

TEKNILLINEN KORKEAKOULU

Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto

Teknillisen fysiikan koulutusohjelma

Jarkko Niiranen

EPÄLINEAARISTEN YHTÄLÖSYSTEMIEN RATKAISUMENETELMIÄ
RAKENTEIDEN MEKANIIKAN STABIILIUSTEHTÄVIIN

Diplomi-insinöörin tutkintoa varten tarkastettavaksi jätetty diplomityö

Työn valvoja professori Gennadi Vainikko

Työn ohjaajat professori Martti Mikkola, diplomi-insinööri Eero Torkkeli

Espoo 5.9.2000

5.9.2000

| | |
|---------------------------------|---|
| Tekijä: | Jarkko Niiranen |
| Osasto: | Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto |
| Pääaine: | Matematiikka |
| Sivuaineet: | Mekaniikka |
| Työn nimi: | EPÄLINEAARISTEN YHTÄLÖSYSTEMIEN RATKAISUMENETELMIÄ RAKENTEIDEN MEKANIIKAN STABIILIUSTEHTÄVIIN |
| English title: | SOLUTION METHODS FOR NONLINEAR EQUATION SYSTEMS OF STRUCTURAL STABILITY PROBLEMS |
| Sivumäärä: | 100 |
| Professuuri: | Matematiikka |
| Työn valvoja: | professori Gennadi Vainikko |
| Työn ohjaaja (t): | professori Martti Mikkola, diplomi-insinööri Eero Torkkeli |
| Tiivistelmä: | <p>Tutkimuksessa käsitellään epälineaaristen algebrallisten yhtälösystemien ratkaisemiseen käytettäviä numeerisia polunseurausmenetelmiä. Sovelluskohteena ovat rakenteiden mekaniikan epälineaariset tehtävät.</p> <p>Numeeristen polunseurausmenetelmien osalta käsitellään sekä matemaattisia perusteita että sovelluksiin ja ohjelmointiin liittyviä näkökohtia. Pääpaino on ennuste—korjaus—menetelmillä, joita käytetään erityisesti rakenteiden mekaniikan stabiiliustarkasteluissa. Työssä on käsitelty sekä epäelastisten että elastisten rakenteiden stabiiliusteorian perusteita.</p> <p>Ratkaisumenetelmiä on ohjelmoitu osaksi elementtimenetelmään perustuvaa lujuslaskentaohjelmistoa. Menetelmiä on testattu laskemalla esimerkkitapauksia ja vertaamalla tuloksia kirjallisuudessa esitettyihin tuloksiin. Lasketut tulokset vastaavat hyvin vertailutuloksia.</p> |
| Avainsanat: | epälineaarinen, polunseuraus, stabiilius, numeerinen, elementtimenetelmä |
| Opintosihiteeri täyttää: | |
| | Työ hyväksytty: |
| | Työn sijaintipaikka: |

5.9.2000

| | |
|-------------------------------|---|
| Author: | Jarkko Niiranen |
| Department: | Department of Engineering Physics and Mathematics |
| Major subject: | Mathematics |
| Minor subjects: | Theoretical and Applied Mechanics |
| English title: | SOLUTION METHODS FOR NONLINEAR EQUATION SYSTEMS OF STRUCTURAL STABILITY PROBLEMS |
| Finnish title: | EPÄLINEAARISTEN YHTÄLÖSYSTEMIEN RATKAISUMENETELMIÄ RAKENTEIDEN MEKANIIKAN STABIILUUTEHTÄVIIN |
| Number of pages: | 100 |
| Chair: | Mathematics |
| Supervisor: | professor Gennadi Vainikko |
| Instructor(s): | professor Martti Mikkola, Master of Science (Eng.) Eero Torkkeli |
| Abstract: | <p>This is a study of solving nonlinear algebraic equation systems by using numerical continuation or path following methods — with applications to nonlinear problems of solid and structural mechanics.</p> <p>Numerical path following methods are discussed not only in the view of mathematical foundations — but also in the view of applications and computer implementation. Special interest is given to predictor-corrector methods which are widely used for stability problems of solid and structural mechanics. Therefore the stability theory of elastic and inelastic structures is discussed in some respects.</p> <p>Solution procedures have been implemented in a finite element program system. The implemented procedures have been tested by solving some example problems. The results are in good agreement with the references studied.</p> |
| Keywords: | nonlinear, continuation, stability, numerical, finite element method |
| Study secretary fills: | |
| | Thesis approved: |
| | Library code: |

Alkulause

Olen tehnyt tämän diplomityön FEMdata oy:n palkollisena.

Kiitän työni valvojaa professori Gennadi Vainikkoa sekä ohjaajia professori Martti Mikko-
laa ja diplomi-insinööri Eero Torkkelia itsenäisen työskentelyn mahdollistaneesta ohjaukses-
ta.

Vaimoani Anna-Maija Niirasta kiitän tuesta ja tekstin tarkistuksesta. Lisäksi kiitän vanhem-
piani Pertti ja Hannele Niirasta, joilta olen saanut parhaat eväät niin opiskeluun kuin elä-
mään ylipäänsä. He ovat olleet kiinnostuneita opinnoistani mutta eivät ole koskaan esittä-
neet kysymystä ”Milloinkas sinä aiot valmistua?” — toisin kuin monet muut.

*Today, the concepts of **stability** and **chaos** are commonplace in the
scientific community. Stability is a classical subject, whereas chaos is a
recent field. There is one class of mechanisms that control both, namely,
bifurcations.*

— Rüdiger Seydel (1994)

Diplomityössäni olen saanut perehtyä sekä stabiiliuteen että bifurkaatioihin. Kaaokseen tu-
tustuminen on jäänyt valitettavasti lähinnä arkielämän kokemusten varaan.

Espoossa 22.8.2000

Jarkko Niiranen

Sisällysluettelo

Alkulause

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Johdanto | 1 |
| 1.1 | Lineaarinen ja epälineaarinen tehtävänasettelu | 1 |
| 1.2 | Työn tarkoitus, pääkohdat ja tavoitteet | 2 |
| 2 | Ratkaisumenetelmiä rakenteiden mekaniikan tehtäville | 4 |
| 2.1 | Dynaaminen ja staattinen tehtävä | 4 |
| 2.2 | Polunseurausmenetelmiä sivuavat ratkaisumenetelmät | 5 |
| 3 | Rakenteiden mekaniikan stabiiliusteorian perusteita | 6 |
| 3.1 | Peruskäsitteitä | 6 |
| 3.1.1 | Mekaaninen systeemi | 6 |
| 3.1.2 | Mekaanisen systeemin voimat | 7 |
| 3.1.3 | Mekaanisen systeemin stabiilius | 9 |
| 3.2 | Stabiiliuskriteereitä | 11 |
| 3.2.1 | Epäelastisen rakenteen stabiiliuskriteereitä | 11 |
| 3.2.2 | Elastisen rakenteen stabiiliuskriteereitä | 15 |
| 3.2.2.1 | Yleisiä energiakriteereitä | 15 |
| 3.2.2.2 | Inkrementaalinen energiakriteeri | 16 |
| 3.3 | Jälkikriittinen käyttäytyminen | 18 |
| 3.3.1 | Epäelastisen rakenteen jälkikriittinen käyttäytyminen | 18 |
| 3.3.2 | Elastisen rakenteen jälkikriittinen käyttäytyminen | 19 |
| 3.3.3 | Rakenteen häiriöalttius | 21 |
| 4 | Numeerinen polunseuraus | 23 |
| 4.1 | Epälineaarinen ominaisarvotehtävä | 23 |
| 4.2 | Numeerisen polunseurauksen perusteet | 26 |
| 4.2.1 | Upotusmenetelmät ja käännepiste | 27 |
| 4.2.2 | Käännepisteen ohittaminen uudelleenparametrisoinnilla | 29 |
| 4.2.3 | Säännöllisten pisteiden implisiittisesti määriteltä ratkaisukäyrä | 33 |
| 4.3 | Paloittain lineaaristen menetelmien perusidea | 35 |
| 4.4 | Ennuste—korjaus—menetelmät | 36 |
| 4.4.1 | Ennuste—korjaus—menetelmien perusidea | 37 |
| 4.4.2 | Korjausvaiheen iterointi | 38 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.4.2.1 | Newton—Raphson-menetelmät | 38 |
| 4.4.2.2 | Moore—Penrose-käännös Newton-iteraatiossa | 40 |
| 4.4.2.3 | Kaarenpituusmenetelmien rajoiteyhtälöt ja ositustekniikka | 44 |
| 4.4.3 | Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen | 47 |
| 4.4.4 | Jacobin matriisin päivittäminen | 49 |
| 4.4.5 | Askelpituuden mukauttaminen | 50 |
| 4.4.5.1 | Asymptoottinen malli | 51 |
| 4.4.5.2 | Virhemalli | 53 |
| 4.4.6 | Bifurkaatiopiste | 55 |
| 4.4.6.1 | Bifurkaatioyhtälö Liapunov—Schmidt-reduktiolla | 55 |
| 4.4.6.2 | Bifurkaatioyhtälö ja bifurkaatiopisteiden lajittelu | 58 |
| 4.4.6.3 | Erikoispisteiden havaitseminen ja paikallistaminen | 62 |
| 4.4.7 | Polunvaihto yksinkertaisissa bifurkaatiopisteissä | 64 |
| 4.4.7.1 | Perturbaatio | 64 |
| 4.4.7.2 | Haarautuminen | 65 |
| 4.4.8 | Rajoiteyhtälön skaalaus | 66 |
| 4.4.9 | Suppenemiskriteerit | 67 |
| 5 | Laskentamenetelmien ohjelmointi | 69 |
| 5.1 | Epälineaarisen analyysin laskentamenetelmät | 69 |
| 5.2 | Epälineaarisen analyysin ohjausluvut | 72 |
| 6 | Esimerkkitapauksia | 76 |
| 6.1 | Sylinterikuori | 76 |
| 6.2 | Ympyränkaari | 80 |
| 6.3 | Yksiaukkoinen tasokehä | 82 |
| 6.4 | Avaruuskehä | 85 |
| 7 | Yhteenveto ja johtopäätökset | 88 |
| | Lähdeluettelo | 89 |
| | Liitteet | 97 |
| A | Rajoitevektorit eri rajoiteyhtälöille | 97 |
| B | Kuormakerroinmuutos eri rajoiteyhtälöille | 99 |
| C | Iteroinnin kulku eri rajoiteyhtälöillä | 100 |

1 Johdanto

Gleick (1987) on lainannut von Neumannin ajatusta tieteestä ja matemaattisesta mallinnuksesta:

Tiede ei koeta selittää, se ei koeta edes tulkita, se tekee pääasiassa malleja. Mallilla tarkoitetaan matemaattista rakennelmaa, joka yhdistettynä määrättyihin sanallisiin tulkintoihin kuvaa havaittuja ilmiöitä. Tällaisten matemaattisten rakennelmien oikeutus on vain ja ainoastaan siinä, että niiden odotetaan toimivan.

— John von Neumann

Ajatuksen tieteestä muuntaisin toiseen muotoon: Tieteen ei pitäisi yrittää selittää tai tulkita enempää, kuin mihin sillä on mahdollisuuksia. Matemaattisten mallien oikeutus seisoo mielestäni vahvemalla pohjalla kuin siteerauksessa, sillä usein mallien voidaan todeta toimivan riittävän hyvin. Toisaalta, jos matemaattiset rakennelmat ylipäänsä tarvitsevat oikeutuksen, siihen tulisi riittää pelkästään niiden mielenkiintoisuus ja kauneus.

1.1 Lineaarinen ja epälineaarinen tehtävänasettelu

Kun luonnontieteissä — ja myös monilla muilla tieteenaloilla — tutkitaan jotakin ilmiötä, ilmiön oleelliset piirteet muotoillaan usein matemaattiseksi malliksi. Yleensä matemaattinen malli käsittää differentiaali- ja/tai integraaliyhtälöitä, jotka kuvaavat jotakin säilymlakia. Matemaattisen mallinnuksen tarkkuudesta riippuen yhtälöt voivat olla tutkittavien muuttujien suhteen joko lineaarisia tai epälineaarisia. Lineaarinen malli kuvaa yleensä tarkasteltavaa ilmiötä vain varsin rajallisesti ja on siis mallinnuksen hierarkiassa alimmalla tasolla (Kouhia 1999).

Lineaarisen mallin ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys ovat yleensä helposti todistettavissa, ja ratkaisu on usein myös helposti löydettävissä, mutta epälineaarisen mallin kohdalla tilanne on yleensä huomattavasti vaikeampi (Kouhia 1999): Ratkaisun olemassaolo tai yksikäsitteisyys voidaan osoittaa mahdollisesti vain joissakin erikoistapauksissa, ja ratkaisulle löydetään usein vain likiarvo, jonka etsiminen voi olla työlästä ja viedä huomattavan paljon aikaa.

Rakenteiden suunnittelussa törmätään yhä useammin tilanteeseen, jossa rakenteen on oltava — esimerkiksi kustannussyistä — levyt ja ohut, mutta sen kuormankantokyvyn on oltava suuri. Tällöin suunnittelun perustana olevien laskelmien ja siis myös taustalla olevien matemaattisten mallien on oltava yhä tarkempia ja luotettavampia. Epälineaarinen mallintaminen on näin tullut tarpeelliseksi myös insinöörisuunnittelussa, jossa on ennen pärjätty lineaarisilla malleilla (Kouhia 1999).

Epälineaaristen ilmiöiden ymmärtämiseen ja niihin liittyvien yhtälöiden ratkaisemiseen tarvitaan sekä kvantitatiivista että kvalitatiivista tietoa. Numeeriset ratkaisumenetelmät tarjoavat kvantitatiivista tietoa, ja esimerkiksi bifurkaatio-, katastrofi- ja singulaariteoria antavat kvalitatiivisia keinoja, joiden avulla numeerisia tuloksia voidaan tulkita ja ymmärtää (Seydel 1994). Tämän työn luvussa 4 käsiteltävillä numeerisilla menetelmillä saadaan kvantitatiivista tietoa rakenteen globaalisesta käyttäytymisestä. Sitä voidaan tulkita luvun 3 rakenteiden mekaniikan stabiiliusteorian tarjoamilla keinoilla, jotka antavat kvalitatiivista tietoa rakenteen lokaalisesta käyttäytymisestä.

1.2 Työn tarkoitus, pääkohdat ja tavoitteet

Tämän työn tarkoituksena on käsitellä epälineaaristen algebrallisten yhtälösystemien ratkaisemiseen käytettäviä numeerisia polunseurausmenetelmiä — sekä matemaattista teoriaa että ohjelmoinnin toteutukseen liittyviä erityispiirteitä — monipuoliseen kirjallisuuteen perustuen. Epälineaariset yhtälösystemit ovat hyvin yleisiä monilla sovellusalueilla, ja niihin kytkeytyvät aihepiirit ovat usein hyvin laajoja.

Tässä työssä käsiteltävien polunseurausmenetelmien sovelluskohteena ovat rakenteiden mekaniikan epälineaariset tehtävät — erityisesti stabiiliustarkastelut. Sovelluskohteelle on tarkoitus antaa fysikaalinen taustakuva käsittelemällä lyhyesti myös rakenteiden mekaniikan stabiiliusteoriaa.

Ratkaisumenetelmien ohjelmoinnin tavoitteena on ollut sisällyttää lujuuslaskennan elementtimenetelmään perustuvaan ohjelmistoon käyttäjien kannalta tärkeimpiä ja kohtuullisen helppokäyttöisiä epälineaarisen analyysin ratkaisumenetelmiä. Ohjelmiston entisten ratkaisumenetelmien rinnalle ja tilalle on ollut tarkoitus lisätä uusia ratkaisumenetelmiä ja entistä monipuolisempia vaihtoehtoja ohjata analyysia. Uusia ratkaisumenetelmiä on testattu laskeamalla sekä yksinkertaisia esimerkkitapauksia että ohjelmiston käyttäjien ongelmatapauksia ja vertaamalla tuloksia kirjallisuudessa esitettyihin tuloksiin. Ohjelmiston käyttäjien ongelma-

tapauksia ei ole sisällytetty tähän työhön. Lisätavoitteena on ollut laatia käyttäjille mallin-
nuksen ja laskennan oleellisia piirteitä ja erilaisia esimerkkejä sisältävä ohjelmaseloste.

2 Ratkaisumenetelmiä rakenteiden mekaniikan tehtäville

Tässä luvussa mainitaan yleisiä ratkaisumenetelmätyyppejä, joita tarvitaan erilaisten rakenteiden mekaniikan tehtävien yhteydessä. Lisäksi mainitaan ratkaisumenetelmätyypit, jotka sivuavat luvussa 4 käsiteltäviä polunseurausmenetelmiä. Joitakin näistä ratkaisumenetelmätyypeistä on käsitelty tarkemmin luvussa 4.

2.1 Dynaaminen ja staattinen tehtävä

Rakenteiden mekaniikan ilmiöiden matemaattisen mallinnuksen oleellinen osa on Cauchyn ensimmäinen liikeyhtälö: Liikemäärän säilymisen periaate ja massan säilymlaki johtavat rakenteen paikalliseen epälineaariseen differentiaaliyhtälöön. Se voidaan esittää myös globaalina integraaliyhtälönä, josta käytetään nimitystä liikeyhtälön heikko muoto. Numeerisiä tarkasteluja varten liikeyhtälön heikko muoto voidaan saattaa äärellisulotteiseksi esimerkiksi elementtimenetelmän avulla, jolloin päädytään dynaamisessa eli ajasta riippuvassa tapauksessa epälineaariseen differentiaaliyhtälösystemiin ja staattisessa eli ajasta riippumattomassa tapauksessa epälineaariseen algebralliseen yhtälösystemiin (Kouhia 1999). Yhtälöt voivat olla myös lineaarisia riippuen rakenteen geometrian, materiaalin ja liitosten mallinnuksesta (Zienkiewicz ja Taylor 1991).

Lineaarisen dynaamisen tehtävän ratkaisemiseen voidaan käyttää kahta menetelmätyyppiä: moodien superpositio -menetelmiä tai suora aikaintegrointi -menetelmiä. Suora aikaintegrointi -menetelmät soveltuvat myös epälineaarisen dynaamisen tehtävän ratkaisemiseen (Kardestuncer ja Norrie 1987 sekä Crisfield 1997). Ns. moniaskelaikaintegrointimenetelmillä dynaaminen tehtävä voidaan esittää ajan suhteen paikallisesti samassa muodossa kuin staattinen tehtävä (Kouhia 1999).

Rakenteen stabiiliuden menetys on luonteeltaan aina epälineaarinen ja dynaaminen tapahtuma. Kuitenkin, jos rakennetta ei haluta tutkia koko stabiiliuden menetyksen ajan vaan ainoastaan ennen stabiiliuden menetystä, kriittisen tilan ympäristössä ja stabiiliuden menetyksen jälkeen, rakennetta voidaan tarkastella tietyissä tapauksissa staattisena tapauksena (Pajunen 1998).

2.2 Polunseurausmenetelmiä sivuavat ratkaisumenetelmät

Tässä työssä käsitellään pääasiassa epälineaaristen algebrallisten yhtälösystemien ratkaisemiseen käytettäviä numeerisia polunseurausmenetelmiä ja niiden soveltamista rakenteiden mekaniikan epälineaarisiin tehtäviin. Pääpaino on ns. ennuste—korjaus-menetelmillä, jotka perustuvat epälineaarisen yhtälösystemin linearisointiin ja ratkaisuennusteen iteratiiviseen korjaamiseen. Jokaisella iteraatiokierroksella ratkaistaan linearisoinnin mukainen lineaarinen algebrallinen yhtälösystemi, joten epälineaarisen yhtälösystemin ratkaisemisessa myös lineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmillä on oleellinen osa (Kouhia 1999).

Epälineaarisen yhtälösystemin bifurkaatiopisteen ympäristössä ratkaisu ei ole yksikäsitteinen vaan haarautuu kahteen tai useampaan osaan. Ratkaisuhaaran valintaan käytetään useimmissa menetelmissä bifurkaatiopisteen tangentiaalisen jäykkyyssmatriisin ominaisvektoreita, joiden määrittämiseen tarvitaan tavallisen lineaarisen ominaisarvotehtävän ratkaisumenetelmiä (Kouhia 2000).

Rakenteen stabiiliuden kannalta kriittisten muotovirheiden oletetaan usein olevan kuormittamattoman rakenteen lineaarisen stabiiliusanalyysin ominaismuotojen yhdistelmiä. Rakenteen stabiiliuden ja häiriöherkkyyden tutkimiseen tarvitaan siis myös yleistetyn lineaarisen ominaisarvotehtävän ratkaisumenetelmiä (Kouhia 2000).

Edellä mainituista epälineaaristen yhtälösystemien ratkaisemiseen liittyvistä ratkaisumenetelmistä käsitellään luvussa 4 lähinnä vain lineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmien niitä erityispiirteitä, jotka ovat rakenteiden mekaniikan sovellusten kannalta oleellisia. Lineaaristen ominaisarvotehtävien ratkaisumenetelmiä on käsitelty paljon numeerisen lineaarialgebran kirjallisuudessa (mm. Bathe ja Wilson 1976, Parlett 1980, Saad 1992, Golub ja Van Loan 1996 sekä Demmel 1997).

3 Rakenteiden mekaniikan stabiiliusteorian perusteita

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti sekä epäelastisten että elastisten rakenteiden stabiiliusteorian perusteita. Tarkoituksena on antaa perusmääritelmien ja -lauseiden muodossa fysikaalinen taustakuva luvussa 4 käsiteltäville polunseurausmenetelmien rakenteiden mekaniikan sovelluksille. Rakenteiden mekaniikan stabiiliusteorian historiaa ovat esitelleet lyhyesti mm. Pacoste (1993) ja Kouhia (1999).

3.1 Peruskäsitteitä

Tässä luvussa esitetään mekaanisen systeemin stabiiliuden määritelmä ja määritellään joitakin mekaaniseen systeemiin liittyviä peruskäsitteitä kuten systeemin konservatiivisuus ja erilaiset voimat.

3.1.1 Mekaaninen systeemi

Fetterin ja Waleckan (1980) mukaan mekaaninen systeemi voi koostua esimerkiksi N kappaaleesta partikkeleita, joilla on kullakin kolme vapausastetta, jolloin koko systeemillä on $3N \equiv m$ vapausastetta. Systeemin tila voidaan siis esittää koordinaateilla x_j , $j = 1, \dots, m$. Systeemin tilalla voi olla myös rajoitteita, jotka vähentävät vapausasteiden lukumäärää (Fetter ja Walecka 1980 sekä Pignataro, Rizzi ja Luongo 1991):

Määritelmä 3-1. Holonominen rajoite. Mekaanisen systeemin holonominen rajoite voidaan ilmaista rajoiteyhtälönä, joka koskee vain systeemin koordinaatteja ja aikaa.

Määritelmä 3-2. Skleronominen rajoite. Mekaanisen systeemin skleronominen rajoite ei riipu ajasta.

Seuraavissa luvuissa tarkastellaan systeemejä, joiden rajoitteet ovat sekä holonomisia että skleronomisia. Jos esimerkiksi m vapausastetta sisältävällä systeemillä on k holonomista rajoitetta, niin vapausasteiden lukumäärä vähenee arvoon $m - k \equiv n$. Koordinaatteja q_j , $j = 1, \dots, n$, joilla systeemin tila voidaan esittää täydellisesti, sanotaan systeemin yleistetyiksi koordinaateiksi (Fetter ja Walecka 1980).

Pignataro, Rizzi ja Luongo (1991) ovat tarkastelleet mekaanista systeemiä differentiaaliyhtälösysteminä

$$\dot{y}(t) = A(y, t), \quad (3-1)$$

missä $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\dot{y}(t) \equiv dy/dt$. Yhtälö (3-1) kuvaa systeemin tilan muutosta ajan suhteen. Kuvauksen A perusteella voidaan erotella kaksi perustapausta:

Määritelmä 3-3. Heteronominen ja autonominen systeemi. Yhtälösystemi (3-1) on heteronominen eli ei-autonominen, koska se riippuu eksplisiittisesti ajasta t . Autonominen systeemi ei riipu eksplisiittisesti ajasta, jolloin yhtälössä (3-1) $A(y, t) = A(y)$.

3.1.2 Mekaanisen systeemin voimat

Zieglerin (1968) mukaan systeemin luvallisella siirtymällä tarkoitetaan sellaista siirtymää, jonka seurauksena systeemin tila on luvallinen eli systeemin rajoitteiden mukainen. Holonomisissa systeemissä luvallinen siirtymä voidaan kuvata yleisimmässä muodossaan mielivaltaisesti valittuna joukkona yleistettyjen koordinaattien differentiaaleja.

Määritelmä 3-4. Konservatiivinen voima. Systeemiin vaikuttava voima on konservatiivinen, jos sen tekemä työ minkä tahansa systeemin luvallisen siirtymän suhteen riippuu ainoastaan systeemin alku- ja lopputilasta.

Systeemiin vaikuttavat voimat voidaan jaotella Zieglerin (1968) sekä Bazantin ja Cedolinin (1991) mukaan aktiivisiin voimiin eli kuormiin ja reaktiivisiin voimiin eli reaktioihin. Kuormat ja reaktiot voidaan jaotella vielä seuraavalla tavalla:

Kuormat:

1. Ei-stationaariset kuormat, $p = p(q, \dot{q}, t)$
 - riippuvat ajasta
 - ei-konservatiivisia
2. Stationaariset kuormat, $p = p(q, \dot{q})$
 - eivät riipu ajasta
 - a. Nopeusriippuvaliset, $p = p(q, \dot{q})$
 - i. Dissipatiiviset, $dW < 0$
 - ei-konservatiivisia
 - tekevät työtä, kun rakenne liikkuu
 - ii. Gyroskooppiset, $dW = 0$
 - konservatiivisia
 - ei voida johtaa potentiaalienergiasta
 - eivät tee työtä, kun rakenne liikkuu
 - b. Nopeusriippumattomat, $p = p(q)$
 - i. Sirkulatoriset, $dW \neq -d\Phi$
 - ei-konservatiivisia
 - ei voida johtaa potentiaalienergiasta
 - ii. Ei-sirkulatoriset, $dW = -d\Phi$
 - konservatiivisia
 - voidaan johtaa potentiaalienergiasta

Reaktiot:

1. Reaktiot, jotka eivät tee työtä, $dW = 0$
 - konservatiivisia
 - voidaan johtaa potentiaalienergiasta
 - esimerkiksi tukivoima
2. Dissipatiiviset reaktiot, $dW < 0$
 - ei-konservatiivisia
 - esimerkiksi viskoosin vaimentimen tai kitkaliitoksen reaktivoima

Kuormien ja reaktioiden jaottelussa dW on voiman tekemä differentiaalinen työ ja $-d\Phi$ kuorman potentiaalienergian differentiaali. Skleronomisessa systeemissä reaktioiden tekemä työ ei ole koskaan positiivinen (Ziegler 1968).

Määritelmä 3-5. Konservatiivinen systeemi. Jos kaikki systeemiin vaikuttavat voimat — sekä kuormat että reaktiot — ovat konservatiivisia, niin systeemi on konservatiivinen.

Konservatiivinen systeemi on tärkeä erikoistapaus mm. siksi, että konservatiivisen systeemin sisäisten ja ulkoisten voimien tekemä työ voidaan lausua systeemin potentiaalienergian avulla (Ziegler 1968).

3.1.3 Mekaanisen systeemin stabiilius

Stabiiliudelle voidaan antaa eri tarkoituksiin soveltuvia erilaisia määritelmiä, joista ns. dynaamiset määritelmät ovat käyttökelpoisia kaikkiin rakenteiden mekaniikan tarkasteluihin (Bazant ja Cedolin 1991). Ziegler (1968) on esittänyt systeemin yleistettyjen siirtymien $q = (q_1, \dots, q_n)$ määräämän tasapainotilan stabiiliudelle sekä asymmetrisen että symmetrisen määritelmän:

Määritelmä 3-6 (asymmetrinen). Stabiilius. Tasapainotila $q(t) = 0$ on stabiili, jos $|q_k(t)|$ on mielivaltaisen pieni kaikilla $k = 1, \dots, n$ ja $t > 0$, kun alkuarvot $|q_k(0)|$ ja $|q'_k(0)|$ ovat riittävän pieniä kaikilla $k = 1, \dots, n$.

Määritelmä 3-7 (symmetrinen). Stabiilius. Tasapainotila $q(t) = 0$ on stabiili, jos $|q_k(t)|$ ja $|q'_k(t)|$ ovat mielivaltaisen pieniä kaikilla $k = 1, \dots, n$ ja $t > 0$, kun alkuarvot $|q_k(0)|$ ja $|q'_k(0)|$ ovat riittävän pieniä kaikilla $k = 1, \dots, n$.

Pacoste (1993) on johtanut symmetriselle tapaukselle käyttökelpoisemman muodon: Konservatiivisen systeemin liikettä voidaan kuvata Lagrangen yhtälöillä

$$\partial\Pi/\partial q_k + (d/dt)(\partial\Gamma/\partial q'_k) - \partial\Gamma/\partial q_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3-2)$$

missä $\Pi = \Pi(q, \lambda)$ on potentiaalienergia ja $\Gamma = \Gamma(q, q')$ liike-energia. Parametri $\lambda \in \mathbb{R}^m$ kuvaa systeemin geometrinen häiriöiden (esim. rakenteen muotovirheet), mekaanisten häiriöiden (esim. rakenteen alkujännitykset) ja ulkoisten kuormien vaikutusta potentiaalienergiaan. Kvasistaattisessa tapauksessa tasapainoyhtälö pelkistyy muotoon

$$\partial\Pi/\partial q_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3-3)$$

Oletetaan, että systeemin tila riippuu yleistetyistä koordinaateista s_k , $k = 1, \dots, n$, ja että systeemi on tasapainotilassa $s_k = s^*_k$, $k = 1, \dots, n$. Koordinaatiston siirrolla $q_k = s_k - s^*_k$, $k = 1, \dots, n$, systeemin tasapainotila on uusien yleistettyjen koordinaattien q_k , $k = 1, \dots, n$, avulla lausuttuna origossa $q_k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Määritelmä 3-8. Stabiilius (Liapunov). Oletetaan, että systeemin tasapainotilaa $q = 0$, häiritään hetkellä $t = t^0$ alkuarvoilla q^0 ja q'^0 . Tasapainotila on stabiili, jos mielivaltaisesti valitulle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että aina kun alkuarvoille pätee

$$\|q^0\|_2 < \delta \text{ ja}$$

$$\|q'^0\|_2 < \delta,$$

niin ratkaisulle pätee

$$\|q(t)\|_2 < \varepsilon \text{ ja}$$

$$\|q'(t)\|_2 < \varepsilon$$

kaikilla $t > t^0$. Jos lisäksi $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$, niin tasapainotila on asympotoottisesti stabiili.

Jos parametriarvo λ on kiinnitetty, Lagrangen yhtälöt (3-3) voidaan lausua muuttujan vaihdoksen $y_{2k-1} = q_k$ ja $y_{2k} = q'_k$, $k = 1, \dots, n$, avulla $2n$ ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöä sisältävässä kanonisessa muodossa

$$y'(t) = A(y(t), t), \quad (3-4)$$

missä $y \in \mathbb{R}^{2n}$, $t \in \mathbb{R}$ ja $A : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Koordinaattimuuttujat y_k , $k = 1, \dots, 2n$, muodostavat ns. faasiavaruuden.

Jos kanonisen muodon (3-4) mukainen systeemi on hetkellä $t = t^0$ alkutilassa $y(t^0) = y_1^0$, niin yhtälöstä (3-4) saadaan ratkaisu $y(t) = y_1(t)$, joka kuvaa systeemin tilaa hetkellä t . Jos kyseessä on staattinen tapaus, niin systeemi pysyy alkutilassaan eli $y_1(t) = y_1^0$. Kun tutkitaan ratkaisun y_1 stabiiliutta, on selvitettävä, mitä ratkaisulle y_1 tapahtuu, jos alkuarvoa y_1^0 hiukan muutetaan. Jos alkuarvossa y_1^0 tapahtuu muutos v^0 , niin muuttunutta alkuarvoa $y_1^0 + v^0$ vastaava ratkaisu

$$y(t) = y_1(t) + v(t), \quad (3-5)$$

missä $v(t)$ on alkuarvon muutoksesta v^0 aiheutuva muutos ratkaisussa $y_1(t)$, ja siis $v(t^0) = v^0$. Jos kanonisen muodon (3-4) kuvaus A on analyyttinen, merkitsemällä $A' \equiv \partial A / \partial y$ voidaan yhtälö (3-5) derivoituna ajan suhteen esittää Taylor-kehityksen muodossa

$$y'(t) = y_1'(t) + v'(t) = A(y_1(t), t) + A'(y_1(t), t)v + \frac{1}{2} A''(y_1(t), t)[v, v] + \dots \quad (3-6)$$

Koska y_1 on yhtälön (3-4) ratkaisu, niin $y_1'(t) = A(y_1(t), t)$, joten merkitsemällä $B(y_1(t), t)[v] \equiv \frac{1}{2} A''(y_1(t), t)[v, v] + \dots$ saadaan yhtälö

$$v'(t) = A'(y_1(t), t)v + B(y_1(t), t)[v]. \quad (3-7)$$

Kuvauksella B on se erityisominaisuus, että sen Taylor-kehityksessä pisteessä $v = 0$ ei ole lainkaan vakiotermejä eikä ensimmäisen asteen termejä. Yhtälön (3-7) avulla yhtälön (3-4)

ratkaisun y stabiiliustarkastelu voidaan pelkistää triviaaliratkaisun $v = 0$ stabiiliuden tarkasteluksi ja tasapainotilan stabiiliuden määritelmä 3-8 voidaan esittää seuraavassa muodossa:

Määritelmä 3-9. Stabiilius. Oletetaan, että systeemin tasapainotilaa $y(t) = y_1(t)$, $y_1(t^0) = y_1^0$, häiritään hetkellä $t = t^0$ alkuarvohäiriöllä $v(t^0) = v^0$. Tasapainotila on stabiili, jos mielivaltaisesti valitulle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että aina kun alkuarvohäiriölle pätee

$$\|v^0\|_2 < \delta,$$

niin vastaavalle ratkaisun muutokselle pätee

$$\|v(t)\|_2 < \varepsilon$$

kaikilla $t > t^0$. Jos lisäksi $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$, niin tasapainotila on asympotoottisesti stabiili.

Systemi on siis stabiili, jos pienet muutokset alkuarvoissa saavat aikaan ainoastaan pieniä muutoksia ratkaisussa (Bazant ja Cedolin 1991).

3.2 Stabiiliuskriteereitä

Seuraavaksi tarkastellaan sekä epäelastisten että elastisten rakenteiden stabiiliuskriteereitä, joilla on ns. tangentiaalisen jäykkyyso-matriisin kautta yhteys luvussa 4 käsiteltävään polunseuraukseen.

3.2.1 Epäelastisen rakenteen stabiiliuskriteereitä

Bazantin ja Cedolinin (1991) mukaan differentiaalista siirtymämuutosta dq vastaava kuorman p systeemiin tekemä ulkoinen työ

$$dW = p^T dq. \quad (3-8)$$

Tätä differentiaalista työtä vastaa termodynamiikan ensimmäisessä pääsäännössä ei-eksakti differentiaali d^*W (Fetter ja Walecka 1980):

Lause 3-1. Termodynamiikan I pääsääntö.

$$dU = d^*Q + d^*W,$$

missä dU on systeemin sisäisen energian differentiaalinen muutos, d^*Q systeemin ulkopuolelta sisään virtaavan lämmön ei-eksakti differentiaalinen muutos ja d^*W ulkoisen työn ei-eksakti differentiaalinen muutos.

Bazantin ja Cedolinin (1991) mukaan systeemin sisäisesti tuottama entropian muutos

$$(dS)_{in} = dS - d^*Q/T, \quad (3-9)$$

missä dS on systeemin entropian muutos, T systeemin absoluuttinen lämpötila ja $(dS)_{out} = d^*Q/T$ ulkoisesti tuotettu entropianlisäys. Termodynamiikan toinen pääsääntö voidaan tällöin esittää seuraavassa muodossa (Bazant ja Cedolin 1991):

Lause 3-2. Termodynamiikan II pääsääntö. Systeemin tilassa tapahtuva muutos, jolle pätee

- a. $(dS)_{in} < 0$, ei voi tapahtua;
- b. $(dS)_{in} = 0$, voi tapahtua;
- c. $(dS)_{in} > 0$, täytyy tapahtua.

Lauseen 3-2 kohdan b mukainen systeemin tilan muutos säilyttää systeemin termodynaamisen tasapainon ja on määritelmän mukaan reversiibeli, jolloin $dS = d^*Q/T = (dS)_{out}$. Kohdan c mukainen systeemin tilan muutos on irreversiibeli, jolloin $dS = d^*Q/T + (dS)_{in} = (dS)_{out} + (dS)_{in}$. Termodynamiikan toisen pääsäännön 3-2 mukaan systeemille pätee siis epäyhtälö

$$dS \geq d^*Q/T, \quad (3-10)$$

joka saadaan termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön 3-1 avulla muotoon

$$TdS \geq dU - d^*W. \quad (3-11)$$

Reversiibelissä tapauksessa yhtälöissä (3-10) ja (3-11) pätee yhtäsuuruus. Fetter ja Walecka (1980) ovat esittäneet termodynamiikan toisen pääsäännön reversiibelille tapaukselle muodossa $dU = TdS - PdV$, missä P on systeemin paine ja dV systeemin tilavuuden muutos.

Bazantin ja Cedolinin (1991) mukaan termodynamiikan toisesta pääsäännöstä saadaan yleisin fysikaalisen systeemin tasapainotilan stabiiliuskriteeri, jonka mukaan systeemin tasapainotila on stabiili, jos poikkeamaa tästä tilasta ei voi tapahtua ilman muutosta systeemiin kohdistuvissa kuormissa tai systeemin reunasiirtymissä:

Lause 3-3. Systeemin tasapainotila on

- a. stabiili, jos $(\Delta S)_{in} < 0$ kaikilla δq ;
- b. kriittinen, jos $(\Delta S)_{in} = 0$ jollakin δq ;
- c. epästabiili, jos $(\Delta S)_{in} > 0$ jollakin δq .

Kun systeemin tila tulee epästabiiliksi, energia $-T(\Delta S)_{in}$ muuttuu systeemin liike-energiaksi ja lopulta lämmöksi dissipatiivisten prosessien kuten kitkan, plastisoitumisen tai murtumisen kautta (Bazant ja Cedolin 1991).

Bazantin ja Cedolinin (1991) mukaan Legendren transformaatiolla saadaan termodynaaminen tilafunktio nimeltä Helmholtzin vapaa energia:

$$F = U - TS. \quad (3-12)$$

Differentioimalla yhtälö (3-12) termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön 3-1 ja yhtälön (3-9) avulla saadaan rakenteen tilafunktioiden — sisäisen energian U ja Helmholtzin vapaan energian F — differentiaalit

$$dU = d^*W + TdS - T(dS)_{in} \text{ ja} \quad (3-13)$$

$$dF = d^*W - SdT - T(dS)_{in}. \quad (3-14)$$

Jos epäelastinen rakenne korvataan paikallisesti ns. tangentialisesti ekvivalentilla elastisella rakenteella, jonka muodonmuutokset ovat reversiibejä, niin systeemin sisäisesti tuottama entropian muutos $(dS)_{in} = 0$.

Bazant ja Cedolin (1991) ovat määritelleet konservatiivisten kuormien rakenne—kuorma-systeemille termodynaamiset tilafunktiot

$$U_G = U - \Phi \text{ ja} \quad (3-15)$$

$$F_G = F - \Phi, \quad (3-16)$$

missä U_G on rakenne—kuorma-systeemin kokonaisenergia, F_G rakenne—kuorma-systeemin Helmholtzin vapaa energia ja $-\Phi$ kuorman potentiaalienergia. Yhtälöt (3-15) ja (3-16) ovat yhtälön (3-29) potentiaalienergian Π yleistyksiä. Yhtälöitä (3-13) ja (3-14) vastaavat rakenne—kuorma-systeemin tasapainotilan differentiaalit

$$dU_G = TdS - T(dS)_{in} \text{ ja} \quad (3-17)$$

$$dF_G = -SdT - T(dS)_{in}. \quad (3-18)$$

Yhtälöistä (3-17) ja (3-18) saadaan inkrementaaliset energiat

$$-T(\Delta S)_{in} = \Delta U_G, \text{ kun } dS = 0, \text{ ja} \quad (3-19)$$

$$-T(\Delta S)_{in} = \Delta F_G, \text{ kun } dT = 0. \quad (3-20)$$

Isotermisessä tapauksessa, jossa $dT = 0$, tasapainotilan sisäisen voiman termi

$$r_i = r_{Ti} = \partial F(q, T) / \partial q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3-21)$$

Isentrooppisessa tapauksessa, jossa $dS = 0$, tasapainotilan sisäisen voiman termi

$$r_i = r_{Si} = \partial U(q, S) / \partial q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3-22)$$

Sisäisten voimien avulla tilafunktioiden inkrementeille voidaan johtaa variaatiomuodot

$$\Delta U_G = \delta^2 U_G = \frac{1}{2} \delta r_S^T \delta q - \frac{1}{2} \delta p^T \delta q \text{ ja} \quad (3-23)$$

$$\Delta F_G = \delta^2 F_G = \frac{1}{2} \delta r_T^T \delta q - \frac{1}{2} \delta p^T \delta q, \quad (3-24)$$

jotka pelkistyvät vakiokuormien tapauksessa muotoon

$$\Delta U_G = \delta^2 U_G = \frac{1}{2} \delta r_S^T \delta q \text{ ja} \quad (3-25)$$

$$\Delta F_G = \delta^2 F_G = \frac{1}{2} \delta r_T^T \delta q. \quad (3-26)$$

Jos siis epäelastinen rakenne korvataan paikallisesti tangentiaalisesti ekvivalentilla elastisella rakenteella, niin isotermisessä tapauksessa lausetta 3-3 vastaa seuraava tulos (Bazant ja Cedolin 1991):

Lause 3-4. Isotermisen kuormien osalta konservatiivisen systeemin tasapainotila on

- stabiili, jos $-T(\Delta S)_{in} = \Delta F_G = \delta^2 F_G = \frac{1}{2} \delta r_T^T \delta q - \frac{1}{2} \delta p^T \delta q > 0$ kaikilla δq ;
- kriittinen, jos $-T(\Delta S)_{in} = \Delta F_G = \delta^2 F_G = \frac{1}{2} \delta r_T^T \delta q - \frac{1}{2} \delta p^T \delta q = 0$ jollakin δq ;
- epästabiili, jos $-T(\Delta S)_{in} = \Delta F_G = \delta^2 F_G = \frac{1}{2} \delta r_T^T \delta q - \frac{1}{2} \delta p^T \delta q < 0$ jollakin δq .

Isentrooppisessa tapauksessa tilafunktio F_G korvataan tilafunktiolla U_G ja sisäinen voima r_T korvataan sisäisellä voimalla r_S . Vakiokuormien tapauksessa lause 3-4 pelkistyy seuraavaan muotoon (Bazant ja Cedolin 1991):

Lause 3-5. Jos kuormien osalta konservatiiviseen systeemiin vaikuttavat kuormat ovat vakioita, niin systeemin tasapainotila on

- stabiili, jos $-T(\Delta S)_{in} = \Delta W_r = \frac{1}{2} \delta r^T \delta q = \frac{1}{2} \delta q^T K(v) \delta q > 0$ kaikilla δq ;
- kriittinen, jos $-T(\Delta S)_{in} = \Delta W_r = \frac{1}{2} \delta r^T \delta q = \frac{1}{2} \delta q^T K(v) \delta q = 0$ jollakin δq ;
- epästabiili, jos $-T(\Delta S)_{in} = \Delta W_r = \frac{1}{2} \delta r^T \delta q = \frac{1}{2} \delta q^T K(v) \delta q < 0$ jollakin δq .

Isotermisessä tapauksessa sisäisten voimien $r = r_T$ tekemä toisen asteen työ $\Delta W_r = \Delta F_G = \delta^2 F_G = \delta^2 F$, tangentiaalinen jäykkyystermi

$$K_{ij}(v) = K_{Tij}(v) = \partial^2 F_G(q, T) / (\partial q_i \partial q_j) = \partial^2 F(q, T) / (\partial q_i \partial q_j) \quad (3-27)$$

ja $v = \delta q / \|\delta q\|_2$. Isentrooppisessa tapauksessa $\Delta W_r = \Delta U_G = \delta^2 U_G = \delta^2 U$, sisäinen voima $r = r_S$ ja tangentiaalinen jäykkyystermi

$$K_{ij}(v) = K_{Sij}(v) = \partial^2 U_G(q, S) / (\partial q_i \partial q_j) = \partial^2 U(q, S) / (\partial q_i \partial q_j). \quad (3-28)$$

Luvussa 3.2.2.2 mainitaan lauseen 3-5 erikoistapaus, joka koskee elastisen rakenteen inkrementaalista tangentiaalista jäykkyysmatriisia. Näillä lauseilla on tangentiaalisen jäykkyysmatriisin kautta yhteys luvun 4 polunseurauksen erikoispisteisiin.

3.2.2 Elastisen rakenteen stabiiliuskriteereitä

Jos halutaan selvittää elastisen ei-konservatiivisen systeemin tasapainotilan stabiilius, tarvitaan ns. dynaamisia menetelmiä, mikä tarkoittaa, että esimerkiksi kanonisesta muodosta (3-4) on ratkaistava ajan funktiona ratkaisu $y = y(t)$. Elastisen konservatiivisen systeemin tasapainotilan stabiiliuden määrittämiseen riittävät ns. energiakriteerit, mikä yksinkertaistaa stabiiliustarkastelua huomattavasti (Bazant ja Cedolin 1991).

3.2.2.1 Yleisiä energiakriteereitä

Ns. staattisilla menetelmillä — kuten lineaariseen yleistettyyn ominaisarvotehtävään johtavalla lineaarisella stabiiliusanalyysillä — saadaan selville systeemin tasapainotila ja konservatiivisten systeemien kriittinen kuorma muttei tasapainotilan laatua. Staattiset menetelmät kuuluvat ns. energiamenetelmiin, joihin kuuluu kuitenkin myös sellaisia menetelmiä, joiden avulla on mahdollista saada selville myös tasapainotilan laatu, kuten seuraava lause osoittaa (Ziegler 1968 sekä Bazant ja Cedolin 1991):

Lause 3-6. Lagrangen—Dirichlet'n stabiiliuden energiakriteeri. Oletetaan, että systeemi sisältää ainoastaan konservatiivisia ja dissipatiivisia voimia, ja sen kokonaisenergia on jatkuva. Systeemin tasapainotila on stabiili, jos systeemin potentiaalienergian arvo tasapainotilassa on aito lokaalinen minimiarvo, eli systeemin tasapainotilan potentiaalienergia on positiividefiniitti.

Käänteinen tulos ei päde, eli positiividefiniittisyyden puuttuminen ei välttämättä merkitse epästabiiliutta (Ziegler 1968 sekä Bazant ja Cedolin 1991). Seuraavat lauseet antavat kuitenkin kaksi epästabiilia tapausta lauseen 3-6 mukaiselle systeemille (Bazant ja Cedolin 1991 sekä Pignataro, Rizzi ja Luongo 1991):

Lause 3-7. Liapunovin I teoreema. Jos systeemin potentiaalienergian arvo tasapainotilassa ei ole lokaalinen minimiarvo johtuen potentiaalienergian Taylor-kehityksen toisen asteen termeistä, niin systeemin tasapainotila on epästabiili.

Lause 3-8. Liapunovin II teoreema. Jos systeemin potentiaalienergian arvo tasapainotilassa on lokaalinen maksimiarvo, joka määräytyy potentiaalienergian Taylor-kehityksen alimman asteen termeistä, niin systeemin tasapainotila on epästabiili.

Lähes kaikki rakenteen stabiiliutta koskevat tehtävät ovat epälineaarisia ja niiden ratkaiseminen perustuu usein tehtävän linearisointiin. Seuraavan lauseen perusteella linearisointi ei vaikuta stabiiliustarkasteluun (Ziegler 1968 sekä Bazant ja Cedolin 1991):

Lause 3-9. Poincaré—Liapunov. Epälineaarisen systeemin tasapainotila on stabiili, jos vastaava linearisoidun systeemin tasapainotila on stabiili.

3.2.2.2 Inkrementaalinen energiakriteeri

Lauseen 3-6 energiakriteerissä tasapainotilan q potentiaalienergian arvoa verrataan kaikkiin niihin potentiaalienergia-arvoihin, jotka vastaavat niitä tasapainotilaa infinitesimaalisen lähellä olevia epätasapainotiloja $q + \delta q$, joilla on sama kuorman arvo kuin tasapainotilalla. Sovelusten kannalta on usein käytännöllisempää verrata tutkittavan tasapainotilan ja sitä infinitesimaalisen lähellä olevien eri kuorman arvoa vastaavien tasapainotilojen potentiaalienergia-arvoja. Tätä vertailua varten stabiiliuskriteeri on esitettävä tasapainotilan sisäisten voimien tekemän työn avulla.

Bazantin ja Cedolinin (1991) mukaan elastisen kuormien osalta konservatiivisen rakenne—kuorma-systeemin potentiaalienergia

$$\Pi = U - \Phi, \quad (3-29)$$

missä sisäinen energia U on elastinen venymäenergia ja $-\Phi$ kuorman potentiaalienergia. Jos Π on sileä funktio, niin se voidaan esittää Taylorin kehitelmänä tasapainotilassa, jolloin energiainkrementti

$$\Delta\Pi = \Pi(q + \delta q, \lambda) - \Pi(q, \lambda) = \delta\Pi + \delta^2\Pi + \dots \quad (3-30)$$

Jos potentiaalienergia $\Pi(q, \lambda)$ on ainakin kahdesti derivoituva, niin tasapainotilassa, jossa määritelmän mukaan energiavariaatio $\delta\Pi = 0$, yleistettyjen siirtymien q infinitesimaalisten variaatioiden δq mukainen diskreetin systeemin energiainkrementti

$$\Delta\Pi = \delta^2\Pi + \dots = \frac{1}{2} \sum_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1, \dots, n} K_{ij} \delta q_i \delta q_j + \dots, \quad (3-31)$$

missä tangentialinen jäykkyystermi

$$K_{ij} = \partial^2\Pi / (\partial q_i \partial q_j). \quad (3-32)$$

Variaatioita $\delta^n\Pi$, $n > 2$, ei tarvitse ottaa stabiiliustarkasteluissa huomioon, jos toisen asteen variaatio $\delta^2\Pi \neq 0$.

Sen sijaan, että tarkasteltaisiin tasapainotilasta poikkeuttavia siirtymiä δq siten, että kuormitus pysyy vakiona, oletetaan, että kuormat muuttuvat yhtä aikaa variaatioiden δq_i kanssa ja ovat lisäksi yhtäsuuria kuin vastaavat sisäiset voimat, jolloin tila $q_i + \delta q_i$ on myös tasapainotila.

Potentiaalienergian osittaisderivaatat $\partial \Pi / \partial q_i$ esittävät yleistettyihin siirtymiin q_i liittyviä yleistettyjä voimia r_i , $i = 1, \dots, n$. Sisäisen voiman variaatiotermi

$$\delta r_i = \sum_{j=1, \dots, n} K_{ij} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3-33)$$

Koska $\sum_{i=1, \dots, n} r_i \delta q_i = \sum_{i=1, \dots, n} (\partial \Pi / \partial q_i) \delta q_i = \delta \Pi = 0$ tasapainotilassa q_i , $i = 1, \dots, n$, niin variaatiota δq vastaava inkrementaalinen työ on toisen asteen tarkkuudella

$$\begin{aligned} \Delta W_r &= \delta^2 W_r \\ &= \sum_{i=1, \dots, n} (r_i + \frac{1}{2} \delta r_i) \delta q_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1, \dots, n} \delta r_i \delta q_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1, \dots, n} K_{ij} \delta q_i \delta q_j \\ &= \delta^2 \Pi. \end{aligned} \quad (3-34)$$

Lauseen 3-6 mukaan tasapainotila q on stabiili, jos toisen asteen variaatio $\delta^2 \Pi > 0$. Saadaan siis sisäisten voimien tekemän työn avulla lausuttu energiakriteeri, joka on lauseen 3-5 erikoistapaus (Bazant ja Cedolin 1991):

Lause 3-10. Jos tasapainotilan inkrementaalinen työ $\delta^2 W_r$ on positiividefiniitti, niin tila on stabiili. Ts. jos tasapainotilan inkrementaalinen tangentiaalinen jäykkyysmatriisi K on positiividefiniitti, niin tila on stabiili. Tarkemmin muotoiltuna:

- Jos $\delta^2 W_r = \frac{1}{2} \delta q^T K \delta q > 0$ kaikilla kinemaattisesti luvallisilla siirtymillä δq , niin tasapainotila on stabiili.
- Jos $\delta^2 W_r = \frac{1}{2} \delta q^T K \delta q = 0$ jollakin kinemaattisesti luvallisella siirtymällä δq , niin tasapainotila on kriittinen.
- Jos $\delta^2 W_r = \frac{1}{2} \delta q^T K \delta q < 0$ jollakin kinemaattisesti luvallisella siirtymällä δq , niin tasapainotila on epästabiili.

Systeemin kinemaattisesti luvallisella siirtymällä tarkoitetaan sellaista siirtymää, jonka seurauksena systeemin tila on kinemaattisesti luvallinen eli systeemin kinemaattisten eli geometristen rajoitteiden mukainen (vrt. luvut 3.1.1 ja 3.1.2).

Koska elastisen rakenteen tangentiaalinen jäykkyysmatriisi on symmetrinen, niin lauseen 3-10 kriittisen tasapainotilan ehto b voidaan lausua muodossa

$$\det K = 0 \quad (3-35)$$

eli tangentiaalisella jäykkyysmatriisilla on oltava ominaisarvo nolla, jolloin

$$K\delta q = 0, \quad (3-36)$$

missä ominaisvektori $\delta q \neq 0$ antaa suunnan rakenteen jälkikriittiselle käyttäytymiselle (Bazant ja Cedolin 1991). Kriittisen tasapainotilan ehdot (3-35) ja (3-36) tulevat esille myös luvun 4 polunseurauksen käänne- ja bifurkaatiopisteiden yhteydessä.

3.3 Jälkikriittinen käyttäytyminen

Pacoste (1993) on soveltanut katastrofiteoriaa (Poston ja Stewart 1981 sekä Arnold 1986) elastisten rakenteiden stabiiliuden tutkimiseen. Bazantin ja Cedolinin (1991) mukaan katastrofiteoriaa voidaan soveltaa vain ns. polkuriippumattomille systeemeille, joiden käyttäytyminen lähellä kriittistä pistettä on kuvattavissa potentiaalipinnalla. Polkuriippumattoman systeemin tangentiaalinen jäykkyysmatriisi on symmetrinen kun taas polkuriippuvaisen systeemin tangentiaalinen jäykkyysmatriisi on epäsymmetrinen. Epäelastiset rakenteet ovat polkuriippuvaisia, joten niihin katastrofiteoriaa ei voida soveltaa. Seuraavaksi mainitaan systeemin jälkikriittisen käyttäytymisen osalta lähinnä joitakin epäelastisen ja elastisen rakenteen eroja.

3.3.1 Epäelastisen rakenteen jälkikriittinen käyttäytyminen

Bazant ja Cedolin (1991) ovat esittäneet joitakin epäelastisen rakenteen jälkikriittistä käyttäytymistä koskevia tuloksia, joissa bifurkaatiopisteellä tarkoitetaan kriittistä pistettä, jossa systeemin tasapainotilaa kuvaava ratkaisu haarautuu kahteen tai useampaan osaan. Bifurkaatiopiste on määritelty täsmällisemmin luvussa 4.4.6.

Lause 3-11. Epäelastisen rakenteen stabiili tasapainopolku on kaikkien bifurkaatiopisteestä lähtevien tasapainopolkujen joukosta se, jolla sisäinen entropia $(\Delta S)_{in}$ maksimoituu.

Stabiilin jälkikriittisen tasapainopolun on luonnollisesti koostuttava stabiileista tasapainotiloista. Se, että jälkikriittinen tasapainopolku koostuu stabiileista tiloista, ei epäelastisen rakenteen tapauksessa kuitenkaan takaa sitä, että jälkikriittinen tasapainopolku olisi stabiili tasapainopolku. Seuraavista lauseista nimittäin nähdään, että epäelastisen rakenteen stabiilin jälkikriittisen tasapainopolun on toteutettava myös lauseen 3-11 antama vahvempi kriteeri. Erityisesti seuraavat lauseet eivät päde elastisessa tapauksessa (Bazant ja Cedolin 1991):

Lause 3-12. Epäelastisen rakenteen kaikki bifurkaatiopisteestä lähtevät jälkikriittiset tasapainopolut voivat koostua stabiileista tasapainotiloista.

Lause 3-13. Epäelastisella rakenteella voi olla kaksi tai äärettömän monta jälkikriittistä tasapainopolkua, jotka koostuvat stabiileista tasapainotiloista ja joiden suunnat ovat äärettömän lähellä toisiaan.

Lause 3-14. Epäelastisen rakenteen stabiili tasapainotila, joka on äärettömän lähellä bifurkaatiopistettä, voi olla itsekin bifurkaatiopiste, eli tasapainopolku voi koostua äärettömästä määrästä bifurkaatiopisteitä, jotka ovat äärettömän lähellä toisiaan.

Epäelastisen rakenteen stabiilin jälkikriittisen tasapainopolun on siis sekä koostuttava stabiileista tiloista että maksimoitava systeemin sisäinen entropia.

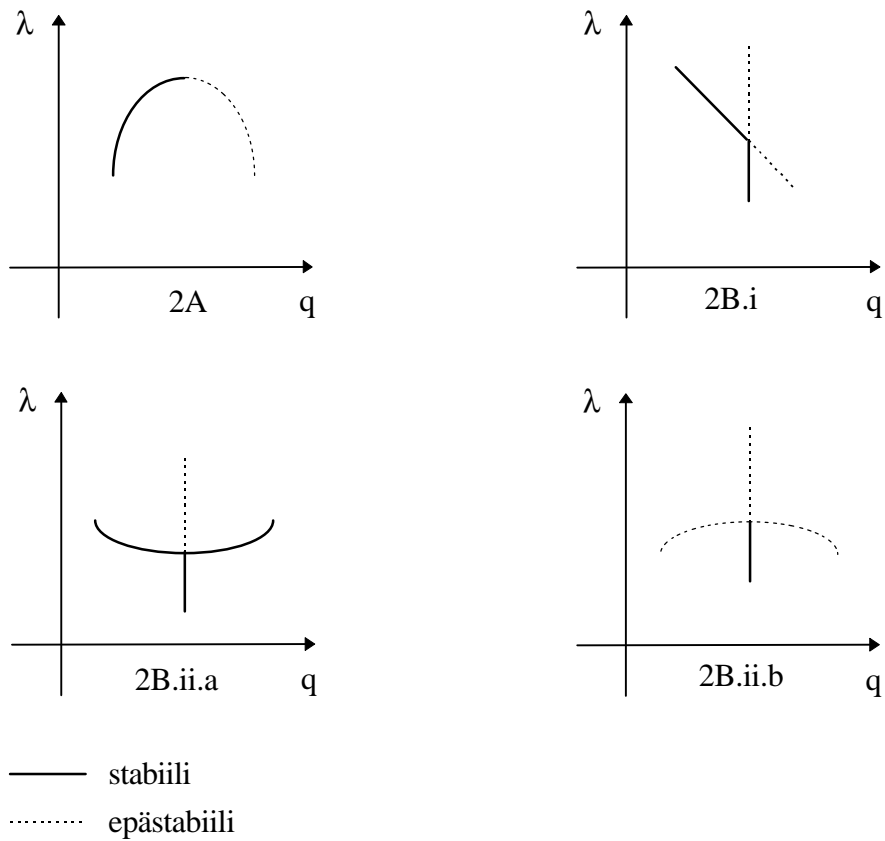
3.3.2 Elastisen rakenteen jälkikriittinen käyttäytyminen

Myös elastisen rakenteen stabiilin jälkikriittisen tasapainopolun on luonnollisesti koostuttava stabiileista tasapainotiloista. Se, että jälkikriittinen tasapainopolku koostuu stabiileista tiloista, on elastisen rakenteen tapauksessa myös riittävä ehto sille, että jälkikriittinen tasapainopolku on stabiili tasapainopolku. Ehto on elastisen systeemin tapauksessa ekvivalentti lauseen 3-11 entropian maksimointia koskevan ehdon kanssa (Bazant ja Cedolin 1991).

Elastisen rakenteen alunperin stabiili tasapainopolku voi muuttua epästabiiliksi joko raja- eli käännepisteen ohituksen tai bifurkaatiopisteen haarautumisen kautta (kuva 3-1). Thompson ja Hunt (1973) sekä Bazant ja Cedolin (1991) ovat jaotelleet elastisten rakenteiden kriittisen tasapainotilan jälkeisen käyttäytymisen seuraavalla tavalla:

1. Dynaaminen stabiiliuden muutos
 - energiamenetelmät eivät ole riittäviä
2. Staattinen stabiiliuden muutos
 - on olemassa potentiaalienergia
 - energiamenetelmät ovat riittäviä
 - A. Rajapisteen stabiiliuden muutos
 - stabiili/epästabiili
 - ei häiriöaltis
 - B. Bifurkaatio
 - i. Asymmetrinen
 - stabiili/epästabiili
 - häiriöaltis
 - ii. Symmetrinen
 - a. Stabiili
 - ei häiriöaltis
 - b. Epästabiili
 - häiriöaltis

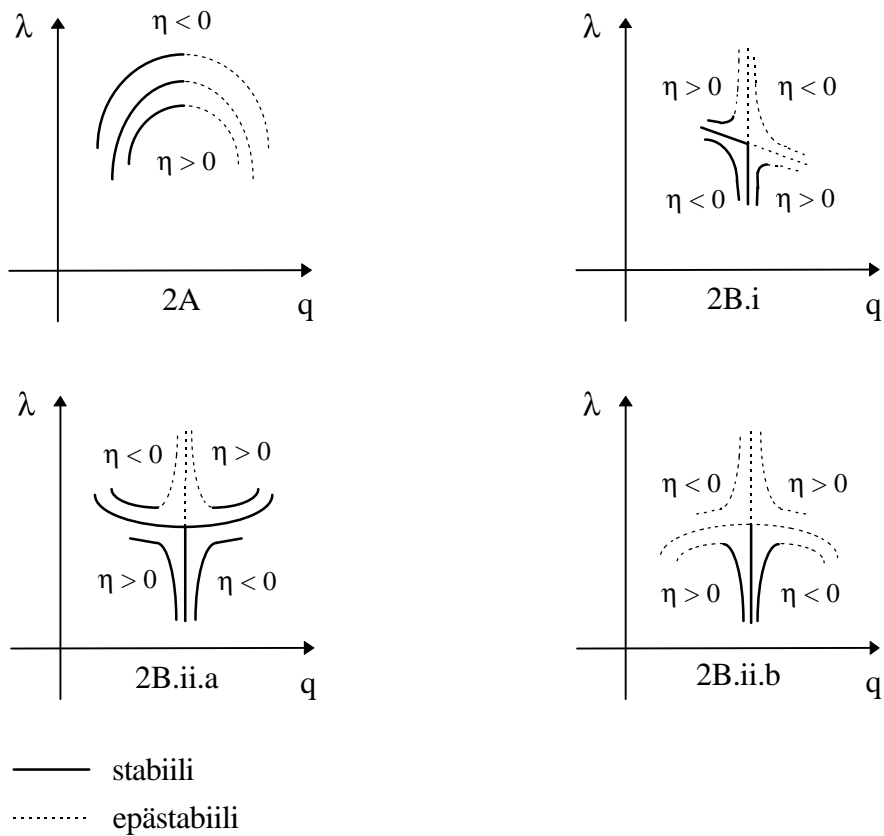
Kuvassa 3-1 on esitetty tyypiesimerkit tasapainopoluista erikoispisteiden ympäristössä yhden siirtymävapausasteen tapauksessa. Bifurkaatiolla tarkoitetaan ratkaisun haarautumista kriittisessä pisteessä ja rajapisteen stabiiliuden muutoksella esimerkiksi ns. läpilyöntiä (snap-through). Näitä erikoispisteitä on käsitelty tarkemmin luvun 4 polunseurauksen yhteydessä. Symmetrisen bifurkaation jälkikriittinen tasapainopolku on bifurkaatiopisteen ympäristössä siirtymän suhteen symmetrinen ja asymmetrisen bifurkaation tasapainopolku vastaavasti asymmetrinen. Häiriöalttiutta on käsitelty seuraavassa luvussa.



Kuva 3-1. Siirtymä—kuorma-käyrät raja- ja bifurkaatiopisteiden ympäristössä.

3.3.3 Rakenteen häiriöalttius

Bazantin ja Cedolinin (1991) mukaan rakenne on häiriöalttis, jos suurin rakenteen tasapainopolulla saavutettava kuorma pienenee, kun rakenteeseen (esim. rakenteen geometriaan) aiheutetaan pienikin muutos. Kuvassa 3-2 on esitetty tyypiesimerkit tasapainopolun muutoksista häiriöparametrin η suhteen erikoispisteiden ympäristössä yhden siirtymävapausasteen tapauksessa.



Kuva 3-2. Siirtymä—kuorma-käyrän riippuvuus häiriöparametrasta.

Yhtälön (3-36) mukaan elastisen rakenteen kriittisessä tasapainotilassa tangentialisella jäykkyydsmatriisilla on oltava ominaisarvo nolla. Jos kriittinen ominaisarvo on moninkertainen, rakenteen jälkikriittinen käyttäytyminen määräytyy vastaavien ominaisvektorien yhteisvaikutuksesta. Usein esimerkiksi ohutseinäisten rakenteiden tapauksessa kyseessä on hyvin häiriöaltis rakenne. Vaikka kriittinen ominaisarvo ei olisikaan moninkertainen, ja vaikka kriittisen ominaisarvon lähellä ei olisi muita ominaisarvoja, niin rakenteen ominaismuotojen yhteisvaikutuksesta saattaa joissakin tapauksissa seurata hyvin häiriöaltista jälkikriittistä käyttäytymistä (Bazant ja Cedolin 1991).

Bazant ja Cedolin (1991) ovat esitelleet rakenteiden häiriöalttiutta ja ominaismuotojen yhteisvaikutusta Koiterin teoriaan perustuen. Mm. Poston ja Stewart (1981), Hunt (1983), Thompson ja Hunt (1984), Gáspár (1983) sekä Pacoste (1993) ovat käyttäneet katastrofiteorian menetelmiä eli hiukan yleisempää lähestymistapaa. Häiriöparametrin vaikutuksen matemaattista teoriaa ovat käsitelleet mm. Keener ja Keller (1973) sekä Keener (1974).

4 Numeerinen polunseuraus

Tässä luvussa tarkastellaan sekä numeeristen polunseurausmenetelmien matemaattisia perusteita että niiden sovelluksiin ja ohjelmointiin liittyviä näkökohtia. Teoreettisten tarkastelujen tarkoitus on antaa kuva ratkaisumenetelmien ominaisuuksista — sekä vahvuuksista että heikkouksista — jotka tulevat usein esille ratkaisumenetelmiä ohjelmoitaessa ja laskentatehtäviä ratkaistaessa. Pääpaino on ns. ennuste—korjaus-menetelmillä, joita käytetään erityisesti rakenteiden mekaniikan sovelluksissa. Kouhia (1999) on esitellyt lyhyesti epälineaaristen algebrallisten yhtälösystemien ratkaisemisen pitkää historiaa.

4.1 Epälineaarinen ominaisarvotehtävä

Kellerin ja Antmanin (1969) mukaan epälineaarilla ominaisarvotehtävällä tarkoitetaan ratkaisujen etsimistä epälineaarille yhtälölle

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (4-1)$$

missä epälineaarinen operaattori F riippuu parametrilla λ ja operoi tuntematonta muuttujaa x . Yleensä halutaan tietää, onko yhtälöllä (4-1) ratkaisu tai ratkaisuja jollakin tietyllä parametrin arvolla, sekä miten ratkaisujen olemassaolo ja lukumäärä riippuvat parametrilla λ . Jos jokin yhtälön (4-1) ratkaisu haarautuu kahdeksi tai useammaksi ratkaisuksi, kun parametri λ ohittaa kriittisen arvon, on kyseessä ns. bifurkaatio.

Bifurkaatiota voidaan havainnollistaa tarkastelemalla lineaarista ominaisarvotehtävää

$$Ax = \lambda x, \quad (4-2)$$

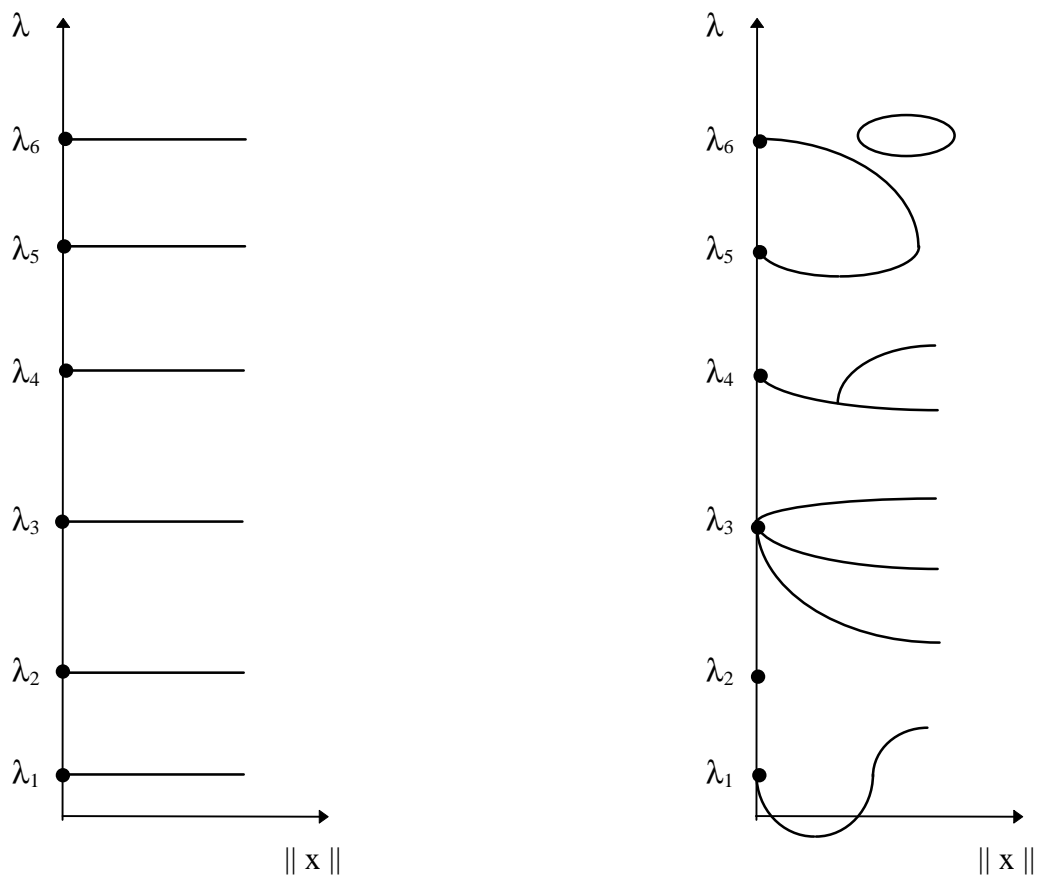
missä A on lineaarisen normiavaruuden lineaarinen operaattori ja λ reaalityyppinen luku. Yhtälöllä (4-2) on ns. triviaaliratkaisu $x = x_0 = 0$ kaikilla parametriarvoilla λ . Olkoot $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ operaattorin A yksinkertaiset ominaisarvot ja x_1, x_2, \dots vastaavat ominaisvektorit siten, että

$$Ax_j = \lambda_j x_j \text{ ja } \|x_j\| = 1, j = 1, 2, \dots \quad (4-3)$$

Yhtälön (4-2) muut ratkaisut ovat tällöin

$$x = cx_j, j = 1, 2, \dots, \quad (4-4)$$

missä c on reaalityyppinen luku. Triviaaliratkaisun normi $\|x_0\| = 0$ ja ratkaisun (4-4) normi $\|x\| = c$. Kuvassa 4-1 (vasen puoli) on havainnollistettu triviaaliratkaisun $x_0 = 0$ haarautumista yhtälön (4-2) bifurkaatiopisteissä $(0, \lambda_j), j = 1, \dots, 6$.



Kuva 4-1. Lineaarisen ja epälineaarisen ominaisarvotehtävän ratkaisuhaarat.

Olkoon lineaarinen ominaisarvotehtävä (4-2) epälineaarisen ominaisarvotehtävän (4-1) lineaarisatio. Kuvan 4-1 bifurkaatiogrammissa (oikea puoli) on esitetty erilaisia vaihtoehtoja yhtälön (4-1) ratkaisujen käyttäytymiselle:

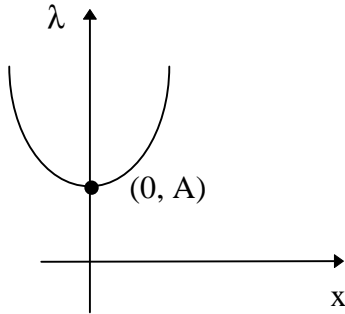
1. Kaarevat ratkaisuhaarat.
2. Ei haarautuvaa ratkaisua.
3. Useita ratkaisuhaaroja.
4. Sekundaarinen ratkaisuhaara.
5. Ratkaisuhaarojen yhdistyminen.
6. Ratkaisuja, jotka eivät haaraudu triviaaliratkaisusta.

Yksinkertainen esimerkki triviaaliratkaisun haarautumisesta saadaan yhtälöstä

$$F(x, \lambda) = Ax + cx^3 - \lambda x = 0, \quad (4-5)$$

missä A , x , c ja λ ovat reaalityyppisiä lukuja (Mittelmann ja Weber 1980). Yhtälöllä (4-5) on triviaaliratkaisu $x = 0$ kaikilla parametrisilla λ , ja jos $c > 0$, niin triviaaliratkaisusta haarautuu kaksi ratkaisua (kuva 4-2):

$$x = \pm ((\lambda - A)/c)^{1/2}. \quad (4-6)$$



Kuva 4-2. Epälineaarisen ominaisarvotehtävän ratkaisun haarautuminen.

Yleisessä bifurkaatioteoriassa $F : X \times K \rightarrow Y$, missä X , Y ja K ovat Banach-avaruuksia (Keller 1977). Numeerisissa tarkasteluissa yleensä $X = \mathbb{R}^n = Y$ ja $K = \mathbb{R}$.

Rakenteiden mekaniikan tehtävät saatetaan äärellisulotteisiksi usein elementtimenetelmän avulla, jolloin päädytään rakenteen ulkoisen kuorman $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja sisäisen voiman $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ väliseen tasapainoyhtälöön

$$p(q, \lambda) = r(q), \quad (4-7)$$

missä $q \in \mathbb{R}^n$ on rakenteen siirtymä ja $\lambda \in \mathbb{R}$ kuormakerroin. Jos ulkoinen kuorma p on riippumaton siirtymästä q ja kuormakertoimella λ suoraan verrannollinen referenssikuormaan $p_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^n$, niin tasapainoyhtälö (4-7) voidaan esittää epälineaarisen ominaisarvotehtävänä (Kouhia ja Mikkola 1995)

$$f(q, \lambda) = \lambda p_{\text{ref}} - r(q) = 0, \quad (4-8)$$

missä kuvauksen $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ oletetaan olevan ainakin kerran derivoituva.

Seuraavissa luvuissa käsitellään epälineaarisen ominaisarvotehtävän (4-1) numeerista ratkaisemista. Silloin, kun kyseessä on menetelmä, jota käytetään tyypillisesti nimenomaan rakenteiden mekaniikan sovelluksissa, menetelmien muotoilussa käytetään tasapainoyhtälöä (4-8).

4.2 Numeerisen polunseurauksen perusteet

Tämä luku perustuu pääasiassa Allgowerin ja GeorGIN (1990) esitykseen. Muut viitteet on mainittu erikseen asiayhteydessään. Tyypillinen ongelma, jonka ratkaisemiseksi voidaan käyttää polunseuraus-, homotopia- tai upotusmenetelmiä, on seuraavaa muotoa: On löydettävä piste $x \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa yhtälön

$$F(x) = 0, \quad (4-9)$$

missä kuvaus $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on sileä eli tarvittavan monta kertaa jatkuvasti derivoituva.

Jos yhtälön (4-9) ratkaisulle eli kuvauksen F nollakohdalle $x = x^* \in \mathbb{R}^n$ on olemassa riittävän hyvä likiarvo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tarkempaa ratkaisua voidaan hakea Newton-tyyppisillä iteraatioilla

$$x_{i+1} = x_i - A_i^{-1} F(x_i), \quad (4-10)$$

missä $i = 0, 1, \dots$ ja A_i on kuvauksen F derivaatan $F'(x_i)$ sopiva likiarvo.

Jos yhtälön (4-9) ratkaisulle ei ole olemassa niin hyvää likiarvoa, että iteraatio (4-10) suppenisi kohti tarkkaa ratkaisua x^* , niin ratkaisu x^* voidaan etsiä polunseurausmenetelmällä: Ensin määritellään homotopia $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ siten, että

$$H(x, 1) = G(x) \text{ ja} \quad (4-11)$$

$$H(x, 0) = F(x), \quad (4-12)$$

missä $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on sellainen sileä kuvaus, jonka nollakohdat tunnetaan. Usein homotopiaksi H valitaan ns. konvekssi homotopia

$$H(x, \lambda) = \lambda G(x) + (1 - \lambda)F(x). \quad (4-13)$$

Jos $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tiedetään kuvauksen G nollakohdaksi, kuvauksen F nollakohta x^* etsitään seuraamalla homotopian H implisiittisesti määrittelemää — s -parametrin s mukana lähtöpiisteestä $(x_1, 1)$ ratkaisupisteeseen $(x^*, 0)$ kulkevaa —ratkaisukäyrää $c(s) \in H^{-1}(0)$. Toinen tyypillinen valinta homotopiaksi H on ns. globaalinen homotopia

$$H(x, \lambda) = F(x) - \lambda F(x_1), \quad (4-14)$$

missä $x_1 \in \mathbb{R}^n$.

Usein ongelman asettelu voi olla jo valmiiksi samaa muotoa kuin edellä esitetty homotopian H määrittelemä polunseurausongelma: On siis löydettävä $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, joka toteuttaa yhtälön

$$H(z) = 0, \quad (4-15)$$

missä kuvaus $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ on sileä. Esimerkiksi useat virtausmekaniikan tai rakenteiden mekaniikan ongelmat kuten tasapainoyhtälö (4-8) voidaan esittää tässä muodossa, jolloin $z = (x, \lambda)$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$ on tehtävän asettelusta seuraava luonnollinen fysikaalisesti tulkittavissa oleva parametri —esimerkiksi Reynoldin luku tai kuormakerroin— ja $x \in \mathbb{R}^n$ esimerkiksi virtaus- tai siirtymäkenttä (Huitfeldt ja Ruhe 1990).

Jotta voidaan puhua yhtälön $H = 0$ ratkaisukäyrän seuraamisesta, täytyy löytää vastaus ainakin seuraaviin kysymyksiin:

1. Millä ehdoilla ratkaisukäyrä $c(s) \in H^{-1}(0)$ on olemassa ja sileä?
2. Jos ratkaisukäyrä $c(s) \in H^{-1}(0)$ on olemassa ja sileä, niin millä ehdoilla ratkaisupiste $(x^*, 0)$ saavutetaan äärellisellä polkuparametrin s arvolla?
3. Miten sileää ratkaisukäyrää $c(s) \in H^{-1}(0)$ voidaan seurata numeerisesti?

Ensimmäistä kysymystä käsitellään pääasiassa luvussa 4.2 ja siihen saadaan vastaus implisiittifunktioteoreeman avulla. Toinen kysymys liittyy epälineaarisen analyysin olemassaololauseisiin ja asteteoriaan. Allgower ja Georg (1990) ovat käsitelleet näitä aihepiirejä erityisesti numeeristen tapausten osalta. Luvussa 4.4 keskitytään lähinnä kolmanteen kysymykseen.

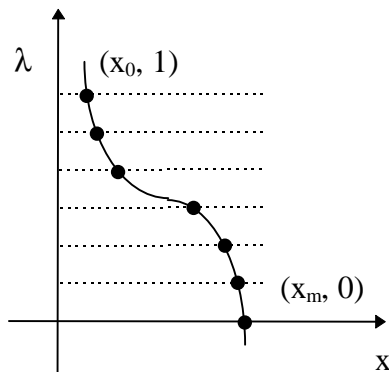
Tässä työssä käsitellään pääasiassa ns. ennuste—korjaus-menetelmiä (predictor-corrector methods), joissa otetaan huomioon, että ratkaisukäyrä c koostuu kuvauksen H nollakohdistista, jolloin voidaan käyttää hyväksi kuvauksen H lokaalisesti kontraktiivisia ominaisuuksia suhteessa Newton-tyyppisiin iterointimenetelmiin. Toista ratkaisukäyrän seuraukseen käytettävää menetelmätyyppiä edustavat ns. paloittain lineaariset menetelmät (piecewise linear methods), joita käsitellään vain lyhyesti luvussa 4.3. Nämä menetelmät eivät vaadi kuvauksen H sileyttä, joten niitä voidaan ainakin periaatteessa soveltaa laajemmin kuin ennuste—korjaus-menetelmiä, joita pidetään kuitenkin tehokkaampina menetelminä —erityisesti silloin, kun ratkaistavan tehtävän dimensio n on suuri.

4.2.1 Upotusmenetelmät ja käännepiste

Jos yhtälön (4-15) implisiittisesti määrittelemä ratkaisukäyrä c voidaan parametrisoida parametrin λ suhteen, voidaan käyttää klassisia upotusmenetelmiä, jotka voidaan esittää parametrisoinnista $\lambda = 1$ arvoon $\lambda = 0$ ratkaisukäyrää c seuraavan algoritmin muodossa. Algoritmin avulla saadaan ratkaisukäyrän c likiarvopisteet $(x_1, \lambda_1), \dots, (x_m, \lambda_m)$ (kuva 4-3).

Algoritmi 4-1. Upotusmenetelmät.

1. Valitaan lähtöpiste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ siten, että $H(x_0, 1) = 0$.
2. Valitaan kokonaisluku $m > 0$ ja asetetaan parametrimuutos: $\Delta\lambda = 1/m$.
3. Suoritetaan kohdat 3a, 3b ja 3c askelille $i = 1, \dots, m$:
 - 3a. Lähtöarvo: $x_i^{(0)} = x_{i-1}$
 - 3b. Askeleen parametriarvo: $\lambda_i = 1 - i\Delta\lambda$
 - 3c. Ratkaistaan iteratiivisesti parametriarvoa λ_i vastaava ratkaisu x_i yhtälöstä $H(x_i, \lambda_i) = 0$ käyttäen lähtöarvoa $x_i^{(0)}$.



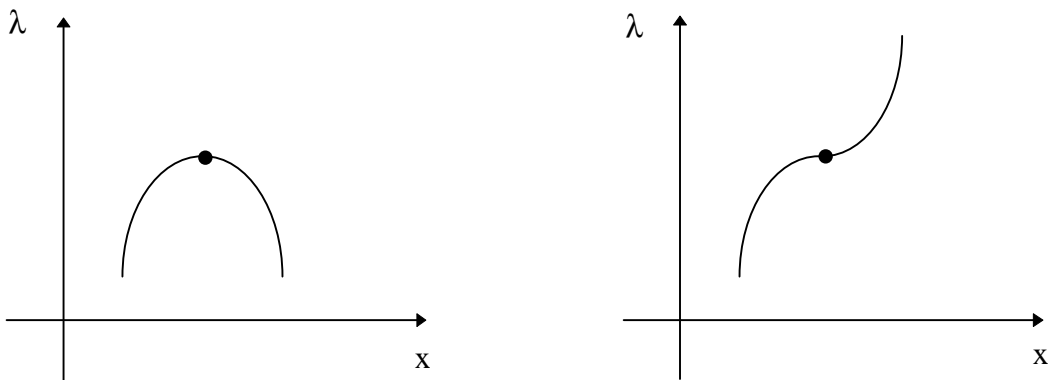
Kuva 4-3. Polunseurauksen kulku upotusmenetelmillä.

Jos algoritmin 4-1 kohdan 1 kokonaisluku m on riittävän suuri eli parametrimuutos $\Delta\lambda$ on riittävän pieni, niin yleensä kohdan 3a lähtöarvo $x_i^{(0)}$ on niin lähellä kohdan 3c ratkaisua x_i , että iterointi suppenee kohti ratkaisua kaikilla askelilla $i = 1, \dots, m$, ja viimein saavutetaan parametriarvoa $\lambda = \lambda_m = 0$ vastaava ratkaisu x_m . Joissakin tapauksissa ratkaisun löytäminen saattaa kuitenkin vaatia hyvin pienen parametrimuutoksen $\Delta\lambda$ eli vastaavasti hyvin suuren arvon kokonaisluvulle m . Tämä parametrivälin jakoon perustuva menetelmä ei kuitenkaan toimi, jos ratkaisukäyrällä c on ns. käänne piste parametrin λ suhteen jollakin parametriarvolla $\lambda = \lambda_{cr} < 1$. Käänne pisteelle voidaan antaa seuraava määritelmä (Seydel 1994 sekä Huitfeldt ja Ruhe 1990):

Määritelmä 4-1. Käännepiste- eli rajapiste. Käytetään merkintöjä $H_x \equiv \partial H / \partial x$ ja $H_\lambda \equiv \partial H / \partial \lambda$. Piste (x_{kp}, λ_{kp}) on yhtälön $H(x, \lambda) = 0$ käänne piste parametrin λ suhteen, jos

- A. $H(x_{kp}, \lambda_{kp}) = 0$;
- B. $\text{rank } H_x(x_{kp}, \lambda_{kp}) = n - 1$;
- C. $H_\lambda(x_{kp}, \lambda_{kp}) \notin \text{range } H_x(x_{kp}, \lambda_{kp})$ eli $\text{rank } [H_x(x_{kp}, \lambda_{kp}) \ H_\lambda(x_{kp}, \lambda_{kp})] = n$ ja
- D. on olemassa parametrisaatio $x = x(\sigma)$, $\lambda = \lambda(\sigma)$ siten, että $x(\sigma_{kp}) = x_{kp}$, $\lambda(\sigma_{kp}) = \lambda_{kp}$ ja $(d^2\lambda/d\sigma^2)(\sigma_{kp}) \neq 0$.

Ehdot A, B ja C takaavat, että ratkaisukäyrän c tangentti (x, λ) -avaruudessa on kohtisuorassa λ -akselia vastaan. Ehto D sulkee pois ns. hystereesipisteen (kuva 4-4). Esimerkiksi rakenteiden mekaniikkaan liittyvissä tehtävissä käännepiste on merkki rakenteen stabiiliuden muutoksesta, joten sillä on sovellusten kannalta tärkeä merkitys (ks. luku 3.3.2).



Kuva 4-4. Käännepiste ja hystereesipiste.

4.2.2 Käännepisteen ohittaminen uudelleenparametrisoinnilla

Edellä kuvattujen upotusmenetelmien yksinkertaisen parametrivalinnan aiheuttamat heikkoudet voidaan välttää valitsemalla parametrin λ sijasta ratkaisukäyrälle c luonnollisempi polkuparametri kaarenpituus s . Numeerisissa tarkasteluissa kaarenpituudelle voidaan käyttää sopivaa likiarvoa eli ns. pseudokaarenpituutta. Yhtälö

$$H(c(s)) = 0 \tag{4-16}$$

määrittää tällöin implisiittisesti ratkaisukäyrän $c(s)$, jonka polkuparametrina on kaarenpituus s . Yhtälö (4-16) voidaan derivoida kaarenpituuden s suhteen, jolloin merkitsemällä $c' \equiv dc/ds$ saadaan yhtälöt

$$H'(c)c' = 0, \tag{4-17}$$

$$c(0) = (x_1, 1) \text{ ja} \tag{4-18}$$

$$\|c'\|_2 = 1. \quad (4-19)$$

Yhtälöiden (4-17), (4-18) ja (4-19) ratkaisemiseen voidaan käyttää alkuarvotehtävien numeerisia ratkaisumenetelmiä, mutta tehokkaampia menetelmiä saadaan aikaan ottamalla huomioon, että ratkaisukäyrä c koostuu kuvauksen H nollakohdista, jolloin voidaan käyttää hyväksi kuvauksen H lokaalisesti kontraktiivisia ominaisuuksia suhteessa Newton-tyyppisiin iterointimenetelmiin. Yhtälö (4-17) voidaan nimittäin integroida likimääräisesti, jolloin saadaan aikaan hyvä ratkaisuenuste, johon voidaan soveltaa Newton-tyyppistä iterointia. Tämä periaate on pohjana luvussa 4.2 käsiteltäville ennuste—korjaus-menetelmille.

Kuvauksella H oletetaan olevan seuraavat ominaisuudet:

Oletus 4-1. Kuvaus $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ on sileä.

Oletus 4-2. On olemassa piste $u_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ siten, että

A. $H(u_0) = 0$ ja

B. Jacobin matriisilla $H'(u_0)$ on maksimaalinen rangi eli $\text{rank } H'(u_0) = n$.

Koska $\dim \text{range } H'(u_0) = \text{rank } H'(u_0) = n$ ja matriisin $H'(u_0)$ kuva-avaruus on sen pystyvektorien $h_{(i)}$, $i = 1, \dots, n + 1$, viritelmä eli $\text{range } H'(u_0) = \text{span} \{h_{(i)} \mid i = 1, \dots, n + 1\}$, voidaan valita indeksi j siten, että $\dim \text{range } H_j'(u_0) = \dim \text{span} \{h_{(i)} \mid i = 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n + 1\} = n$, missä $H_j'(u_0)$ on siis matriisi, joka saadaan ottamalla matriisista $H'(u_0)$ j :s pystyvektori pois. Oletusten 4-1 ja 4-2 perusteella indeksi j voidaan siis valita siten, että matriisi $H_j'(u_0)$ on ei-singulaarinen. Implisiittifunktioteoreeman (Rudin 1976) mukaan ratkaisujoukko $H^{-1}(0)$ voidaan parametrisoida lokaalisesti j :nnen koordinaatin suhteen. Uudelleenparametrisoinnilla saadaan seuraava lemma:

Lemma 4-1. Jos oletukset 4-1 ja 4-2 ovat voimassa, on olemassa sileä käyrä $c(a) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nollan sisältävältä avoimelta väliltä J siten, että kaikilla $a \in J$ pätee:

a. $c(0) = u_0$,

b. $H(c(a)) = 0$,

c. $\text{rank } H'(c(a)) = n$ ja

d. $c'(a) \neq 0$.

Polkuparametrina voidaan käyttää myös kaarenpituutta s , jolle pätee

$$ds = \left\{ \sum_{i=1, \dots, n+1} (dc_{(i)}(a)/da)^2 \right\}^{1/2} da, \quad (4-20)$$

missä $c_{(i)}$ on ratkaisukäyrän c i :s koordinaatti. Korvaamalla parametri a kaarenpituudella s saadaan

$$\|c'\|_2 = 1 \quad (4-21)$$

kaarenpituutta s vastaavalla lemman 4-1 mukaisella parametrivälillä. Koska laajennettu Jacobin matriisi

$$\begin{pmatrix} H'(c(s)) \\ c'(s)^T \end{pmatrix} \quad (4-22)$$

on ei-singulaarinen kaarenpituutta vastaavalla parametrivälillä, sen etumerkki säilyy kyseisellä välillä vakiona, joten ratkaisukäyrä c voidaan suunnistaa laajennetun Jacobin matriisin determinantin etumerkin mukaan. Yhteenvetona saadaan seuraava lemma:

Lemma 4-2. Jos

- A. $c(s)$ on positiivisesti suunnistettu kaarenpituuden s mukaan parametrisoitu ratkaisukäyrä,
- B. $c(0) = u_0$ ja
- C. $H(c(s)) = 0$,

kun J on nollan sisältävä avoin väli sekä $s \in J$, niin silloin tangentti c' toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $s \in J$:

- a. $H'(c(s))c' = 0$,
- b. $\|c'\|_2 = 1$ ja
- c. $\det \begin{pmatrix} H'(c(s)) \\ c'(s)^T \end{pmatrix} > 0$

Ehdot a, b ja c määräävät yksikäsitteisesti tangentin c' , joten tangentille voidaan esittää seuraava määritelmä:

Määritelmä 4-2. Tangenttivektori. Jos A on $n \times (n + 1)$ -matriisi ja $\text{rank } A = n$, niin vektoria $t = t(A) \in \mathbb{R}^{n+1}$, jolle pätee

- A. $At = 0$,
- B. $\|t\|_2 = 1$ ja
- C. $\det \begin{pmatrix} A \\ t^T \end{pmatrix} > 0$,

sanotaan kuvauksen A indusoimaksi tangenttivektoriksi, joka on yksikäsitteinen.

Implisiittifunktioteoreemasta (Rudin 1976) seuraa myös seuraava tangenttikuvauksen sileyden takaava lemma:

Lemma 4-3. Jos M on kaikkien $n \times (n + 1)$ -matriisien, joilla on maksimaalinen rangi, indusoimien tangenttivektoreiden joukko, niin M on avoin ja kuvaus $A \mapsto t(A)$, $A \in M$, on sileä.

Lemman 4-2 mukaan ratkaisukäyrällä c on siis polkuparametrin s suhteen derivaatta c' , joka on Jacobin matriisin $H'(c(s))$ indusoima määritelmän 4-2 mukainen tangenttivektori. Sama asia voidaan sanoa toisin määrittelemällä ratkaisukäyrä c alkuarvotehtävän ratkaisuna.

Määritelmä 4-3. Alkuarvotehtävämäärittely. Käyrä c on seuraavan alkuarvotehtävän ratkaisu:

A. $u' = t(H'(u))$ ja

B. $u(0) = u_0$,

missä kuvaus H toteuttaa oletukset 4-1 ja 4-2 sekä tangentti t määritelmän 4-2.

Uudelleenparametrisointi voidaan esittää myös lisäämällä yhtälön (4-15) rinnalle rajoiteyhtälö

$$g(u, s) = 0, \quad (4-23)$$

missä $g : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $u = (x, \lambda)$, $x \in \mathbb{R}^n$ sekä λ ja $s \in \mathbb{R}$ (Seydel 1994). Yhtälön (4-20) määrittelemän kaarenpituuden $ds = \{\sum_{i=1, \dots, n+1} du_{(i)}^2\}^{1/2}$ mukainen parametrisointi vastaa rajoiteyhtälöä

$$0 = g(x, \lambda, s) = \sum_{i=1, \dots, n} (dx_{(i)}/ds)^2 + (d\lambda/ds)^2 - 1, \quad (4-24)$$

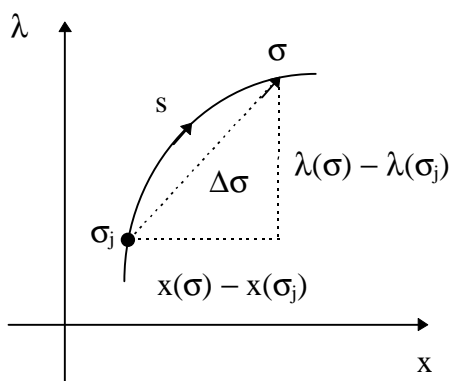
jolle saadaan likiarvovastine eli pseudokaarenpituutta σ vastaava rajoiteyhtälö

$$0 = g_j(u, \sigma) = \sum_{i=1, \dots, n} (x_{(i)} - x_{(i)}(\sigma_j))^2 + ((\lambda - \lambda(\sigma_j))^2 - (\sigma - \sigma_j)^2). \quad (4-25)$$

Jos $(x(\sigma_j), \lambda(\sigma_j))$ on viimeisin laskettu ratkaisukäyrän piste, niin yhtälöt (4-15) ja (4-25) määrittelevät pseudokaarenpituuden muutosta

$$\Delta\sigma = \sigma - \sigma_j \quad (4-26)$$

vastaavan seuraavan ratkaisun $(x(\sigma), \lambda(\sigma))$ (kuva 4-5). Rajoiteyhtälöitä käsitellään enemmän luvussa 4.4.2.3.



Kuva 4-5. Uudelleenparametrisointi rajoiteyhtälön avulla.

4.2.3 Säännöllisten pisteiden implisiittisesti määritelty ratkaisukäyrä

Määritelmän 4-3A yhtälön oikea puoli on määritelty vain niissä pisteissä u , joissa Jacobin matriisin $H'(u)$ rangi on maksimaalinen. Kuvauksen H Jacobin matriisin rangin perusteella voidaan määritellä kuvauksen H säännölliset ja singulaariset pisteet ja arvot (Smale 1966 sekä Allgower ja Georg 1990):

- Määritelmä 4-4. Säännöllisyys ja singulaarisuus.** Jos kuvaus $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ on sileä ja
- jos Jacobin matriisin $F'(x)$ rangi on maksimaalinen eli $\text{rank } F'(x) = \min \{p, q\}$, niin $x \in \mathbb{R}^p$ on kuvauksen F säännöllinen piste;
 - jos $x \in \mathbb{R}^p$ on säännöllinen piste kaikilla $x \in F^{-1}(y)$, niin $y \in \mathbb{R}^q$ on kuvauksen F säännöllinen arvo.
 - Jos $x \in \mathbb{R}^p$ ei ole kuvauksen F säännöllinen piste, se on kuvauksen F singulaarinen piste.
 - Jos $y \in \mathbb{R}^q$ ei ole kuvauksen F säännöllinen arvo, se on kuvauksen F singulaarinen arvo.

Jos $y \notin \text{range } F$, niin $F^{-1}(y) = \emptyset$, jolloin y on kuvauksen F säännöllinen arvo. Sardin teoreeman mukaan kuvauksen F säännöllisiä arvoja ovat melkein kaikki $y \in \mathbb{R}^q$ ja lisäksi säännöllisten pisteiden joukko on avoin (Smale 1966 sekä Allgower ja Georg 1990):

Lause 4-1. Jos $U \subset \mathbb{R}^p$ on avoin ja kuvaus $F : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ on r kertaa jatkuvasti derivoituva, $r > \max \{p - q, 0\}$, niin sekä kuvauksen F singulaaristen pisteiden että kuvauksen F singulaaristen arvojen joukon Lebesguen mitta (Rudin 1980) on nolla.

Lemma 4-4. Jos kuvaus $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ on sileä, niin kuvauksen F säännöllisten pisteiden joukko on avoin.

Lemmoista 4-3 ja 4-4 nähdään nyt, että määritelmän 4-3A yhtälön oikea puoli $t(H'(u))$ on sileä vektorikenttä, joka on määritelty kuvauksen H säännöllisistä pisteistä koostuvassa avoimessa joukossa. Lisäksi saadaan myös seuraava lemma:

Lemma 4-5. Jos $u = u(s)$ on differentiaaliyhtälön $u' = t(H'(u))$ ratkaisu, niin $H(u(s))$ on vakio.

Koska u_0 on oletuksen 4-2B ja määritelmän 4-4 mukaan kuvauksen H säännöllinen piste, niin klassisten olemassaolo- ja yksikäsitteisyystulosten perusteella määritelmän 4-3 alkuarvotettävän ratkaisun $c(s)$ olemassaololle on olemassa maksimaalinen väli (a, b) , missä a ja $b \in \mathbb{R}$. Käyrä $c(s)$ voidaan siis määritellä kyseiseksi maksimaaliseksi ratkaisuksi. Oletuksen 4-2A ja alkuarvotettävämäärittelyn 4-3 mukaan $H(c(0)) = H(u_0) = 0$. Seuraavan lemmän mukaan kaikki ratkaisukäyrän $c(s)$ pisteet ovat kuvauksen H säännöllisiä nollakohtia.

Lemma 4-6. Olkoon käyrä $c(s)$ määritelmän 4-3 alkuarvotettävän maksimaalinen ratkaisu.

a. Jos $-\infty < a$, niin

- (i) käyrä $c(s)$ suppenee raja-arvopisteeseen u^* , kun $s \rightarrow a$ ja $s > a$ ja lisäksi
- (ii) u^* on kuvauksen H singulaarinen nollakohta.

b. Jos vastaavasti $b < \infty$, niin

- (i) käyrä $c(s)$ suppenee raja-arvopisteeseen u^* , kun $s \rightarrow b$ ja $s < b$ ja lisäksi
- (ii) u^* on kuvauksen H singulaarinen nollakohta.

Ilman oletusta 4-2B ratkaisukäyrällä $c(s)$ saattaisi esiintyä bifurkaatio- eli haarautumispisteitä, jotka ovat kuvauksen H singulaarisia pisteitä. Näitä pisteitä käsitellään luvuissa 4.4.6 ja 4.4.7. Edellisen lemmän avulla saadaan ratkaisukäyrän käyttäytymistä kuvaava ja ratkaisukäyrän seuraamisen kannalta oleellinen tulos:

Lause 4-2. Jos nolla on kuvauksen H säännöllinen arvo, niin määritelmän 4-3 alkuarvotettävän maksimaalinen ratkaisu c on määritelty koko \mathbb{R} :ssä ja toteuttaa toisen seuraavista ehdoista:

- a. Käyrä c on diffeomorfinen ympyrän kanssa eli on olemassa jakso $T > 0$ siten, että $c(s_1) = c(s_2)$, jos ja vain jos $s_1 - s_2$ on jakson T monikerta.
- b. Käyrä c on diffeomorfinen reaaliakselin kanssa eli käyrä $c(s)$ on injektio ja sillä ei ole kasautumispistettä, kun $s \rightarrow \pm\infty$.

4.3 Paloittain lineaaristen menetelmien perusidea

Allgower ja Georg (1990) ovat käsitelleet paloittain lineaarisia menetelmiä, joiden perusteita käsitellään tässä vain lyhyesti. Kun seuraavan luvun 4.4 ennuste—korjaus-menetelmällä seurataan likimääräisesti luvussa 4.2 käsiteltyä tarkkaa ratkaisua c , niin paloittain lineaarisilla menetelmillä seurataan tarkasti paloittain lineaarista käyrää c_τ , joka approksimoi ratkaisukäyrää c : Avaruuteen \mathbb{R}^{n+1} muodostetaan ensin sellainen $n + 1$ -kärkinen monitahokas, jonka jollakin tahkolla on yhtälön (4-15) ratkaisupiste. Seuraavaksi kuvauksen H arvot lasketaan monitahokkaan kärjissä ja laskettujen arvojen avulla ratkaisukäyrää c approksimoidaan lineaarisesti kyseisen monitahokkaan sisällä. Ratkaisukäyrän approksimointia jatketaan muodostamalla uusi monitahokas, jolla on yksi yhteinen tahko edellisen monitahokkaan kanssa (kuva 4-6) (Pajunen 1998). Käyrä c_τ on monikulmiopolku, joka määräytyy seuraavaksi määriteltävän avaruuden \mathbb{R}^{n+1} kolmioinnin τ suhteen.

Määritelmä 4-5. Simpleksi. Olkoon $v_1, \dots, v_{j+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $j \leq n + 1$, affiinisti riippumattomia eli olkoot $v_k - v_1$, $k = 2, \dots, j + 1$, lineaarisesti riippumattomia. Konvekssi verho $(v_1, \dots, v_{j+1}) = \text{co} \{v_1, \dots, v_{j+1}\}$ on avaruuden \mathbb{R}^{n+1} j -simpleksi, jonka kärjet ovat v_1, \dots, v_{j+1} . Joukon $\{w_1, \dots, w_{r+1}\} \subset \{v_1, \dots, v_{j+1}\}$ konvekssi verho (w_1, \dots, w_{r+1}) on konveksin verhon (v_1, \dots, v_{j+1}) r -tahko.

Määritelmä 4-6. Kolmiointi. Avaruuden \mathbb{R}^{n+1} kolmiointi τ on avaruuden \mathbb{R}^{n+1} osajako $n + 1$:een simpleksiin siten, että

- A. kaksi kolmioinnin τ simpleksiä leikkaavat joko yhteisessä tahkossa tai eivät leikkaakaan ja
- B. avaruuden \mathbb{R}^{n+1} rajoitettu joukko leikkaa vain äärellisen monta kolmioinnin τ simpleksiä.

Määritelmä 4-7. Kuvauksen $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ paloittain lineaarinen approksimaatio H_τ määrittelyjoukon \mathbb{R}^{n+1} kolmioinnin τ suhteen on seuraavien ehtojen yksikäsitteisesti määräämä kuvaus:

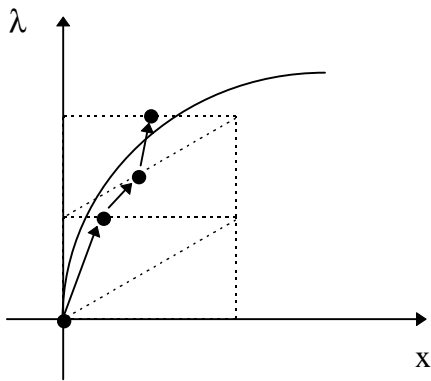
- A. $H_\tau(v) = H(v)$ kaikissa kolmioinnin τ kärjissä;
- B. $H_\tau|_\sigma$ eli kuvauksen H_τ rajoittuma simpleksiin $\sigma = (v_1, \dots, v_{n+2}) \in \tau$ on affiinikuvaus eli $H_\tau|_\sigma - (H_\tau|_\sigma)(0)$ on lineaarikuvaus.

Jos $u = \sum_{i=1, \dots, n+2} a_i v_i \in \sigma$, sen painopistekoordinaatit a_i , $i = 1, \dots, n + 2$, toteuttavat ehdot $\sum_{i=1, \dots, n+2} a_i = 1$ ja $a_i \geq 0$. Koska H_τ on affiinikuvaus, niin

$$H_\tau(u) = \sum_{i=1, \dots, n+2} a_i H(v_i). \quad (4-27)$$

Joukko $H_{\tau}^{-1}(0)$ sisältää monikulmiopolun $c_{\tau} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, joka approksimoi ratkaisukäyrää c . Paloittain lineaarisilla menetelmillä ratkaisukäyrää c_{τ} seurataan lineaarisen ohjelmoinnin kuten simplex-menetelmien kaltaisilla askelilla.

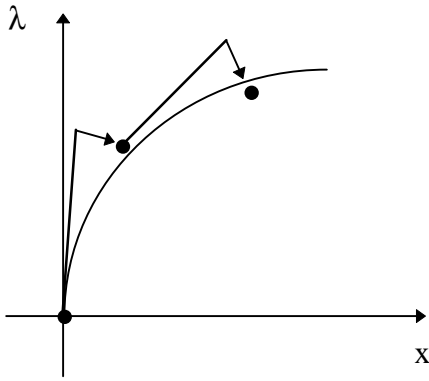
Paloittain lineaaristen menetelmien etuna on se, ettei kuvauksen H tarvitse olla sileä. Ennuste—korjaus-menetelmiä ja paloittain lineaarisia menetelmiä voidaan myös yhdistää esimerkiksi käyttämällä ennuste—korjaus-menetelmien ennusteena paloittain lineaarisen ratkaisukäyrän c_{τ} pisteitä. Ainakin sauvarakenteisiin liittyvissä rakenteiden mekaniikan tehtävissä paloittain lineaaristen menetelmien on todettu olevan kilpailukykyisiä ennuste—korjaus-menetelmien kanssa (Pajunen 1998).



Kuva 4-6. Polunseurauksen kulku paloittain lineaarisilla menetelmillä.

4.4 Ennuste—korjaus-menetelmät

Allgower ja Georg (1990) ovat käsitelleet numeerisia ennuste—korjaus-menetelmiä, joilla on tarkoitus seurata likimääräisesti määritelmän 4-3 ratkaisukäyrää c lähtien alkupisteestä $u_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, joka on kuvauksen H säännöllinen piste ja jolle pätee $H(u_0) = 0$. Ratkaisukäyrää seurataan muodostamalla jono pisteitä $u_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, 2, \dots$, jotka ovat halutun tarkkuuden rajoissa kyseisellä käyrällä eli toteuttavat ehdon $\|H(u_i)\|_2 \leq \varepsilon$ valitulla toleranssilla $\varepsilon > 0$ (kuva 4-7).



Kuva 4-7. Polunseurauksen kulku ennuste—korjaus-menetelmillä.

4.4.1 Ennuste—korjaus-menetelmien perusidea

Oletetaan, että on valittu toleranssi $\varepsilon > 0$ ja piste $u_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ on halutulla tarkkuudella ratkaisukäyrällä c eli $\|H(u_i)\|_2 \leq \varepsilon$. Jos u_i on kuvauksen H säännöllinen piste, luvun 4.2 tulosten mukaan määritelmän 4-3 alkuarvottehtävällä on olemassa alkuarvolla u_i maksimaalisella ratkaisuvälillä J määritelty yksikäsitteinen ratkaisukäyrä $c_i : J \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Seuraavaa pistettä u_{i+1} varten saadaan ennuste integroimalla määritelmän 4-3 yhtälöt numeerisesti. Esimerkiksi Eulerin ennuste on muotoa

$$v_{i+1} = u_i + h t(H'(u_i)), \quad (4-28)$$

missä $h > 0$ on ns. askelpituus. Jos w_{i+1} on ratkaisukäyrän c piste, joka on Euklidisen normin suhteen lähinnä ennustetta v_{i+1} , se on minimointiongelman ratkaisu

$$\|w_{i+1} - v_{i+1}\|_2 = \min \{ \|w - v_{i+1}\|_2 \mid H(w) = 0, w \in \mathbb{R}^{n+1} \}. \quad (4-29)$$

Jos piste u_i on riittävän lähellä ratkaisukäyrää c ja askelpituus h on riittävän pieni, niin myös ennuste v_{i+1} on lähellä käyrää c ja minimointiongelman ratkaisu w_{i+1} on yksikäsitteinen. Ratkaisulle w_{i+1} haetaan kuitenkin ainoastaan likiarvo, joka hyväksytään seuraavaksi käyrän c pistettä w_{i+1} approksimoivaksi pisteeksi u_{i+1} , jos $\|H(u_{i+1})\|_2 \leq \varepsilon$. Likiarvo u_{i+1} haetaan korjaamalla Newton-tyyppisellä iteroinnilla ennustetta v_{i+1} . Ennuste—korjaus-menetelmät voidaan esittää seuraavan algoritmin muodossa:

Algoritmi 4-2. Ennuste—korjaus-menetelmät.

1. Valitaan lähtöpiste $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ siten, että $H(u) = 0$.
2. Valitaan askelpituus $h > 0$.
3. Tehdään ennuste seuraavaksi pisteeksi $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ siten, että $H(v) \approx 0$ ja $\|u - v\|_2 \approx h$.

4. Korjataan iteratiivisesti ennustetta $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ etsimällä likimääräinen ratkaisu $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ minimointitehtävälle $\min \{ \|w - v\|_2 \mid H(w) = 0, w \in \mathbb{R}^{n+1} \}$.
5. Asetetaan minimointitehtävän likimääräinen ratkaisu w uudeksi lähtöpisteeksi u ja palataan kohtaan 3.

Ratkaisukäyrän c likimääräinen seuraaminen tapahtuu siis vuorotellen toistuvilla ennuste- ja korjausvaiheilla. Ennuste—korjaus-menetelmien tehokkuus riippuu mm. seuraavista tekijöistä:

1. Askelpituuden mukauttaminen ratkaisukäyrän käyttäytymisen suhteen.
2. Eulerin ennustetta korkeampiasteisten ennusteiden käyttö.
3. Korjausvaiheen Newton-tyyppisten iterointimenetelmien tehokkuus.
4. Erikoispisteiden kuten käänne- ja bifurkaatiopisteiden käsittely.

Kohtaa 1 käsitellään luvussa 4.4.5. Allgower ja Georg (1990) ovat käsitelleet kohtaa 2. Korjausvaiheen tehokkuuteen ratkaisevasti vaikuttavaa kohtaa 3 käsitellään luvuissa 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 ja 4.4.8 sekä kohtaa 4 luvuissa 4.2.1, 4.4.6 ja 4.4.7.

4.4.2 Korjausvaiheen iterointi

Tässä luvussa tarkastellaan algoritmin 4-1 kohdan 3c ja algoritmin 4-2 kohdan 4 korjausiteraatioissa tarvittavia ratkaisumenetelmiä.

4.4.2.1 Newton—Raphson-menetelmät

Käyttämällä luvun 4.2.1 upotusmenetelmän mukaista parametrivalintaa, luvussa 4.2 mainittua Newton-tyyppistä iterointia ja Eulerin ennustetta saadaan rakenteiden mekaniikan tehtävien yhteydessä usein esiintyvä ratkaisumenetelmä, josta käytetään nimitystä Newton—Raphson-menetelmä (Zienkiewicz ja Taylor 1991).

Linearisoimalla tasapainoyhtälö (4-8) pisteessä (q_j, λ_j) saadaan

$$f(q_j, \lambda_j) + (\partial f / \partial q)(q_j, \lambda_j) \delta q + (\partial f / \partial \lambda)(q_j, \lambda_j) \delta \lambda = 0, \quad (4-30)$$

missä $(\partial f / \partial \lambda)(q_j, \lambda_j) = p_{\text{ref}}$ ja ns. tangentialinen jäykkyyssmatriisi $K \equiv -(\partial f / \partial q)$. Nyt $-(\partial f / \partial q)(q_j, \lambda_j) = (\partial r / \partial q)(q_j)$, joten

$$f(q_j, \lambda_j) - K(q_j) \delta q + p_{\text{ref}} \delta \lambda = 0. \quad (4-31)$$

Koska $f(q_j, \lambda_j) = \lambda_j p_{\text{ref}} - r(q_j)$, saadaan vielä rakenteiden mekaniikassa usein esiintyvä muoto (Kouhia ja Mikkola 1989)

$$K(q_j) \delta q = (\lambda_j + \delta \lambda) p_{\text{ref}} - r(q_j). \quad (4-32)$$

Kuormittamattomassa rakenteessa eli tapauksessa $\lambda = 0$ voidaan asettaa $q = 0$ ja $f(0, 0) = 0$, joten hiukan muuttamalla ja tarkentamalla algoritmia 4-1 saadaan Newton–Raphson-menetelmän algoritmi:

Algoritmi 4-3. Newton–Raphson-menetelmä (kuva 4-8).

1. Valitaan kokonaisluku $m > 0$ ja lähtöpiste $q_0 \in \mathbb{R}^n$ siten, että $f(q_0, 0) = 0$; usein $q_0 = 0$.
2. Asetetaan kuormakerroinmuutos: $\Delta \lambda = 1/m$, jolloin $\lambda_i = i \Delta \lambda$.
3. Suoritetaan kohdat 3a, 3b ja 3c askelille $i = 1, \dots, m$:

3a. Siirtymän lähtöarvo: $q = q_{i-1}$

3b. Askeleen kuormakerroin: $\lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta \lambda$

3c. Ratkaistaan iteratiivisesti kuormakerrointa λ_i vastaava siirtymä q_i yhtälöstä $f(q_i, \lambda_i) = 0$ käyttäen siirtymälle lähtöarvoa q :

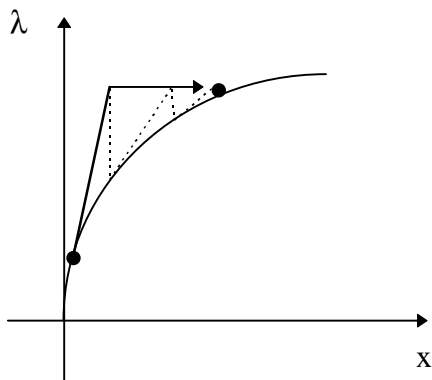
3c.0. Alustus: $k = 0$, $q^{(0)} = q$.

3c.1. Uusi iteraatiokierros: $k = k + 1$.

3c.2. Siirtymän muutos: $\delta q^{(k)} = K(q^{(k-1)})^{-1} ((\lambda_{i-1} + \Delta \lambda) p_{\text{ref}} - r(q^{(k-1)}))$.

3c.3. Iteraatiokierroksen siirtymä: $q^{(k)} = q^{(k-1)} + \delta q^{(k)}$.

3c.4. Palataan kohtaan 3c.1 kunnes $f(q^{(k)}, \lambda_i) = (\lambda_{i-1} + \Delta \lambda) p_{\text{ref}} - r(q^{(k)}) \approx 0$, jolloin asetetaan $q_i = q^{(k)}$.



Kuva 4-8. Iteroinnin kulku Newton–Raphson-menetelmällä.

Kun $k = 1$ algoritmin 4-3 kohdassa 3c.2, niin saadaan ennuste

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= q^{(0)} + K(q^{(0)})^{-1} ((\lambda_{i-1} + \Delta\lambda)p_{\text{ref}} - r(q^{(0)})) \\ &= q^{(0)} + \Delta\lambda K(q^{(0)})^{-1} p_{\text{ref}}, \end{aligned} \quad (4-33)$$

jota voidaan pitää algoritmin 4-2 mukaisena Eulerin ennusteena askelpituudella $\Delta\lambda$. Kun $k > 1$, niin saadaan korjattu ennuste

$$q^{(k)} = q^{(k-1)} + K(q^{(k-1)})^{-1} ((\lambda_{i-1} + \Delta\lambda)p_{\text{ref}} - r(q^{(k-1)})). \quad (4-34)$$

Newton–Raphson-menetelmä on siis Euler–Newton-tyyppinen ennuste–korjaus-menetelmä, jossa parametrivalinta vastaa klassisen upotusmenetelmän parametrisointia. Rakenteiden mekaniikan tehtäviin menetelmää ovat soveltaneet mm. Crisfield (1979) sekä Bathe ja Cimento (1980). Jos Newton–Raphson-algoritmin kohdassa 3c.2 käytetään tangentiaalisen jäykkyyssmatriisin $K(q^{(k-1)})$ tilalla kyseisen askeleen alun tangentiaalista jäykkyyssmatriisia $K(q^{(0)})$, saadaan modifioitu Newton–Raphson-menetelmä (Zienkiewicz ja Taylor 1991).

Jos algoritmin 4-3 kohdan 2 kuormakerroinmuutos $\Delta\lambda$ on riittävän pieni, kohdan 3a siirtymän lähtöarvo on niin lähellä kohdan 3c siirtymää, että iterointi yleensä suppenee kohti ratkaisua kaikilla askelilla $i = 1, \dots, m$, ja viimein saavutetaan kuormakerrointa $\lambda_m = 1$ vastaava siirtymä q_m . Kuitenkin, jos ratkaisukäyrällä $f^{-1}(0)$ on käännealue kuormakertoimen λ suhteen jollakin kuormakertoimella $\lambda = \lambda_{\text{cr}} < 1$, niin iterointi hajaantuu jollakin $i = i_{\text{cr}} < m$ ja ratkaisukäyrän seuraaminen keskeytyy (Riks 1972). Määritelmän 4-1 mukaan tangentiaalinen jäykkyyssmatriisi K on käännealueella singulaarinen, sillä $\text{rank } K = n - 1$ eli $\dim \ker K = 1$.

4.4.2.2 Moore–Penrose-käännös Newton-iteraatiossa

Allgower ja Georg (1990) ovat käsitelleet Moore–Penrose-käännöksen soveltamista algoritmin 4-2 kohdan 4 minimointiongelman iteratiiviseen ratkaisemiseen: Jos kuvaus H algoritmin 4-2 kohdassa 4 olisi kuvaus avaruudelta \mathbb{R}^n itselleen, minimointitehtävän likimääräistä ratkaisua voitaisiin etsiä luvun 4.2 yhtälön (4-10) mukaisella Newton-tyyppisellä iteroinnilla. Koska $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, Jacobin matriisi H' ei ole neliömatriisi eikä siis myöskään kääntyvä, joten luvun 4.2 Newton-tyyppistä iterointia ei voida sellaisenaan käyttää. Koska derivaatalla H' on kuitenkin oletuksen 4-2B mukaan maksimaalinen rangi n , luvun 4.2 Newton-tyyppistä iterointia voidaan modifioida käyttämällä Moore–Penrose-käännöstä. Moore–Penrose-käännös voidaan määritellä yleisemmin $n \times m$ -matriiseille, joilla on maksi-

maalinen rangi, mutta tässä tapauksessa käsitellään vain maksimaalisen rangin omaavia $n \times (n + 1)$ -matriiseja:

Määritelmä 4-8. Moore—Penrose-käännös. Jos A on $n \times (n + 1)$ -matriisi, jolla on maksimaalinen rangi eli $\text{rank } A = n$, niin matriisin A Moore—Penrose-käännös $A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$.

Lemma 4-7. Jos A on $n \times (n + 1)$ -matriisi, jolla on maksimaalinen rangi, ja $t(A)$ sen indusoima tangenttivektori, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä kaikilla $b \in \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^{n+1}$

- $Ax = b$ ja $t(A)^T x = 0$,
- $x = A^+ b$ ja
- x on ratkaisu minimointitehtävälle $\min \{ \|w\|_2 \mid Aw = b, w \in \mathbb{R}^{n+1} \}$.

Lemma 4-8. Jos A on $n \times (n + 1)$ -matriisi, jolla on maksimaalinen rangi, niin

- A^+A on ortogonaaliprojektio avaruudelta \mathbb{R}^{n+1} avaruudelle $\{t(A)\}^\perp = \text{range } A^T$ eli $A^+A = I - t(A)t(A)^T$,
- $AA^+ = I$ ja
- jos B on matriisin A oikeanpuoleinen käännös eli $AB = I$, niin $A^+ = (I - t(A)t(A)^T)B$.

Välttämätön ehto algoritmin 4-2 kohdan 4 minimointitehtävän ratkaisulle saadaan Lagrangen kertoimia käyttämällä (Milne 1980): Jos $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ on minimointitehtävän ratkaisu, se toteuttaa Lagrangen yhtälöt

$$H(w) = 0 \text{ ja} \tag{4-35}$$

$$w - v = H'(w)^T \eta, \tag{4-36}$$

missä $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$. Jälkimmäinen yhtälö on yhtäpitävä sen kanssa, että $w - v \in \text{range } H'(w)^T = \{t(H'(w))\}^\perp$, joten ratkaisun w on toteutettava yhtälöt

$$H(w) = 0 \text{ ja} \tag{4-37}$$

$$t(H'(w))^T (w - v) = 0. \tag{4-38}$$

Newtonin menetelmässä yhtälöt (4-37) ja (4-38) linearisoidaan pisteessä v eli muodostetaan Taylorin kehitelmät pisteessä v :

$$H(w) = H(v) + H'(v)(w - v) + O(\|w - v\|_2^2) \text{ ja} \tag{4-39}$$

$$t(H'(w))^T (w - v) = t(H'(v))^T (w - v) + O(\|w - v\|_2^2), \tag{4-40}$$

joista poistetaan Landaun symbolilla O merkityt korkean asteen termit. Näin saadaan likiarvo $N(v)$ yhtälöiden (4-39) ja (4-40) ratkaisulle w . Likiarvoratkaisu $N(v)$ toteuttaa siis yhtälöt

$$H(v) + H'(v)(N(v) - v) = 0 \text{ ja} \tag{4-41}$$

$$t(H'(v))^T (N(v) - v) = 0. \quad (4-42)$$

Lemman 4-7 avulla saadaan seuraava määritelmä:

Määritelmä 4-9. Newtonin kuvaus. Jos $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ on kuvauksen $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ säännöllinen piste, niin algoritmin 4-2 kohdan 4 minimointitehtävän ratkaisun likiarvo eli Newtonin piste

$$N(v) = v - H'(v)^+ H(v). \quad (4-43)$$

Kuvauksen H säännöllisille pisteille näin määriteltä kuvausta $N : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ sanotaan Newtonin kuvaukseksi.

Vertaamalla määritelmän 4-9 Newtonin kuvausta luvun 4.2 Newton-tyyppiseen iteraatioon (4-10) huomataan, että ainoa muodollinen ero on tavallisen käänteismatriisin korvaaminen Moore–Penrose-käännöksellä. Algoritmia 4-2 voidaan nyt tarkentaa kohtien 3 ja 4 osalta käyttämällä luvun 4.4.1 yhtälön (4-28) mukaista Eulerin ennustetta ja Newtonin kuvauksen määrittelemää korjausta.

Algoritmi 4-4. Euler—Newton-tyyppinen ennuste—korjaus-menetelmä.

1. Valitaan lähtöpiste $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ siten, että $H(u) = 0$.
2. Valitaan askelpituus $h > 0$.
3. Tehdään ennuste seuraavaksi pisteeksi $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ käyttämällä Eulerin ennustetta $v = u + ht(H'(u))$.
4. Korjataan iteratiivisesti ennustetta $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ etsimällä likimääräinen ratkaisu $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ algoritmin 4-2 kohdan 4 minimointitehtävälle
 - 4a. korjaamalla ennustetta v Newtonin kuvauksella N : $w = N(v) = v - H'(v)^+ H(v)$ ja
 - 4b. asettamalla näin saatu likiarvoratkaisu korjatuksi ennusteeksi $v = w$ sekä palaamalla kohtaan 4a kunnes $H(w) \approx 0$.
5. Asetetaan minimointitehtävän likimääräinen ratkaisu w uudeksi lähtöpisteeksi u ja palataan kohtaan 3.

Algoritmin 4-4 Euler—Newton-tyyppisen ennuste—korjaus-menetelmän kvadraattiset suupenemisominaisuudet käyvät ilmi seuraavasta lauseesta:

Lause 4-3. Olkoon nolla sileän kuvauksen $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ säännöllinen arvo. Silloin on olemassa avoin ympäristö $U \supset H^{-1}(0)$ siten, että seuraavat kohdat ovat voimassa:

- a. Ratkaisukuvaus $v \mapsto S(v) \in H^{-1}(0)$, $v \in U$, joka ratkaisee algoritmin 4-2 kohdan 4 minimointiongelman on yksikäsitteisesti määritelty ja sileä.
- b. Kaikilla $v \in U$ Newtonin jono $\{N^i(v)\}_{i=1, \dots, \infty}$ suppenee pisteeseen $N^\infty(v) \in H^{-1}(0)$.
- c. Seuraavat arviot pätevät lokaalisesti tasaisesti kaikilla $v \in U$:
- c.1. $\|N^2(v) - N(v)\|_2 = O(\|N(v) - v\|_2^2)$;
- c.2. $\|N^\infty(v) - N(v)\|_2 = O(\|N^\infty(v) - v\|_2^2)$;
- c.3. $\|N(v) - S(v)\|_2 = O(\|v - S(v)\|_2^2)$;
- c.4. $\|N^\infty(v) - S(v)\|_2 = O(\|v - S(v)\|_2^2)$.
- d. Inklusio $N(U) \subset U$ on voimassa.

Algoritmin 4-4 kohdan 3 tangentin ja 4a Moore–Penrose-käännöksen laskemisessa voidaan käyttää hyväksi mitä tahansa lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisumenetelmää, jolla kyetään ratkaisemaan vektori $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ lineaarisesta yhtälösystemistä

$$H'(u)x = y \text{ ja} \quad (4-44)$$

$$e^T x = 0, \quad (4-45)$$

missä vektori $y \in \mathbb{R}^n$ ja Jacobin matriisi $H'(u)$ on annettu sekä vektori $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ on valittavissa sillä ehdolla, että

$$\text{cond} \begin{pmatrix} H'(u) \\ e^T \end{pmatrix} \approx \sqrt{\text{cond}(H'(u)H'(u)^T)}. \quad (4-46)$$

Vektorin e täytyy siis olla mahdollisimman yhdensuuntainen aliavaruuden $\ker H'(u)$ kanssa. Vektori e voidaan esimerkiksi asettaa yksikkövektoriksi $e_{(i)}$, jos indeksi i valitaan ehdon $\max_i \{e_{(i)}^T t(H'(u)) \mid i = 1, \dots, n+1\}$ perusteella. Jos esimerkiksi $u = (x, \lambda)$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$, niin valitsemalla $i = n+1$, voidaan ottaa huomioon Jacobin matriisin $H'(u)$ mahdolliset erityisominaisuudet muuttujan $x \in \mathbb{R}^n$ suhteen (Allgower, Chien ja Georg 1990). Vektorin e voidaan ajatella määräävän korjausiteraation lokaalisen parametrisonnin. Esimerkiksi luvun 4.4.2.1 Newton–Raphson-menetelmissä, joissa kuormakerroin λ pysyy vakiona korjausiteroinnin aikana, on kyse samantyyppisestä lokaalisesta parametrisonnista. Samoin luvun 4.4.2.3 kaarenpituusmenetelmissä, joiden yhteydessä käsiteltävällä ositustekniikalla Jacobin matriisin mahdollinen erityisrakenne voidaan myös ottaa huomioon.

Jos yhtälöparin (4-44) ja (4-45) ratkaisu $x = By$, missä $(n+1) \times n$ -matriisin B ei tarvitse olla eksplisiittisesti tiedossa, niin tangentti $t(H'(u))$ saadaan seuraavalla tavalla: Yhtälön (4-44) mukaan $H'(u)x = H'(u)By = y$ ja yhtälön (4-45) mukaan $e^T x = e^T By = 0$, joten

$$H'(u)B = I \text{ ja} \quad (4-47)$$

$$e^T B = 0^T. \quad (4-48)$$

Jos merkitään, että

$$\tau \equiv e - BH'(u)e, \quad (4-49)$$

niin yhtälön (4-47) mukaan $H'(u)\tau = 0$ ja yhtälön (4-48) mukaan $e^T \tau = e^T e > 0$, joten $\tau \neq 0$.

Siis tangentti

$$t(H'(u)) = \pm \tau / \|\tau\|_2, \quad (4-50)$$

missä etumerkki voidaan laskea helposti yhtälön

$$\text{sign det} \begin{pmatrix} H'(u) \\ \tau^T \end{pmatrix} = \text{sign det} \begin{pmatrix} H'(u) \\ e^T \end{pmatrix} \quad (4-51)$$

perusteella, sillä useissa lineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmissä yhtälön oikea puoli on helposti laskettavissa (Allgower ja Georg 1990). Yhtälöistä (4-47) ja (4-48) sekä lemmasta 4-8 saadaan Moore—Penrose-käännös

$$H'(u)^+ = [I - t(H'(u))t(H'(u))^T]B. \quad (4-52)$$

4.4.2.3 Kaarenpituusmenetelmien rajoiteyhtälöt ja ositustekniikka

Luvussa 4.2.1 näytettiin, että käännepiste voidaan ohittaa ns. kaarenpituusmenetelmillä (Crisfield 1991), joissa tasapainoyhtälön (4-8) ratkaisukäyrän seuraamista ei kontrolloida ainoastaan kuormakertoimen λ suhteen vaan myös siirtymän q suhteen käyttämällä ratkaisukäyrän parametrina kaarenpituutta s .

Kaarenpituuden muutosta Δs vastaavat ennusteaskeleen siirtymämuutos $\delta q^{(1)}$ ja kuormakerroinmuutos $\delta \lambda^{(1)}$ määräytyvät yhtälöä (4-25) vastaavasta yhtälöstä

$$\|\delta q^{(1)}\|_2^2 + \delta \lambda^{(1)2} = \Delta s^2, \quad (4-53)$$

missä on käytetty Newton—Raphson-algoritmin 4-3 merkintää $\delta q^{(1)} = \delta \lambda^{(1)} K(q^{(0)})^{-1} p_{\text{ref}}$. Ennusteaskeleen kuormakerroinmuutokseksi saadaan siis

$$\delta \lambda^{(1)} = \sigma \Delta s / \{ 1 + \|K(q^{(0)})^{-1} p_{\text{ref}}\|_2^2 \}^{1/2}, \quad (4-54)$$

missä etumerkki σ voidaan valita esimerkiksi ns. jäykkyyssparametrin etumerkin (Bergan, Horrigmoe, Kråkeland ja Søreide 1978 sekä Bergan 1981) tai jäykkyyssmatriisin ominaisarvojen (Kouhia ja Mikkola 1989) mukaan:

$$\sigma = \text{sign}\{ (K(q_1^{(0)})^{-1} p_{\text{ref}})^T p_{\text{ref}} \} / \{ (K(q_1^{(0)})^{-1} p_{\text{ref}})^T p_{\text{ref}} \} \text{ tai} \quad (4-55)$$

$$\sigma = \text{eigsign}\{ K(q_1^{(0)}) \}, \quad (4-56)$$

missä $\text{eigsign}\{ K(q_1^{(0)}) \} = +1$, jos jäykkyyssmatriisin kaikki ominaisarvot ovat aidosti positiivisia, ja muulloin $\text{eigsign}\{ K(q_1^{(0)}) \} = -1$. Kaarenpituuden muutoksen Δs päivittämiseen

voidaan käyttää erilaisia askelpituudenmukauttamismenetelmiä, joita on käsitelty luvussa 4.4.5.

Linearisoimalla rajoiteyhtälö (4-23) pisteessä (q_j, λ_j, s_j) , missä $q_j = q(s_j)$ ja $\lambda_j = \lambda(s_j)$, saadaan

$$g(q_j, \lambda_j, s_j) + ((\partial g / \partial q)(q_j, \lambda_j, s_j))^T \delta q + (\partial g / \partial \lambda)(q_j, \lambda_j, s_j) \delta \lambda = 0. \quad (4-57)$$

Jos merkitään $g_j \equiv g(q_j, \lambda_j, s_j)$, $g'_j \equiv (\partial g / \partial q)(q_j, \lambda_j, s_j)$ ja $g_{,j} \equiv (\partial g / \partial \lambda)(q_j, \lambda_j, s_j)$, linearisoitu rajoiteyhtälö (4-57) tulee muotoon

$$g_j + g'_j{}^T \delta q + g_{,j} \delta \lambda = 0. \quad (4-58)$$

Useissa tapauksissa linearisoitu rajoiteyhtälö (4-58) voidaan esittää muodossa

$$g_j(q, \lambda) = t_j^T n_j - e_j = 0, \quad (4-59)$$

missä $t_j, n_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ ja $e_j \in \mathbb{R}$ (Kouhia 1994). Liitteessä A vektorit t_j ja n_j sekä vakio e_j on lueteltu Riksin (1972), Crisfieldin (1981), Rammin (1981), Friedin (1984), Schweizerhofin ja Wriggersin (1986) sekä Forden ja Stiemerin (1987) esittämille rajoiteyhtälöille. Esimerkiksi asettamalla $\Delta q = q - q_j$ ja $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_j$ nähdään, että luvun 4.2.1 pseudokaarenpituuden yhtälöä (4-25) vastaa Crisfieldin (1981) elliptinen rajoiteyhtälö. Friedin (1984) ortogonaalisen trajektorin kaarenpituusmenetelmä sekä yhtälöiden (4-41) ja (4-42) Allgowerin ja Georgin (1990) polunseurausmenetelmä vastaavat myös toisiaan. Kouhia ja Mikkola (1995) ovat lisäksi huomauttaneet, että Haselgrove on esittänyt vastaavan menetelmän jo vuonna 1961.

Useissa tapauksissa tangentialinen jäykkyysmatriisi K on symmetrinen ja nauhamainen (Crisfield 1981) joten yhtälöparia

$$G_j(q, \lambda) = \begin{pmatrix} f(q_j, \lambda_j) - K(q_j) \delta q + p_{\text{ref}} \delta \lambda \\ c_j + c'_j{}^T \delta q + c_{,j} \delta \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (4-60)$$

missä $G_j : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, ei kannata ratkaista suoraviivaisesti vaan ns. ositustekniikalla (Chan 1984 ja Rheinboldt 1986), jolloin tangentialisen jäykkyysmatriisin erityisrakennetta voidaan käyttää hyväksi: Annettua kaarenpituuden muutosta Δs vastaava siirtymälisäys δq jaetaan kuormitusta ja epätasapainoa vastaaviin osiin (Kouhia ja Mikkola 1995), jolloin

$$\delta q = \delta q_f + \delta \lambda \delta q_p, \quad (4-61)$$

missä δq_f , $\delta \lambda$ ja δq_p ratkaistaan yhtälöistä

$$K(q_j) \delta q_{fj} = f(q_j, \lambda_j) - \lambda_j p_{\text{ref}} - r(q_j), \quad (4-62)$$

$$K(q_j) \delta q_{pj} = p_{\text{ref}} \text{ ja } \quad (4-63)$$

$$\delta \lambda (g_{,j} + g'_j{}^T \delta q_{pj}) = - (g_j + g'_j{}^T \delta q_{fj}). \quad (4-64)$$

Linearisoitu rajoiteyhtälö (4-59) voidaan siis ajatella korjausvaiheen Newton-tyyppistä iterointia rajoittavana paikallisena lisäehtona (Seydel 1994). Kaarenpituusmenetelmien ero Newton–Raphson-menetelmään ja luvun 4.4.2.2 ennuste–korjaus-menetelmään nähdään vertaamalla seuraavaa algoritmia Newton–Raphson-algoritmiin 4-3 ja Moore–Penrose-käännöksen sisältävään algoritmiin 4-4.

Algoritmi 4-5. Kaarenpituusmenetelmät (kuva 4-9).

1. Valitaan lähtöpiste $q_0 \in \mathbb{R}^n$ siten, että $f(q_0, 0) = 0$; usein $q_0 = 0$.
2. Valitaan kaarenpituuden muutos $\Delta s > 0$, jolloin $s_0 = 0$ ja $s_i = s_{i-1} + \Delta s$.
3. Suoritetaan kohdat 3a, 3b ja 3c askelille $i = 1, 2, \dots$:

3a ja 3b. Lähtöpiste: $(q, \lambda) = (q_{i-1}, \lambda_{i-1})$.

3c. Ratkaistaan iteratiivisesti kaarenpituuden muutosta Δs vastaava ratkaisupiste (q_i, λ_i) yhtälöparista $f(q_i, \lambda_i) = 0$ ja $g(q_i, \lambda_i) = 0$ käyttäen kohdan 3a ja 3b lähtöpistettä (q, λ) :

3c.0. Alustus: $k = 0, (q^{(0)}, \lambda^{(0)}) = (q, \lambda)$

3c.1. Uusi iteraatiokierros: $k = k + 1$

3c.2. Siirtymän ja kuormakertoimen muutokset:

Kuormakerroinmuutos, ennuste ($k = 1$):

$$\delta q_f^{(1)} = 0$$

$$\delta q_p^{(1)} = K(q^{(0)})^{-1} p_{\text{ref}}$$

$$\delta \lambda^{(1)} = \sigma \Delta s / \{ 1 + \|\delta q_p^{(1)}\|_2^2 \}^{1/2}$$

Kuormakerroinmuutos, korjaus ($k > 1$), liite B:

$$\delta q_f^{(k)} = K(q^{(k-1)})^{-1} (\lambda^{(k-1)} p_{\text{ref}} - r(q^{(k-1)}))$$

$$\delta q_p^{(k)} = K(q^{(k-1)})^{-1} p_{\text{ref}}$$

$$\delta \lambda^{(k)} = \{ g^{(k-1)} + g^{(k-1)T} \delta q_f^{(k)} \} / \{ g^{(k-1)} + g^{(k-1)T} \delta q_p^{(k)} \}$$

Siirtymämuutos:

$$\delta q^{(k)} = \delta q_f^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta q_p^{(k)}$$

3c.3. Iteraatiokierroksen kuormakerroin- ja siirtymäarvot:

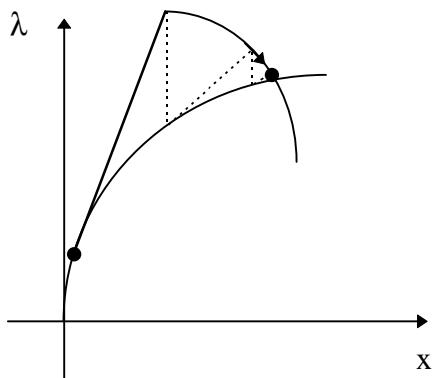
$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}$$

$$\Delta \lambda^{(k)} = \lambda^{(k)} - \lambda_{i-1} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}$$

$$q^{(k)} = q^{(k-1)} + \delta q^{(k)}$$

$$\Delta q^{(k)} = q^{(k)} - q_{i-1} = \Delta q^{(k-1)} + \delta q^{(k)}$$

3c.4. Palataan kohtaan 3c.1 kunnes $f(q^{(k)}, \lambda^{(k)}) \approx 0$, jolloin asetetaan $q_i = q^{(k)}$ ja $\lambda_i = \lambda^{(k)}$.



Kuva 4-9. Iteroinnin kulku kaarenpituusmenetelmällä.

Algoritmin 4-5 kohtaa 3c.2 voidaan luonnollisesti modifioida käyttämällä tangentiaalisen jäykkyyso-matriisin $K(q^{(k-1)})$ tilalla kyseisen askeleen alun tangentiaalista jäykkyyso-matriisia $K(q^{(0)})$. Jos algoritmin kohdassa 3c.2 asetetaan $\delta\lambda^{(1)} = \Delta\lambda$ ja $\delta\lambda^{(k)} = 0$ kaikilla $k > 1$, kaarenpituusmenetelmien algoritmista saadaan Newton–Raphson-menetelmän algoritmi. Newton–Raphson-menetelmää voidaan itse asiassa pitää kaarenpituusmenetelmänä rajoit e-yhtälöllä $g(q, \lambda, s) = g(q, \lambda) = \lambda - \lambda_{j+1}$ (Seydel 1994). Liitteen C kuvassa on esitetty esi-merkit polunseurauksen kulusta eri rajoiteyhtälöillä tapauksessa $n = 1$. Rakenteiden meka-niikan tehtäviin kaarenpituusmenetelmiä ovat soveltaneet mm. Riks (1972, 1984), Crisfield (1981, 1982, 1983), Ramm (1981), Fried (1984), Schweizerhof ja Wriggers (1986), Simo, Wriggers, Schweizerhof ja Taylor (1986), Forde ja Stierner (1987) sekä Bellini ja Chulya (1987).

4.4.3 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

Edellisissä luvuissa käsiteltyjen ennuste- ja korjausvaiheen lineaaristen yhtälöryhmien ratkai-semiseen käytetään usein ns. suorita yhtälöryhmänratkaisumenetelmiä (esim. nauha- profiili- ja rintamaratkaisijat, Salonen ja Freund 2000), joissa kerroinmatriisille muodostetaan esi-merkiksi LU-hajotelma Gaussin eliminaatiolla. Suorien menetelmien heikkouksia ovat erityi-sesti hajotelman vaatima laskenta-aika ja tietokonemuistin tarve. Ns. iteratiivisilla yhtälö-ryhmänratkaisumenetelmillä muistintarve ja laskenta-aika ovat useissa tapauksissa huomatiavasti vähäisempiä (Kouhia ja Mikkola 2000b sekä Golub ja Van Loan 1996).

Lineaarisen yhtälöryhmän iteratiiviseen ratkaisemiseen käytetään usein Krylovin aliavaruuteen (Golub ja Van Loan 1996) perustuvia iterointimenetelmiä, joita Kouhia ja Mikkola (2000a) ovat esitelleet niin symmetrisille ja positiividefiniiteille, symmetrisille ja indefiniiteille kuin epäsymmetrisillekin matriiseille. Tässä mainitaan vain esimerkki näistä menetelmistä, joita mm. Kelley (1995) on käsitellyt laajemmin.

Lineaarisen yhtälösystemin

$$Ax = b, \quad (4-65)$$

missä A on reaalinen $n \times n$ -matriisi sekä x ja $b \in \mathbb{R}^n$, alustettu muoto on

$$M_1^{-1}AM_2^{-1}y = M_1^{-1}b, \quad (4-66)$$

missä $M = M_1M_2$ on alustusmatriisi, $M_2^{-1}y = x$ sekä M_1 vasen ja M_2 oikea alustusmatriisi. Sopivan iteroinnin suppenemista kiihdyttävän alustusmenetelmän valinta näyttää usein olevan ratkaisumenetelmän valintaa tärkeämpi kysymys. Esimerkiksi seuraava alustettu konjugaattigradienttimenetelmä on symmetrisille ja positiividefiniiteille matriiseille tarkoitettu ratkaisumenetelmä:

Algoritmi 4-6. Alustettu konjugaatti-gradienttimenetelmä.

1. Muodosta M , $r_0 = b - Ax_0$, $d_0 = M^{-1}r_0$, $\tau_0 = r_0^T d_0$.
2. Iteraatioaskeleet $i = 0, 1, 2, \dots$ kunnes likiarvo x_{i+1} on riittävän tarkka:

$$2a. s = Ad_i, \alpha_i = \tau_i / d_i^T s$$

$$2b. x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i, r_{i+1} = r_i - \alpha_i s$$

$$2c. z = M^{-1}r_{i+1}$$

$$2d. \tau_{i+1} = r_{i+1}^T z, \beta_i = \tau_{i+1} / \tau_i$$

$$2e. d_{i+1} = z + \beta_i d_i$$

Sovellettaessa iteratiivisia menetelmiä rakenteiden mekaniikan tehtäviin —esimerkiksi yhtälöön (4-60) —tulee Kouhian ja Mikkolan (2000a) mukaan esille mm. seuraavia heikkouksia:

1. Epälinearisille kuoritehtäville yleisesti käytetyillä ns. epätäydellisillä hajotelmapohjustuksilla ei ole saatu tyydyttäviä tuloksia.
2. Indefiniiteillä matriiseilla pohjustukset johtavat iteroinnin hitaaseen suppenemiseen.
3. Tangentiaaliseen jäykkyysmatriisiin perustuvaa askelsuunnan valintaa ei voida käyttää yhtä helposti kuin suorissa yhtälönratkaisumenetelmissä (ks. luku 4.4.6.3).

4.4.4 Jacobin matriisin päivittäminen

Edellä käsitellyissä ratkaisumenetelmissä tarvittavien Jacobin matriisien (esimerkiksi tangentiaalinen jäykkyydsmatriisi K) laskeminen vie dimensioltaan suurissa tehtävissä huomattavan osan koko tehtävän ratkaisemiseen kuluva ajasta, joten usein Jacobin matriiseille kannattaa käyttää approksimaatioita, joiden päivittäminen ei ole niin raskasta (Allgower ja Georg 1990). Approksimaatioiden käyttö vaikuttaa kuitenkin korjausiteraatioiden suppenemisnopeuteen, joka saattaa laskea esimerkiksi kvadraattisesta superlineaariseen tai lineaariseen.

Jos $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on sileä kuvaus ja $F(x^*) = 0$ sekä Jacobin matriisin $F'(x^*)$ rangi on maksimaalinen, niin Newton-iteraatio

$$x_{i+1} = x_i - F'(x_i)^{-1} F(x_i) \quad (4-67)$$

on lokaalisesti kvadraattisesti suppeneva:

$$\|x_{i+1} - x^*\|_2 = O(\|x_i - x^*\|_2^2), \quad (4-68)$$

jos aloituspiste x_0 on riittävän lähellä nollakohtaa x^* (Allgower ja Georg 1990).

Modifioitu Newton-iteraatio tai kuoro-Newton-iteraatio

$$x_{i+1} = x_i - F'(x_0)^{-1} F(x_i) \quad (4-69)$$

on lokaalisesti lineaarisesti suppeneva:

$$\|x_{i+1} - x^*\|_2 = \beta \|x_i - x^*\|_2, \text{ jollakin } \beta \in (0, 1), \quad (4-70)$$

jos aloituspiste x_0 on riittävän lähellä nollakohtaa x^* ja Jacobin matriisi $F'(x_0)$ on riittävän lähellä Jacobin matriisia $F'(x^*)$ (Allgower ja Georg 1990).

Jos Jacobin matriisilla ei ole mitään erityisominaisuuksia, usein käytetään Broydenin hyvän päivityksen kaavaa, joka ei säilytä symmetriaa eikä positiividefiniittisyyttä (Allgower ja Georg 1990): Taylorin kaavan mukaan

$$F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = F(x_{i+1}) - F(x_i) + O(\|x_{i+1} - x_i\|_2^2), \quad (4-71)$$

mistä saadaan Jacobin matriisin $F'(x_i)$ likiarvolle B sekanttiyhtälö

$$Bs_i = y_i, \quad (4-72)$$

missä

$$s_i = x_{i+1} - x_i \text{ ja} \quad (4-73)$$

$$y_i = F(x_{i+1}) - F(x_i). \quad (4-74)$$

Vaativalla, että Newton-tyyppisen iteraation (4-10) Jacobin matriisin likiarvo A_{i+1} toteuttaa sekanttiyhtälön ja minimoi etäisyyden matriisiin A_i , saadaan Broydenin hyvän päivityksen

kaava (Allgower ja Georg 1990): Minimointitehtävän $\min \{ \| A - A_i \|_F \mid A s_i = y_i \}$, A on reaalinen $n \times n$ -matriisi}, missä Frobenius-normi

$$\| A \|_F = (\sum_{i,j=1, \dots, n} A_{(ij)}^2)^{1/2}, \quad (4-75)$$

ratkaisu

$$B_{i+1} = B_i + (y_i - B_i s_i) s_i^T / \| s_i \|_2^2. \quad (4-76)$$

Vastaavalle kääntematriisille pätee (Kouhia ja Mikkola 2000a)

$$B_{i+1}^{-1} = B_i^{-1} + (y_i - B_i^{-1} s_i) s_i^T B_i^{-1} / s_i^T B_i^{-1} s_i. \quad (4-77)$$

Broydenin hyvän päivityksen kaavan mukaisen Newton-tyyppisen iteraation

$$x_{i+1} = x_i - B_i^{-1} F(x_i) \quad (4-78)$$

suppeneminen on superlineaarista:

$$\| x_{i+1} - x^* \|_2 / \| x_i - x^* \|_2 \rightarrow 0, \text{ kun } i \rightarrow \infty, \quad (4-79)$$

jos aloituspiste x_0 on riittävän lähellä nollakohtaa x^* ja Jacobin matriisin likiarvo B_0 on riittävän lähellä Jacobin matriisia $F'(x_0)$. Vastaavat päivityskaavat ja suppenemisnopeudet voidaan johtaa myös Moore—Penrose-käännösmatriisille (Allgower ja Georg 1990).

Jacobin matriisin erityisominaisuudet kuten symmetria, harvuus tai positiividefiniittisyys on syytä huomioida varsinkin silloin, kun matriisin dimensio n on suuri. Kvasi-Newton-päivityksiä, jotka säilyttävät erityisrakenteen, ovat mm. ns. kakkosrangipäivitykset Broyden—Fletcher—Goldfarb—Shanno (BFGS) (Kouhia ja Mikkola 2000a)

$$B_{i+1} = B_i + y_i y_i^T / y_i^T s_i - B_i s_i s_i^T B_i / s_i^T B_i s_i \text{ ja} \quad (4-80)$$

$$B_{i+1}^{-1} = B_i^{-1} + \{ s_i (s_i - B_i^{-1} y_i)^T + (s_i - B_i^{-1} y_i) s_i^T \} / s_i^T y_i - (s_i - B_i^{-1} y_i)^T y_i s_i s_i^T / (s_i^T y_i)^2 \quad (4-81)$$

tai Davidon—Fletcher—Powell (DFP), jotka saadaan vastaavasti yhtälöistä (4-80) ja (4-81) duaalisella muunnoksella suorittamalla korvaukset

$$s_i \leftrightarrow y_i, B_i \leftrightarrow B_i^{-1} \text{ ja } B_{i+1} \leftrightarrow B_{i+1}^{-1}. \quad (4-82)$$

Rakenteiden mekaniikan sovellusten yhteydessä kvasi-Newton-päivityksiä ovat käsitelleet myös mm. Matthies ja Strang (1979) sekä Crisfield (1982).

4.4.5 Askelpituuden mukauttaminen

Algoritmin 4-4 kohdassa 2 valittava askelpituus h tai vastaavasti algoritmin 4-5 kohdan 2 kaarenpituuden muutos Δs riippuvat luonnollisesti jollakin tavalla tarkkuudesta, jolla ratkaisukäyrää halutaan seurata, mutta askelpituudelle voidaan esittää myös tarkempia arvioita.

Eriksson ja Kouhia (1995) ovat tarkastelleet askelpituuden päivittämistä korjausvaiheen aikana. Seuraavaksi tarkastellaan ainoastaan ennustevaiheen askelpituuden päivittämistä Allgowerin ja Georgin (1990) esittämällä Newton-korjausvaiheen kontraktiosuhteeseen perustuvalla asymptoottisella strategialla ja Newton-korjausvaiheen virhemalliin perustuvalla strategialla, jota voidaan soveltaa edellistä laajemmin. Molemmissa malleissa päivitetään Eulerin ennustetta, joka on ensimmäisen asteen ennuste. Myös korkeampiasteisille ennusteille (Wagner 1990 ja Eriksson 1993), jotka voivat perustua esimerkiksi polynomi-interpolointiin, on kehitetty erilaisia päivitysmenetelmiä (Allgower ja Georg 1990).

4.4.5.1 Asymptoottinen malli

Jos on löydetty ratkaisukäyrän piste $u \in H^{-1}(0)$ ja valittu askelpituus h , niin algoritmin 4-4 kohdasta 3 saadaan Eulerin ennuste $v(h) = u + h t(H'(u))$ ja Newton-tyyppisellä iteroinnilla korjattu seuraava ratkaisukäyrän piste $z(h) \in H^{-1}(0)$. Asymptoottinen askelpituuden muuttaminen perustuu jälkiarvioon siitä, mikä olisi ollut paras askelpituus \tilde{h} , jolla olisi saavutettu ratkaisukäyrän piste $z(\tilde{h})$ lähdetessä Newton-tyyppiseen iterointiin Eulerin ennusteella $v(h)$ ratkaisukäyrän pisteestä u . Ideaalinen askelpituus \tilde{h} määritetään asymptoottisilla arvioilla ja sitä käytetään seuraavana ennusteaskelen pituutena. Tämä ennusteaskelen pituuden mukauttamismenetelmä riippuu pääasiassa käytetystä ennuste—korjausmenetelmästä ja kriteeristä, jonka perusteella paras askelpituus valitaan.

Algoritmin 4-4 mukaisen edellä mainitun ennusteen $v(h)$ ja ensimmäisen korjauksen

$$w(h) \equiv v(h) - H'(v(h))^+ H(v(h)) \quad (4-83)$$

avulla määritellään korjausvaiheen kontraktiosuhde

$$k(u, h) \equiv \| H'(v(h))^+ H(w(h)) \|_2 / \| H'(v(h))^+ H(v(h)) \|_2, \quad (4-84)$$

jonka askelpituuden h suhteen asymptoottista käyttäytymistä kuvaa seuraava lemma:

Lemma 4-9. Jos ratkaisukäyrän c kaarevuus pisteessä u poikkeaa nolasta, jolloin

$$H''(u)[t(H'(u)), t(H'(u))] \neq 0, \quad (4-85)$$

missä $H''(u)[\cdot, \cdot] : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ on bilineaarikuvaus, niin kontraktiosuhde

$$k(u, h) = k_2(u)h^2 + O(h^3), \quad (4-86)$$

missä $k_2(u) \geq 0$ on ratkaisun u suhteen sileä ja askelpituudesta h riippumaton.

Jos määritellään tavoiteltava kontraktiosuhde k^{\sim} , joka riippuu kuvauksesta H ja varmuudesta, jolla ratkaisukäyrää $H^{-1}(0)$ pyritään seuraamaan, niin edellä mainittu ideaalinen askelpituus h^{\sim} saadaan lemmasta 4-9: Hyväksymällä ideaalinen askelpituus h^{\sim} ehdolla $k(u, h^{\sim}) \approx k^{\sim}$ eli asettamalla $k(u, h^{\sim}) = k_2(u)h^{\sim 2} + O(h^{\sim 3}) \approx k_2(u)h^{\sim 2} = k^{\sim}$ saadaan yhtälö

$$k_2(u) = k^{\sim} / h^{\sim 2}. \quad (4-87)$$

Lemman 4-9 asympotoottisesta arviosta

$$k(u, h) \approx k_2(u) h^2 \quad (4-88)$$

ja yhtälöstä (4-87) saadaan ideaalinen askelpituus

$$h^{\sim} = h \{ k^{\sim} / k(u, h) \}^{1/2}, \quad (4-89)$$

jota käytetään seuraavan ennusteaskeleen pituutena.

Askelpituus voidaan mukauttaa kontraktiosuhteen lisäksi myös muiden asympotoottisten arvioiden avulla. Esimerkiksi ensimmäiseen korjaukseen liittyvä etäisyys

$$\delta(u, h) \equiv \| H'(v(h))^+ H(v(h)) \|_2 \quad (4-90)$$

approksimoi ennusteen $v(h)$ etäisyyttä ratkaisukäyrästä sekä askeleen lähtöpistettä u ja ennustetta $v(h)$ vastaavien tangenttien välinen kulma

$$\alpha(u, h) \equiv \arccos \{ t(H'(u))^T t(H'(v(h))) \} \quad (4-91)$$

kertoo ratkaisukäyrän kaarevuudesta. Näiden arvioiden askelpituuden h suhteen asympotoottista käyttäytymistä kuvaa seuraava lemma 4-9 vastaava lemma:

Lemma 4-10. Etäisyydelle δ ja kulmalle α pätee:

$$\delta(u, h) = \delta_2(u) h^2 + O(h^3) \text{ ja} \quad (4-92)$$

$$\alpha(u, h) = \alpha_1(u) h + O(h^2), \quad (4-93)$$

missä $\delta_2(u)$ ja $\alpha_1(u)$ ovat ratkaisupisteen u suhteen sileitä ja askelpituudesta h riippumattomia.

Jos määritellään tavoiteltava etäisyys δ^{\sim} ja tavoiteltava kulma α^{\sim} , saadaan ideaaliseksi askelpituudeksi etäisyyden mukaan

$$h^{\sim} = h \{ \delta^{\sim} / \delta(u, h) \}^{1/2} \quad (4-94)$$

ja kulman mukaan

$$h^{\sim} = h \alpha^{\sim} / \alpha(u, h). \quad (4-95)$$

Jos korjausvaiheen iteraatiokuvauksena käytetään modifioitua Newtonin kuvausta $w = N(v) = v - H'(u)^+ H(v)$, niin vastaavan kontraktiosuhteen

$$k(u, h) \equiv \| H'(u)^+ H(w(h)) \|_2 / \| H'(u)^+ H(v(h)) \|_2 \quad (4-96)$$

asymptoottiseksi arvioksi ja ideaaliseksi askelpituudeksi saadaan

$$k(u, h) = k_1 h + O(h^2) \text{ ja} \quad (4-97)$$

$$h \sim = h \tilde{k} / k(u, h). \quad (4-98)$$

Yhtälöiden (4-89) ja (4-98) kaltaisia askelpituuden päivitysmenetelmiä ovat käyttäneet mm. Crisfield (1981, 1982, 1983), Ramm (1981), Riks (1984), Simo, Wriggers, Schweizerhof ja Taylor (1986) sekä Bellini ja Chulya (1987). Näissä sovelluksissa kontraktiosuhde k on yleensä korvattu iteraatioiden lukumäärällä.

4.4.5.2 Virhemalli

Jos on löydetty ratkaisukäyrän piste $u \in H^{-1}(0)$ ja valittu askelpituus h , niin algoritmin 4-4 kohdasta 3 saadaan Eulerin ennuste

$$v_0(h) = u + ht(H'(u)). \quad (4-99)$$

Jos T on korjausvaiheen iteraatiokuvaus, niin korjattu ennuste

$$v_{i+1}(h) = T(v_i(h)). \quad (4-100)$$

Newtonin iteraatioissa $T(v_i(h)) = v_i(h) - H'(v_i(h))^+ H(v_i(h))$. Lisäksi oletetaan, että askelpituus $h > 0$ on niin pieni, että on olemassa raja-arvo

$$v_\infty(h) \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} v_i(h) \in H^{-1}(0), \quad (4-101)$$

ja että erotuksen $v_0(h) - v_\infty(h)$ ja tangentin $t(H'(u))$ välinen kulma on $\pi/2 + O(h)$. Tällöin myös erotuksen $v_0(h) - c(h)$ ja tangentin $t(H'(u))$ välinen kulma on $\pi/2 + O(h)$ ja $\| c(h) - v_\infty(h) \|_2 = O(h^3)$. Taylorin kehitelmän $c(h) - v_0(h) = c''(0) h^2 / 2 + O(h^3)$ avulla saadaan virhenormi

$$\| v_\infty(h) - v_0(h) \|_2 = \| c''(0) \|_2 h^2 / 2 + O(h^3). \quad (4-102)$$

Ratkaiseva oletus on se, että on olemassa sellainen vakio $\gamma > 0$, että modifioidulle virheelle

$$\varepsilon_i(h) \equiv \gamma \| v_\infty(h) - v_i(h) \|_2 \quad (4-103)$$

pätee

$$\varepsilon_{i+1}(h) \leq \psi(\varepsilon_i(h)), \quad (4-104)$$

missä virhemallifunktio $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on iteraatiokuvauksesta T riippuva tunnettu monotoninen funktio, jolle pätee $\psi(0) = 0$. Newtonin iteraatiolle saadaan Newton–Kantorovitch-teoriasta funktiot

$$\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2 / (3 - 2\varepsilon), 0 \leq \varepsilon \leq 1, \text{ tai} \quad (4-105)$$

$$\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2 (\varepsilon + (10 - \varepsilon^2)^{1/2}) / (3 - 2\varepsilon), 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (4-106)$$

Jos näillä oletuksilla raja-arvo $v_\infty(\mathbf{h})$ saavutetaan iteroinnin lopetuskriteerin määräämällä tarkkuudella korjausiteraation k jälkeen, niin iteraatiosuhteelle ω saadaan seuraavat arviot:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{h}) &\equiv \|v_k(\mathbf{h}) - v_{k-1}(\mathbf{h})\|_2 / \|v_k(\mathbf{h}) - v_0(\mathbf{h})\|_2 \\ &\approx \|v_\infty(\mathbf{h}) - v_{k-1}(\mathbf{h})\|_2 / \|v_\infty(\mathbf{h}) - v_0(\mathbf{h})\|_2 \\ &= \varepsilon_{k-1}(\mathbf{h}) / \varepsilon_0(\mathbf{h}) \\ &\leq \psi^{k-1}(\varepsilon_0(\mathbf{h})) / \varepsilon_0(\mathbf{h}). \end{aligned} \quad (4-107)$$

Tämän perusteella modifioidun virheen $\varepsilon_0(\mathbf{h})$ likiarvoksi otetaan yhtälön

$$\omega(\mathbf{h}) = \psi^{k-1}(\varepsilon) / \varepsilon \quad (4-108)$$

ratkaisu ε .

Jos määritellään tavoiteltava iteraatiolukumäärä k^\sim , niin ideaalisella askelpituudella h^\sim raja-arvo $v_\infty(h^\sim)$ tulisi saavuttaa korjausiteraation k^\sim jälkeen eli modifioidun virheen $\varepsilon_k(h^\sim)$ tulisi olla korjausiteraation k^\sim jälkeen niin pieni, että iteroinnin lopetus- eli suppenemiskriteeri täyttyy. Epäyhtälön $\varepsilon_k(h^\sim) \leq \psi^{k^\sim}(\varepsilon_0(h^\sim))$ perusteella modifioidun virheen $\varepsilon_0(h^\sim)$ likiarvoksi otetaan yhtälön

$$\psi^{k^\sim}(\varepsilon) = \psi^k(\varepsilon_0(\mathbf{h})) \quad (4-109)$$

ratkaisu ε . Asymptoottisen kehitelmän (4-102) perusteella saadaan ideaalinen askelpituus

$$h^\sim \approx h \{ \varepsilon_0(h^\sim) / \varepsilon_0(\mathbf{h}) \}^{1/2}. \quad (4-110)$$

Algoritmissa 4-4 uuden askelpituuden h^\sim laskeminen virhemallin mukaan edellisen askeleen askelpituudesta $h > 0$ tapahtuu lisäämällä seuraavat vaiheet algoritmin kohtaan 3:

- 3a. $\omega = \|v_k - v_{k-1}\|_2 / \|v_k - v_0\|_2$; k on edellisen askeleen iteraatioiden lukumäärä.
- 3b. Ratkaistaan ε yhtälöstä $\omega = \psi^{k-1}(\varepsilon) / \varepsilon$.
- 3c. Ratkaistaan ε^\sim yhtälöstä $\psi^{k^\sim}(\varepsilon^\sim) = \psi^k(\varepsilon)$; k^\sim on tavoiteltava iteraatiolukumäärä.
- 3d. $h^\sim = h \{ \varepsilon^\sim / \varepsilon \}^{1/2}$ ja $h/2 \leq h^\sim \leq 2h$.

Jos korjausvaiheen iteraatiokuvauksena käytetään modifioitua Newtonin kuvausta $w = N(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{H}'(\mathbf{u})^+ \mathbf{H}(\mathbf{v})$, niin virhemallifunktioksi ja ideaaliseksi askelpituudeksi saadaan

$$\psi(\varepsilon) = \theta h \varepsilon, 0 < \theta < 1, \text{ ja} \quad (4-111)$$

$$\tilde{h} = h \omega^{\frac{\tilde{k}-k}{(k-1)(2+\tilde{k})}} \quad (4-112)$$

4.4.6 Bifurkaatiopiste

Allgower ja Georg (1990) ovat esittäneet seuraavan määritelmän bifurkaatiopisteelle:

Määritelmä 4-10. Bifurkaatiopiste. Olkoon $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sileä kuvaus ja $c : J \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ sileä käyrä, joka on määritelty nollan sisältävällä avoimella välillä J ja on parametrisoitu kaarenpituuden s suhteen siten, että $H(c(s)) = 0$ kaikilla $s \in J$. Piste $c(0)$ on yhtälön $H = 0$ bifurkaatiopiste, jos on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että jokaisessa nollan ympäristössä on kuvauksen H nollakohta, joka ei ole käyrän osalla $c(-\varepsilon, \varepsilon)$.

4.4.6.1 Bifurkaatioyhtälö Liapunov—Schmidt-reduktiolla

Määritelmistä 4-4 ja 4-10 seuraa, että yhtälön $H = 0$ bifurkaatiopisteen $c(0)$ on oltava kuvauksen H singulaarinen piste. Siis Jacobin matriisin $H'(c(0))$ nolla-avaruuden dimensio on vähintään kaksi (Allgower ja Georg 1990).

Oletus 4-3. Olkoon u^* sileän kuvauksen $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nollakohta siten, että $\dim \ker H'(u^*) = 2$.

Allgower ja Georg (1990) ovat käyttäneet yksinkertaista bifurkaatiopistettä käsitellessään Liapunov—Schmidt-reduktiota: Käytetään hajotelmia

$$\mathbb{R}^{n+1} = E_1 \oplus E_2 \text{ ja} \quad (4-113)$$

$$\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2, \quad (4-114)$$

missä $E_1 \equiv \ker H'(u^*)$, $E_2 \equiv E_1^\perp$, $F_2 \equiv \text{range } H'(u^*)$ ja $F_1 \equiv F_2^\perp$ sekä $\dim E_1 = 2$, $\dim E_2 = n - 1$, $\dim F_1 = 1$ ja $\dim F_2 = n - 1$. Merkitsemällä $\partial_i \equiv \partial/\partial u_i$ saadaan

$$H(u) = H(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} H_1(u_1, u_2) \\ H_2(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad (4-115)$$

missä $u_i \in E_i$ ja $H_i : E_i \rightarrow F_i$, $i = 1, 2$, sekä

$$H'(u) = \begin{pmatrix} \partial_1 H_1(u_1, u_2) & \partial_2 H_1(u_1, u_2) \\ \partial_1 H_2(u_1, u_2) & \partial_2 H_2(u_1, u_2) \end{pmatrix} \quad (4-116)$$

ja erityisesti

$$H'(u^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 H_2(u_1^*, u_2^*) \end{pmatrix}, \quad (4-117)$$

missä $\partial_2 H_2(u_1^*, u_2^*)$ on ei-singulaarinen $(n-1) \times (n-1)$ -matriisi. Koska yhtälöllä $H_2(u_1^*, u_2^*) = 0$ on ratkaisu $(u_1, u_2) = (u_1^*, u_2^*)$, niin implisiittifunktioteoreeman (Rudin 1976) mukaan on olemassa pisteiden u_1^* ja u_2^* ympäristöt $U_1 \in E_1$ ja $U_2 \in E_2$ sekä sileä kuvaus $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ siten, että

$$H_2(u_1, u_2) = 0, \text{ jos ja vain jos } u_2 = \varphi(u_1) \quad (4-118)$$

kaikilla $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$. Yhtälöllä $H_2(u_1, u_2) = 0$ on siis olemassa lokaalinen parametrisointi muuttujan u_1 suhteen 2-ulotteisessa avaruudessa E_1 . Lisäksi yhtälö $H(u) = 0$ on ekvivalentti yhtälöparille $u_2 = \varphi(u_1)$ ja $H_1(u_1, u_2) = 0$ tai yhtälölle

$$b(u_1) \equiv H_1(u_1, \varphi(u_1)) = 0 \quad (4-119)$$

kaikilla $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$. Yhtälöä (4-119) kutsutaan yhtälön $H(u) = 0$ bifurkaatioyhtälöksi singulaarisessa pisteessä u^* .

Derivoimalla yhtälö $H_2(u_1, \varphi(u_1)) = 0$ saadaan pisteessä $u_1 = u_1^*$

$$\partial_1 H_2(u^*) + \partial_2 H_2(u^*) \varphi'(u_1^*) = 0. \quad (4-120)$$

Koska $\partial_1 H_2(u^*) = 0$ ja $\partial_2 H_2(u^*)$ on ei-singulaarinen, niin

$$\varphi'(u_1^*) = 0. \quad (4-121)$$

Derivoimalla kahdesti yhtälö $b(u_1) = H_1(u_1, \varphi(u_1))$ saadaan

$$b'(u_1) = \partial_1 H_1(u) + \partial_2 H_1(u) \varphi'(u_1) \text{ ja} \quad (4-122)$$

$$b''(u_1) = \partial_1^2 H_1(u) + 2\partial_2 \partial_1 H_1(u) \varphi'(u_1) + \partial_2^2 H_1(u) [\varphi'(u_1), \varphi'(u_1)] + \partial_2 H_1(u) \varphi''(u_1), \quad (4-123)$$

missä $u = (u_1, \varphi(u_1))$ ja bilineaarikuvaus $\partial_2^2 H_1(u) [\cdot, \cdot] : U_1 \times U_1 \rightarrow F_1$. Pisteessä $u_1 = u_1^*$

$$b(u_1^*) = 0 \quad (4-124)$$

$$b'(u_1^*) = 0 \text{ ja} \quad (4-125)$$

$$b''(u_1^*) = \partial_1^2 H_1(u^*). \quad (4-126)$$

Usein Hessin matriisi $b''(u_1^*)$ on ei-singulaarinen eli sen molemmat ominaisarvot ovat nollasta poikkeavia. Tässä tapauksessa ratkaisujoukon $b^{-1}(0)$ lokaalista käyttäytymistä voidaan kuvata Morsen lauseen 2-ulotteisella versiolla (Allgower ja Georg 1990):

Lemma 4-11. Olkoon $u_1^* \in \mathbb{R}^2, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sileä, $b(u_1^*) = b'(u_1^*) = 0$ ja Hessin matriisilla $b''(u_1^*)$ nollasta poikkeavat ominaisarvot ω_1 ja ω_2 . Silloin on olemassa sellaiset avoimet

ympäristöt U ja $V \subset \mathbb{R}^2$, että $0 \in U$ ja $u_1^* \in V$, sekä diffeomorfismi $\psi : U \rightarrow V$ siten, että $\psi(0) = u_1^*$ ja $b(\psi(\xi_1, \xi_2)) = \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2$, missä $(\xi_1, \xi_2) \in U$.

Jos Hessin matriisin $b'(u_1^*)$ molemmat ominaisarvot ovat samanmerkkiset, niin u_1^* on bifurkaatiokuvauksen b eristetty nollakohta, jolloin siis u^* on kuvauksen H eristetty nollakohta. Tällaisia pisteitä ei voida saavuttaa seuraamalla yhtälön $H = 0$ ratkaisukäyrää.

Jos Hessin matriisin $b'(u_1^*)$ ominaisarvot ovat erimerkkiset, niin ratkaisujoukon $b^{-1}(0)$ lokaalinen käyttäytyminen pisteen u_1^* ympäristössä —ja siis ratkaisujoukon $H^{-1}(0)$ lokaalinen käyttäytyminen pisteen u^* ympäristössä —on esitettävissä kahdella käyrällä, jotka leikkaavat toisensa pisteessä u_1^* —ja vastaavasti pisteessä u^* —siten, että vastaavat tangentit ovat lineaarisesti riippumattomat. Yksinkertainen bifurkaatiopiste voidaan tämän perusteella määritellä seuraavalla tavalla (Allgower, Chien ja Georg 1990):

Määritelmä 4-11. Yksinkertainen bifurkaatiopiste. Olkoon $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sileä kuvaus. Piste u^* on yhtälön $H = 0$ yksinkertainen bifurkaatiopiste, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

- A. $H(u^*) = 0$;
- B. $\dim \ker H'(u^*) = 2$, jolloin $\dim \ker H'(u^*)^T = 1$, ja
- C. symmetrisellä bilineaarikuvauksella $e^T H''(u^*)[\cdot, \cdot] : \ker H'(u^*) \times \ker H'(u^*) \rightarrow \mathbb{R}$ on yksi positiivinen ja yksi negatiivinen ominaisarvo; tässä $\ker H'(u^*)^T = \text{span}\{e\}$, $0 \neq e \in \mathbb{R}^n$.

Määritelmässä 4-11 kuvaus $e^T H$ vastaa edellä käsiteltyä komponenttikuvausta H_1 . Liapunov–Schmidt-reduktion tulokset voidaan nyt esittää yksinkertaisen bifurkaatiopisteen määritelmän 4-11 avulla seuraavan lauseen muodossa (Allgower ja Georg 1990):

Lause 4-4. Olkoon $u^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ yhtälön $H = 0$ yksinkertainen bifurkaatiopiste. Silloin on olemassa kaarenpituuden s mukaan parametrisoidut sileät käyrät $c_1(s), c_2(s) \in \mathbb{R}^{n+1}$, jotka ovat määriteltyjä välillä $(-\varepsilon, \varepsilon)$ riittävän pienellä $\varepsilon > 0$ siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

- a. $H(c_i(s)) = 0$, $i \in \{1, 2\}$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$;
- b. $c_i(0) = u^*$, $i \in \{1, 2\}$;
- c. $c_1'(0)$ ja $c_2'(0)$ ovat lineaarisesti riippumattomat;
- d. $u^* \notin \text{closure}(H^{-1}(0) \setminus (\text{range } c_1 \cup \text{range } c_2))$.

Derivoimalla kahdesti yhtälö $e^T H(c_i(s)) = 0$ saadaan seuraava lemma, joka kuvaa ratkaisukäyrien tangentteja bifurkaatiopisteessä u^* (Allgower ja Georg 1990):

Lemma 4-12. Jos $u^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ on yhtälön $H = 0$ yksinkertainen bifurkaatiopiste, niin

- a. $\ker H'(u^*) = \text{span} \{c_1'(0), c_2'(0)\}$ ja
- b. $e^T H''(u^*)[c_i'(0), c_i'(0)] = 0, i \in \{1, 2\}$.

Seuraava lause antaa kriteerin, jonka perusteella yksinkertainen bifurkaatiopiste voidaan havaita ratkaisukäyrää seurattaessa (Allgower ja Georg 1990):

Lause 4-5. Jos $u^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ on yhtälön $H = 0$ yksinkertainen bifurkaatiopiste, niin laajennetun Jacobin matriisin determinantin

$$\det \begin{pmatrix} H'(c_i(s)) \\ c_i'^T \end{pmatrix} \quad (4-127)$$

merkki vaihtuu parametriarvolla $s = 0, i = 1, 2$.

Edellisen lauseen perusteella yksinkertainen bifurkaatiopiste havaitaan suunnanvaihdoksena. Myös käännteinen tapaus pätee: Jos $c(0)$ on kuvauksen H eristetty singulaarinen piste siten, että yhtälön (4-127) determinantin etumerkki vaihtuu parametriarvolla $s = 0$, niin $c(0)$ on yhtälön $H = 0$ bifurkaatiopiste, mutta ei välttämättä yksinkertainen (Allgower ja Georg 1990).

Seuraavan lauseen mukaan Euler–Newton-tyyppisellä polunseurausmenetelmällä ratkais u-käyrää voidaan seurata ohi yksinkertaisen bifurkaatiopisteen (Allgower ja Georg 1990):

Lause 4-6. Jos $u^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ on yhtälön $H = 0$ yksinkertainen bifurkaatiopiste, niin on olemassa joukon $\{u \in H^{-1}(0) \mid u \text{ on kuvauksen } H \text{ säännöllinen piste}\}$ ympäristö U sekä ε ja $\delta > 0$ siten, että

- a. suppenemislauseen 4-3 johtopäätökset ovat voimassa ja
- b. $u^* + s(c_1'(0) + z) \in U$, kun $0 < |s| < \varepsilon$ ja $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ sekä $\|z\|_2 < \delta$.

4.4.6.2 Bifurkaatioyhtälö ja bifurkaatiopisteiden lajittelu

Yksinkertaiselle bifurkaatiopisteelle voidaan antaa lauseen 4.4 avulla myös seuraava määritelmää 4-11 vastaava määritelmä (Seydel 1994 sekä Huitfeldt ja Ruhe 1990):

Määritelmä 4-12. Yksinkertainen bifurkaatiopiste. Käytetään merkintöjä $f_q \equiv \partial f / \partial q$ ja $f_\lambda \equiv \partial f / \partial \lambda$. Piste (q_{bp}, λ_{bp}) on yhtälön $f(q, \lambda) = 0$ yksinkertainen bifurkaatiopiste, jos

- A. $f(q_{bp}, \lambda_{bp}) = 0$;
- B. $\text{rank } f_q(q_{bp}, \lambda_{bp}) = n - 1$;
- C. $f_\lambda(q_{bp}, \lambda_{bp}) \in \text{range } f_q(q_{bp}, \lambda_{bp})$ sekä
- D. täsmälleen kaksi ratkaisuhaaraa, joilla on toisistaan eroavat tangentit, leikkaavat pisteessä (q_{bp}, λ_{bp}) .

Ehto D voidaan ilmaista täsmällisemmin ns. bifurkaatioyhtälön avulla, jota tarkastellaan seuraavaksi tasapainoyhtälön (4-8) merkinnöin (Keller 1977 sekä Pajunen ja Tuomala 1997):

Tasapainoyhtälön (4-8) raja- tai bifurkaatiopisteessä eli ns. kriittisessä pisteessä (q_{cr}, λ_{cr}) tangentiaalinen jäykkymatriisi $K(q_{cr}, \lambda_{cr}) \equiv -(\partial f / \partial q)(q_{cr}, \lambda_{cr})$ on singulaarinen. Merkitsemällä $f_q \equiv (\partial f / \partial q)(q_{cr}, \lambda_{cr})$ voidaan m-kertaista kriittistä pistettä vastaavat nolla- ja kuva-avaruudet määritellä seuraavasti:

$$\ker f_q = \text{span } \{\varphi_i \mid \varphi_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m\} \text{ ja} \quad (4-128)$$

$$\text{range } f_q = \{x \mid \psi_i^T x = 0, x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m\}, \quad (4-129)$$

jos $\psi_i \in \mathbb{R}^n$ valitaan siten, että $\psi_i^T \varphi_j = \delta_{ij}$ kaikilla $i, j = 1, \dots, m$.

Derivoimalla tasapainoyhtälö (4-8) sekä merkitsemällä $f_\lambda \equiv (\partial f / \partial \lambda)(q_{cr}, \lambda_{cr})$ ja $f_{qq} \equiv (\partial^2 f / \partial q^2)(q_{cr}, \lambda_{cr})[\cdot, \cdot]$ saadaan

$$f_q dq/ds + f_\lambda d\lambda/ds = 0 \text{ ja} \quad (4-130)$$

$$f_{qq} dq/ds dq/ds + f_q d^2q/ds^2 + 2 f_{q\lambda} dq/ds d\lambda/ds + f_{\lambda\lambda} d\lambda/ds d\lambda/ds + f_\lambda d^2\lambda/ds^2 = 0. \quad (4-131)$$

Yhtälöllä (4-130) on ratkaisu, jos $f_\lambda d\lambda/ds \in \text{range } f_q$ eli $\psi_i^T f_\lambda d\lambda/ds = 0$, siis jos

$$f_\lambda \in \text{range } f_q \text{ (bifurkaatiopiste) tai} \quad (4-132)$$

$$f_\lambda \notin \text{range } f_q, \text{ mutta } d\lambda/ds = 0 \text{ (käännepiste).} \quad (4-133)$$

Bifurkaatiopisteen tapauksessa on olemassa sellainen yksikäsitteinen $v \in \mathbb{R}^n$, että

$$f_q v + f_\lambda = 0 \text{ ja } \psi_i^T v = 0. \quad (4-134)$$

Yhtälön (4-130) yleinen ratkaisu

$$dq/ds = \xi_0 v + \sum_{j=1, \dots, m} \xi_j \varphi_j, \quad (4-135)$$

missä $\xi_0 = d\lambda/ds$.

Yhtälöllä (4-131) on ratkaisu, jos

$$\psi_i^T (f_{qq} dq/ds dq/ds + 2 f_{q\lambda} dq/ds d\lambda/ds + f_{\lambda\lambda} d\lambda/ds d\lambda/ds) = 0. \quad (4-136)$$

Sijoittamalla yleinen ratkaisu (4-135) yhtälöön (4-136) saadaan yhtälön (4-131) ratkaisun d^2q/ds^2 olemassaololle välttämätön ehto:

$$\sum_{j=1, \dots, m} \sum_{k=1, \dots, m} a_{ijk} \xi_j \xi_k + \sum_{j=1, \dots, m} b_{ij} \xi_j \xi_0 + c_i \xi_0^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4-137)$$

missä

$$a_{ijk} = a_{jik} = \psi_i^T f_{qq} \phi_j \phi_k, \quad (4-138)$$

$$b_{ij} = \psi_i^T (f_{qq} v + f_{q\lambda}) \phi_j \text{ ja} \quad (4-139)$$

$$c_i = \psi_i^T (f_{qq} v v + 2f_{q\lambda} v + f_{\lambda\lambda}). \quad (4-140)$$

Lisäämällä normalisointiyhtälö

$$\sum_{j=1, \dots, m} \xi_j^2 = 1 \quad (4-141)$$

saadaan yksinkertaisen bifurkaatiopisteen tapauksessa $m = 1$ bifurkaatioyhtälö

$$a \xi_1^2 + b \xi_1 \xi_0 + c \xi_0^2 = 0, \quad (4-142)$$

missä

$$a = \psi_1^T f_{qq} \phi_1 \phi_1, \quad (4-143)$$

$$b = \psi_1^T (f_{qq} v + f_{q\lambda}) \phi_1 \text{ ja} \quad (4-144)$$

$$c = \psi_1^T (f_{qq} v v + 2f_{q\lambda} v + f_{\lambda\lambda}). \quad (4-145)$$

Koska yhtälöllä (4-142) on kaksi ratkaisua, jos diskriminantti

$$d = b^2 - 4ac > 0, \quad (4-146)$$

niin määritelmän 4-12 ehto D voidaan korvata ehdolla (4-146) (Seydel 1994).

Jepson ja Spence (1985) ovat lajitelleet kriittiset pisteet bifurkaatioyhtälön kertoimien mukaan seuraavasti:

Rajapiste:

$a \neq 0$, kvadraattinen;

$a = 0$, $\psi_1^T (f_{qqq} \phi_1 \phi_1 \phi_1 + 3f_{qq} \phi_1 v) \neq 0$, kuubinen.

Bifurkaatiopiste:

$a \neq 0$, $d > 0$, transkriittinen;

$a = 0$, $b \neq 0$, hanko;

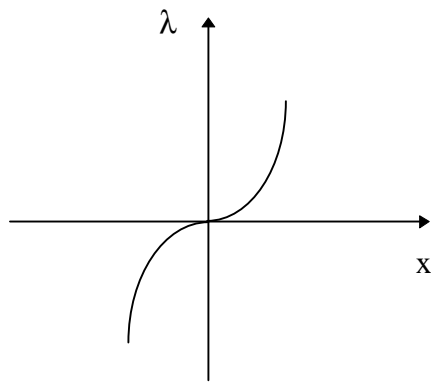
$d < 0$, eristetty.

Iooss ja Joseph (1980) ovat esittäneet hiukan erityyppisen kriittisten pisteiden jaottelun. Marsden ja Hughes (1983) ja Seydel (1994) ovat esittäneet taulukon 4-1 mukaisen kriittisten pisteiden lajittelun tapauksessa $n = 1$, kun kriittisenä pisteenä on origo. Indeksiksi ind vastaa negatiivisten ominaisarvojen lukumäärää. Normaalimuoto kuvaa yhtälön $f = 0$ ratkaisukäyrän käyttäytymistä origon ympäristössä. Kodimensio on eräänlainen singulaarisuuden aste. Kuvassa 4-10 on esitetty (normaalimuodon merkkiä $+$) vastaavat kuvaajat eristettyä bifurkaatiopistettä lukuunottamatta. Singulaari-, katastrofi- ja bifurkaatioteorian perusteita ovat käsitelleet mm. Lu (1976), Chow ja Hale (1982), El Naschie (1990), Chow, Li ja Wang (1994) sekä Kuznetsov (1995).

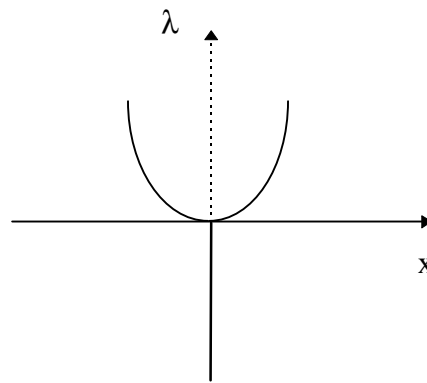
Taulukko 4-1. Kriittisten pisteiden lajittelu.

| Kriittinen piste | Määrittelyehto | Degeneroitumattomuusehto | Normaalimuoto | Kodimensio |
|----------------------------------|------------------------------------|--|---------------------|------------|
| Käännepiste | $f = f_q = 0$ | $f_{qq} \neq 0, f_\lambda \neq 0$ | $q^2 \pm \lambda$ | 0 |
| Eristetty bifurkaatiopiste | $f = f_q = f_\lambda = 0$ | $f_{qq} \neq 0, \text{ind } D^2f = 0 \text{ tai } 2$ | $q^2 + \lambda^2$ | 1 |
| Transkriittinen bifurkaatiopiste | $f = f_q = f_\lambda = 0$ | $f_{qq} \neq 0, \text{ind } D^2f = 1$ | $q^2 - \lambda^2$ | 1 |
| Hystereesipiste | $f = f_q = f_{qq} = 0$ | $f_{qqq} \neq 0, f_\lambda \neq 0$ | $q^3 \pm \lambda$ | 1 |
| Hankobifurkaatiopiste | $f = f_q = f_\lambda = f_{qq} = 0$ | $f_{qqq} \neq 0, f_{q\lambda} \neq 0$ | $q^3 \pm \lambda q$ | 2 * |

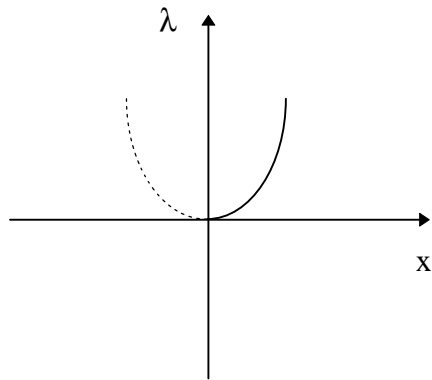
* 0 symmetriatapauksessa $f(-q, \lambda) = -f(q, \lambda)$



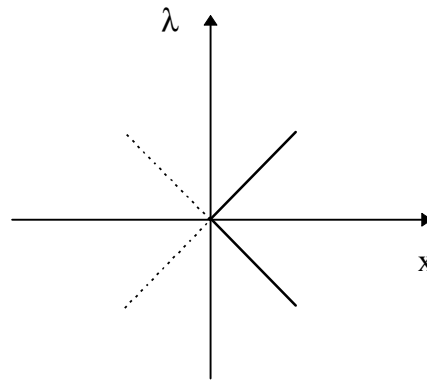
Hystereesipiste



Hankobifurkaatiopiste



Käänne piste



Transkriittinen bifurkaatiopiste

Kuva 4-10. Kriittisten pisteiden lajittelu.

4.4.6.3 Erikoispisteiden havaitseminen ja paikallistaminen

Seydelin (1994) mukaan tasapainoyhtälön (4-8) kriittisten pisteet voidaan havaita ja paikallistaa joko ratkaisemalla tasapainoyhtälön rinnalla ominaisarvotehtävä

$$f_q(q, \lambda)\phi = 0, \quad (4-147)$$

jossa on käytetty edellisen luvun merkintöjä, tai tarkastelemalla erilaisia testifunktioita. Tasapainoyhtälön (4-8) ja ominaisarvotehtävän (4-147) muodostaman yhtälöparin ratkaisemiseen voidaan käyttää esimerkiksi Newton-tyyppisiä iterointimenetelmiä (Jepson ja Spence

1985). Testifunktio tarkastelut soveltuvat hyvin suorien yhtälöryhmänratkaisumenetelmien yhteyteen mutta yleensä huonosti iteratiivisten yhtälöryhmänratkaisumenetelmien kanssa käytettäväksi (Kouhia ja Mikkola 2000b). Kouhia ja Mikkola (2000b) ovat luetelleet seuraavat yleisesti käytetyt testifunktiot ja niiden ominaisuudet:

1. Tangentiaalisen jäykkyyssmatriisin determinantti:

- epäluotettava ilman modifiointia (ei toimi, jos negatiivisten ominaisarvojen lukumäärä on parillinen; ominaisarvojen tulona muutosnopeus on suuri)
- ei ole käytettävissä iteratiivisen ratkaisijan kanssa
- + helposti laskettavissa (saadaan matriisihajotelman seurauksena)
- + luotettavampi skaalattu muoto: $\text{dbstf} = \text{chsign}(\mathbf{K}) \text{sdet}(\mathbf{K}_i) / \text{sdet}(\mathbf{K}_1)$, missä $\text{sdet}(\mathbf{K}) = \prod_{j=1, \dots, n} |d_{jj}|^\beta$, $\beta = 1/n^\gamma$, $\gamma \in (0, 1)$ ja luvut d_{jj} ovat tangentiaalisen jäykkyyssmatriisin LDL^T-hajotelman diagonaalialkioita. Funktio chsign saa arvot ± 1 ja vaihtaa etumerkkiään, jos tangentiaalisen jäykkyyssmatriisin negatiivisten ominaisarvojen lukumäärä muuttuu.

2. Jäykkyyssparametri (4-55):

- soveltuu vain käännepisteille
- + helposti laskettavissa
- + käytettävissä myös iteratiivisen ratkaisijan kanssa

3. Itseisarvoltaan pienin tangentiaalisen jäykkyyssmatriisin ominaisarvo:

- + ehkä luotettavin
- + helposti laskettavissa suorilla ratkaisijoilla
- + helposti laskettavissa myös pohjustamattomalla iteratiivisella ratkaisijalla

4. Pienin pivot-alkio tangentiaalisen jäykkyyssmatriisin hajotelmassa:

- ei ole mahdollinen iteratiivisen ratkaisijan kanssa
- + helposti laskettavissa (saadaan matriisihajotelman seurauksena)

Kohdassa 3 mainittu ominaisarvolaskenta voidaan suorittaa esimerkiksi inverssi-iteraatiolla (Golub ja Van Loan 1996). Tällöin ominaisarvon on oltava yksinkertainen ja lisäksi on huomattava, että iterointi suppenee itseisarvoltaan pienimpään ominaisarvoon (Kouhia ja Mikkola 2000b).

Jos testifunktio on havainnut kriittisen pisteen, mutta ei pysty erottamaan käännepistettä ja bifurkaatiopistettä toisistaan, voidaan menetellä seuraavalla tavalla (Kouhia 1992): Muodostetaan esimerkiksi parabolinen interpolaatiopolynomi kuormakertoimelle $\lambda = \lambda(s)$ ja tarkistetaan, onko kahden viimeisen ratkaisupisteen välillä sellainen kriittinen piste kaarenpituusarvolla s_{cr} , että $(d\lambda/ds)(s_{cr}) = 0$. Jos ehto toteutuu, kyseessä on käännepiste. Muussa tapauk-

nessä tarkistetaan, päteekö bifurkaatiopistettä vastaava ehto: $\varphi^T \mathbf{p}_{\text{ref}} / (\|\varphi\|_2 \|\mathbf{p}_{\text{ref}}\|_2) < \varepsilon$, missä ε on valittu toleranssi.

Kaikissa tapauksissa liian suuret iterointiaskeleet erikoispisteen läheisyydessä vähentävät testifunktioiden luotettavuutta, mistä on esimerkkinä Clarken ja Hancockin (1990) esimerkitapaus, jossa testifunktion 1 havaittiin toimineen käännepisteessä paremmin kuin testifunktion 2. Kun erikoispiste on havaittu testifunktion avulla, voidaan testifuntiolle ja mahdollisen erikoispisteen sijainnille hakea tarkempi arvo lyhentämällä askelpituutta vähitellen lähtien erikoispistettä edeltäneestä ratkaisupisteestä tai askeltamalla edestakaisin erikoispisteen ympärillä askelpituutta samalla lyhentäen (Shi ja Crisfield 1994). Erikoispisteen läheisyydessä iteroinnissa saattaa kuitenkin esiintyä numeerisia ongelmia (Kouhia 1999), jotka saatetaan välttää käyttämällä interpolaatiomenetelmiä (Kouhia 1992).

4.4.7 Polunvaihto yksinkertaisissa bifurkaatiopisteissä

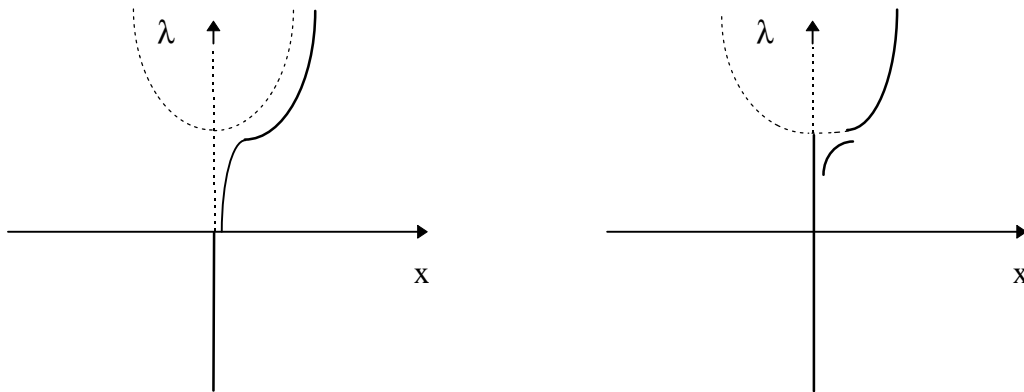
Jos bifurkaatiopiste on m -kertainen, niin ratkaisuhaarojen lukumäärä on epäsymmetrisessä tapauksessa välillä $1 \dots 2^m - 1$ ja täysin symmetrisessä tapauksessa välillä $m \dots (3^m - 1)/2$ (Kouhia ja Mikkola 1995, 1998). Kouhia ja Mikkola (1998, 2000b) ovat esitelleet joitakin moninkertaisten bifurkaatiopisteiden polunvaihtomenetelmiä, joita tutkitaan yhä aktiivisesti.

Tässä yhteydessä tarkastellaan yksinkertaiseen bifurkaatiopisteeseen liittyen sekä ns. häirittyä mallia koskevia perturbaatiomenetelmiä että ns. täydellistä mallia koskevia haarautumismenetelmiä. Nämä menetelmät antavat käsiteltävästä tapauksesta erityyppistä mutta toisiaan täydentävää tietoa (Pajunen 1998).

4.4.7.1 Perturbaatio

Allgower ja Georg (1990) ovat käsitelleet perturbaatiomenetelmiä, joilla seurataan alkupe-
räisestä ratkaisukäyrästä hiukan poikkeutettua käyrää, jolla on vain käännepisteitä —ei siis lainkaan bifurkaatiopisteitä (Sardin lauseen 4-1 mukaan todennäköisyydellä yksi). Poikkeuma saadaan aikaan seuraamalla ratkaisukäyrän $H^{-1}(0)$ sijasta käyrää $H^{-1}(p)$, missä $p \in \mathbb{R}^n$ ja $\|p\|_2$ on pieni.

Globaalissa perturbaatiossa häirintävektori p otetaan käyttöön polunseurauksen alusta lähtien, jolloin ratkaisukäyrällä ei esiinny lainkaan bifurkaatiopisteitä (kuva 4-11, vasen puoli). Lokaalissa perturbaatiossa häirintävektori p otetaan käyttöön vasta sitten, kun bifurkaatiopiste on paikallistettu (kuva 4-11, oikea puoli).



Kuva 4-11. Globaalinen ja lokaalinen perturbaatio.

4.4.7.2 Haarautuminen

Suoraviivainen tapa vaihtaa seurattavaa ratkaisukäyrää perustuu haarautuvan ratkaisukäyrän tangentin ratkaisemiseen bifurkaatioyhtälöiden (4-119) ja (4-142) avulla (Allgower ja Georg 1990 sekä Kuznetsov 1995). Tällöin on laskettava bifurkaatioyhtälön kertoimet, mikä tarkoittaa, että on laskettava esimerkiksi tasapainoyhtälön (4-8) kuvauksen f toisen asteen derivaatat tai niille approksimaatiot. Toisen asteen derivaattojen laskeminen on työlästä ja approksimaatioiden käyttäminen aiheuttaa epätarkkuutta bifurkaatioyhtälön kertoimiin, joita käytetään kriittisen pisteen tyyppin määrittämiseen (Kouhia ja Mikkola 1989).

Rheinboldt (1978) on esittänyt menetelmän, jossa ei tarvita bifurkaatioyhtälön kertoimia, vaan iteroidaan lähtien siirtymätilasta $q = q_{cr} + \xi\phi$, missä ξ on ennalta valittu vakio ja ϕ kriittistä pistettä (q_{cr}, λ_{cr}) vastaava ominaisvektori. Numeeristen esimerkkien perusteella menetelmä ei tunnu olevan kovin herkkä vakion ξ valinnalle (Kouhia 1992).

Kouhia ja Mikkola (1989) ovat soveltaneet menetelmää jättämällä vakioarvon ξ tuntemattomaksi: Lisäyhtälön

$$\mathbf{q}^T \mathbf{f}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (4-148)$$

avulla tasapainoyhtälön (4-8) ja linearisoidun rajoiteyhtälön (4-59) muodostamaa yhtälöparia vastaavaksi yhtälöryhmäksi saadaan

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad (4-149)$$

$$\mathbf{q}^T \mathbf{f}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \text{ ja} \quad (4-150)$$

$$\mathbf{g}_j(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) = 0. \quad (4-151)$$

Liitteiden A ja B Crisfieldin (1981) elliptisen rajoiteyhtälön kanssa päädytään menetelmään, jossa alkuperäiset kertoimet $\mathbf{A}^{(k)}$, $\mathbf{B}^{(k)}$ ja $\mathbf{C}^{(k)}$ korvataan hiukan muuttuneilla kertoimilla:

$$\mathbf{A}^{(k)} \leftarrow \mathbf{A}^{(k)} + \boldsymbol{\gamma}^{(k)2}, \quad (4-152)$$

$$\mathbf{B}^{(k)} \leftarrow \mathbf{B}^{(k)} + \boldsymbol{\gamma}^{(k)}(\Delta \mathbf{q}^{(k-1)T} \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}) \text{ ja} \quad (4-153)$$

$$\mathbf{C}^{(k)} \leftarrow \mathbf{C}^{(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}(2\Delta \mathbf{q}^{(k-1)T} \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}), \quad (4-154)$$

missä

$$\boldsymbol{\gamma}^{(k)} = -\mathbf{f}^{(k-1)T} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{q}_p}^{(k)} / (2\mathbf{f}^{(k-1)T} \boldsymbol{\varphi}_1) \text{ ja} \quad (4-155)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = -\mathbf{f}^{(k-1)T} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{q}_f}^{(k)} / (2\mathbf{f}^{(k-1)T} \boldsymbol{\varphi}_1). \quad (4-156)$$

Tämä menetelmä ei kuitenkaan toimi, jos primaaripolku ja ominaisvektori $\boldsymbol{\varphi}$ ovat lähes yhdensuuntaiset.

Kouhia (1992) on esittänyt vielä yksinkertaisemman polunvaihtomenetelmän, joka ei vaadi edes kriittisen pisteen luokittelua käänne- tai bifurkaatiopisteeseen: Kun kriittinen piste on ohitettu, mutta ollaan kuitenkin riittävän lähellä kriittistä pistettä — mikä on erityisen tärkeää symmetrisessä bifurkaatioissa — käytetään Friedin (1984) ortogonaalisen trajektorin kaarenpituusmenetelmässä ennustetta $(\Delta \boldsymbol{\varphi}^T, 0)$. Aitoa Newton-iterointia käyttämällä iteroinnin suppenemisen seurauksena saavutetaan tasapainotila jälkikriittisellä ratkaisukäyrällä. Kyseessä on primaaripolku, kun kriittinen piste on käännepiste, ja sekundaaripolku, kun kriittinen piste on bifurkaatiopiste.

4.4.8 Rajoiteyhtälön skaalaus

Linearisoidussa rajoiteyhtälössä (4-59) voidaan käyttää positiivi(semi)definiittia skaalausmatriisia $\mathbf{C} = \text{diag}(\mathbf{W}, \alpha)$, missä \mathbf{W} on $n \times n$ -diagonaalimatriisi ja α reaalityyppinen luku (Kouhia 1998). Tällöin linearisoitu rajoiteyhtälö tulee muotoon

$$\mathbf{t}_j^T \mathbf{C} \mathbf{n}_j - \mathbf{e}_j = 0. \quad (4-157)$$

Skaalauksen avulla voidaan painottaa tiettyjä vektorikomponentteja. Kouhia ja Mikkola (1989, 1992) ovat esittäneet skaalausmenetelmän, jonka avulla on tarkoitus kontrolloida iteroinnin aikana eniten kasvavia komponentteja. Solmun t ensimmäisen iteraatiokierroksen siirtymäsuurevektori

$$\delta \mathbf{q}^{(1)}_t = (\delta \mathbf{q}^{(1)}_{t(1)}, \dots, \delta \mathbf{q}^{(1)}_{t(m)})^T, \quad (4-158)$$

missä m on solmun t vapausasteiden lukumäärä. Skaalausermi

$$W_{(ii)} = 1/(\text{ave}_t \delta \mathbf{q}^{(1)}_{t(j)})^2 \quad (4-159)$$

missä ave_t tarkoittaa kaikki indeksit t kattavaa keskiarvoa ja globaalinen vapausaste i saadaan lokaalisesta vapausasteesta j . Termit päivitetään askeleen alussa yhtälöllä

$$W_{(ii)k+1} = \gamma \{ |v_{(i)k+1}| / |v_{(i)k}| \}^{1/2} W_{(ii)k}, \quad (4-160)$$

missä vektori

$$\mathbf{v} = \partial \mathbf{q} / \partial s \approx \Delta \mathbf{q} / \Delta s \quad (4-161)$$

ja kerroin γ saadaan yhtälöstä

$$\text{trace}(W_{k+1}) = \text{trace}(W_k). \quad (4-162)$$

Schweizerhof ja Wriggers (1986) ovat ehdottaneet seuraavia tehtävätyyppikohtaisia skaalustapoja:

1. $W = I$ ja $\alpha \gg 1$.
2. $W_{(ii)} = 1$ siirtymäkomponenteille i , $W_{(ii)} = 0$ kiertymäkomponenteille i ja $\alpha = 0$.
3. $W_{(ii)} = 0$ siirtymäkomponenteille i , $W_{(ii)} = 1$ kiertymäkomponenteille i ja $\alpha = 0$.
4. $W_{(ii)} = 1/\delta \mathbf{q}^{(1)}_{(i)}{}^2$ ja $\alpha = 1/\delta \lambda^{(1)2}$.

Esimerkiksi jäykistyville rakenteille suositellaan valittavan nolosta poikkeava arvo skaaluskertoimelle α . Neljättä vaihtoehtoa suositellaan erityisesti vahvasti epälineaarille tapauksille.

4.4.9 Suppenemiskriteerit

Bathe ja Cimento (1980) sekä Hinton (1992) ovat esitelleet ja vertailleet erilaisia suppenemiskriteerejä, joita käytetään arvioitaessa esimerkiksi algoritmeissa 4-3 ja 4-5 esiintyvää suppenemisehtoa $f \approx 0$. Epätasapainokriteerissä voidaan käyttää esimerkiksi epäyhtälöä

$$\| \mathbf{f}^{(k)} \| < \epsilon \{ \theta \| \mathbf{p}^{(k)} \| + (1 - \theta) \| \mathbf{r}^{(k)} \| \}, \quad (4-163)$$

missä iteraatiokierroksen k epätasapaino $\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}(\mathbf{q}^{(k)}, \lambda^{(k)})$, ulkoinen kuorma $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}(\lambda^{(k)})$ ja sisäinen voima $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}(\mathbf{q}^{(k)})$ sekä ε on valittu suppenemistoleranssi (esimerkiksi $\varepsilon = 1/100$) ja $0 \leq \theta \leq 1$. Energiakriteerissä käytetään epäyhtälöä

$$\mathbf{f}^{(k)T} \delta \mathbf{q}^{(k)} < \varepsilon \mathbf{f}^{(1)T} \delta \mathbf{q}^{(1)}. \quad (4-164)$$

Energiakriteeriä ei pitäisi käyttää ainoana suppenemiskriteerinä, sillä se voi joissakin tapauksissa johtaa virheellisesti iteroinnin suppenemiseen suurillakin epätasapainokomponenteilla. Siirtymäsuurekriteerissä voidaan käyttää epäyhtälöä

$$\|\delta \mathbf{q}^{(k)}\| < \varepsilon \|\delta \mathbf{q}^{(1)}\| \text{ tai} \quad (4-165)$$

$$\|\delta \mathbf{q}^{(k)}\| < \varepsilon \|\Delta \mathbf{q}^{(k)}\|. \quad (4-166)$$

Epäyhtälöiden (4-163), (4-165) ja (4-166) normina $\|\cdot\|$ käytetään usein euklidista normia, erilaisia keskiarvonormeja tai skaalattuja normeja. Vektorikomponentteja voidaan myös ryhmitellä esimerkiksi fysikaalisten laatuyskiköiden perusteella, jolloin kutakin komponentti-ryhmää vastaa yksi epäyhtälö.

5 Laskentamenetelmien ohjelmointi

Osa luvussa 4 käsitellyistä ennuste—korjaus-tyyppisistä polunseurausmenetelmistä on ohjelmoitu osaksi lujuslaskennan elementtimenetelmään perustuvaa FINNSAP-ohjelmistoa, johon liittyvät FINNGEN-esikäsitelyohjelma ja FINNDRAW-jälkikäsitelyohjelma. Ratkaisumenetelmien ohjelmoinnin tavoitteena on ollut sisällyttää ohjelmistoon käyttäjien kannalta tärkeimpiä ja kohtuullisen helppokäyttöisiä epälineaarisen analyysin ratkaisumenetelmiä. Ohjelmiston entisten ratkaisumenetelmien rinnalle ja tilalle on lisätty uusia ratkaisumenetelmiä ja entistä monipuolisempia vaihtoehtoja ohjata analyysia. Lisäksi käyttäjille on laadittu epälineaarisen mallinnuksen ja laskennan oleellisia piirteitä sekä erilaisia esimerkkejä sisältävä ohjelmaseloste (FINNSAP 1999).

Jatkossa epälineaarisen analyysiin ratkaisumenetelmiin on tarkoitus sisällyttää joitakin lisäominaisuuksia kuten haarautumis- ja perturbaatiomenetelmät yksinkertaisessa bifurkaatiopisteessä. Nämä lisäykset voidaan toteuttaa tämän työn selvitysten pohjalta.

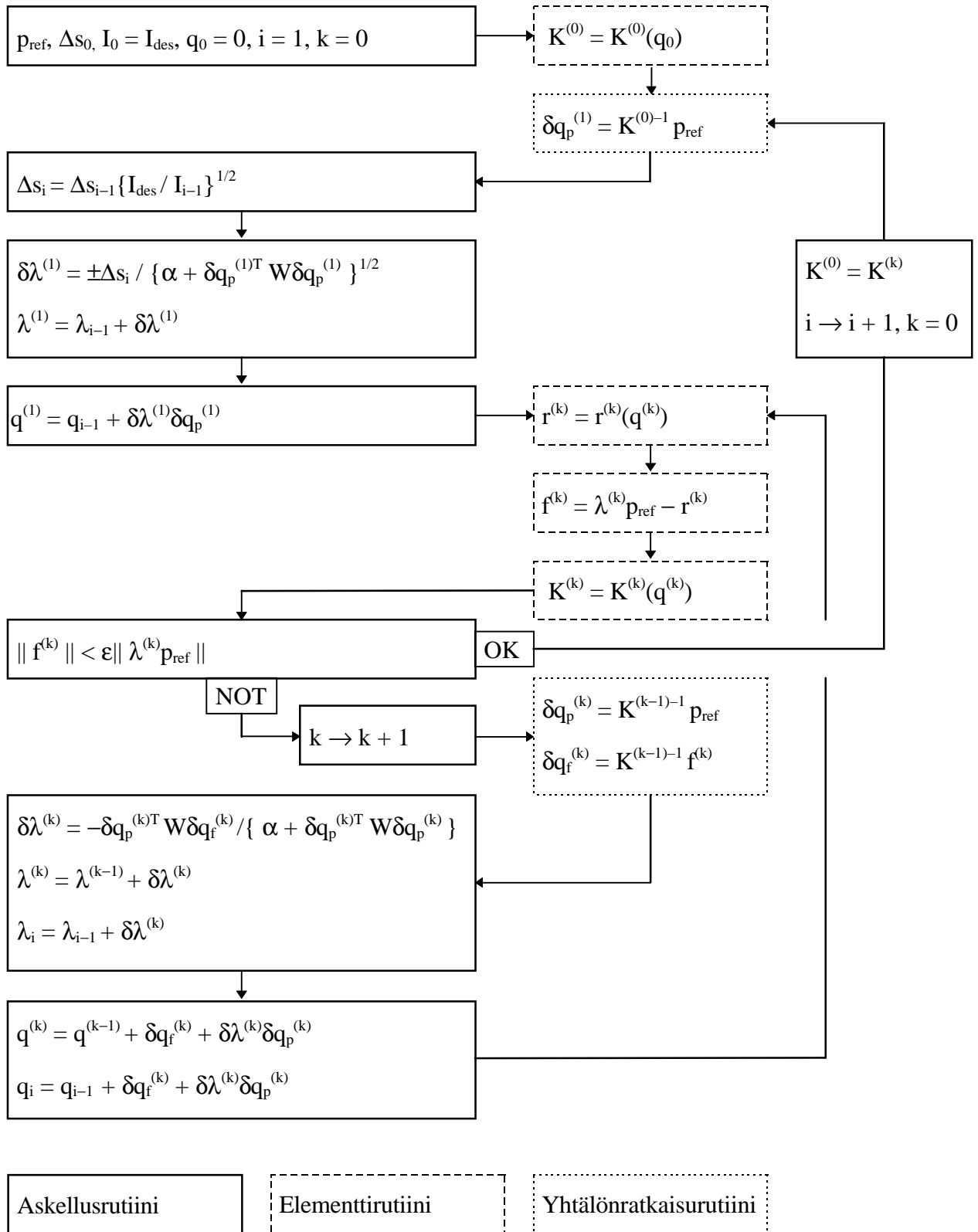
5.1 Epälineaarisen analyysin laskentamenetelmät

Kaikkia luvun 4 ratkaisumenetelmiä ei ole katsottu tarpeellisiksi ohjelmiston nykyisiin käyttötarkoituksiin. Joitakin luvussa 4 käsiteltyjä menetelmiä on tarkoitus lisätä ohjelmistoon myöhemmin. Osa menetelmistä on jätetty myöhempään toteutusvaiheeseen aihepiireihin liittyvän tutkimuksen keskeneräisyyden takia.

Ohjelmointikielenä on käytetty Fortran 77 -standardia. Tämän työn yhteydessä toteutettu polunseurausmenetelmiin liittyvä ohjelmakoodi sisältää kommentteineen noin 10200 riviä. Ohjelmakoodista noin kaksi kolmannesta liittyy suoranaisesti laskenta-algoritmeihin ja yksi kolmannes ohjauslukujen käsittelyyn ja tulostuksiin.

Kuvan 5-1 kaaviossa on esitetty epälineaarisen analyysin laskennan kulku pääpiirteittäin. Kaavion merkinnät vastaavat algoritmien 4-3 ja 4-5 merkintöjä, kun käytetään ortogonaalisen trajektorin rajoiteyhtälöä (liitteet A, B ja C) sekä jäykkyysmatriisin jatkuvaa päivitystä. Epälineaarisen analyysin laskenta on jaettu kolmeen toisistaan selkeästi irralliseen osaan: askellusrutiinit, lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisurutiinit ja elementtirutiinit. Tässä työssä on keskitytty pääasiassa askellusrutiineihin. Elementti- ja yhtälöryhmäntarkaisurutiinit ovat olleet käytettävissä ja niihin on tehty vain joitakin muutoksia.

FINNSAP-ohjelmiston epälineaarisen analyysin elementtivalikoitina ovat palkki-, levy-, kuori-, solidi- ja kontaktielementit. Levy-, kuori- ja solidielementit voivat olla geometrisen epälineaarisuuden lisäksi myös materiaalisesti epälineaarisia. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen epälineaarisessa analyysissä käytetään ns. suoraa nauharatkaisijaa.



Kuva 5-1. Epälineaarisen analyysin laskennan kulku.

5.2 Epälineaarisen analyysin ohjausluvut

Epälineaarisen analyysin laskentamenetelmistä on pyritty tekemään sekä tehokkaita että eri tarkoituksiin mukautuvia. Taulukoissa 5-1, 5-2 ja 5-3 luetelluilla lähtötiedoilla eli ohjausluvuilla (FINNSAP 1999) saadaan aikaan useita erilaisia laskentastrategioita. Ohjausluvuille on pyritty valitsemaan sellaiset oletusarvot, joilla ratkaisu onnistuisi useimmissa tapauksissa kohtuullisen varmasti ja nopeasti. Esimerkissä 5-1 on näytetty, että ohjauslukuvalinnoilla on huomattava merkitys sekä laskennan tuloksiin että ratkaisuaikaan.

Laskentamenetelmien toteutuksen lisäksi käyttäjille on kirjoitettu ohjelmaseloste (FINNSAP 1999, 105 s.), joka sisältää seuraavat luvut: 1 Epälineaarisen analyysin lähtötiedot; 2 Epälineaarisen analyysin erityispiirteitä; 3 Epälineaarisen analyysin esimerkkitapauksia; 4 Epälineaarisen analyysin ratkaisumenetelmät.

Taulukko 5-1. Ratkaisumenetelmille yhteiset epälineaarisen analyysin ohjausluvut.

Ohjausluvut asiakokonaisuuksittain

Lähtötietojen muuttaminen kesken ajon

- Muutettavien ohjauslukujen lukutapa

- Askeleet, joilla muutettavat ohjausluvut luetaan

Kuormitustapaus ja tulostus

- Kuormitustapausnumero

- Tekstitiedoston tulostusaskeleet

- Kuvatiedoston tulostusaskeleet

- Iteraatiokierrosten lisätulostustapa

- Kuormakerroinluku, jolla teksti- ja kuvatiedostot tulostetaan

Ratkaisumenetelmä ja jäykkyysmatriisin päivitys

- Ratkaisumenetelmä

- Jäykkyysmatriisin päivitysmenetelmä

- Iteraatiokierrokset, joilla jäykkyysmatriisi päivitetään

Ensimmäinen askel ja ajon tavoite

- Askelten enimmäislukumäärä

- Ajon alun kuormakerroinlisäys

- Kuormakerroinluku maksimiarvo

- Jäykkyysmatriisin käyttö ominaisarvotehtävässä

Suppenemiskriteerit

| |
|--|
| Suppenemiskriteeri |
| Vertailukuormakertoimen minimiarvo |
| Vertailuvoimakomponentin minimiarvo |
| Vertailumomenttikomponentin minimiarvo |
| Suppenemistestissä ohitettavat vapausasteet |
| Suppenemistoleranssit |
| Voimatoleranssi |
| Momenttitoleranssi |
| Energiatoleranssi |
| Siirtymätoleranssi |
| Kiertymätoleranssi |
| Ajon ja askeleen lopetusehdot |
| Kuormakertoimen minimiarvo |
| Iteraatiokierrosten enimmäislukumäärä |
| Askeleen uudelleenaloitusten enimmäislukumäärä |

Taulukko 5-2. Kaarenpituusmenetelmien ohjausluvut.

Ohjausluvut asiakokonaisuuksittain

Ajon ja askeleen lopetustavat kaarenpituusmenetelmissä

- Toiminta iteroinnin hajaantuessa
- Askelpituuden muutoskerroin uudelleenaloituksessa
- Toiminta käännepisteen jälkeen
- Käännepisteen etsintätarkkuus

Kaarenpituuden päivitys

- Kaarenpituuden päivitys
- Tavoiteltava iteraatiokierroslukumäärä

Kaarenpituuden pidennys

- Iteraatiokierrosraja kaarenpituuden pidennykselle
- Kaarenpituuden pidennyksen kerroin
- Kaarenpituuden pidennyksen suhteellinen yläraja

Kaarenpituuden lyhennys

- Iteraatiokierrosraja kaarenpituuden lyhennykselle
- Kaarenpituuden lyhennyksen kerroin

| |
|--|
| Kaarenpituuden lyhennyksen suhteellinen alaraja |
| Kaarenpituusmenetelmien rajoiteyhtälön skaalaus ja kuorma-askeleen etumerkki |
| Ajon alun kaarenpituusarvo |
| Kuormakertoimen skaalaus |
| Siirtymäsuureiden skaalaus |
| Kuormakerroinlisäyksen merkki |

Taulukko 5-3. Newton—Raphson-menetelmien ohjausluvut.

Ohjausluvut asiakokonaisuuksittain

Ajon ja askeleen lopetustavat Newton—Raphson-menetelmissä

- Toiminta iteroinnin hajaantuessa
- Askelpituuden muutoskerroin uudelleenaloituksessa
- Kuorman ajo ylös—alas

Kuormakerroinlisäyksen päivitys Newton—Raphson-menetelmissä

- Askelpituuden päivitys
 - Tavoiteltava iteraatiokierroslukumäärä
 - Lineaarisen askelpituuspäivityksen kerroin
 - Askelpituuden muutoskerroin
-

Esimerkki 5-1. Eräs plastisoitumistapaus mallinnettiin noin tuhannella 9-solmuisella CBR-levyelementillä (Continuum Based Resultant), jolloin vapausastelukumäärä oli 2080 ja nauhanleveys 65. Taulukkoon 5-4 on listattu, kuinka monta kuorma-askelta ja kuinka paljon aikaa tarvittiin saman kokonaiskuormakertoimen saavuttamiseksi, kun käytettiin eri ohjauslukuyhdistelmiä. Ohjauslukujen lähtöarvoina käytettiin oletusarvoja paitsi kuorma-askelten enimmäislukumääränä käytettiin arvoa 1000 sekä suppenemiskriteerinä energiakriteeriä ja suppenemistoleranssina arvoa 0,005. Iteraatiokierroslukumäärien muutoksessa iteraatiokierrosten enimmäislukumäärä kaksinkertaistettiin arvoon 16 ja tavoitearvo 4 pidettiin ennallaan. Kuormakerroin- ja siirtymäsuureskaalauksen muutoksen jälkeen kuormakerrointa painotettiin nollan sijasta jäykkyysparametrin itseisarvolla ja siirtymäsuureet skaalattiin ajon pienimmän askeleen siirtymäsuuremuutoksen normin sijasta ajon suurimman askeleen siirtymäsuuremuutoksen normilla.

Taulukko 5-4. Ohjauslukuvalintojen vertailu.

| Oletusarvoista poikkeavat epälineaarisen analyysin ohjausluvut | Kuorma- askeleita | Ajoaika (s) | Viimeisen askeleen kuormakerroinlisäys |
|--|----------------------|----------------|---|
| Suppenemistoleranssina energiatoleranssi | 518 | 16750 | $8,1 \times 10^{-5}$ |
| Suppenemistoleranssina energiatoleranssi ja iteraatiokierroslukumäärien muutos | 293 | 9580 | $1,7 \times 10^{-4}$ |
| Suppenemistoleranssina energiatoleranssi ja skaalauksen muutos | 642 | 20910 | $2,1 \times 10^{-5}$ |
| Suppenemistoleranssina energiatoleranssi, iteraatiokierroslukumäärien muutos ja skaalauksen muutos | 356 | 11650 | $1,7 \times 10^{-5}$ |
| Suppenemistoleranssina energiatoleranssi, iteraatiokierroslukumäärien muutos ja jatkuva jäykkyysmatriisin päivitys | 86 | 5300 | $1,9 \times 10^{-4}$ |
| Suppenemistoleranssina energiatoleranssi, iteraatiokierroslukumäärien muutos, jatkuva jäykkyysmatriisin päivitys ja skaalauksen muutos | 14 | 1390 | $9,4 \times 10^{-3}$ |

Taulukosta 5-4 nähdään, että oletusarvon mukaisella jäykkyysmatriisin päivityksellä iteraatiokierrosten enimmäislukumäärän kasvattaminen nopeuttaa laskentaa, mutta skaalauksen muutos hidastaa laskentaa. Jäykkyysmatriisin jatkuvan päivityksen lisääminen nopeuttaa laskentaa edelleen. Jatkuvan päivityksen kanssa myös skaalauksen muutos nopeuttaa laskentaa huomattavasti.

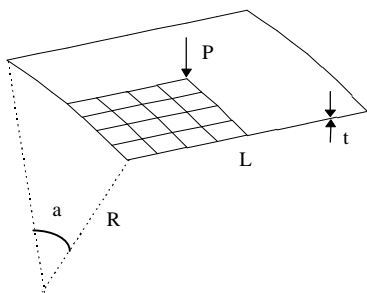
6 Esimerkkitapauksia

Tässä luvussa käsitellään yksinkertaisia rakenteiden mekaniikan epälineaarisen analyysin esimerkkitapauksia, joista käy ilmi joitakin oleellisia ratkaisumenetelmiin, mallintamiseen ja laskentaan liittyviä piirteitä. Esimerkkitapaukset on ratkaistu eri elementtijakoja käyttäen ja pääosin FINNSAP-ohjelmiston epälineaarisen analyysin ohjauslukujen oletusarvoilla. Tuloksia on vertailtu kirjallisuudessa esitettyihin kokeellisiin ja laskennallisiin tuloksiin. Ratkaisuista on esitetty kuormakerroin—siirtymä-käyriä ja siirtymäkuvia. Epälineaarisen analyysin lähtötiedot on selostettu pääpiirteittäin luvussa 5.2 ja tarkemmin viitteessä FINNSAP (1999).

6.1 Sylinterikuori

Alla on lueteltu kuvan 6-1 esimerkkitapauksen lähtöarvot. Myös tulokset on esitetty yksiköissä N ja mm.

| | |
|----------------------------------|---------------------------|
| Suoran sivun pituus L | 508 mm |
| Kaarevan sivun kaarevuussäde R | 2540 mm |
| Kaarevan sivun avauskulma a | 0,2 rad |
| Paksuus t | 12,7 mm, 0,635 mm |
| Kimmokerroin | 3102,75 N/mm ² |
| Poisson'n vakio | 0,3 |
| Pistevoima P | 1000 N |



Kuva 6-1. Lähtöarvot.

Kuvan 6-1 suorilta sivuiltaan niveltuettua ja kaarevilta sivuiltaan vapaata sylinterikuorta kuormitettiin keskikohdastaan pistekuormalla. Sylinterikuoren neljännes mallinnettiin 16 CBR-kuorielementillä (Continuum Based Resultant) kahdella eri paksuudella. Paksummassa

tapauksessa paksuuden ja kaarevuussäteen suhde t/R oli $1/200$ ja ohuemmassa $1/400$. Mallinnuksessa käytettiin sekä 4-solmuisia ANS4-elementtejä että 9-solmuisia ANS9-elementtejä (Assumed Natural Strain). Oletusarvoista poikkeavat epälineaarisen analyysin lähtötiedot olivat: paksummalle kuorelle kokonaiskuormakertoimen maksimiarvo 4,0 ja ohuemmalle kuorelle kahden peräkkäisen ratkaisupisteen väliseen kulmaan perustuva kuormakerroininkrementin merkinvalintavaihtoehto.

Paksumpi kuori. Kahden käännepisteen kautta kokonaiskuormakertoimen 4,0 ylitykseen kului 4-solmuisilla elementeillä 52 kuorma-askelta ja 179 iteraatiokierrosta sekä 9-solmuisilla elementeillä 50 kuorma-askelta ja 171 iteraatiokierrosta.

Ohuempi kuori. Neljän käännepisteen kautta kokonaiskuormakertoimen 1,0 ylitykseen kului 4-solmuisilla elementeillä 96 kuorma-askelta ja 374 iteraatiokierrosta sekä 9-solmuisilla elementeillä 73 kuorma-askelta ja 282 iteraatiokierrosta.

Taulukoissa 6-1 ja 6-2 on vertailtu ratkaisun kulkua eri tapauksissa. Kuvissa 6-2 — 65 on esitetty ratkaisujen kuormakerroin—siirtymä-käyrät. Kuvissa koko kuoren keskipisteen taipuman (w_k) ja vapaan reunan keskipisteen taipuman (w_r) arvot on esitetty kokonaiskuormakertoimen funktiona. Bergan, Horrigmoe, Kråkeland ja Søreide (1978), Crisfield (1979, 1981, 1983), Schweizerhof ja Wriggers (1986), Bellini ja Chulya (1987) sekä Argyris, Balmer ja Doltsinis (1987) ovat saaneet hyvin samansuuntaisia tuloksia kuin tässä esitetyt erityisesti 9-solmuisella elementillä lasketut tulokset.

Taulukko 6-1. Ratkaisun kulku eri elementeillä paksumman kuoren tapauksessa.

| Ratkaisun vaihe | ANS4-elementti | ANS9-elementti |
|--|-------------------|-------------------|
| Kuormakerroin / keskipisteen taipuma / askel | | |
| — 1. käännepiste (huippu) | 2,05 / 10,0 / 28 | 2,22 / 10,6 / 26 |
| — 2. käännepiste (laakso) | 0,583 / 19,4 / 42 | 0,529 / 19,3 / 40 |
| — kokonaiskuormakerroin $> 4,0$ | 4,18 / 31,1 / 52 | 4,20 / 31,3 / 50 |

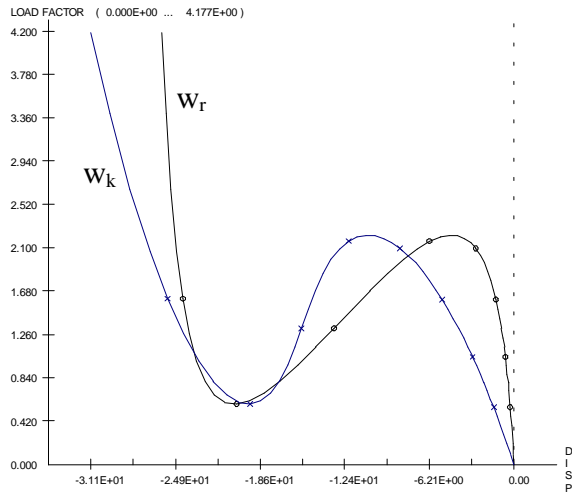
Taulukko 6-2. Ratkaisun kulku eri elementeillä ohuemman kuoren tapauksessa.

| Ratkaisun vaihe | ANS4-elementti | ANS9-elementti |
|--|--------------------|--------------------|
| Kuormakerroin / keskipisteen taipuma / askel | | |
| — 1. käännepiste (kuormahuippu) | 0,625 / 14,2 / 16 | 0,591 / 13,1 / 14 |
| — 2. käännepiste (siirtymähuippu) | 0,379 / 16,9 / 24 | 0,0950 / 16,8 / 27 |
| — 3. käännepiste (siirtymälaakso) | -0,192 / 16,3 / 30 | -0,313 / 14,9 / 45 |
| — 4. käännepiste (kuormalaakso) | -0,365 / 13,6 / 52 | -0,380 / 16,0 / 51 |
| — kokonaiskuormakerroin > 1,0 | 1,08 / 31,9 / 96 | 1,04 / 31,9 / 73 |

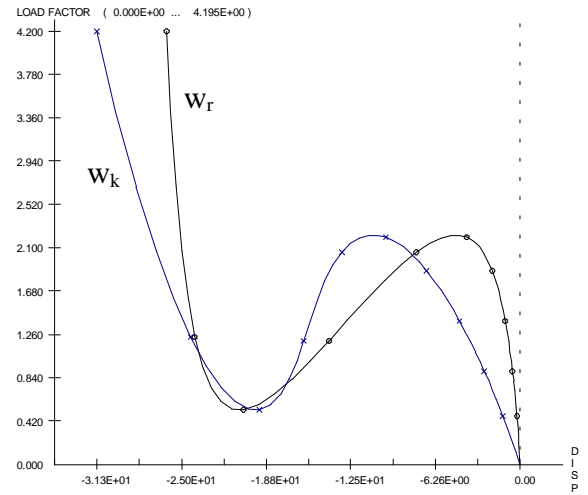
Taulukossa 6-3 on vertailtu paksumman kuoren tapauksessa ratkaisun kulkua eri kaarenpituusmenetelmillä. Oletusarvoista poikkeavat epälineaarisen analyysin lähtötiedot olivat: kokonaiskuormakerroimen maksimiarvo 4,0 ja rajoiteyhtälövalinnat ortogonaalinen trajektori (OT), päivitetty normaali (PN), konsistentti linearisointi (KL), yhden vaiheen elliptinen rajoiteyhtälö (E1) tai kahden vaiheen elliptinen rajoiteyhtälö (E2) sekä ensimmäisen askeleen alun kuormakerroinlisäys 0,5 tai 1,0. Taulukosta 6-3 nähdään, että laskenta on edennyt eri rajoiteyhtälöillä lähes identtisesti. Jatkuva jäykkyysmatriisin päivittäminen on vähentänyt tarvittavien askelten ja erityisesti iteraatiokierrosten lukumäärää, mutta kasvattanut laskenta-aikaa. Suurempi aloitusaskel on vähentänyt tarvittavien askelten ja iteraatiokierrosten lukumäärää, minkä myötä laskenta-aikakin on lyhentynyt. Ohjauslukuvalintoja on vertailtu myös esimerkissä 5-1, jossa jatkuva jäykkyysmatriisin päivittäminen on nopeuttanut laskentaa huomattavasti.

Taulukko 6-3. Ratkaisun kulku eri menetelmillä paksumman kuoren tapauksessa.

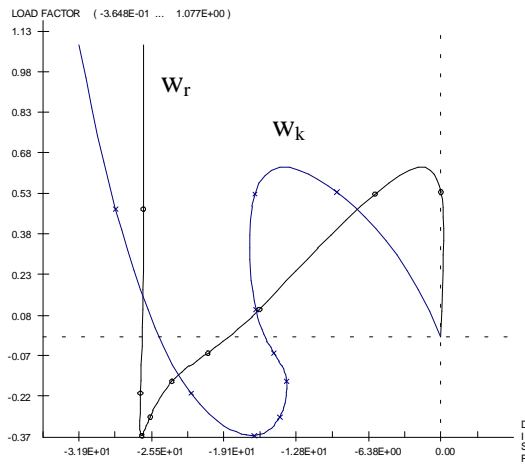
| Rajoiteyhtälö | Jäykkyysmatriisin päivitys | Askelia | Iteraatiokierroksia | Ratkaisuaika (s) |
|---|----------------------------|---------|---------------------|------------------|
| Ensimmäisen askeleen alun kuormakerroinlisäys 0,5 | | | | |
| OT | modifioitu | 18 | 62 | 101,3 |
| PN | modifioitu | 18 | 62 | 101,6 |
| KL | modifioitu | 18 | 62 | 101,2 |
| E1 | modifioitu | 18 | 62 | 101,5 |
| E2 | modifioitu | 18 | 62 | 101,5 |
| OT | jatkuva | 16 | 45 | 132,2 |
| Ensimmäisen askeleen alun kuormakerroinlisäys 1,0 | | | | |
| OT | modifioitu | 16 | 59 | 94,5 |



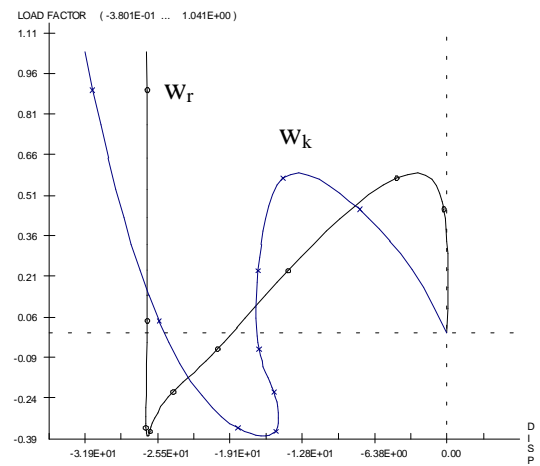
Kuva 6-2. Paksumpi kuori, ANS4.



Kuva 6-3. Paksumpi kuori, ANS9.



Kuva 6-4. Ohuempi kuori, ANS4.



Kuva 6-5. Ohuempi kuori, ANS9.

6.2 Ympyränkaari

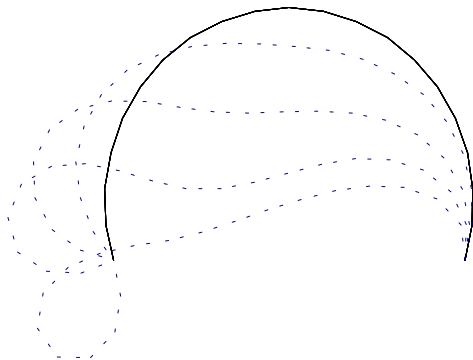
Alla on lueteltu kuvan 6-8 esimerkkitapauksen lähtöarvot. Myös tulokset on esitetty yksiköissä N ja mm.

| | |
|-----------------|--|
| Säde | 100 mm |
| Keskuskulma | 215° |
| Poikkipinta-ala | 0,009 mm ² |
| Jäyhyysmomentti | 0,083333 mm ⁴ |
| Kimmokerroin | 12,0×10 ⁶ N/mm ² |
| Pystykuorma | 100 N |

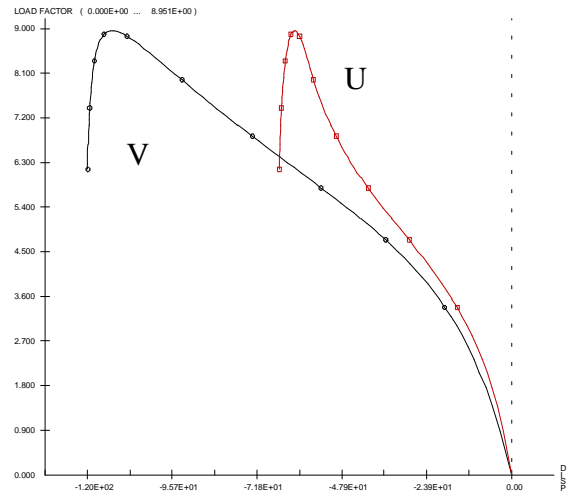
Tapaus laskettiin 20 palkkielementin mallilla. Oletusarvoista poikkeavat epälineaarisen analyysin lähtötiedot olivat: ensimmäisen askeleen alun kuormakerroinlisäys 1,0; kokonaiskuormakertoimen maksimiarvo 10 ja suppenemistoleranssi 0,005.

Ratkaisu päättyi normaalisti täyteen askelmäärään 100, jolloin kokonaiskuormakerroin oli 6,15 ja suurin pystysiirtymä 124,1. Suurin vaakasiirtymä 69,3 saavutettiin askeleella 82. Kuorma-askeleen 65 jälkeen saatiin varoituksia negatiivisesta jäykkyysmatriisin diagonaalista. Askeleen 65 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 8,95. Analyyttisen ratkaisun mukainen stabiiliudenmenetyskuorma on $8,97 \times EI/R^2 = 897$, joka vastaa kokonaiskuormakerrointa 8,97. Tässä saadun ratkaisun mukaan käänne pisteen kokonaiskuormakerroin oli 8,95, joka poikkeaa analyttisestä tuloksesta noin 0,2%. Poikkeama johtuu mm. siitä, että sileä ympyränkaari on mallinnettu suorilla elementeillä murtoviivana. Zienkiewicz ja Taylor (1991) ovat saaneet toisenlaisella elementillä tuloksen 9,24, eli poikkeama analyttisestä tuloksesta on ollut noin 3%. Zienkiewiczin ja Taylorin (1991) vertailutulokset on esitetty kuvissa 6-8 ja 6-9. Kuvassa 6-9 pystykoordinaattina tulisi olla PR^2/EI .

Kuva 6-6 on otettu askelilta 10, 30, 50 ja 100. Kuvan siirtymät on esitetty mallin mittakaavassa. Kuvassa 6-7 on esitetty ratkaisun kuormakerroin—siirtymä-käyrät, joissa kaaren l a-kipisteen pysty- (V) ja vaakasiirtymä (U) on esitetty kokonaiskuormakertoimen funktiona.



Kuva 6-6. Siirtymät.



Kuva 6-7. Kuormakerroin—siirtymäkäyrät.

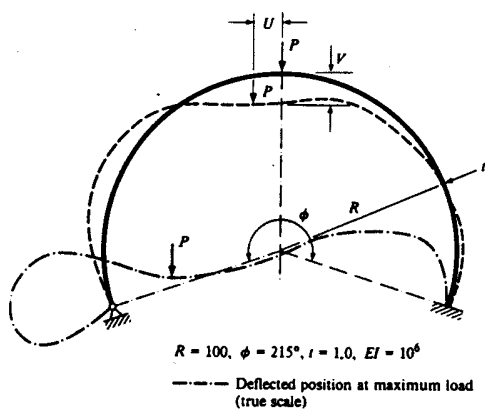


Fig. 8.8 Clamped-hinged arch—load deflection

Kuva 6-8. Rakennemalli ja siirtymät.

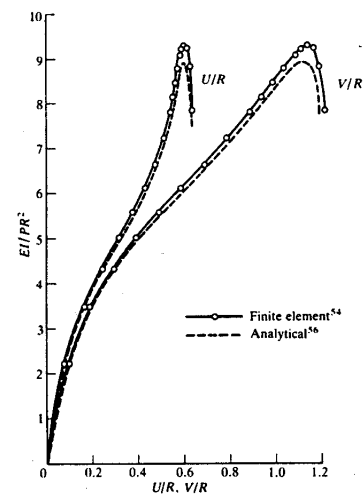


Fig. 8.9 Clamped-hinged arch: load-deflection curves (horizontal and vertical components)

Kuva 6-9. Kuormakerroin—siirtymäkäyrät.

6.3 Yksiaukkoinen tasokehä

Alla on lueteltu kuvan 6-14 esimerkkitapauksen lähtöarvot. Myös tulokset on esitetty yksiköissä lb (pauna = 4,45 N) ja in (tuuma = 25,4 mm).

| | |
|-----------------|--|
| Korkeus | 120 in |
| Pituus | 120 in |
| Poikkipinta-ala | 11,77 in ² |
| Jäyhyysmomentti | 310,1 in ⁴ |
| Kimmokerroin | 3,0×10 ⁷ lb/in ² |
| Pystykuorma | 2 × 1,0×10 ⁶ lb |
| Vaakakuorma | 1,0×10 ⁴ lb |

Tapaus laskettiin kolmen ja yhdeksän palkkielementin malleilla, joissa oli vastaavasti yksi ja kolme elementtiä sauvaa kohti. Oletusarvoista poikkeavat epälineaarisen analyysin lähtötiedot olivat: kuorma-askelten enimmäislukumäärä 30; ensimmäisen askeleen alun kuormakerroinlisäys 5,0 ja kokonaiskuormakertoimen maksimiarvo 100.

3 elementin malli. Ratkaisu päättyi normaalisti täyteen askelmäärään 30, jolloin kokonaiskuormakerroin oli 5,35 ja suurin vaakasiirtymä 77,3 sekä suurin pystysiirtymä 39,6. Kuorma-askeleen 8 jälkeen saatiin varoituksia negatiivisesta jäykkyysmatriisin diagonaalista. Askeleen 8 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 4,69. Kuorma-askeleesta 9 eteenpäin saatiin varoituksia siitä, että kuorma-askeleen kuormakerroinlisäyksen etumerkin ennuste oli poikennut askeleen suppenemisen jälkeisestä toteutuneesta kuormakerroinlisäyksen etumerkistä. Askeleen 9 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 4,72.

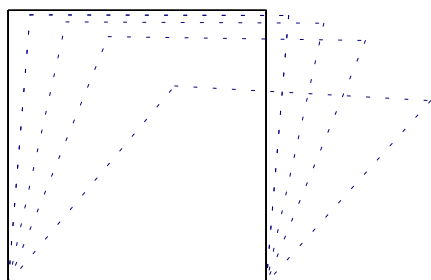
9 elementin malli. Ratkaisu päättyi normaalisti täyteen askelmäärään 30, jolloin kokonaiskuormakerroin oli 5,05 ja suurin vaakasiirtymä 100,7 sekä suurin pystysiirtymä 95,1. Kuorma-askeleella 8 saatiin varoitus siitä, että kuorma-askeleen kuormakerroinlisäyksen etumerkin ennuste oli poikennut askeleen suppenemisen jälkeisestä toteutuneesta kuormakerroinlisäyksen etumerkistä. Askeleen 8 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 4,67. Kuorma-askeleen 22 jälkeen saatiin varoituksia negatiivisesta jäykkyysmatriisin diagonaalista. Askeleen 22 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 5,40.

Taulukossa 6-4 on vertailtu ratkaisun etenemistä eri tapauksissa. Kuvat 6-10 ja 6-11 on otettu molemmista malleista askelilta 5, 10, 15 ja 30. Kuvien siirtymät on esitetty mallin mittakaavassa. Kuvissa 6-12 ja 6-13 on esitetty ratkaisujen kuormakerroin—siirtymä-käyrät,

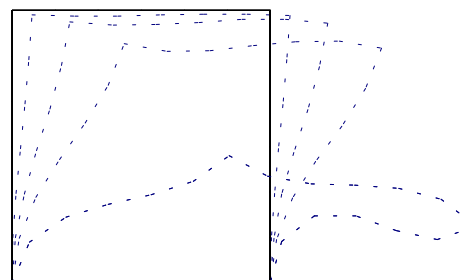
joissa kehän suurin vaakasiirtymä eli vasemman ylänurkan vaakasiirtymä on esitetty kokonaiskuormakerroimen funktiona.

Taulukko 6-4. Ratkaisun kulku eri elementtijailla.

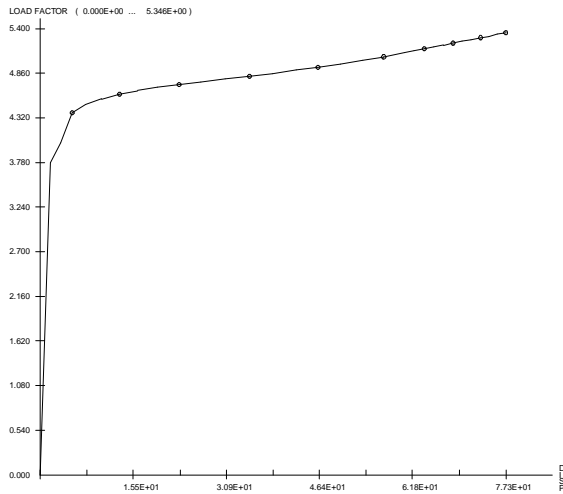
| Ratkaisun vaihe | 3 elementtiä | 9 elementtiä |
|---|--------------|--------------|
| Kokonaiskuormakerroin / kuorma-askel | | |
| — ensimmäinen negatiivinen diagonaaliakio | 4,69 / 8 | 5,40 / 22 |
| — ensimmäinen etumerkin poikkeama | 4,72 / 9 | - |
| — käännepiste (huippu) | - | 5,40 / 22 |
| — viimeinen askel | 5,35 / 30 | 5,05 / 30 |
| Suurin saavutettu siirtymä / kuorma-askel | | |
| — vaakasiirtymä | 77,3 / 30 | 100,7 / 30 |
| — pystysiirtymä | 39,6 / 30 | 95,1 / 30 |



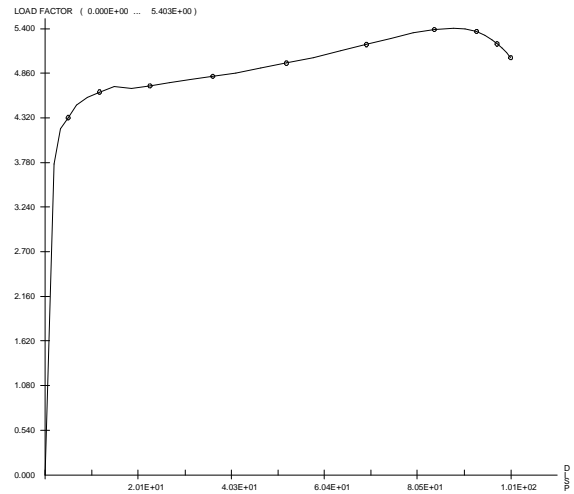
Kuva 6-10. Kolmen elementin malli.



Kuva 6-11. Yhdeksän elementin malli.



Kuva 6-12. Kolmen elementin malli.



Kuva 6-13. Yhdeksän elementin malli.

Oranin ja Kassimalin (1976) vertailutuloksia on esitetty kuvassa 6-14. Tässä esimerkissä käytetyt lähtöarvot vastaavat tapausta $n = 1/100$.

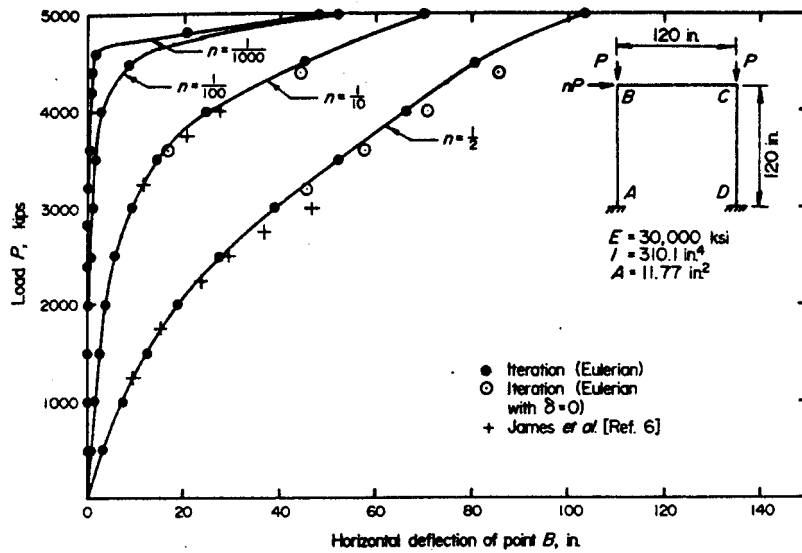


Fig. 9. Load-deflection curves for one story bent.

Kuva 6-14. Rakennemalli ja kuormakerroin—siirtymä-käyrät.

6.4 Avaruuskehä

Alla on lueteltu kuvan 6-15 esimerkkitapauksen lähtöarvot. Myös tulokset on esitetty yksiköissä lb (pauna = 4,45 N) ja in (tuuma = 25,4 mm).

| | |
|----------------|-----------------------------------|
| Sauvan pituus | 24 in |
| Poikkileikkaus | $0,703 \times 0,703 \text{ in}^2$ |
| Kimmokerroin | 439800 lb/in^2 |
| Korkeus | $1,75 \text{ in}^2$ |
| Pystykuorma | 1,0 lb |

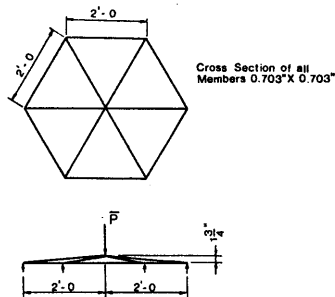


FIG. 6.—MIT MODEL FRAME (Plexiglas Material) (1 ft = 30,48 cm, 1 in. = 2,54 cm)

Kuva 6-15. Rakennemalli.

Avaruuskehä pääsi liikkumaan vapaasti vaakatasossa (lukuunottamatta jäykän kappaleen liikkeitä). Tapaus laskettiin sekä 12 että 48 palkkielementin malleilla, joissa oli vastaavasti yksi elementti ja neljä elementtiä sauvaa kohti. Oletusarvoista poikkeavat epälineaarisen analyysin lähtötiedot olivat: ensimmäisen askeleen alun kuormakerroinlisäys 10 ja kokonaiskuormakertoimen maksimiarvo 100.

12 elementin malli. Ratkaisu päättyi normaalisti täyteen askelmäärään 100, jolloin suurin pystysiirtymä oli 1,6 ja kokonaiskuormakerroin 28,4. Kuorma-askeleesta 9 eteenpäin saatiin varoituksia negatiivisista jäykkyyismatriisin diagonaaleista (3 kpl). Askeleen 9 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 57,2.

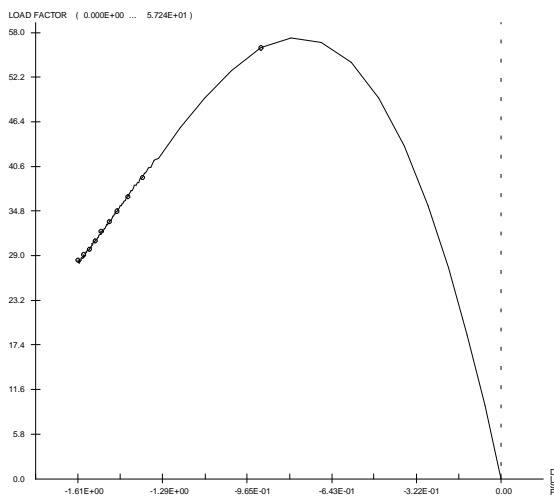
48 elementin malli. Ratkaisu päättyi askelmäärään 40, jolloin ylitettiin kokonaiskuormakerroimen maksimiarvo 100. Suurin pystysiirtymä oli tällöin 3,7 ja kokonaiskuormakerroin

102,1. Kuorma-askeleesta 9 eteenpäin saatiin varoituksia negatiivisesta jäykkyysmatriisin diagonaalista. Askeleen 9 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 57,0. Askeleen 8 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 57,3. Askeleen 11 jälkeen tuli kaksi negatiivista diagonaalialkiota lisää. Askeleen 11 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 44,7. Askeleen 20 jälkeen edellä mainitut kaksi negatiivista diagonaalialkiota taas hävisivät. Askeleen 20 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 21,1. Askeleen 29 jälkeen ei enää esiintynyt lainkaan negatiivisia diagonaalialkiota. Askeleen 29 kokonaiskuormakertoimen arvo oli 8,5.

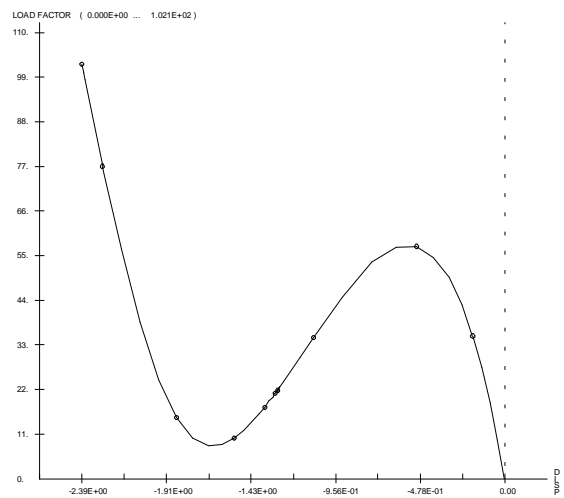
Taulukossa 6-5 on vertailtu ratkaisun etenemistä eri tapauksissa. Kuvissa 6-15 ja 6-16 on esitetty ratkaisujen kuormakerroin—siirtymä-käyrät, joissa suurin pystysiirtymä eli kuormituspisteen pystysiirtymä on esitetty kokonaiskuormakertoimen funktiona.

Taulukko 6-5. Ratkaisun kulku eri elementtijaolla.

| Ratkaisun vaihe | 12 elementtiä | 48 elementtiä |
|--|---------------|---------------------|
| Kokonaiskuormakerroin / kuorma-askel | | |
| — ensimmäinen negatiivinen diagonaalialkio, käännepiste (huippu) | 57,2 / 9 | 57,0 / 9 (57,3 / 8) |
| — ei negatiivisia diagonaalialkiota, käännepiste (laakso) | - | 8,5 / 29 |
| — viimeinen askel | 8,4 / 100 | 102,1 / 40 |
| Suurin saavutettu pystysiirtymä / kuorma-askel | 1,6 / 100 | 3,7 / 40 |



Kuva 6-16. 12 elementin malli.



Kuva 6-17. 48 elementin malli.

Chun ja Rampetsreiterin (1972) analyttisesti, kokeellisesti ja elementtimallilla saadut vertailutulokset on esitetty kuvassa 6-18. Kokeellisesti saatu stabiiliudenmenetyskuorma oli 56,5. Myös Meekin ja Tanin (1984) sekä Chanin (1988) tulokset ovat hyvin lähellä tässä esitettyjä tuloksia. Kouhian (1992) laskemat stabiiliudenmenetyskuormat olivat 260 N ja 253 N, jotka vastaavat kuormia 58,4 ja 56,9 eli poikkeavat alle 2% tässä esitetyistä tuloksista.

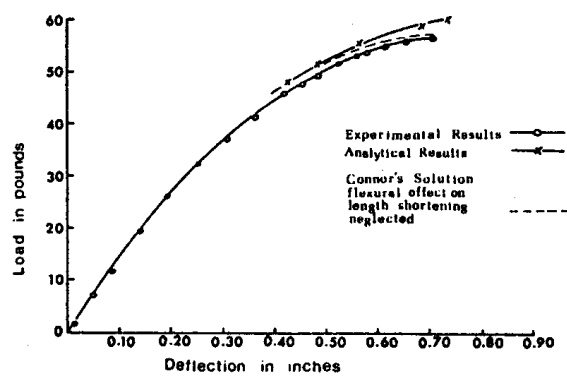


FIG. 7.—LOAD DEFLECTION CURVE OF MIT MODEL FRAME (1 lb = 4.45 N, 1 in. = 2.54 cm)

Kuva 6-18. Kuormakerroin—siirtymä-käyrät.

7 Yhteenveto ja johtopäätökset

Työssä on käsitelty epälineaaristen algebrallisten yhtälösystemien ratkaisemiseen käytettäviä numeerisia polunseurausmenetelmiä —sekä matemaattisia perusteita että sovelluksiin ja ohjelmointiin liittyviä näkökohtia. Pääpaino on ollut ennuste—korjausmenetelmissä, jotka soveltuvat erityisen hyvin rakenteiden mekaniikan tehtäviin.

Ennuste—korjausmenetelmien sovelluskohteena ovat olleet rakenteiden mekaniikan epälineaariset tehtävät —erityisesti stabiiliustarkastelut. Tämän takia työssä on käsitelty sekä epäelastisten että elastisten rakenteiden stabiiliusteorian perusteita. Lisäksi työssä on käsitelty lyhyesti erilaisia ratkaisumenetelmätyyppejä, jotka sivuavat polunseurausmenetelmiä.

Sovellusten kannalta tärkeimmiksi katsotut ratkaisumenetelmät on ohjelmoitu osaksi elementtimenetelmään perustuvaa lujuslaskentaohjelmistoa. Ohjelmiston entisten ratkaisumenetelmien rinnalle ja tilalle on lisätty uusia ratkaisumenetelmiä ja entistä monipuolisempia vaihtoehtoja ohjata analyysia. Lisäksi ohjelmiston käyttäjille on laadittu mallinnuksen ja laskennan oleellisia piirteitä ja erilaisia esimerkkejä sisältävä ohjelmaseloste.

Toteutettuja ratkaisumenetelmiä on testattu laskemalla sekä yksinkertaisia esimerkitapauksia että ohjelmiston käyttäjien ongelmatapauksia ja vertaamalla tuloksia kirjallisuudessa esitettyihin tuloksiin. Lasketut tulokset vastaavat hyvin vertailutuloksia. Ohjelmiston käyttäjien ongelmatapauksia ei ole sisällytetty tähän työhön.

Työn tavoitteet voidaan katsoa saavutetuiksi niin laskentamenetelmiä koskevien selvitysten kuin ohjelmistokehityksenkin osalta. Jatkossa ohjelmiston epälineaarisen analyysiin ratkaisumenetelmiin on tarkoitus sisällyttää joitakin lisäominaisuuksia kuten haarautumis- ja perтурbaatiomenetelmät yksinkertaisessa bifurkaatiopisteessä. Nämä lisäykset voidaan toteuttaa tämän työn selvitysten pohjalta. Teoriapuolen osalta olisi luontevaa perehtyä joihinkin seuraavista tässä työssä mainituista aihepiireistä: moninkertaisten bifurkaatiopisteiden käsittely; katastrofiteorian soveltaminen elastisiin rakenteisiin; rakenteiden häiriöalttiustarkastelut; rakenteiden dynaaminen epälineaarinen käyttäytyminen. Tutkimuksessa tulisi selvittää erityisesti mahdollisuudet soveltaa teorioiden antamia keinoja laskentaohjelmiston käyttötarkoituksiin.

Lähdeluettelo

Allgower, E. G., Chien, C.-S. & Georg, K. 1990. Large sparse continuation problems. In: Mittelmann, H. D. & Roose, D. (toim.). ISNM 92, Continuation Techniques and Bifurcation Problems. Basel, Birkhäuser, Verlag. s. 3—21.

Allgower, E. G. & Georg, K. G. 1990. Numerical Continuation Methods —An Introduction. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.

Argyris, J., Balmer, H. & St. Doltsinis, I. 1987. Implantation of a nonlinear capability on a linear software system. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 65, s. 267—291.

Arnold, V. I. 1986. Catastrophe Theory. Second, Revised and Expanded Edition. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.

Bathe, K.-J. & Cimento, A. P. 1980. Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 22, s. 59—85.

Bathe, K.-J. & Wilson, E. L. 1976. Numerical Methods in Finite Element Analysis. New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice Hall.

Bazant, Z. P. & Cedolin, L. 1991. Stability of Structures. New York, Oxford University Press.

Bellini, P. X. & Chulya, A. 1987. An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations. Computers & Structures, 26, s. 99—110.

Bergan, P.G. 1981. Solution by iteration in displacement and load spaces. In: Wunderlich, W., Stein, E. & Bathe, K.-J. (toim.). Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Ruhr Universität, Bochum, Germany. Berlin, Springer-Verlag. s. 217—235.

Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Kråkeland, B. & Søreide, T.H. 1978. Solution techniques for non-linear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, s. 1677—1696.

Chan, S. L. 1988. Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacements method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, s. 2657—2669.

Chan, T. F. 1984. Techniques for large sparse systems arising from continuation methods. In: Küpper, T., Mittelman, H. D. & Weber, H. (toim.). *ISNM 70, Numerical Methods for Bifurcation Problems*. Basel, Birkhäuser, Verlag. s. 116—128.

Chow, S.-N. & Hale, J. K. 1982. *Methods of Bifurcation Theory*. New York, Springer-Verlag.

Chow, S.-N., Li, C. & Wang, D. 1994. *Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields*. USA, Cambridge University Press.

Chu, K.-H. & Rampetsreiter, R. H. 1972. *ASCE Journal of Structural Division*, December, s. 2700—2722.

Clarke, M. J. & Hancock, G. J. 1990. A study of incremental—iterative strategies for non-linear analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, s. 1365—1391.

Crisfield, M. A. 1979. A faster modified Newton—Raphson iteration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20, s. 267—278.

Crisfield, M.A. 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers & Structures*, 13, s. 55—62.

Crisfield, M. A. 1982. Accelerated solution techniques and concrete cracking. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33, s. 585—607.

Crisfield, M. A. 1983. An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19, s. 1269—1289.

Crisfield, M.A. 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials*. Chichester, England, John Wiley & Sons.

Crisfield, M.A. 1997. *Non-linear Finite Element Analysis of Solid and Structures, Volume 2: Advanced Topics*. England, John Wiley & Sons.

Demmel, J. W. 1997. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia, USA, SIAM.

El Naschie, M. S. 1990. *Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach*. UK, McGraw-Hill.

Eriksson, A. 1993. On improved predictions for structural equilibrium path evaluations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, s. 201—220.

Eriksson, A. & Kouhia, R. 1995. On step size adjustments in structural continuation problems. *Computers & Structures*, 55, s. 495—506.

FINNSAP 1999. Epälineaarinen analyysi. Kansio III.

Fetter, A. L. & Walecka, J. D. 1980. *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*. USA, McGraw-Hill.

Forde, B.W.R. & Stiemer, S.F. 1987. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, 27, s. 625—630.

Fried, I. 1984. Orthogonal trajectory accession to the nonlinear equilibrium curve. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, s. 283—297.

Gáspár, Zs. 1983. Imperfection-sensitivity and catastrophe theory. In: Thompson, J. M. T. & Hunt, G. W. (toim.). *Collapse, the buckling of structures in theory and practice*. USA, Cambridge University Press. s. 175—181.

Gleick, J. 1987. *Kaaos*. Jyväskylä, Gummerus kirjapaino oy.

Golub, G. H. & Van Loan, C. F. 1996. *Matrix Computations*. Baltimore, USA, The Johns Hopkins University Press.

Hinton, E. (toim.) 1992. Introduction to the Nonlinear Finite Element Analysis. Glasgow, NAFEMS.

Huitfeldt, J. & Ruhe, A. 1990. A new algorithm for numerical path following applied to an example from hydrodynamical flow. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11, s. 1181—1192.

Hunt, G. W. 1983. Elastic stability: structural mechanics and applied mathematics. In: Thompson, J. M. T. & Hunt, G. W. (toim.). *Collapse, the buckling of structures in theory and practice*. USA, Cambridge University Press. s. 125—147.

Iooss, G. & Joseph, D. D. 1980. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. New York, Springer-Verlag.

Jepson, A. & Spence, A. 1985. Folds in solutions of two parameter systems and their calculation, part I. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 22, s. 347—368.

Kardestuncer, H. & Norrie, D. H. (toim.) 1987. *Finite Element Handbook*. USA, McGraw-Hill.

Keener, J. P. 1974. Perturbed bifurcation theory at multiple eigenvalues. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 56, s. 348—366.

Keener, J. P. & Keller, H. B. 1973. Perturbed bifurcation theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 50, s. 159—175.

Keller, H. B. 1977. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In: Rabinowitz, P. H. (toim.). *Applications of Bifurcation Theory*. New York, Academic Press Inc.. s. 359—384.

Keller, J. B. & Antman, S. 1969. Introduction. In: Keller, J. B. & Antman, S. (toim.). *Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems*. New York, W.A. Benjamin. s. xi—xiv.

Kelley, C. T. 1995. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. Philadelphia, USA, SIAM.

Kouhia, R. 1992. On the solution of non-linear finite element equations. *Computers & Structures*, 44, s. 243—254.

Kouhia, R. 1994. Generalized Newton—Raphson techniques. In: Viridi, K. S. (toim.). *Non-linear Dynamics*. Chapter 7.

Kouhia, R. 1999. *Techniques for the Analysis of Non-Linear Systems —With Applications to Solid and Structural Mechanics*. Doctoral Thesis, Helsinki University of Technology, Laboratory of Structural Mechanics. *Acta Polytechnica Scandinavica*, Ci 116.

Kouhia, R. 2000. Käytännön näkökohtia rakenteiden stabiiliusanalyysiin. In: Kesti, J. & Mäkeläinen, P. (toim.). *Viidennet teräsrakenteiden tutkimus- ja kehityspäivät 18.—19.1.2000*. Teknillisen korkeakoulun teräsrakennetekniikan laboratorion julkaisuja 13, Espoo. s. 207—214.

Kouhia, R. & Mikkola, M. 1989. Tracing the equilibrium path beyond simple critical points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, s. 2923—2941.

Kouhia, R. & Mikkola, M. 1995. Strategies for structural stability analysis. In: Wiberg, N.-E. (toim.). *Advances in Finite Element Technology*. Barcelona, Spain, CIMNE. s. 254—278.

Kouhia, R. & Mikkola, M. 1998. Numerical treatment of multiple bifurcation points. In: Idelsohn, S., Oñate, E. ja Dvorkin, E. (toim.). *Computational Mechanics, New Trends and Applications*. Barcelona, Spain, CIMNE.

Kouhia, R. & Mikkola, M. 2000a. Some aspects on efficient path following. Accepted for publication in *Computers & Structures*.

Kouhia, R. & Mikkola, M. 2000b. Tracing the equilibrium path beyond compound critical points. Accepted for publication in *Journal for Numerical Methods in Engineering*.

Kuznetsov, Y. A. 1995. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York, Springer-Verlag.

Lu, Y.-C. 1976. *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*. New York, Springer-Verlag.

Marsden, J. E. & Hughes, T. J. R. 1983. *Mathematical Foundations of Elasticity*. New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice Hall.

Matthies, H. & Strang, G. 1979. The solution of nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, s. 1613—1626.

Meek, J. L. & Tan, H. S. 1984. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, s. 261—282.

Milne, R. D. 1980. *Applied Functional Analysis*. Massachusetts, Pitman Publishing Inc..

Mittelman, H. D. & Weber, H. 1980. Numerical methods for bifurcation problems —a survey and classification. In: Mittelman, H. D. & Weber, H. (toim.). *Bifurcation Problems and Their Numerical Solution*. Basel, Birkhäuser, Verlag. s. 1—45.

Oran, C. & Kassimali, A. 1976. Large deformations of framed structures under static and dynamic loads. *Computers & Structures*, 6, s. 539—547.

Pacoste, C. C. 1993. On the application of catastrophe theory to stability analysis of elastic structures. Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering.

Pajunen, S. & Tuomala, M. 1997. Calculation of equilibrium paths in nonlinear structural analysis. *Rakenteiden Mekaniikka*, 30, s. 63—84.

Pajunen, S. 1998. Epälineaarista laskennasta rakenteiden mekaniikassa. *Rakenteiden Mekaniikka*, 31, s. 16—30.

Parlett, B. N. 1980. *The Symmetric Eigenvalue Problem*. USA, Englewood Cliffs, Prentice Hall.

Pignataro, M., Rizzi, N. & Luongo, A. 1991. *Stability, Bifurcations and Postcritical Behaviour of Elastic Structures*. Elsevier Science Publishers B.V..

Poston, T. & Stewart, I. 1981. Catastrophe Theory and its Applications. 2. p., London, Pitman.

Ramm, E. 1981. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: Wunderlich, W., Stein, E. & Bathe, K.-J. (toim.). Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Ruhr Universität, Bochum, Germany. Berlin, Springer-Verlag. s. 63—89.

Rheinboldt, W. C. 1978. Numerical method for a class of finite dimensional bifurcation problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 15, s. 1—11.

Rheinboldt, W. C. 1986. Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations. John Wiley & Sons.

Riks E., 1972. The application of Newton' s method to the problem of elastic stability. Journal of Applied Mechanics, 39, s. 1060—1065.

Riks, E. 1984. Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 47, s. 219—259.

Rudin, W. 1976. Principles of Mathematical Analysis. Singapore, McGraw-Hill.

Rudin, W. 1987. Real and Complex Analysis. Singapore, McGraw-Hill.

Saad, Y. 1992. Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. Manchester, UK, Manchester University Press.

Salonen, E.-M. & Freund, J. 2000. Finite Element Method in Mechanics. Laboratory of Theoretical and Applied Mechanics, Helsinki University of Technology.

Schweizerhof, K.H. & Wriggers, P. 1986. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 59, s. 261—279.

Seydel, R. 1994. Practical Bifurcation and Stability Analysis —From Equilibrium to Chaos. 2. p., New York, Springer-Verlag.

Shi, J. & Crisfield, M. A. 1994. A semi-direct approach for the computation of singular points. *Computers & Structures*, 51, s. 107—115.

Simo, J. C., Wriggers, P., Schweizerhof, K. H. & Taylor R. L. 1986. Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, s. 779—800.

Smale, S. 1966. An infinite version of Sard's theorem. *American Journal of Mathematics*, 87, s. 861—866.

Thompson, J. M. T. & Hunt, G. W. 1973. *A General Theory of Elastic Stability*. London, Great Britain, John Wiley & Sons.

Thompson, J. M. T. & Hunt, G. W. 1984. *Elastic Instability Phenomena*. John Wiley & Sons.

Wagner, W. 1990. A path-following algorithm with quadratic predictor. *Computers & Structures*, 39, s. 339—348.

Ziegler, H. 1968. *Principles of Structural Stability*. USA, Blaisdell Publishing Company.

Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R. L. 1991. *The Finite Element Method, Volume 2: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*. 4. p., UK, McGraw-Hill.

Liitteet

A Rajoitevektorit eri rajoiteyhtälöille

Normaalitaso (Riks 1972):

$$\mathbf{t}^{(k)} = (\Delta \mathbf{q}^{(1)} \ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(1)})^T \quad (\text{A-1})$$

$$\mathbf{n}^{(k)} = (\delta \mathbf{q}^{(k)} \ \delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)})^T \quad (\text{A-2})$$

$$\mathbf{e}^{(k)} = 0 \quad (\text{A-3})$$

Päivitetty normaalitaso (Ramm 1981):

$$\mathbf{t}^{(k)} = (\Delta \mathbf{q}^{(k-1)} \ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(k-1)})^T \quad (\text{A-4})$$

$$\mathbf{n}^{(k)} = (\delta \mathbf{q}^{(k)} \ \delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)})^T \quad (\text{A-5})$$

$$\mathbf{e}^{(k)} = 0 \quad (\text{A-6})$$

Ortogonaalinen trajektori (Fried 1984):

$$\mathbf{t}^{(k)} = (\delta \mathbf{q}_p^{(k)} \ 1)^T \quad (\text{A-7})$$

$$\mathbf{n}^{(k)} = (\delta \mathbf{q}^{(k)} \ \delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)})^T \quad (\text{A-8})$$

$$\mathbf{e}^{(k)} = 0 \quad (\text{A-9})$$

Konsistentti linearisointi (Schweizerhof ja Wriggers 1986):

$$\mathbf{t}^{(k)} = (\Delta \mathbf{q}^{(k-1)} \ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(k-1)})^T \quad (\text{A-10})$$

$$\mathbf{n}^{(k)} = (\delta \mathbf{q}^{(k)} \ \delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)})^T \quad (\text{A-11})$$

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{t}^{(k)T} \mathbf{t}^{(k)} (\mathbf{t}^{(k)T} \mathbf{t}^{(k)} - \Delta s) \quad (\text{A-12})$$

Elliptinen rajoiteyhtälö (Crisfield 1981):

$$\mathbf{t}^{(k)} = (\Delta \mathbf{q}^{(k)} \ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)})^T \quad (\text{A-13})$$

$$\mathbf{n}^{(k)} = (\Delta \mathbf{q}^{(k)} \ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)})^T \quad (\text{A-14})$$

$$\mathbf{e}^{(k)} = \Delta s^2 \quad (\text{A-15})$$

Elliptinen rajoiteyhtälö kahdessa vaiheessa (Forde ja Stiemer 1987):

$$\mathbf{t}^{(Ik)} = (\Delta\mathbf{q}^{(k-1)} \Delta\lambda^{(k-1)})^T \quad (\text{A-16})$$

$$\mathbf{n}^{(Ik)} = (\delta\mathbf{q}^{(Ik)} \delta\lambda^{(Ik)})^T \quad (\text{A-17})$$

$$\mathbf{e}^{(Ik)} = 0 \quad (\text{A-18})$$

$$\delta\mathbf{q}^{(Ik)} = \delta\mathbf{q}_f^{(Ik)} + \delta\lambda^{(Ik)} \delta\mathbf{q}_p^{(Ik)} \quad (\text{A-19})$$

$$\mathbf{t}^{(k)} = (\Delta\mathbf{q}^{(k-1)} + \delta\mathbf{q}^{(Ik)} \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(Ik)})^T \quad (\text{A-20})$$

$$\mathbf{n}^{(k)} = (\delta\mathbf{q}^{(Ik)} \delta\lambda^{(Ik)})^T \quad (\text{A-21})$$

$$\mathbf{e}^{(k)} = \Delta s^2 (\mathbf{t}^{(k)T} \mathbf{t}^{(k)} - \Delta s) / (\mathbf{t}^{(k)T} \mathbf{t}^{(k)}) \quad (\text{A-22})$$

B Kuormakerroinmuutos eri rajoiteyhtälöille

Normaalitaso (Riks 1972):

$$\delta\lambda^{(k)} = - \{ \Delta q^{(1)T} \delta q_f^{(k)} \} / \{ \Delta\lambda^{(1)} + \Delta q^{(1)T} \delta q_p^{(k)} \} \quad (\text{B-1})$$

Päivitetty normaalitaso (Ramm 1981):

$$\delta\lambda^{(k)} = - \{ \Delta q^{(k-1)T} \delta q_f^{(k)} \} / \{ \Delta\lambda^{(k-1)} + \Delta q^{(k-1)T} \delta q_p^{(k)} \} \quad (\text{B-2})$$

Ortogonaalinen trajektorii (Fried 1984):

$$\delta\lambda^{(k)} = - \{ \delta q_p^{(k)T} \delta q_f^{(k)} \} / \{ 1 + \delta q_p^{(k)T} \delta q_p^{(k)} \} \quad (\text{B-3})$$

Konsistentti linearisointi (Schweizerhof ja Wriggers 1986):

$$\delta\lambda^{(k)} = - \{ t^{(k)T} t^{(k)} (t^{(k)T} t^{(k)} - \Delta s) + \Delta q^{(k-1)T} \delta q_f^{(k)} \} / \{ \Delta\lambda^{(k-1)} + \Delta q^{(k-1)T} \delta q_p^{(k)} \} \quad (\text{B-4})$$

Elliptinen rajoiteyhtälö (Crisfield 1981):

$$\delta\lambda^{(k)} = \{ -B^{(k)} \pm \{ B^{(k)2} - 4A^{(k)}C^{(k)} \}^{1/2} \} / \{ 2A^{(k)} \} \quad (\text{B-5})$$

$$A^{(k)} = 1 + \delta q_p^{(k)T} \delta q_p^{(k)} \quad (\text{B-6})$$

$$B^{(k)} = 2 (\lambda^{(k)} + \delta q_p^{(k)T} \delta q_f^{(k)} + \delta q_p^{(k)T} \Delta q^{(k-1)}) \quad (\text{B-7})$$

$$C^{(k)} = \lambda^{(k)2} - \Delta s^2 + \Delta q^{(k)T} \Delta q^{(k)} + 2\Delta q^{(k)T} \delta q_f^{(k)} + \delta q_f^{(k)T} \delta q_f^{(k)} \quad (\text{B-8})$$

Elliptinen rajoiteyhtälö kahdessa vaiheessa (Forde ja Stiemer 1987):

$$\delta\lambda^{(Ik)} = - \{ \Delta q^{(k-1)T} \delta q_f^{(Ik)} \} / \{ \Delta\lambda^{(k-1)} + \Delta q^{(k-1)T} \delta q_p^{(Ik)} \} \quad (\text{B-9})$$

$$\delta q^{(Ik)} = \delta q_f^{(Ik)} + \delta\lambda^{(Ik)} \delta q_p^{(Ik)} \quad (\text{B-10})$$

$$\delta\lambda^{(k)} = - \{ \Delta s^2 (t^{(k)T} t^{(k)} - \Delta s) / (t^{(k)T} t^{(k)}) + (\Delta q^{(k-1)} + \delta q^{(Ik)})^T \delta q_f^{(Ik)} \} / \{ (\Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(Ik)}) + (\Delta q^{(k-1)} + \delta q^{(Ik)})^T \delta q_p^{(Ik)} \} \quad (\text{B-11})$$

C Iteroinnin kulku eri rajoiteyhtälöillä

