaliluvun ϵ ja reaaliluvun a. ∃ sanoo luvun δ. ∀ sanoo reaaliluvun x, jolle $|x - a| < \delta$. ∃ voittaa, jos $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. ∀ voittaa muutoin.

∀: Jes!, minä saan valita yhden arvon lisää.

∃: Ominaisuus, jonka saisimme, jos ∀ valitsisi a:n vasta δ:n jälkeen, on nimeltään tasainen jatkuvuus. Esimerkiksi $f(x) = x$ on tasaisesti jatkuva, mutta $g(x) = x^2$ ei ole tasaisesti jatkuva.

13: Pelin säännöt: ∀ sanoo positiivisen reaaliluvun ϵ. ∃ sanoo positiivisen kokonaisluvun n_0. ∀ sanoo positiivisen kokonaisluvun n, jolle $n \geq n_0$. ∃ voittaa, jos $|x_n| < \epsilon$. ∀ voittaa muutoin.

Lähteet ja kiitokset

∀: Olipa mielenkiintoinen teksti. Ei kai Tuomas ole voinut itse keksiä tätä kaikkea ihan itse.

∃: Alla on listattu pari lähdettä.

1. Leea Virtanen, *Ujo piimä, koululaishuumoria*, sisältää muunmuassa analyysin niukka-pelistä.

2. J.H. Conway, *On Numbers and Games*, niukkapeli nimellä *My Dad Has More Money Than Yours*

3. Lauri Myrberg, *Differentiaali- ja integraalilaskenta I*, sisältää muunmuassa δ-ϵ-määritelmän jatkuvuudelle.

∀: Miksi tämä kirja on listattu? Eihän tätä käytetä enää.

∃: Tuomas on opiskellut jatkuvuuden peruskäsitteet täältä.

∀: Tuomaksella taitaa olla joku fiksaatio tähän kirjaan.

4. Cauchy, Weierstrass ja kumppanit, jatkuvuuden määritelmän kehittäminen.

∀: Miksi tässä ei ole listattu kirjojen nimiä?

∃: Ei ole Tuomas tainnut lukea näiden kirjoittamia kirjoja alkuperäisteoksina.

∀: Mutta ne ovat pari sataa vuotta vanhoja, joten voimme kai antaa anteeksi.

5. Donald Knuth, *Surreal Numbers*, matematiikan esittäminen dialogityylillä.

6. Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen ja Maija Salmela, *Differentiaalilaskenta 1, Pitkä Matematiikka*, 1.-6. painos, WSOY 2002. Sisältää yhden sivun pituisen jatkuvuuspelin käsittelyn.

Kiitän Saara Lehtoa ja Antti Rasilaa rohkaisusta ja palautteesta tämän tekstin kanssa, sekä Juha Oikkosta, joka on tuonut pedagogisen otteen Helsingin Yliopiston differentiaali- ja integraalilaskennan alkeisopetukseen. Olen unohtanut, mistä opin kvantifikaation käsittelemisen pelien avulla, mutta kiitän joka tapauksessa kyseistä tuntematonta lähdettä. Kiitän myös ∃:tä, sekä erityisesti ∀:ta, joka jaksoi urheasti pelailla tämän kirjoitelman loppuun saakka huonosta voittoprosentista huolimatta.