



TEKNILLINEN KORKEAKOULU  
TEKNISKA HÖGSKOLAN  
HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# A priori- ja a posteriori -virheanalyysi laattamallien elementtimenetelmille

Lectio praecursoria 9.11.2007

Jarkko Niiranen

Teknillinen korkeakoulu

Matematiikan laitos

# Sisältö

## 1 Johdanto

## 2 Laattarakenteiden mallinnus

- ▶ Laattarakenne — laattamalli

## 3 Elementtimenetelmä

## 4 Virheanalyysi elementtimenetelmille

- ▶ A priori -analyysi — a posteriori -analyysi

## 5 Yhteenveto

# Sisältö

- 1 Johdanto**
- 2 Laattarakenteiden mallinnus
- 3 Elementtimenetelmä
- 4 Virheanalyysi elementtimenetelmille
- 5 Yhteenveto

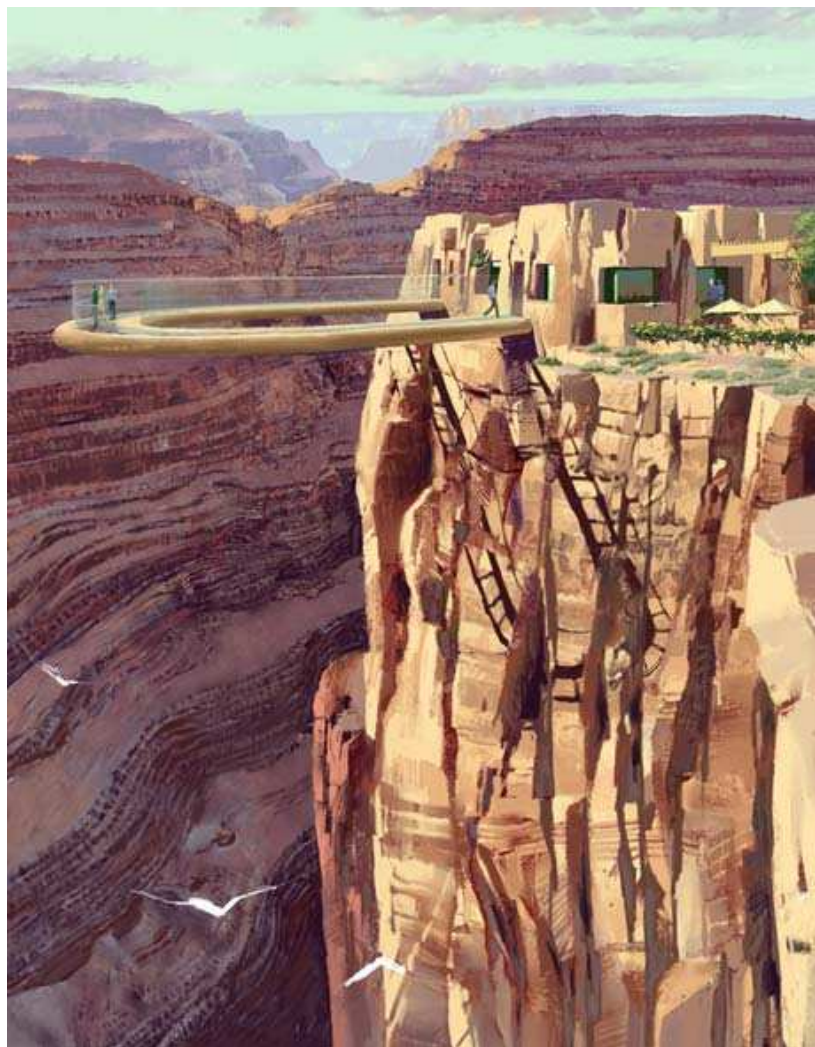
# Johdanto

*Kuinka vaarallista on tehdä virhe?*

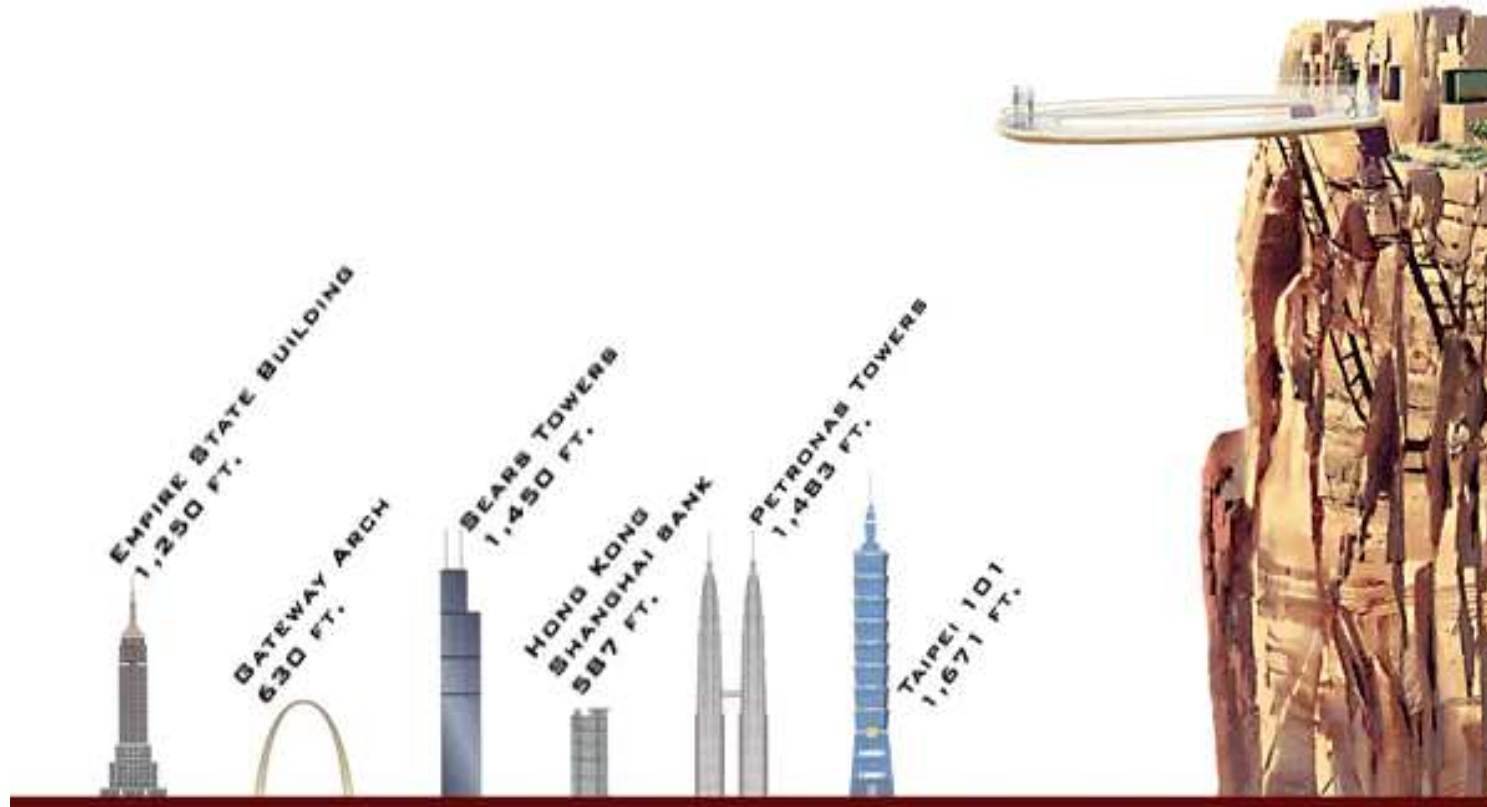
# Johdanto

*Kuinka vaarallista on tehdä virhe?*

Se riippuu virheen suuruudesta!



Kuva 1: Näköalasilta Grand Canyonin yllä (havainnekuva).



Kuva 2: Näkölasilta Grand Canyonin yllä ja maailman korkeimmat rakennukset (havainnekuva).

## Rakenteiden suunnittelun päätavoitteet

- ▶ turvallisuus ja kestävyys
- ▶ käytettävyys ja ympäristönäkökohdat
- ▶ kustannusten minimointi

## Suunnittelu tietokoneavusteisilla työvälineillä

- ▶ kolmiulotteinen suunnittelu ja visualisointi
- ▶ kolmiulotteinen simulointi, analysointi ja mitoitus
- ▶ tulosten kolmiulotteinen visualisointi



## Suunnitteluprosessin virhekomponentit

- ▶ Matemaattis-fysikaalinen 3D-malli lähtökohdaksi koko rakenteen suunnittelua, mitoitusta ja analysointia varten.  
⇒ **Idealisointivirhe**
- ▶ Rakenteen jako yksinkertaisempiin osarakenteisiin:
  - 1D-malleja: köysi (lanka), akseli, pilari, palkki, kaari
  - 2D-malleja: kalvo (levy), laatta, kuori⇒ **Mallinnusvirhe**
- ▶ Numeerinen likiratkaisu koko rakenteelle sekä osarakenteille.  
⇒ **Diskretointivirhe**
- ▶ Muutoksia malleihin tai menetelmiin — tai hyväksyntä.

*Tavoitteena on palautteen perusteella suunnittelukriteereihin mukautuva ja pitkälle automatisoitu prosessi.*

# Sisältö

- 1 Johdanto
- 2 Laattarakenteiden mallinnus**
- 3 Elementtimenetelmä
- 4 Virheanalyysi elementtimenetelmille
- 5 Yhteenveto

# Laattarakenteiden mallinnus

- ▶ Tarkasteltavana on **laattarakenne** eli
  - ohut
  - tasomainen rakennejoka taipuu kuormituksen seurauksena.
- ▶ Pelkästään tason suunnassa venyvä ohut, tasomainen rakenne kuvataan **levy- eli kalvomallilla**.
- ▶ Todellisessa rakenteessa nämä ilmiöt usein yhdistyvät, mutta teoreettisessa tarkastelussa ne voidaan erottaa toisistaan.
- ▶ **Kuorirakenteessa** levy- ja laattamalli yhdistyvät väistämättä kuoren kaarevan muodon seurauksena.

## Laattarakenne

- ▶ Tasomainen rakenne, jonka **paksuus** on
  - **pieni** verrattuna pituuteen ja leveyteen
  - keskipinnan suhteen **symmetrinen** — yksinkertaisimmillaan vakio.
- ▶ Esimerkkejä laattarakenteista:
  - lattia- ja kattorakenteet **rakennuksissa**: asunto, parkkitalo, silta
  - lattiarakenteet **kuljetusvälineissä**: linja-auto, laiva, lentokone, öljynporauslautta
  - **koneiden ja laitteiden** osat

## Esimerkkejä laattarakenteista



Kuva 3: Parkkitalo: laatta-, palkki- ja pilarirakenteita (Leppävaara, Espoo).

## Esimerkkejä laattarakenteista



Kuva 4: Silta: laatta-, palkki- ja pilarirakenteita (Uchon, Ranska).

## Laattamalli

- ▶ Lähtökohtana 3D-malli lineaarisesti kimmoiselle aineelle: **lineaarinen elastisuusteoria**.
- ▶ Hyödynnetään rakenteen ohuutta ja tasomaista muotoa: **dimensioerduktio**.
- ▶ Päädytään tarkastelemaan laatan **keskipintaa** ja siihen liittyviä suureita.
  - keskipinnan kohtisuora siirtymä: **taipuma**  $w$
  - keskipintaa vastaan kohtisuorien säikeiden kulmanmuutos: **kiertymävektori**  $\beta$
- ▶ Lisäksi malli sisältää tiedot laatan **paksuudesta** ja materiaalin **jäykkyydestä**.

## Yleisimmät laattamallit

Kirchhoff–Love-laattamalli:

- ▶ keskipinnan kohtisuorat säikeet säilyvät keskipintaan nähden kohtisuorassa:  $\nabla w = \beta$

Reissner–Mindlin-laattamalli:

- ▶ keskipinnan kohtisuorat säikeet eivät säily keskipintaan nähden kohtisuorassa

Molemmat mallit ovat epätäydellisiä mutta noudattavat dimensioreduktio-mallinnuksen **pääperiaatetta**:

- ▶ mitä ohuempi laatta, sitä pienempi mallinnusvirhe.



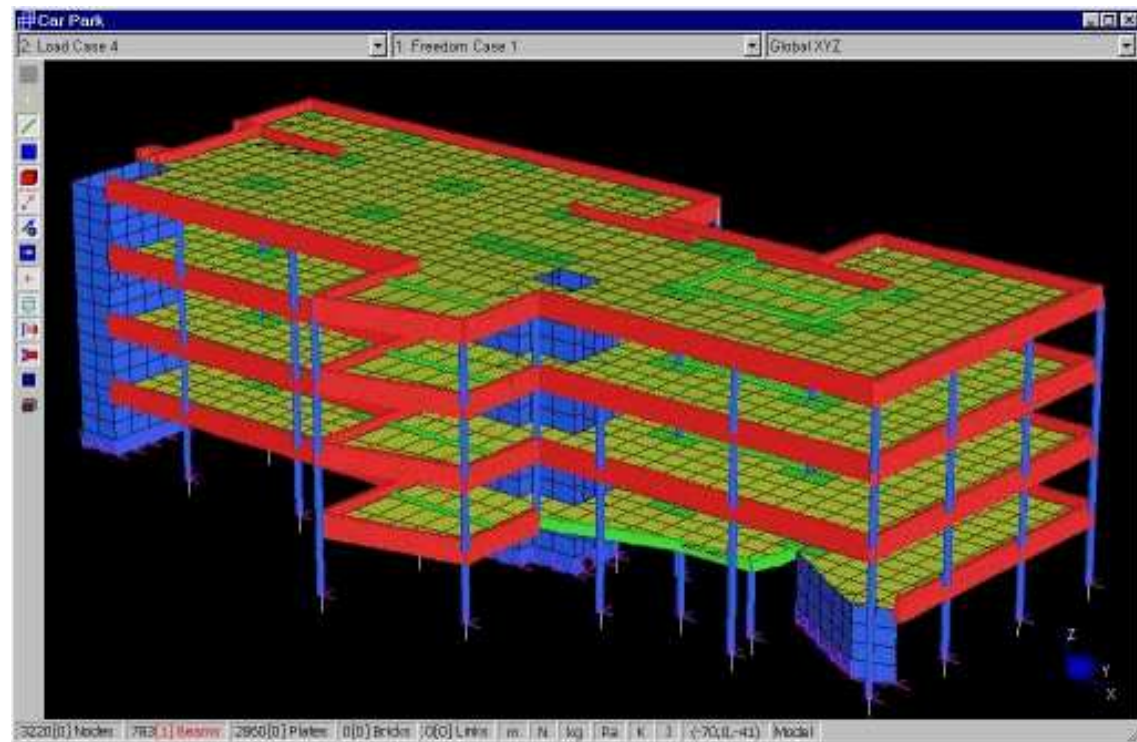
# Sisältö

- 1 Johdanto
- 2 Laattarakenteiden mallinnus
- 3 Elementtimenetelmä**
- 4 Virheanalyysi elementtimenetelmille
- 5 Yhteenveto

# Elementtimenetelmä

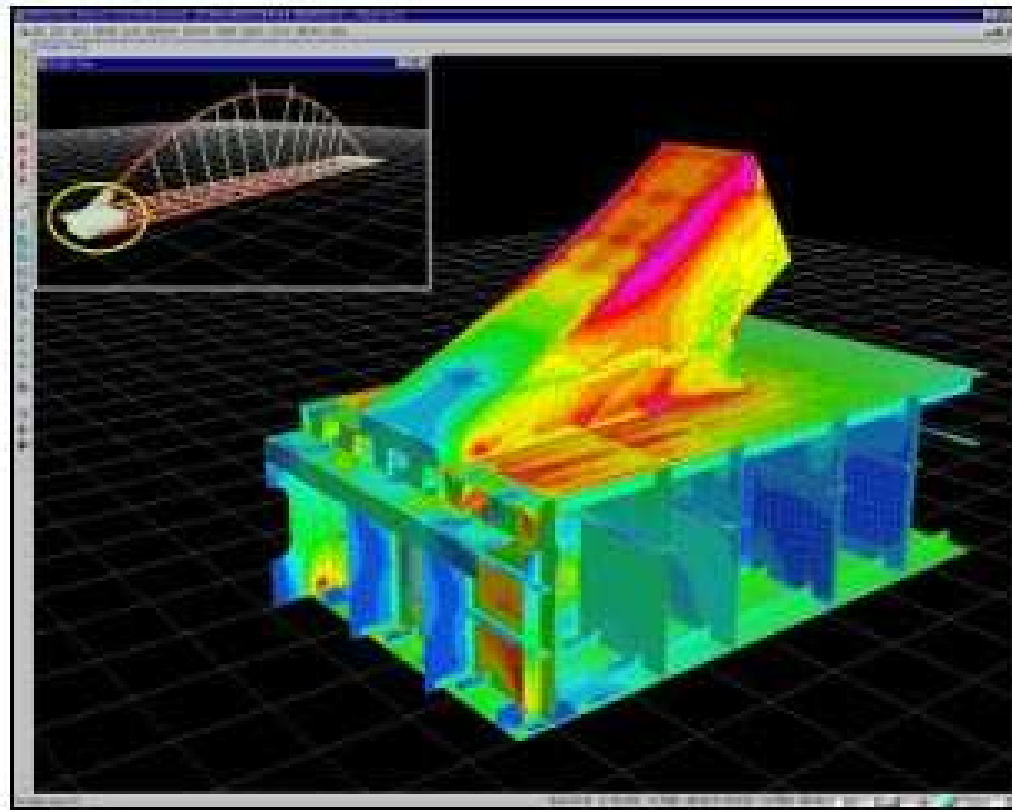
- ▶ Laattamalli johtaa osittaisdifferentiaaliyhtöihin, joiden monimutkaisuuden takia tarvitaan **likimenetelmiä** yhtälöiden ratkaisemiseksi.
- ▶ Ratkaisu suoritetaan useimmiten **elementtimenetelmään** perustuvilla tietokoneohjelmistoilla.
- ▶ Elementtimenetelmän perusidea:
  - jaetaan tarkasteltava alue (laatan keskipinta) osiin eli **elementteihin** (kolmiot, nelikulmiot)
  - elementtiverkon kussakin elementissä pieni määrä "laskentapisteitä" eli **vapausasteita**
  - muualla elementin alueella ratkaisu kuvataan yksinkertaisilla polynomeilla eli **muotofunktioilla**

## Esimerkkejä elementtiverkoista



Kuva 5: Esimerkki: Parkkitalon CAD-malli ja elementtiverkko: laatta-, palkki- ja pilarielementtejä.

## Esimerkkejä elementtiverkoista



Kuva 6: Esimerkki: Sillan CAD-malli ja elementtiverkko: laatta- ja palkkielementtejä

# Sisältö

- 1 Johdanto
- 2 Laattarakenteiden mallinnus
- 3 Elementtimenetelmä
- 4 **Virheanalyysi elementtimenetelmille**
- 5 Yhteenveto

# Virheanalyysi elementtimenetelmille

Perusperiaate: Sitä **tarkempi** on likarvoratkaisu

- ▶ mitä enemmän on **elementtejä**, eli mitä tiheämpi elementtiverkko (pienemmät elementit)
- ▶ mitä enemmän kussakin elementissä on "laskentapisteitä" eli **vapausasteita** (korkeampiasteiset elementit)

## A priori -analyysi

Virhearvio kertoo, kuinka nopeasti virhe pienenee, kun elementtiverkkoa tihennetään.

- ▶ vaatii **etukäteistietoa** tarkasta ratkaisusta tai kuormituksesta
- ▶ yleensä **globaali** eli koskee koko laskenta-aluetta
- ▶ pääasiassa **laadullinen** ja **teoreettinen**

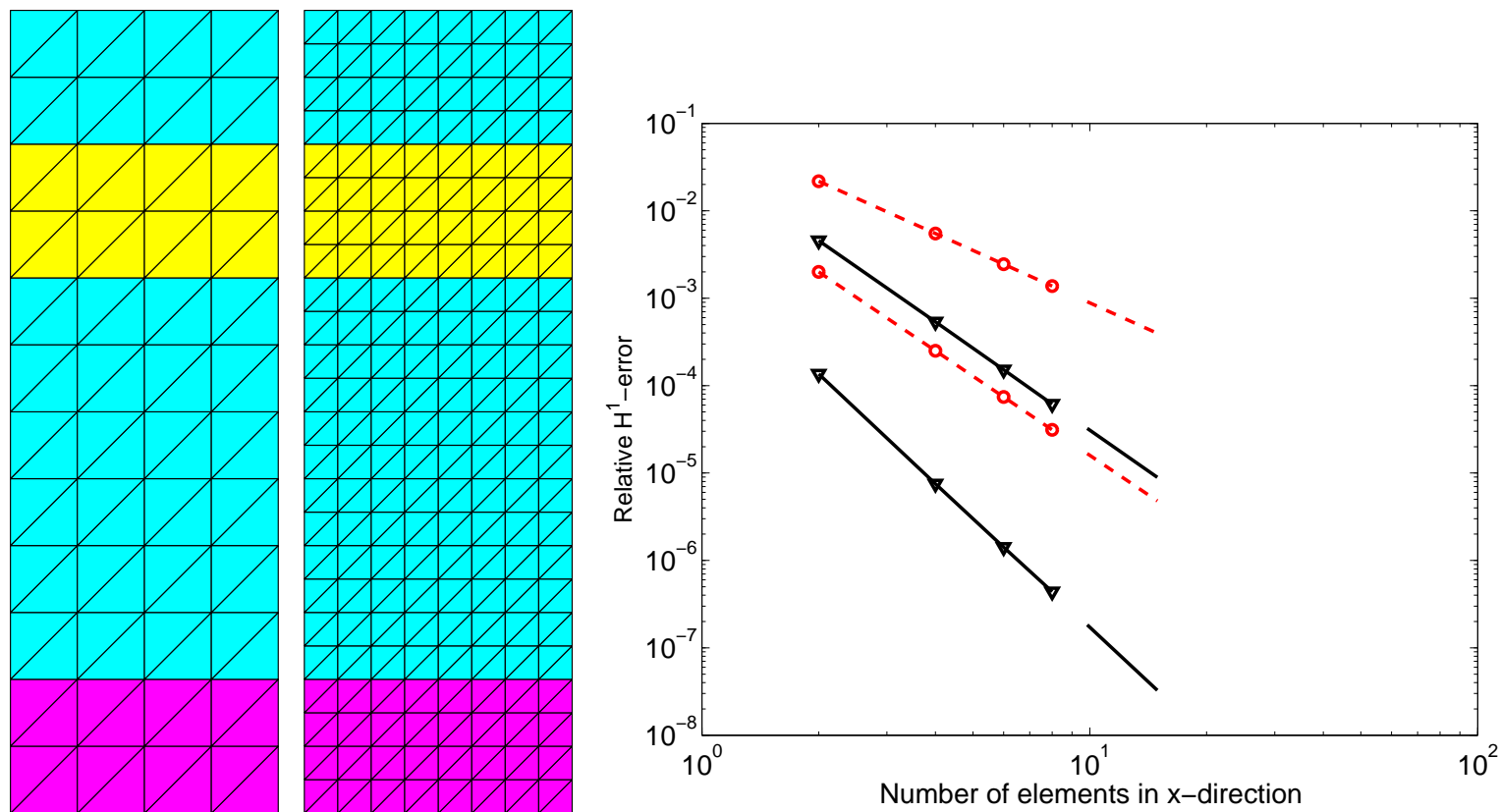
## Esimerkki a priori -virhearviosta

- ▶  $w - w_h$  on virhe, missä  $w$  on tarkka ratkaisu ja  $w_h$  on likiratkaisu
- ▶  $\|\cdot\|_1$  on "mittari", ensimmäisen asteen Sobolev-normi

$$\|w - w_h\|_1 \leq Ch^k \|w\|_{k+1},$$

- ▶  $C$  on tuntematon vakio, joka ei riipu  $h$ :sta;  
 $h$  on elementtikoko eli suurimman elementin halkaisija
- ▶  $k$  on elementin asteluku

## Esimerkki verkontihennyksestä ja virheen pienenemisestä



Kuva 7: Elementtiverkon tihennys ja a priori -virhearvion numeerinen todentaminen.



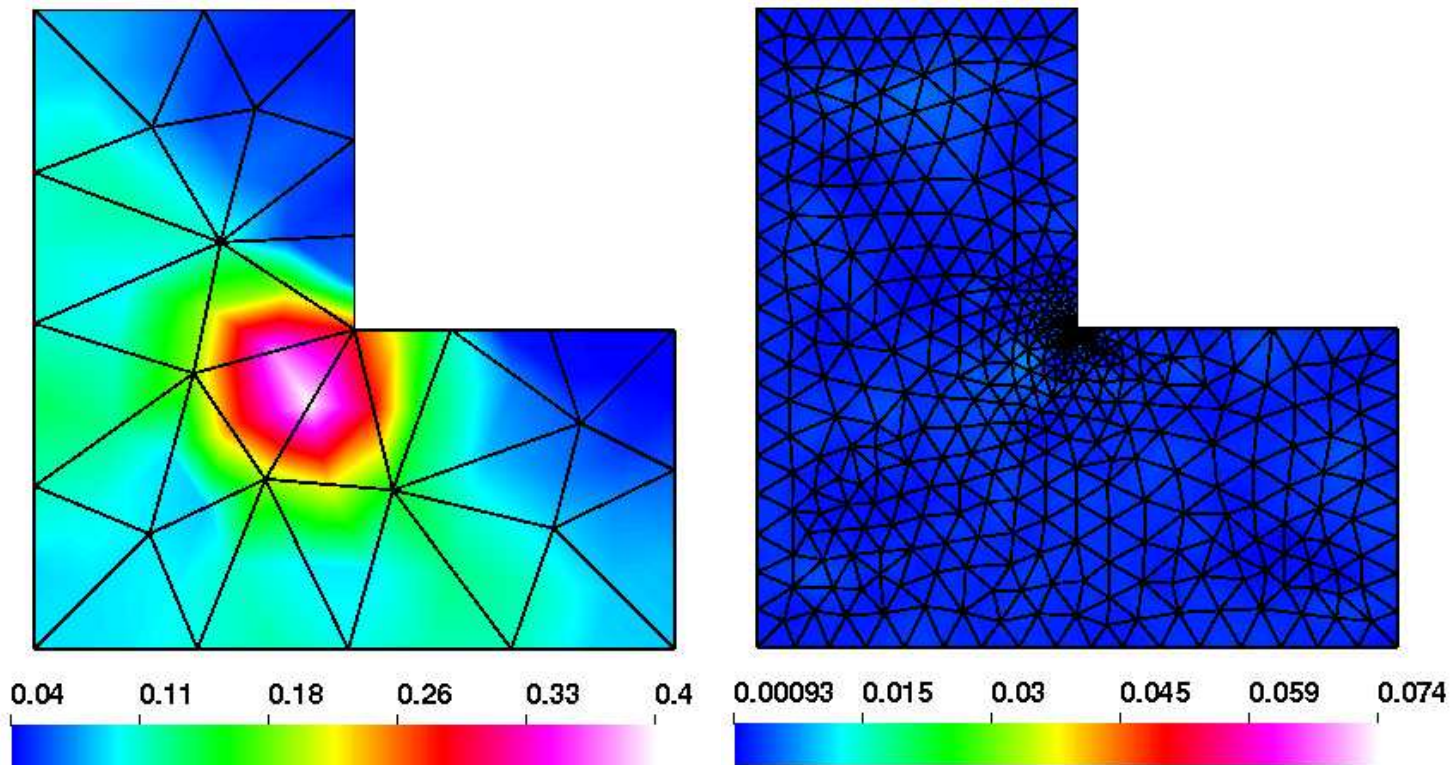
## A posteriori -analyysi

Virhearvio kertoo erityisesti virheen keskittymisestä, ja osoittaa, mistä elementtiverkkoa on tihennettävä, jotta virhe pienenee.

- ▶ ei vaadi etukäteistietoa tarkan ratkaisun tai kuormituksen säännöllisyydestä
- ▶ globaali ja lokaali eli koskee sekä yksittäistä elementtiä ja sen naapureita että koko laskenta-aluetta
- ▶ laadullinen ja määrällinen sekä teoreettinen ja käytännöllinen

Yhdessä a priori- ja a posteriori -virheanalyysi antavat tehokkaat työkalut virheen pienentämiseksi haluttuun toleranssiin.

## Esimerkki adaptiivisesta verkontihennyksestä



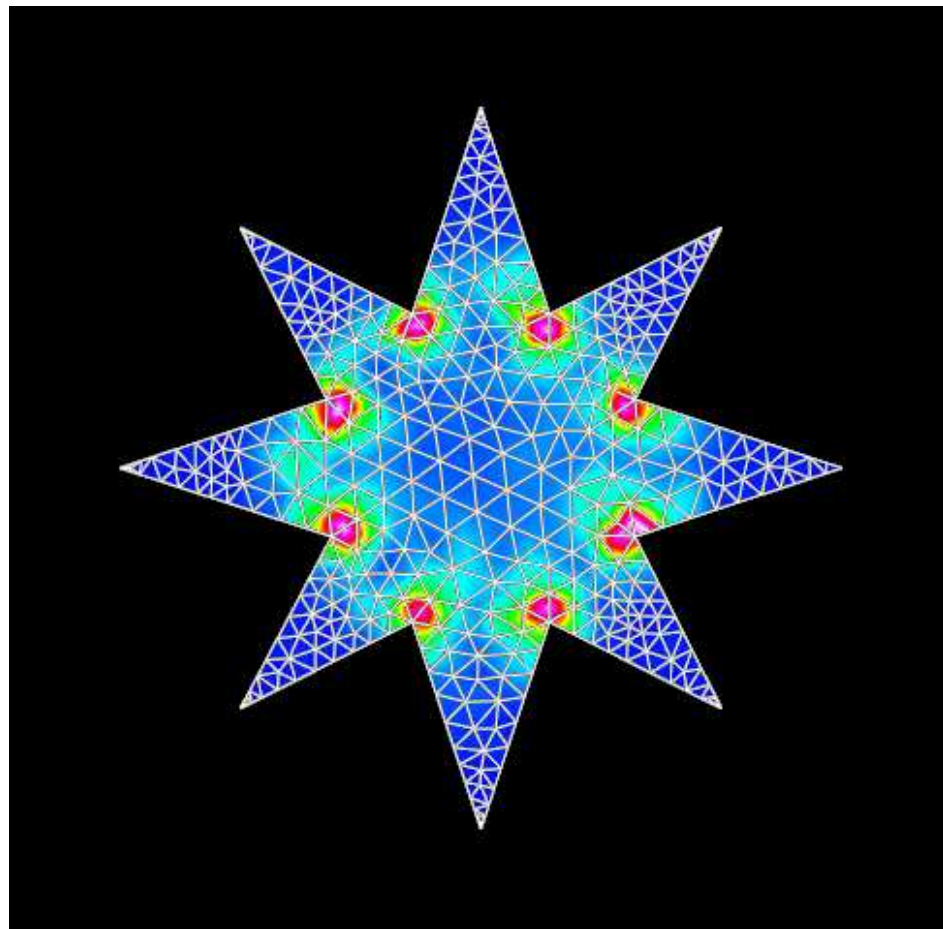
Kuva 8: A posteriori -virheindikaattorin osoittama virhekeskittymä laatan sisänurkassa ja adaptiivinen elementtiverkon tihennys virheen pienentämiseksi.

# Yhteenveto

Laatan — tasomaisen ohuen rakenteen — taivutuksen analysointi elementtimenetelmän avulla:

- ▶ Elementtimenetelmien kehitys, virheen teoreettinen *a priori* -analysointi ja numeerinen todentaminen.
- ▶ Ohjelmoitavien *a posteriori* -virheindikaattoreiden kehitys, analysointi ja numeerinen testaus.
- ▶ Laattamallien elementtimenetelmät artikkeleissa A–E:
  - Reissner–Mindlin-mallille: A, B
  - Kirchhoff–Love-mallille: C, D, E
  - A priori- virheanalyysi: A, B, C, D
  - A posteriori -virheanalyysi: C, D, E

Kuinka menetelmämme toimivat  
"välkkyvän" tähden tapauksessa?



"Lumetamme" tähden tihentämällä  
verkkoa  
kohti "välkkyviä" kulmia!

