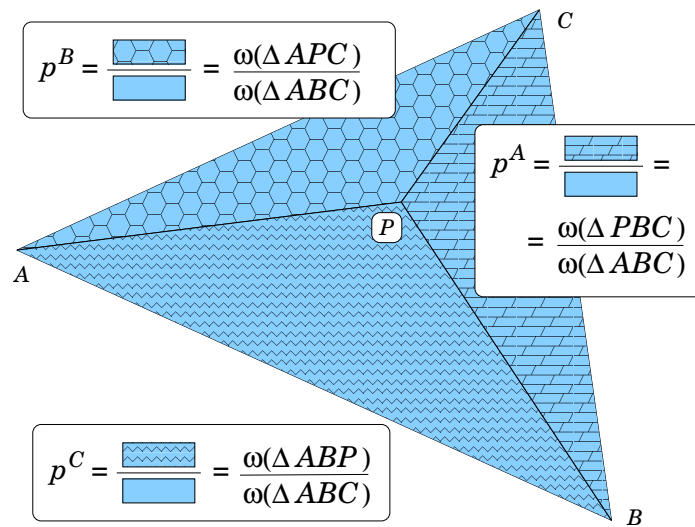


Tilastolliset menetelmät geodesiassa Maa-6.3282



Martin Vermeer

March 26, 2015

Kurssiesite

Laajuus 3 op

Opetusjakso III-IV, parittomina kevinä

Osaamistavoitteet Opintojakson suorittamisen jälkeen opiskelijalla ymmärtää tasoituslaskun, optimoinnin, estimaation ja approksimaation erilaisten menetelmien ja niiden sovellusten teoreettiset taustat ja osaa soveltaa ne käytännön tilanteessa.

Sisältö Vapaa tasoitus ja kiinnitys annettuihin pisteisiin, käsitteet datum ja datummuunnos, yhdenmuotois- ja affiinniset muunnokset datumien välillä, *a priori* -tiedon hyväksikäyttö, Helmert-Wolf blocking ja normaaliyhtälöiden pinoitus, stokastiset prosessit ja Kalman-suodatus, muodon mittaus, deformaatioiden monitorointi ja 3D-koordinaattimittaus; eri approksimaatio- interpolaatio- ja estimaatiomenetelmät ja pienimmän neliösumman kollokaatio.

Esitiedot Maa-6.203 tai Maa-6.2203.

Korvaavuudet Korvaa opintojakson Maa-6.282.

Kohderyhmä

Suoritustavat Kokonaissuoritus koostuu tentistä ja laskuharjoituksista.

Työmäärä toteutustavoittain

- Luennot $13 \times 2 \text{ t} = 26 \text{ t}$
- Materiaalin itsenäinen opiskelu 22 t
- Laskuharjoitukset kotityönä $4 \times 8 \text{ t} = 32 \text{ t}$ (itsenäinen työskentely)
- Yhteensä 80 t

Arvostelu Tentin arvosana on kokonaissuorituksen arvosana , 1-5

Oppimateriaalit Luentomoniste.

Opetuskieli Englanti jos tarpeen, muuten suomi

Kurssin henkilökunta ja yhteystiedot Martin Vermeer, Gentti (Vaisalantie 8) , nimi@aalto.fi

Vastaanottoajat Sovitaan

CEFR-taso

Lisätietoja

Sisältö

1	Vapaa verkko ja datum	1
1.1	Teoria	1
1.2	Esimerkki: vaaitusverkko	1
1.3	Datumin kiinnittäminen	3
1.3.1	Rajoitusehdot	3
1.3.2	Toinen lähestymistapa: optimointi	4
1.3.3	Rajoitusehtojen tulkinta normin minimointina	5
1.3.4	Regularisoinnista yleisemmin	6
1.4	Muut esimerkit	6
1.4.1	Etäisyysmittaus	6
1.4.2	Mittakaavasta	7
1.4.3	Kulmamittaus	7
1.4.4	Atsimutimittaus	7
1.4.5	Avaruusgeodesian tapaus	8
1.4.6	Pitkäkantainterferometria (VLBI)	8
2	Yhdenmuotoiset S-muunnokset ja kriteerimatriisit	9
2.1	Kompleksiset koordinaatit ja pistevarianssit	9
2.2	S-muunnos kompleksitasossa	9
2.3	Kriteerimatriisin standardimuoto	10
2.3.1	Yleisempi muoto	11
2.4	Kriteerimatriisin S-muunnos	12
2.5	S-muunnokset ryhmän jäseninä	12
2.5.1	S-muunnos “äärettömyydestä” paikalliseen datumiin	13
2.5.2	S-muunnos kahden paikallisdatumin välillä	14
2.5.3	Usean i -pisteen tapaus	15
2.6	Varianssien S-muunnos	15
2.7	Harjoitukset	15
3	Affiininen S-muunnos	17
3.1	Kolmiointi ja finiitti-elementti -menetelmä	17
3.2	Bilineaarinen affiinimuunnos	17
3.3	Affiinimuunnosmenetelmän toteutus paikallisessa tilanteessa	19
3.4	Virheiden kasautumisen teoreettinen analyysi	19
3.4.1	Affiiniset muunnokset	19
3.4.2	Affiinimuunnos ja kriteerimatriisi	21
3.5	Korkeudenmittauksen tapaus	22
4	Kappaleen muodon määrittäminen (ympyrä, pallo, suora)	23
4.1	Yleinen tapaus	23
4.2	Esimerkki: Ympyrä	24
4.3	Harjoitukset	25
5	3D-verkko, teollisuusmittaukset useamman teodoliitin järjestelmällä	27
5.1	Kolmiulotteinen teodoliittimittaus (EPLA)	27
5.2	Esimerkki	28
5.3	Mittakaavan luomisen vaihtoehdot	29
6	Deformaatioanalyysi	31
6.1	Yksiulotteinen deformaatioanalyysi	31
6.2	Kaksiulotteinen deformaatioanalyysi	32
6.3	Esimerkki	32
6.4	Venymätensori ja affiininen muunnos	34

7	Stokastiset prosessit ja aikasarjat	35
7.1	Määritelmät	35
7.2	Stokastisten muuttajien varianssit ja kovarianssit	35
7.3	Auto- ja ristikovarianssi ja -korrelaatio	36
7.4	Autokovarianssin estimaatio	37
7.5	Autokovarianssi ja spektrumi	37
7.6	AR(1), linear regression and variance	38
7.6.1	Pienimmän neliösumman regressio ilman autocorrelaatiota	38
7.6.2	AR(1) prosessi	39
8	Tasoiuslaskun variantteja	41
8.1	Kaksivaihetasoius	41
8.2	<i>A priori</i> -tiedon käyttö tasoiuksessa	42
8.3	Normaaliyhtälöiden pinotus	43
8.4	Helmert-Wolf blokkimenetelmä	44
8.4.1	Periaate	44
8.4.2	Varianssit	45
8.4.3	Käytännön sovellus	46
8.5	Eteenpäin leikkaus tasossa	46
8.5.1	Tarkkuus tasossa	46
8.5.2	Eteenpäinleikkauksen geometria	47
8.5.3	Pistekeskivirheen minimointi	48
8.5.4	Determinantin minimointi	49
8.5.5	“Minimax”-optimointi	50
8.6	Harjoitukset	51
9	Kalman-suodatin	53
9.1	Dynaaminen malli	53
9.2	Tilapropagaatio ajassa	53
9.3	Havaintomalli	54
9.4	Päivitystapahtuma	54
9.5	Sekventiaalinen tasoius	55
9.5.1	Sekventiaalinen tasoius ja normaaliyhtälöiden pinotus	55
9.6	Kalman “kahdesta päästä”	56
9.7	Harjoitukset	57
10	Approksimaatio, interpolaatio, estimaatio	59
10.1	Käsitteet	59
10.2	Spline-interpolaatio	60
10.2.1	Lineaariset splinet	60
10.2.2	Kuutiolliset splinet	61
10.3	Finiitti-elementti -menetelmä	62
10.3.1	Esimerkki	62
10.3.2	Tehtävän “heikko” formulaatio	63
10.3.3	Delta-operaattorin bilineaarinen muoto	64
10.3.4	Koefunktiot	65
10.3.5	Matriisien laskenta	66
10.3.6	Tehtävän ratkaiseminen	67
10.3.7	Muunlaiset reuna-ehdot	67
10.4	Funktioavaruudet ja FOURIER-teoria	68
10.5	Waveletit eli aallokkeet	69
10.6	Legendre and Chebyshev approximation	71
10.6.1	Polynomisovitus	71
10.6.2	Legendre interpolation	72
10.6.3	Chebyshev interpolation	73
10.7	“Inversion-free” interpolointi	75
10.8	Regridding	75
10.9	Spatiaalinen interpolointi, taajuusstatistiikka	76
11	Pienimmän neliösumman kollokaatio	77
11.1	Pienimmän neliösumman kollokaatio	77

11.1.1	Stokastiset prosessit	77
11.1.2	Signaali ja kohina	77
11.1.3	Estimaattori ja sen virhevarianssi	78
11.1.4	Optimaalinen ja vaihtoehtoinen estimaattori	78
11.1.5	Stokastiset prosessit maan pinnalla	79
11.1.6	Painovoimakenttä ja kollokaation sovellukset	79
11.2	Kriging	80
11.3	Harjoitukset	81
11.3.1	HIRVOSEN kovarianssikaava	81
11.3.2	Painovoima-anomalioiden prediktio	81
11.3.3	Painovoiman prediktio (2)	81
11.3.4	Kollokaatio-esimerkki aika-akselilla	82
12	Eri hyödyllisiä analyysimenetelmiä	83
12.1	Ominaisarvojen ja -vektoreiden laskenta	83
12.1.1	Symmetrinen (itseadjungoitu) tapaus	83
12.1.2	Potenssimenetelmä	84
12.2	Singulaariarvohajotelma (SVD)	84
12.2.1	Periaate	84
12.2.2	Neliön muotoinen matriisi	85
12.2.3	Yleinen matriisi	85
12.2.4	Sovelluksia	86
12.2.5	SVD kompressiomenetelmänä	86
12.2.6	Esimerkki (1)	86
12.2.7	Esimerkki (2)	87
12.3	Pääkomponenttianalyysi (PCA) eli Empiirisiä ortogonaalisia funktioita (EOF)	88
12.4	RegEM-menetelmä	89
12.5	Matriisimenetelmiä	90
12.5.1	Choleskyn hajotelma	90
12.5.2	LU-hajotelma	90
12.6	Informaatiokriteereitä	93
12.6.1	Akaike	94
12.6.2	Akaike pienille datan määrille	94
12.6.3	Bayesiläinen	94
12.7	Tilastollisia temppuja	95
12.7.1	Monte Carlo, Resampling, Jackknife, Bootstrap	95
12.7.2	Parzenin ikkunamenetelmä	95
12.7.3	Bayesiläinen päättely	95
	Kirjallisuutta	97
	A Hyödyllisiä matriisikaavoja	101
	B Gaussin reduktiomenetelmä	103

Luku 1

Vapaa verkko ja datum

Kirjallisuus:

Kallio [1998b, s. 67-71, 141-150]

Lankinen [1989]

Leick [1995, s. 130-135]

Cooper [1987, s. 206-215, 311-321]

Strang and Borre [1997, s. 405-430]

Leick [1995, s. 130-135]

Baarda [1973] osin.

1.1 Teoria

Vapaa verkko on verkko, joka ei ole millään tavalla kiinnitetty ulkopuolisiin kiintopisteisiin tai korkeamman luokan (jo mitattuun) verkkoon.

Kirjoitetaan havaintoyhtälöt seuraavasti

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{x}. \quad (1.1)$$

Tässä $\underline{\ell}$ on havaintojen, \underline{v} jäännösvirheiden ja \hat{x} tuntemattomien vektorit, ja A on rakennematriisi (en. *design matrix*).

Oletetaan, että tietyillä vektorin x arvoilla c_i , $i = 1 \dots r$:

$$Ac_i = 0.$$

Silloin vektoreiden c_i virittämä havaintovektoreiden x avaruuden¹ aliavaruus, jonka ulottuvuuskien määrä on r , kutsutaan A :n *nolla-avaruudeksi*. Luku r kutsutaan matriisin A *rangivajeeksi*². Ks. Kallio [1998b, s. 68]. Silloin A -matriisin rangi on pienempi kuin sen sarakkeiden (eli tuntemattomien) määrä.

Tämä johtaa seuraavaan tilanteeseen:

Jos \hat{x} on kaavan (1.1) pienimmän neliösumman ratkaisu, niin myös jokainen $\hat{x} + \sum_{i=1}^r \alpha^i c_i$ on, samoilla jäännösvirheillä. Tässä kertoimet α^i ovat mielivaltaisia.

1.2 Esimerkki: vaaitusverkko

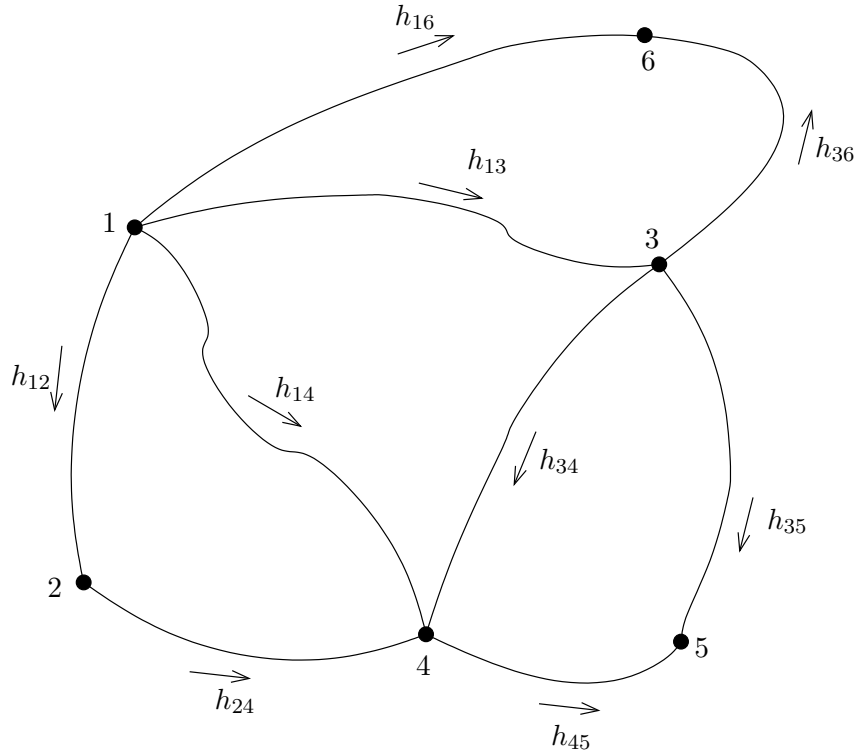
Minkä näköisiä ne nolla-avaruuden vektoreita ovat realistisissa tapauksissa?

Esimerkkinä *vaaitusverkko*. Verkon pisteet i ja j , korkeudet H_i ja H_j . Vaaitus mittaustekniikkana tuottaa vain pisteiden korkeuseroja eikä absoluuttisia korkeuksia. Siis havaintoyhtälöt ovat seuraavan näköisiä:

$$\underline{\ell}_k + \underline{v}_k = \hat{H}_i - \hat{H}_j.$$

¹Tämä on ns. abstrakti vektoriavaruus.

²Matriisin rangi on sen lineaarisesti riippumattomien rivien tai sarakkeiden lukumäärä. Yleensä se on joko rivien tai sarakkeiden lukumäärä, kumpi on pienempi; rakennemetriin tapauksessa se on siis sarakkeiden lukumäärä. Jos rangi on tätä pienempää, puhutaan *rangivajaudesta* [en. *rank defect*].



Kuva 1.1: Vaaitusverkon esimerkki

Olkoon vaaitusverkko kuvan 1.1 näköinen. Siinä tapauksessa havaintoyhtälöt ovat

$$\begin{aligned}
 \underline{\ell}_1 + \underline{v}_1 &\equiv \underline{h}_{12} + \underline{v}_1 = \widehat{H}_2 - \widehat{H}_1, \\
 \underline{\ell}_2 + \underline{v}_2 &\equiv \underline{h}_{24} + \underline{v}_2 = \widehat{H}_4 - \widehat{H}_2, \\
 \underline{\ell}_3 + \underline{v}_3 &\equiv \underline{h}_{14} + \underline{v}_3 = \widehat{H}_4 - \widehat{H}_1, \\
 \underline{\ell}_4 + \underline{v}_4 &\equiv \underline{h}_{13} + \underline{v}_4 = \widehat{H}_3 - \widehat{H}_1, \\
 \underline{\ell}_5 + \underline{v}_5 &\equiv \underline{h}_{16} + \underline{v}_5 = \widehat{H}_6 - \widehat{H}_1, \\
 \underline{\ell}_6 + \underline{v}_6 &\equiv \underline{h}_{34} + \underline{v}_6 = \widehat{H}_4 - \widehat{H}_3, \\
 \underline{\ell}_7 + \underline{v}_7 &\equiv \underline{h}_{35} + \underline{v}_7 = \widehat{H}_5 - \widehat{H}_3, \\
 \underline{\ell}_8 + \underline{v}_8 &\equiv \underline{h}_{36} + \underline{v}_8 = \widehat{H}_6 - \widehat{H}_3, \\
 \underline{\ell}_9 + \underline{v}_9 &\equiv \underline{h}_{45} + \underline{v}_9 = \widehat{H}_5 - \widehat{H}_4.
 \end{aligned}$$

Tämä matriisimuotoon kirjoitettuna:

$$\underline{\ell} + \underline{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{H}_1 \\ \widehat{H}_2 \\ \widehat{H}_3 \\ \widehat{H}_4 \\ \widehat{H}_5 \\ \widehat{H}_6 \end{bmatrix}.$$

Kuten on helposti verifioitavissa, ynnäämällä kaikki matriisin sarakkeet saadaan seuraava vektori:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Näin olemme löytäneet yksi c-vektori: $c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Jokainen alkio edustaa A -matriisin yksi sarake.

Yllä olevan A -matriisin rangivaje on 1 ja sen nolla-avaruus koostuu kaikista vektoreista $\alpha c = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}^T$.

Vaaitusverkossa vakion lisääminen jokaisen pisteen i korkeuteen H_i ei muutu yhtään vaaituksen havaintosuure.

Tätä kutsutaan *datum-vajeeksi*. Numeerisesti datum-vaje johtaa siihen, että verkkotasoituksen normaaliyhtälöt eivät ole ratkaistavissa: yhtälöiden kerroinmatriisi on *singulaarinen*³.

Jokainen datum-vaje on samalla havaintoyhtälöiden *invariantti*, ts. yhtälön vasen puoli ei muutu vaikka tuntemattomien vektoriin lisättäisiin A -matriisin nolla-avaruuden alkio $\sum_{i=1}^r \alpha^i c_i$. Esimerkkitapauksessa vakion lisääminen kaikkiin korkeuksiin on sellainen invariantti.

1.3 Datumin kiinnittäminen

Näimme äsken, että jos rakennematriisilla on rangivaje r , niin on olemassa \mathbb{R}^r eri, keskenään samanarvoista, ratkaisua x , joita eroavat toisistaan vain vektorin $c \in \mathbb{R}^r$ verran.

- o Jokainen sellainen ratkaisu kutsutaan *datumiksi*.
- o Muunnos datumista toiseen (esimerkkitapauksessa: vakion lisääminen kaikkien verkon korkeuksiin) kutsutaan datum-muunnokseksi eli *S-muunnokseksi*⁴.
- o Datum-vajetta voidaan eliminoida kiinnittämällä r tuntematonta (mielivaltaisesti ja/tai järkevästi) valittuihin arvoihin.

Esimerkkitapauksessa datumin kiinnittäminen onnistuu esim. kiinnittämällä Helsingin sataman korkeusarvo keskimerenpintaan v. 1960 alussa, kuten aikaisemmin jo kuvattiin...

1.3.1 Rajoitusehdot

Lähdetään siitä, että

$$Ac_i = 0, i = 1, \dots, r$$

(eli matriisin A nolla-avaruus on r -ulotteinen). Muodostetaan matriisi

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_i & \dots & c_{r-1} & c_r \end{bmatrix}.$$

Nyt ylläolevaa ehtoa voidaan kirjoittaa

$$AC = 0.$$

Tutki nyt matriisi⁵

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ C^T \end{bmatrix}.$$

Lasketaan

$$\tilde{A}C = \begin{bmatrix} A \\ C^T \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} AC \\ C^T C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C^T C \end{bmatrix} \neq 0.$$

Siis: matriisin \tilde{A} kuvaamalla tasoitustehtävällä *ei ole rangivajetta*.

Sellainen tasoitustehtävä on esim.:

$$\begin{bmatrix} \ell \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C^T \end{bmatrix} \hat{x}.$$

Normaaliyhtälöiden muodostaminen⁶:

$$\begin{bmatrix} A^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell + v \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C^T \end{bmatrix} \hat{x},$$

³Ilman erityisiä varotoimia ohjelmassa tapahtuisi luultavasti nollajako, ja laskenta loppuisi siihen.

⁴*S* for *similarity*.

⁵Julkaisussa Kallio [1998b] matriisi C^T kutsutaan E .

⁶Huomaa painomatriisin $\tilde{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ muodosta, että muodolliselle lisähavaintovektorille k on annettu muodollinen painomatriisi I (yksikkömatriisi) ja että on oletettu, että ℓ ja k ovat tilastollisesti riippumattomia.

jossa normaalmatriisi

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= \begin{bmatrix} A^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C^T \end{bmatrix} = \\ &= A^T P A + C C^T.\end{aligned}$$

Tässä $N = A^T P A$ on alkuperäisen tasoitustehtävän normaalmatriisi. Termi $C C^T$ on uusi ja edustaa ns. sisärajoitusehdot (en. *inner constraints*, ks. Kallio [1998b, ss. 69-71]). Ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned}\hat{x} &= [A^T P A + C C^T]^{-1} \begin{bmatrix} A^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ell} + \underline{v} \\ k \end{bmatrix} = \\ &= [A^T P A + C C^T]^{-1} [A^T P \underline{\ell} + C k].\end{aligned}$$

Tärkein muutos on normaalmatriisiin lisätty termi $C C^T$, joka tekee sen kääntämiskelpoiseksi, eli \tilde{N}^{-1} on olemassa vaikka N^{-1} ei olisi. *Siksi puhutaan kirjallisuudessa myös (Tikhonov-)regularisoinnista*⁷. Toinen muutos on havaintopuolella lisätermi $C k$.

Esimerkki: yllä olevan vaaitusverkon tapauksessa $c = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ ja havaintoyhtälöt sisärajoitusedolla täydennettynä:

$$\begin{bmatrix} \underline{\ell} + \underline{v} \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \\ \hat{H}_4 \\ \hat{H}_5 \\ \hat{H}_6 \end{bmatrix}.$$

Tästä näkyy, että lisäehto kiinnittää kaikkien verkon pisteiden korkeusarvojen summaa (tai samanarvoisesti, niiden keskiarvoa) annettuun arvoon k , eli

$$\sum_{i=1}^6 H_i = k.$$

Tämä kiinnitystapa antaa verkon ratkaisua “painopistedatumissa”. Vakion k (yleisemmin: vakioiden vektori k) valinta on mielivaltainen tuloksen \hat{x} “hyvyyden” kannalta, mutta kiinnittää se tiettyihin numeerisiin arvoihin.

1.3.2 Toinen lähestymistapa: optimointi

Julkaisussa Kallio [1998b] sivuilla 69-71 sekä julkaisussa Cooper [1987] esitetään seuraava lähestymistapa, kuitenkin epäselvällä tavalla. Siksi tässä asia uudelleen.

Tasoitustehtävän

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A \hat{x}$$

pienimmän neliösumman ratkaisua saadaan minimoimalla kirjaimellisesti (painotettua) jäännösvirheiden neliöllistä summaa:

$$\varphi = \underline{v}^T Q^{-1} \underline{v} = (A \hat{x} - \underline{\ell})^T Q^{-1} (A \hat{x} - \underline{\ell}) = \hat{x}^T A^T Q^{-1} A \hat{x} - \hat{x}^T A^T Q^{-1} \underline{\ell} - \underline{\ell}^T Q^{-1} A \hat{x} + \underline{\ell}^T Q^{-1} \underline{\ell}.$$

Differentioimalla jokaisen \hat{x} :n suhteen⁸ antaa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} = \hat{x}^T A^T Q^{-1} A + A^T Q^{-1} A \hat{x} - A^T Q^{-1} \underline{\ell} - \underline{\ell}^T Q^{-1} A + 0,$$

⁷... tai “ridge regression”. Terminologia on jokseenkin sekava.

⁸Tämä on sallittu, koska

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

mikä on oltava nolla (stationaarinen piste). Se onnistuu, jos

$$A^T Q^{-1} A x - A^T Q^{-1} \ell = 0,$$

(koska silloin myös $x^T A^T Q^{-1} A - \ell^T Q^{-1} A = 0$) mikä on juuri normaaliyhtälöryhmä.

Tutkitaan nyt taas sekä havaintoyhtälöt että rajoituehtälöt:

$$\begin{bmatrix} \ell \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C^T \end{bmatrix} \hat{x}.$$

Tätä voidaan tulkita minimointitehtäväksi, jolla on "sivuehdot", eli sellainen minimointitehtävä, joissa on ns. LAGRANGE⁹-multiplikaattoreita. Kirjoitetaan minimoitava suure seuraavaksi:

$$\varphi = (Ax - \ell)^T Q^{-1} (Ax - \ell) + \lambda^T (C^T x - k) + (C^T x - k)^T \lambda,$$

jossa λ on (r -pituisen) Lagrange-multiplikaattorien vektori. Ilmaisun φ minimointi minimoi sekä jäännösvirheiden neliöllistä summaa että täyttää lisäehdot $C^T x = k$.

Differentiaatiox:n suhteen antaa

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^T A^T Q^{-1} A + A^T Q^{-1} A x - A^T Q^{-1} \ell - \ell^T Q^{-1} A + \lambda^T C^T + C \lambda$$

mikä on taas oltava nolla. Se onnistuu asettamalla

$$A^T Q^{-1} A x - A^T Q^{-1} \ell + C \lambda = 0$$

eli normaaliyhtälöt

$$A^T Q^{-1} A x + C \lambda = A^T Q^{-1} \ell.$$

Yhdistämällä tämä rajoitusehtoyhtälön $C^T x = k$ kanssa saadaan

$$\begin{bmatrix} A^T Q^{-1} A & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T Q^{-1} \ell \\ k \end{bmatrix}.$$

Tässä nyt Lagrange-kertoimet ovat mukana tuntemattomina, ja yhtälöryhmä on tämän lisäksi erehdyttävästi normaaliyhtälöryhmän näköinen... Vasemmalla puolella oleva matriisi on kääntämiskelpoinen, vaikkakaan ei erityisen kaunis.

Tämän akrobatian tausta on halu löytää normaaliyhtälöiden muotoa, joka mahdollistaa yleisen käänteismatriisin eli MOORE-PENROSE¹⁰ käänteismatriisin käyttöä, myös siinä tapauksessa, että on rangivaje. Ei siitä tässä enempää.

1.3.3 Rajoitusehtojen tulkinta normin minimointina

Osassa 1.3.1 esitetty sisärajoitusehtojen käyttö voidaan tulkita seuraavan ilmaisun minimoimiseksi:

$$\varphi = (Ax - \ell)^T Q^{-1} (Ax - \ell) + (C^T x - k)^T (C^T x - k).$$

Ilmaisun oikealla puolella on matemaattisesti kaksi *normia*, ja kirjallisuudessa puhutaan *miniminormiratkaisusta*. Sisärajoitusehtojen käytölle on ominaista, että saatu ratkaisu ei "deformoidu" rajoitusehtojen käytöstä, esim. vaaitusverkon kiinnittäminen tällä tavoin ei muutu pisteiden väliset korkeuserot eivät muutu. Ratkaisu tulee vain yksiselitteiseksi.

Yo. ilmaisua voidaan myös korvata seuraavalla:

$$\varphi = (Ax - \ell)^T Q^{-1} (Ax - \ell) + \lambda (C^T x - k)^T (C^T x - k),$$

(KRONECKER delta) jossa $x = \begin{bmatrix} x^1 & \dots & x^i & \dots & x^m \end{bmatrix}^T$; eli "vektori/matriisikielillä"

$$\frac{\partial x}{\partial x} = I.$$

Sen jälkeen sovelletaan ketjusääntö.

⁹Joseph-Louis (Giuseppe Lodovico) LAGRANGE (1736-1813), ranskalainen (italialainen) matemaatikko.
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lagrange.html>.

¹⁰Ks. <http://mathworld.wolfram.com/Moore-PenroseMatrixInverse.html>

jossa λ voidaan valita mielivaltaisesti, kun vaan $\lambda > 0$. Lopputulos ei riipu λ :sta, ja voidaan peräti käyttää $\varphi = \lim_{\lambda \downarrow 0} \varphi(\lambda)$, jolloin ratkaisu on edelleen sama.

Itse asiassa mitä vaan valinta, joka valikoi kaikista samanarvoisista x -ratkaisuista yksi, on “laillinen” valinta. Esim.

$$\varphi = (Ax - \ell)^T Q^{-1} (Ax - \ell) + x^T x$$

on täysin OK. Silloin minimoidaan x -vektorin pituutta $\|x\| = \sqrt{x^T x}$. Yleisempi tapaus on muoto

$$(Ax - \ell)^T Q^{-1} (Ax - \ell) + \lambda x^T G x,$$

jossa G on sopivasti positiivis-(semi-)definiitti matriisi.

Jos aikaisemassa kaavassa valitaan $k = 0$, saadaan

$$\varphi = (Ax - \ell)^T Q^{-1} (Ax - \ell) + \lambda x^T C C^T x,$$

joka kuuluu tähän ryhmään: $G = C C^T$.

1.3.4 Regularisoinnista yleisemmin

Vastaavanlaiset tekniikat käytetään myös tapauksissa, joissa A ei ole varsinaisesti vajaanarvoinen, vain hyvin huonosti konditionoitu. Siinä tapauksessa puhutaan *regularisoinnista*. Tilannetta voidaan tutkia seuraavalla tavalla. Olkoon normaalimatriisi

$$N = A^T Q^{-1} A.$$

Jos matriisi on regulaarinen, on se myös positiivi-definiitti, eli kaikki sen ominaisarvot positiivisia. Samalla ovat teorian mukaan sen ominaisvektorit keskenään kohtisuoria. Siksi yksinkertaisella rotaatiolla x -avaruudessa voidaan saada N “pääakseleihin”¹¹:

$$N = R^T \Lambda R,$$

jossa Λ on diagonaalimatriisi jonka elementit ovat ominaisarvot $\lambda_i, i = 1, m$ (m tuntemattomien määrä eli vektorin x pituus.)

Jos matriisi N ei ole regulaarinen, ovat joitakin sen ominaisarvoista nollia. Niiden määrä on juuri matriisin A rangivajaus. Sopivan termin G lisääminen N :ään korjaa tätä singularisuutta.

Jos jotkut N :n ominaisarvot ovat nollan sijasta vain hyvin pieniä, puhutaan *huonosti konditionoidusta* matriisista¹². Usein se on numeerisesti mahdoton kääntää, tai se onnistuu vain, jos käytetään ylipitkät liukuluvut (*double precision, extended precision*). Hyvä mitta matriisin kääntämiskelpoisuudesta on *konditioluku*

$$\kappa = \lambda_{max} / \lambda_{min},$$

suurimman ja pienimman ominaisarvon välinen suhde. Matlab tarjoaa mahdollisuutta arvioida tätä lukua. Miten alhaisempaa, sitä parempaa.

1.4 Muut esimerkit

1.4.1 Etäisyysmittaus

Jos meillä on tasoverkko, jossa on mitattu *vain etäisyyksiä*, havaintoyhtälöt ovat muotoa:

$$\ell_k + \underline{v}_k = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}.$$

Kuten helposti näkyy, kaikkien x arvojen — mukaanlukien sekä x_i että x_j — kohottaminen vakiomäärällä ei muutu tämän yhtälön oikeaa puolta. Samoin y :n kanssa. Eli:

Kaikkien pisteiden siirtäminen (translaatio) vakiovektorin $\begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y \end{bmatrix}^T$ verran tasossa ei muutu havaintoyhtälöitä.

¹¹Muistathan, että rotaatiomatriisi on ortogonaalinen eli $RR^T = R^T R = I$ eli $R^{-1} = R^T$.

¹²*Koko tasoitusongelma kutsutaan “huonosti asetettuna” (en. ill-posed).*

On vielä olemassa kolmas invariantti: ilmaisu $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ on juuri pisteiden i ja j välinen etäisyys, ja se ei muutu vaikka koko pistekenttä pyöritettäisiin ympäri kulman α verran (vaikkapa) origon ympäri .

Jos kirjoitetaan tuntemattomien vektori muotoon $\left[\cdots x_i y_i \cdots x_j y_j \cdots \right]^T$, ovat c -vektorit muotoa:

$$c_1 = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, c_3 = \begin{bmatrix} \vdots \\ -y_i \\ +x_i \\ \vdots \\ -y_j \\ +x_j \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Tässä c_1 ja c_2 edustavat x - ja y -suuntaiset translaatiot ja c_3 pyörähdys origon ympäri (oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että α on pieni).

Yleinen datum-muunnosvektori on nyt

$$\sum_{i=1}^r \alpha^i c_i = \Delta x \cdot c_1 + \Delta y \cdot c_2 + \alpha \cdot c_3.$$

Rangivaje r on 3.

1.4.2 Mittakaavasta

Mikäli mitataan etäisyyksien sijasta etäisyyksien *suhteet* — mikä tosiasia tapahtuu jos käytetään huonosti kalibroitu etäisyysmittari¹³ — tulee yllä mainittujen kolmen datum-vajeen lisäksi vielä neljäs: *mittakaava*. Sen c -vektori on $c = \left[\cdots x_i y_i \cdots x_j y_j \cdots \right]^T$.

Tässä tapauksessa datum-vajeita on *neljä*. Se eliminoidaan kiinnittämällä *kaksi pistettä* eli neljä koordinaattia.

Kokonainen C -matriisi on nyt

$$C = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -y_i & x_i \\ 0 & 1 & +x_i & y_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -y_j & x_j \\ 0 & 1 & +x_j & y_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Vrt. [Kallio \[1998b, s. 70\]](#).

1.4.3 Kulmamittaus

Jos on verkossa mitattuja myös *kulmia*, datumin vajeiden määrä ei muutu. Myös kulmamittaukset ovat invariantteja translaatioon, rotaatioon ja (tarvittaessa) skaalaukseen.

1.4.4 Atsimutimittaus

Aika harvinainen tapaus. Jos on tullut mitatuksi absoluuttisia atsimuteja (esim. gyroteodoliitin avulla), ei esiinny rotaatioon liittyvää datum-vajetta. Kaikki verkon atsimutit saadaan tasoituksesta absoluuttisesti.

¹³Usein ilmakehän (väliaineen) huonosti tunnettu vaikutus signaalin kulkuun vaikuttaa samalla tavalla kuin huono kalibraatio. Siksi kannattaa laittaa mittakaava tuntemattomana jos verkon sivut ovat pitkiä.

1.4.5 Avaruusgeodesian tapaus

Tässä tapauksessa mitataan kolmiulotteisesti (pseudo-)etäisyyksiä. Voitaisiin ajatella, että datum-vajeita olisi kuusi: kolme translaatiota (translaatiovektorin komponentit) ja kolme rotaatiokulmaa avaruudessa.

Kuitenkin,

1. jos mittaukset kohdistuvat satelliitteihin, jotka lentävät radoissaan Maan ympäri, liike-yhtälöiden impliittiseksi origoksi muodostuu Maan massakeskipiste. Eli kolmiulotteinen translaatiovaje häviää.
2. jos mittaukset suoritetaan vuorokauden eri aikoina, ehtii maapallo pyöriä akselinsa ympäri. Tämän akselin *suunta* avaruudessa (kaksi parametria) esintyy silloin havaintoyhtälöissä ja kolmesta pyörähdyskulmasta kaksi häviää, mikäli havainnot tehdään Maan pinnalla olevien havaintoasemien ja avaruudessa liikkuvien satelliittien välillä.

Jäljellä jää *vain yksi datum-vaje*: pyörähdyskulma Maan rotaatioakselin ympäri.

1.4.6 Pitkäkantainterferometria (VLBI)

Tässä tapauksessa avaruudessa olevat mittauskohdeet ovat niin kaukaisia, että Maan massakeskipisteen sijainti ei esinny havaintoyhtälöissä. On neljä datum-vajetta: translaatiovektorin (eli koordinaatiston origon paikkavektorin) kolme komponenttia, ja rotaatiokulma Maan pyörähdysakselin ympäri.

Luku 2

Yhdenmuotoiset S-muunnokset ja kriteerimatriisit

Kirjallisuus:

Kallio [1998b, s. 67-71, 141-150]

Strang van Hees [1982]

Leick [1995, s. 130-135]

Cooper [1987, s. 206-215, 311-321]

Strang and Borre [1997, s. 405-430]

Baarda [1973] osin.

2.1 Kompleksiset koordinaatit ja pistevarianssit

Kuten jo aikaisemmin nähtiin voidaan tasokoordinaatit edullisesti esittää kompleksiluvujen avulla:

$$\mathbf{z} = x + iy,$$

jossa (x, y) ovat tasokoordinaatit. Nyt myös varianssit voidaan kirjoittaa kompleksisena: jos reaaliarvoisen varianssin ja kovarianssin määritelmät ovat

$$\begin{aligned}\text{Var}(x) &\equiv E\{(x - E\{x\})^2\}, \\ \text{Cov}(x, y) &\equiv E\{(x - E\{x\})(y - E\{y\})\},\end{aligned}$$

voidaan tehdä vastaavat määritelmät kompleksitasossakin:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{z}) &\equiv E\{(\mathbf{z} - E\{\mathbf{z}\})(\bar{\mathbf{z}} - E\{\bar{\mathbf{z}}\})\}, \\ \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) &\equiv E\{(\mathbf{z} - E\{\mathbf{z}\})(\bar{\mathbf{w}} - E\{\bar{\mathbf{w}}\})\}.\end{aligned}$$

Tässä päälleviivaus merkitsee kompleksikonjugaatti, eli jos $\mathbf{z} = x + iy$, niin $\bar{\mathbf{z}} = x - iy$.

Näky laskemalla (muista, että $i^2 = -1$), että

$$\text{Var}(\mathbf{z}) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y).$$

Eli pistevarianssi $\sigma_P^2 \equiv \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \text{Var}(x) + \text{Var}(y)$ on sama kuin kompleksinen varianssi $\text{Var}(\mathbf{z})$ (joka on siis reaaliluku), ja saman pisteen koordinaatien x ja y välinen kovarianssi häviää. Varianssiellipsit ovat silloin aina ympyröitä.

2.2 S-muunnos kompleksitasossa

Jos on annettuna pistekentän (x_i, y_i) koordinaatteja, voidaan muuntaa ne uuteen koordinaatistoon yhdenmuotoismuunnoksen avulla antamalla vain kahden pisteen koordinaatit sekä vanhassa että uudessa järjestelmässä. Olkoon pisteet A ja B , ja koordinaattierot vanhan ja uuden järjestelmän välillä

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{z}_A &= \mathbf{z}'_A - \mathbf{z}_A, \\ \delta \mathbf{z}_B &= \mathbf{z}'_B - \mathbf{z}_B.\end{aligned}$$

Tässä $\mathbf{z}'_A, \mathbf{z}'_B$ oletetaan *eksakteina*, eli pisteet A ja B toimivat *datum*-pisteinä, joiden koordinaatit ovat määritelmäkysymys eikä mittausten ja laskennan tuloksena

Silloin voidaan laskea pisteen \mathbf{z}_i koordinaattien *korjaus* seuraavaksi A - ja B - pisteiden korjausten lineaariyhdistelmäksi:

$$\delta \mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_A}{\mathbf{z}_B - \mathbf{z}_A} \delta \mathbf{z}_B + \frac{\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_B}{\mathbf{z}_A - \mathbf{z}_B} \delta \mathbf{z}_A.$$

Määritetään $\mathbf{z}_{AB} \equiv \mathbf{z}_B - \mathbf{z}_A$, $\mathbf{z}_{Ai} \equiv \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_A$ jne. ja kirjoitetaan matriisin muotoon:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'_i &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} & \frac{\mathbf{z}_{Ai}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ \delta \mathbf{z}_A \\ \delta \mathbf{z}_B \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} & -\frac{\mathbf{z}_{Ai}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_A - \mathbf{z}'_A \\ \mathbf{z}_B - \mathbf{z}'_B \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Huomaa, että *vasemmanpuoleisen rivimatriisin alkioiden summa on nolla*:

$$1 - \frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} - \frac{\mathbf{z}_{Ai}}{\mathbf{z}_{AB}} = 0.$$

2.3 Kriteerimatriisin standardimuoto

S -muunnoksen tarkkuusvaikutukset voidaan tutkia *teoreettisesti*. Lähdetään siitä, että verkko on mitattu *menetelmällä*, jonka tarkkuuskäyttäytymistä tunnetaan. Todellisen tarkkuuden sijasta käytetään silloin usein ns. kriteerivarianssimatriisia [Baarda \[1973\]](#), joka kuvaa yksinkertaisella matemaattisella tavalla pistekentän tarkkuuden spatiaalista käyttäytymistä.

Geodeettisten verkkojen tarkkuusluokitusta voitaisiin pitää alkeellisena kriteerivarianssi-ajatteluna.

Yksinkertainen sääntö on esim. se, että kahden pisteen välinen ns. *relatiivisen* pistekeskivirheen on oltava pisteiden välisen etäisyyden funktio ja että se ei riipu kahden pisteen välisestä suunnasta eikä pisteiden absoluuttisesta sijainnista. Sopivia tällaisia ns. *homogeenisia* ja *isotrooppisia* spatiaalisia varianssirakenteita löytyy kirjallisuudesta.

Usein, seuraten Delftin koulukuntaa, käytetään kriteerimatriisina – jonkinlaisena idealisoituna varianssimatriisina, joka on lähellä sitä, mikä säännöllisessä, hyvin suunnitellussa verkossa tulee varianssimatriisina – seuraavanlainen ilmaisu¹:

$$\text{Var}(\mathbf{z}) = \alpha^2, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) &= \alpha^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 (\mathbf{z} - \mathbf{w})(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{w}}) = \\ &= \alpha^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tässä arvo α^2 on mielivaltainen; se on aina positiivinen. Saa kuvitella, että se on hyvin suuri, suurempi kuin $\frac{1}{2} \sigma^2 \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|^2$ missään tarkastelualueella, ja edustaa hyvin kaukaisen lähtöpisteen käytön aiheuttamaa paikallista (origin läheistä) koordinaatti-epävarmuutta.

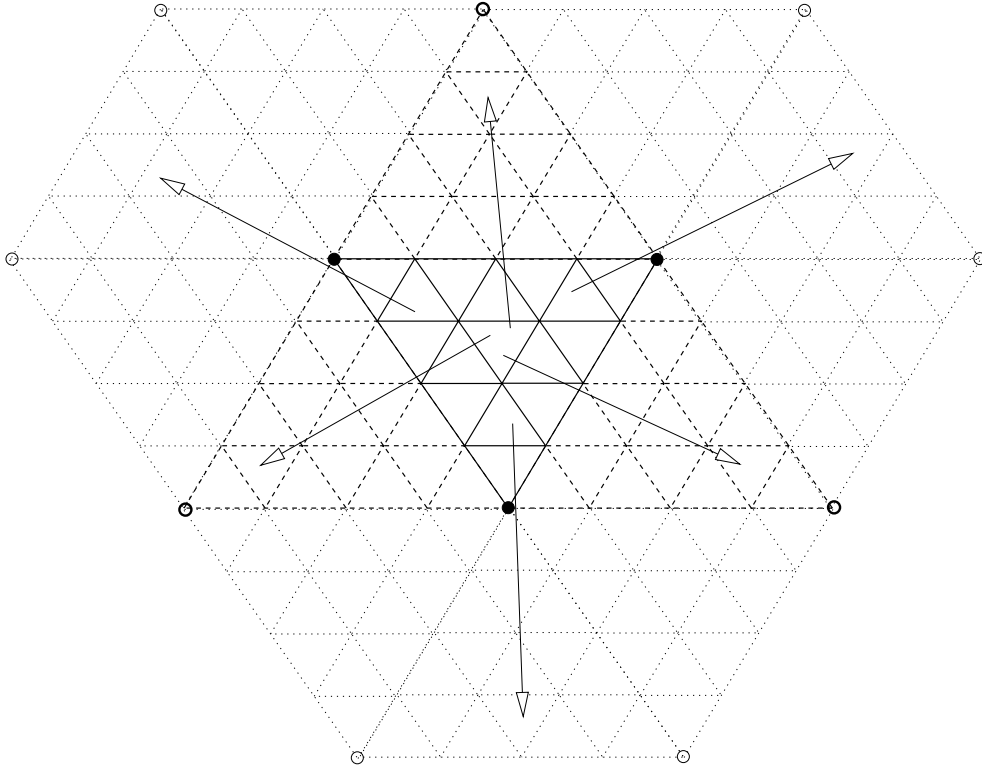
(Intuitiivisesti voi kuvitella samansivuisista kolmioista koostuva verkko, jonka kaikki sivut on mitattu yhtä tarkasti, ja verkon reunaa annetaan kulkea kaikkiin suuntiin äärettömyyteen. Reunan pisteet pidetään kiinni. Silloin

$$\alpha^2 \rightarrow \infty,$$

¹Vaihtoehtoinen rakenne, joka johtaa samoihin lopputuloksiin, olisi

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{z}) &= \sigma^2 \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} \\ \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{2} \sigma^2 (\mathbf{z}\bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{z}}\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sigma^2 (\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{w}\bar{\mathbf{w}}) - \frac{1}{2} \sigma^2 [(\mathbf{z} - \mathbf{w})(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{w}})] = \\ &= \frac{1}{2} (\text{Var}(\mathbf{z}) + \text{Var}(\mathbf{w})) - \frac{1}{2} \sigma^2 [(\mathbf{z} - \mathbf{w})(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{w}})]. \end{aligned}$$

Tämän vaihtoehdon esteettisena etuna on, ettei tarvitse valita mielivaltaista α^2 . Kuitenkin sen esteettisena heikkouksena on, että se sisältää pisteen *absoluuttista paikkaa* \mathbf{z} . Ongelma on vain siirtynyt.



Kuva 2.1: Säännöllinen kolmioverkko joka kasvaa kaikkiin suuntiin äärettömyyteen

mutta ennen sitä

$$\text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \rightarrow \text{Var}(\mathbf{z}) - \frac{1}{2}\sigma^2 \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|^2.$$

Ks. kuva. 2.1)

Tämän määritelmän jälkeen voimme suoraan laskea kahden pisteen A ja B välinen *relatiivinen varianssimatriisi*:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{z}_{AB}) &= \text{Var}(\mathbf{z}_A) + \text{Var}(\mathbf{z}_B) - 2\text{Cov}(\mathbf{z}_A, \mathbf{z}_B) = \\ &= 2\alpha^2 - 2\alpha^2 + \sigma^2 \mathbf{z}_{AB} \overline{\mathbf{z}_{AB}} = +\sigma^2 \mathbf{z}_{AB} \overline{\mathbf{z}_{AB}}. \end{aligned}$$

Nähdään, että α^2 on tästä hävinnyt ja saatu varianssi on suoraan verrannollinen pisteen välisen etäisyyden toiseen potenssiin:

$$\mathbf{z}_{AB} \overline{\mathbf{z}_{AB}} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Se on myös reaaliluku, eli koordinaattien x ja y välissä ei ole korrelaatiota ja virhe-ellipsit ovat *ympyröitä*.

2.3.1 Yleisempi muoto

Kriteerifunktion yleisempi muoto on mielivaltainen pisteiden välisen etäisyyden funktio:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{z}) &= \alpha^2, \\ \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) &= \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 f(\|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|), \end{aligned}$$

esimerkiksi

$$\text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|^{2\nu},$$

missä ν valittava vakio. Käytännössä sopivat arvot ovat 0.5...1.0.

2.4 Kriteerimatriisin S-muunnos

Pistekentän $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_A, \mathbf{z}_B$ kriteerimatriisi voidaan kirjoittaa näin:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_A \\ \mathbf{z}_B \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \text{Var}(\mathbf{z}_i) & \text{Cov}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_A) & \text{Cov}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_B) \\ \text{Cov}(\mathbf{z}_A, \mathbf{z}_i) & \text{Var}(\mathbf{z}_A) & \text{Cov}(\mathbf{z}_A, \mathbf{z}_B) \\ \text{Cov}(\mathbf{z}_B, \mathbf{z}_i) & \text{Cov}(\mathbf{z}_B, \mathbf{z}_A) & \text{Var}(\mathbf{z}_B) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iA}} & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbf{z}_{iB} \overline{\mathbf{z}_{iB}} \\ \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iA}} & \alpha^2 & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbf{z}_{AB} \overline{\mathbf{z}_{AB}} \\ \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbf{z}_{iB} \overline{\mathbf{z}_{iB}} & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbf{z}_{AB} \overline{\mathbf{z}_{AB}} & \alpha^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Koska kaavassa 2.1 koordinaatit \mathbf{z}_A ja \mathbf{z}_B ovat eksakteja, voidaan nyt kirjoittaa suoraan *varianssien kasautumislakia*:

$$\text{Var}(\mathbf{z}'_i) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} & -\frac{\mathbf{z}_{Ai}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{bmatrix} \text{Var} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_A \\ \mathbf{z}_B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\overline{\mathbf{z}_{iB}}}{\mathbf{z}_{AB}} \\ -\frac{\overline{\mathbf{z}_{Ai}}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Tässä yo. varianssimatriisi on kerrottu vasemmalta puolelta kaavan 2.1 kertoimilla rivivektorina, ja oikealta puolelta samoilla kertoimilla *transponoituna* (siis sarakevektorina) sekä *kompleksisesti konjugoituina*. Tämä on varianssien kasautumislain kompleksinen versio.

Käytännössä, kerroinmatriisin rakenteesta johtuen (rivien summat ovat nolla), saa jättää α^2 -termi pois kaikista alkiosta, ja saadaan

$$\text{Var}(\mathbf{z}'_i) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} & -\frac{\mathbf{z}_{Ai}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iA}} & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iB} \overline{\mathbf{z}_{iB}} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iA}} & 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{AB} \overline{\mathbf{z}_{AB}} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iB} \overline{\mathbf{z}_{iB}} & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{AB} \overline{\mathbf{z}_{AB}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\overline{\mathbf{z}_{iB}}}{\mathbf{z}_{AB}} \\ -\frac{\overline{\mathbf{z}_{Ai}}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{bmatrix}.$$

Huolellinen laskeminen tuottaa:

$$\text{Var}(\mathbf{z}'_i) = \frac{1}{2}\sigma^2 \left[\mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iA}} \left\{ \frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} + \frac{\overline{\mathbf{z}_{iB}}}{\mathbf{z}_{AB}} \right\} + \mathbf{z}_{iB} \overline{\mathbf{z}_{iB}} \left\{ \frac{\mathbf{z}_{iA}}{\mathbf{z}_{AB}} + \frac{\overline{\mathbf{z}_{iA}}}{\mathbf{z}_{AB}} \right\} + (\mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iB}} + \overline{\mathbf{z}_{iA} \mathbf{z}_{iB}}) \right].$$

Geometrinen tulkinta: ensiksi nähdään, että tämä on reaaliarvoinen. Myös:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iA}} &= \|\mathbf{z}_{iA}\|^2, \\ \mathbf{z}_{iB} \overline{\mathbf{z}_{iB}} &= \|\mathbf{z}_{iB}\|^2, \\ \frac{\mathbf{z}_{iA}}{\mathbf{z}_{AB}} + \frac{\overline{\mathbf{z}_{iA}}}{\mathbf{z}_{AB}} &= 2\Re \left\{ \frac{\mathbf{z}_{iA}}{\mathbf{z}_{AB}} \right\} = -2 \frac{\|\mathbf{z}_{iA}\|}{\|\mathbf{z}_{AB}\|} \cos \angle iAB, \\ \frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} + \frac{\overline{\mathbf{z}_{iB}}}{\mathbf{z}_{AB}} &= 2\Re \left\{ \frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} \right\} = +2 \frac{\|\mathbf{z}_{iB}\|}{\|\mathbf{z}_{AB}\|} \cos \angle iBA, \\ \mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iB}} + \overline{\mathbf{z}_{iA} \mathbf{z}_{iB}} &= 2\Re \{ \mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iB}} \} = 2 \|\mathbf{z}_{iA}\| \|\mathbf{z}_{iB}\| \cos \angle AiB. \end{aligned}$$

Siis:

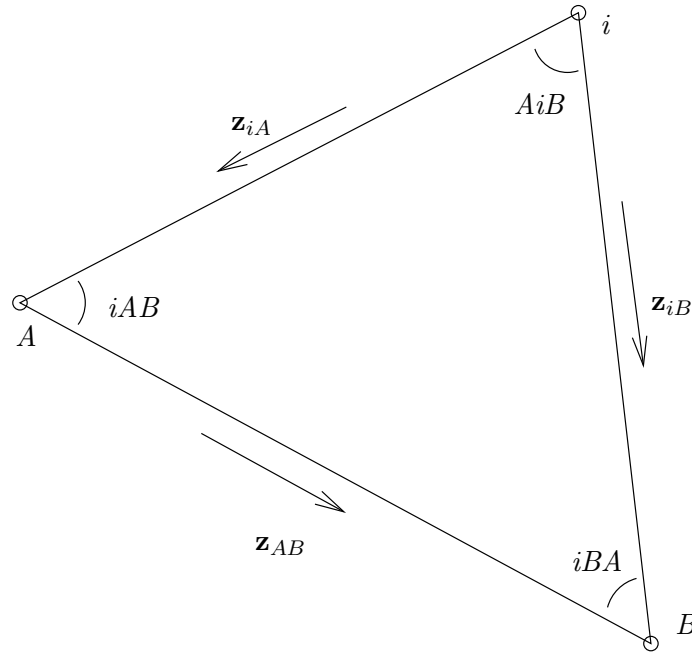
$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{z}'_i) &= \sigma^2 \left[\|\mathbf{z}_{iA}\|^2 \Re \left\{ \frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} \right\} + \|\mathbf{z}_{iB}\|^2 \Re \left\{ \frac{\mathbf{z}_{iA}}{\mathbf{z}_{AB}} \right\} + \Re \{ \mathbf{z}_{iA} \overline{\mathbf{z}_{iB}} \} \right] = \\ &= \sigma^2 \left[\|\mathbf{z}_{iA}\|^2 \frac{\|\mathbf{z}_{iB}\|}{\|\mathbf{z}_{AB}\|} \cos \angle iBA - \|\mathbf{z}_{iB}\|^2 \frac{\|\mathbf{z}_{iA}\|}{\|\mathbf{z}_{AB}\|} \cos \angle iAB + \|\mathbf{z}_{iA}\| \|\mathbf{z}_{iB}\| \cos \angle AiB \right] = \\ &= \sigma^2 \frac{\|\mathbf{z}_{iA}\| \|\mathbf{z}_{iB}\|}{\|\mathbf{z}_{AB}\|} \left[\|\mathbf{z}_{iA}\| \cos \angle iBA - \|\mathbf{z}_{iB}\| \cos \angle iAB + \|\mathbf{z}_{AB}\| \cos \angle AiB \right]. \end{aligned}$$

Ks. kuva 2.2.

2.5 S-muunnokset ryhmän jäsenenä

Matematiikassa *ryhmä* G määritetään (ks. <http://mathworld.wolfram.com/Group.html>) joukkona jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. Jos A ja B ovat kaksi G :n alkioita, silloin myös tulo AB on G :ssä.



Kuva 2.2: Kriteerivarianssimatriisin määrittelyssä käytetyt suureet

2. Kertolasku on *assosiatiivinen*, siis kaikille $A, B, C \in G$:ssä, $(AB)C = A(BC)$
3. On olemassa *identtisyysalkio* I siten, että $IA = AI = A \forall A \in G$
4. *Jokaiselle alkiolle on oltava olevassa käänteisalkio*: jokaiselle alkiolle $A \in G$, joukko sisältää myös alkiota $B = A^{-1}$ siten, että $AB = BA = I$.

Kaikkien käännettävien S-muunnosten (kahden paikallisen datumin välillä) joukko muodostaa sellaisen ryhmän.

2.5.1 S-muunnos “äärettömyydestä” paikalliseen datumiin

Yllä kuvattu annettujen pisteiden muunnos “äärettömyysdatumilta” paikalliseen datumiin voidaan yleistää. Kaava (2.4) yhdelle pisteelle \mathbf{z}_i voidaan kirjoittaa vaikkapa kolmelle eri pisteelle $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_P, \mathbf{z}_Q$, jolloin olisi laskettavissa varianssien lisäksi myös pisteiden väliset kovarianssit.

Kaava on silloin tämän näköinen:

$$\text{Var} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{z}'_i \\ \mathbf{z}'_P \\ \mathbf{z}'_Q \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \text{Var} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_P \\ \mathbf{z}_Q \\ \mathbf{z}_A \\ \mathbf{z}_B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Tässä esiintyvä matriisi voidaan kutsua

$$S_{(\infty)}^{(AB)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Tämä matriisi ei ole suorakulmaisena käännettävissä. Tämä ilmaistaa vain se tosiasia, että kerran “äärettömyydestä” paikalliseen datumiin (AB) muunnetut varianssit ei saada enää takaisin muunnetuksi. Yo. muunnoskaava on tässä notaatiossa:

$$\text{Var} \left(\mathbf{z}^{(AB)} \right) = S_{(\infty)}^{(AB)} \text{Var} \left(\mathbf{z}^{(\infty)} \right) \left[S_{(\infty)}^{(AB)} \right]^\dagger,$$

jossa symboli \dagger , ns. *hermitointi*², merkitsee transponoinnin ja kompleksikonjugaatin yhdistelmä.

²Charles HERMITE, 1822-1901, ranskalainen matemaatikko.

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Hermite.html>.

2.5.2 S-muunnos kahden paikallisdatumin välillä

Paikallisen verkon sisällä on aina monet eri mahdollisuudet valita pistepari A, B joka toimivat datum-pisteinä. On jopa mahdollista muuntaa jo datum-pisteisiin A, B referoitu koordinaattien joukko toiseen datumpisteisiin P, Q . Se menee seuraavasti lähtien kaavasta 2.1:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i'' \\ \mathbf{z}_A'' - \mathbf{z}_A' \\ \mathbf{z}_B'' - \mathbf{z}_B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathbf{z}_{iQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{Pi}}{\mathbf{z}_{PQ}} \\ 0 & -\frac{\mathbf{z}_{AQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PA}}{\mathbf{z}_{PQ}} \\ 0 & -\frac{\mathbf{z}_{BQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PB}}{\mathbf{z}_{PQ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i' \\ \mathbf{z}_P' - \mathbf{z}_P'' \\ \mathbf{z}_Q' - \mathbf{z}_Q'' \end{bmatrix}.$$

Tässä saadaan samalla “vanhojen” datum-pisteiden A ja B korjaukset $\mathbf{z}_A'' - \mathbf{z}_A'$ ja $\mathbf{z}_B'' - \mathbf{z}_B'$ uuteen ''-systemiin, jossa annettuina koordinaatteina on \mathbf{z}_P'' ja \mathbf{z}_Q'' .

On edullista käyttää seuraavaa kirjoitustapaa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(PQ)} \\ \mathbf{z}_A^{(PQ)} - \mathbf{z}_A^{(AB)} \\ \mathbf{z}_B^{(PQ)} - \mathbf{z}_B^{(AB)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathbf{z}_{iQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{Pi}}{\mathbf{z}_{PQ}} \\ 0 & -\frac{\mathbf{z}_{AQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PA}}{\mathbf{z}_{PQ}} \\ 0 & -\frac{\mathbf{z}_{BQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PB}}{\mathbf{z}_{PQ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(AB)} \\ \mathbf{z}_P^{(AB)} - \mathbf{z}_P^{(PQ)} \\ \mathbf{z}_Q^{(AB)} - \mathbf{z}_Q^{(PQ)} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Tässä on annettuna *datum-määritelmänä* (AB) -systeemissä koordinaatit $\mathbf{z}_A^{(AB)}, \mathbf{z}_B^{(AB)}$ (vasen puoli) ja (PQ) -systeemissä $\mathbf{z}_P^{(PQ)}, \mathbf{z}_Q^{(PQ)}$. Matriisia kutsutaan usein

$$S_{(AB)}^{(PQ)} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\mathbf{z}_{iQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{Pi}}{\mathbf{z}_{PQ}} \\ 0 & -\frac{\mathbf{z}_{AQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PA}}{\mathbf{z}_{PQ}} \\ 0 & -\frac{\mathbf{z}_{BQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PB}}{\mathbf{z}_{PQ}} \end{bmatrix}.$$

Nämä muunnosmatriisit muodostavat matemaattisen *ryhmän*:

$$\begin{aligned} S_{(UV)}^{(PQ)} \cdot S_{(AB)}^{(UV)} &= S_{(AB)}^{(PQ)}, \\ \left(S_{(AB)}^{(PQ)}\right)^{-1} &= S_{(PQ)}^{(AB)}, \\ S_{(AB)}^{(AB)} &= I. \end{aligned}$$

eli

1. muunnoksia voidaan soveltaa *peräkkäisesti* järjestelmästä (AB) järjestelmän (UV) kautta järjestelmään (PQ) ;
2. muunnoksella $(AB) \rightarrow (PQ)$ on *käänteismuunnos* $(PQ) \rightarrow (AB)$;
3. triviaalimuunnos $S_{(AB)}^{(AB)}$ kuuluu myös ryhmään; sitä saa korvata yksikkömatriisilla I koska silloin oikealla puolella $\mathbf{z}_A^{(AB)} - \mathbf{z}_A^{(AB)} = \mathbf{z}_B^{(AB)} - \mathbf{z}_B^{(AB)} = 0$.³

Tällä symbolismilla saadaan

$$\mathbf{z}^{(PQ)} = S_{(AB)}^{(PQ)} \mathbf{z}^{(AB)},$$

jossa

$$\mathbf{z}^{(PQ)} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(PQ)} \\ \mathbf{z}_A^{(PQ)} - \mathbf{z}_A^{(AB)} \\ \mathbf{z}_B^{(PQ)} - \mathbf{z}_B^{(AB)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(PQ)} \\ \Delta \mathbf{z}_A^{(PQ)} \\ \Delta \mathbf{z}_B^{(PQ)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}^{(AB)} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(AB)} \\ \mathbf{z}_P^{(AB)} - \mathbf{z}_P^{(PQ)} \\ \mathbf{z}_Q^{(AB)} - \mathbf{z}_Q^{(PQ)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(AB)} \\ \Delta \mathbf{z}_P^{(AB)} \\ \Delta \mathbf{z}_Q^{(AB)} \end{bmatrix},$$

jossa “delta-suureet” $\Delta \mathbf{z}_P^{(AB)}$ jne. määritellään kaavion “laskettu arvo miinus datum-määrittelyssä kiinnitetty arvo” mukaan.

Kaikki S-muunnokset ovat yhdenmuotoismuunnoksia jotka säilyttävät kulmia ja pituussuhteita. Myös kahden peräkkäisen S-muunnoksen muodostama muunnos, ja S-muunnoksen käänteismuunnos, ovat taas yhdenmuotoismuunnoksia. Siis kaikki ryhmän operaatiot tuottavat taas ryhmän jäsen.

³Tarkasti ottaen triviaalimuunnoksen matriisi on $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$; kuitenkin varianssien kasautumisen kannalta se on samanarvoinen kuin yksikkömatriisi.

2.5.3 Usean i -pisteen tapaus

Tämä S-muunnosmatriisien formalismi on helposti tulkittava – ja on tarkoituskkin tulkita – yleisemmin, jos annetaan pistenumero i edustaa useita pisteitä, $i = 1, \dots, n$. Silloin

$$S_{(\infty)}^{(AB)} = \left[\begin{array}{c|cc} I_{n \times n} & \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{z}_{iB}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{bmatrix}_{i=1, \dots, n} & \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{z}_{Ai}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{bmatrix}_{i=1, \dots, n} \\ \hline & -\frac{\mathbf{z}_{PB}}{\mathbf{z}_{AB}} & -\frac{\mathbf{z}_{AP}}{\mathbf{z}_{AB}} \\ & -\frac{\mathbf{z}_{QB}}{\mathbf{z}_{AB}} & -\frac{\mathbf{z}_{AQ}}{\mathbf{z}_{AB}} \end{array} \right],$$

jossa suorien hakasten ilmaisut ($[\cdot]_{i=1, \dots, n}$) ovat n -pituisia sarakevektoreita. Samoin

$$S_{(AB)}^{(PQ)} \equiv \left[\begin{array}{c|cc} I_{n \times n} & \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{z}_{iQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} \end{bmatrix}_{i=1, \dots, n} & \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{z}_{Pi}}{\mathbf{z}_{PQ}} \end{bmatrix}_{i=1, \dots, n} \\ \hline O_{1 \times n} & -\frac{\mathbf{z}_{AQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PA}}{\mathbf{z}_{PQ}} \\ O_{1 \times n} & -\frac{\mathbf{z}_{BQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PB}}{\mathbf{z}_{PQ}} \end{array} \right],$$

jossa $O_{1 \times n}$ on n -pituisen rivivektori täynnä nollia.

2.6 Varianssien S-muunnos

Varianssit muunnetaan seuraavalla tavalla:

$$\text{Var}(\mathbf{z}^{(PQ)}) = S_{(AB)}^{(PQ)} \text{Var}(\mathbf{z}^{(AB)}) [S_{(AB)}^{(PQ)}]^\dagger,$$

jossa

$$\mathbf{z}^{(PQ)} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(PQ)} \\ \Delta \mathbf{z}_A^{(PQ)} \\ \Delta \mathbf{z}_B^{(PQ)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}^{(AB)} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(AB)} \\ \Delta \mathbf{z}_P^{(AB)} \\ \Delta \mathbf{z}_Q^{(AB)} \end{bmatrix}, \quad \text{jä } [S_{(AB)}^{(PQ)}]^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\mathbf{z}_{iQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{AQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{BQ}}{\mathbf{z}_{PQ}} \\ -\frac{\mathbf{z}_{Pi}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PA}}{\mathbf{z}_{PQ}} & -\frac{\mathbf{z}_{PB}}{\mathbf{z}_{PQ}} \end{bmatrix}.$$

Tässä delta-suureet ovat $\Delta \mathbf{z}_A^{(PQ)} = \mathbf{z}_A^{(PQ)} - \mathbf{z}_A^{(AB)}$, $\Delta \mathbf{z}_P^{(AB)} = \mathbf{z}_P^{(AB)} - \mathbf{z}_P^{(PQ)}$, jne. Vertausarvona käytetään aina datum-pisteen datum-määrittelyssä kiinnitetty sijainti.

2.7 Harjoitukset

Luku 3

Affiininen S-muunnos

3.1 Kolmiointi ja finiitti-elementti -menetelmä

Finiitti-elementti -menetelmä on tapa diskretisoida osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ryhmiä jollaisia käytetään mm. lujuusopissa, rakennusmekaniikassa, geofysiikassa, ilmatieteessä ja astrofysiikassa. Laskenta-alue jaetaan yksinkertaisiin osa-alueisiin, finiitteihin elementteihin, joilla on yhteisiä rajaviivoja, -pintoja ja noodeja. Määritetään *perusfunktioita* joilla on arvo 1 vain yhdellä noodipisteellä, ja arvo 0 kaikilla muilla noodipisteillä. Elementin sisällä perusfunktioit ovat yksinkertaisia, esim. lineaarisia funktioita. Rajaviivojen tai -pintojen yli ne ovat jatkuvia.

Ratkaistavissa olevat differentiaaliyhtälöt diskretisoituvat nyt normaaliyhtälöitä muistuttavaan muotoon (Ritz-Galerkin), joka mahdollistaa tuntemattomien eli noodien funktioarvojen ratkaisemista.

Yleisin elementin muoto on kolmio, silloin käytetään perusfunktioina lineaarisia koordinaattien funktioita. Maan pintaa voidaan jakaa kolmioihin sopivasti käyttämällä ns. *Delaunay-kolmiointia*.

3.2 Bilineaarinen affiinimuunnos

Julkaisussa [Anon. \[2008\]](#) esitetään ETRS-89 järjestelmän Gauß-Krüger projektiokoordinaattien ja yhtenäiskoordinaattijärjestelmän väliseksi tasokoordinaattimuunnokseksi *kolmioittainen affiininen muunnos*.

Jokaisessa kolmiossa affiininen muunnos voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}x^{(2)} &= \Delta x + a_1 x^{(1)} + a_2 y^{(1)} \\y^{(2)} &= \Delta y + b_1 x^{(1)} + b_2 y^{(1)}\end{aligned}$$

jossa $(x^{(1)}, y^{(1)})$ ovat pisteen koordinaatit ETRS-GK27:ssä ja $(x^{(2)}, y^{(2)})$ saman pisteen koordinaatit *ykj*:ssä. Tässä muunnoskaavassa on kuusi parametria: Δx , Δy , a_1 , a_2 , b_1 ja b_2 . Kun kolmion kolmessa kärjessä on annettu sekä $(x^{(1)}, y^{(1)})$ että $(x^{(2)}, y^{(2)})$, voidaan nämä ratkaista yksiselitteisesti.

Saatu muunnosfunktio on kolmioiden sisällä lineaarinen ja reunojen yli jatkuva, mutta ei differentioitava: mittakaava on epäjatkuva kolmioiden reunojen yli. Koska kuvaus ei ole konforminenkaan, on mittakaava myös riippuvainen tarkastelusuunnasta.

Kolmiointin hyödyllisenä ominaisuutena voidaan pitää sitä, että sitä voidaan paikallisesti "paikata": jos paikallisella alueella on parempia tietoja olemassa – tiheämpi pistejoukko, joiden koordinaattiparit $(x^{(i)}, y^{(i)})$, $i = 1, 2$ ovat tiedossa – tällöin voidaan ottaa vain sen alueen kolmiot pois ja korvata ne useammalla, pienemmällä kolmiolla, joiden sisällä muunnos tarkentuu. Tämä on juuri se menetelmä, jota paikalliset tahot, kuten kunnat, voivat edullisesti soveltaa.

Yllä olevat kaavat voidaan kirjoittaa vektorimuotoon:

$$\begin{bmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Yleensä (1)- ja (2)-koordinaatit ovat lähellä toisiaan eli $\begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y \end{bmatrix}^T$ on pieni. Silloin voidaan kirjoittaa *siirtymät*

$$\begin{aligned}\delta x &\equiv x^{(2)} - x^{(1)} = \Delta x + (a_1 - 1)x^{(1)} + a_2 y^{(1)}, \\ \delta y &\equiv y^{(2)} - y^{(1)} = \Delta y + b_1 x^{(1)} + (b_2 - 1)y^{(1)}.\end{aligned}$$

Jos nyt määritellään

$$\Delta \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_1 - 1 & a_2 \\ b_1 & b_2 - 1 \end{bmatrix},$$

saadaan lyhyesti

$$\delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{x}^{(1)}.$$

Tässä yleensä myös, jos koordinaatit ovat lähellä toisiaan, matriisin \mathbf{A} alkioit ovat "pieniä". Olkoon kolmio ABC . Silloin on annettuna kulmien siirtävävektorit

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_A &= \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{x}_A^{(1)}, \\ \delta \mathbf{x}_B &= \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{x}_B^{(1)}, \\ \delta \mathbf{x}_C &= \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{x}_C^{(1)}. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan auki, tuntemattomat $\Delta \mathbf{x}, \mathbf{A}$ oikealla puolella:

$$\begin{aligned} \delta x_A &= \Delta x + a_{11}x_A^{(1)} + a_{12}y_A^{(1)} \\ \delta y_A &= \Delta y + a_{21}x_A^{(1)} + a_{22}y_A^{(1)} \\ \delta x_B &= \Delta x + a_{11}x_B^{(1)} + a_{12}y_B^{(1)} \\ \delta y_B &= \Delta y + a_{21}x_B^{(1)} + a_{22}y_B^{(1)} \\ \delta x_C &= \Delta x + a_{11}x_C^{(1)} + a_{12}y_C^{(1)} \\ \delta y_C &= \Delta y + a_{21}x_C^{(1)} + a_{22}y_C^{(1)} \end{aligned}$$

tai matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} \delta x_A \\ \delta y_A \\ \delta x_B \\ \delta y_B \\ \delta x_C \\ \delta y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_A^{(1)} & 0 & y_A^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_A^{(1)} & 0 & y_A^{(1)} \\ 1 & 0 & x_B^{(1)} & 0 & y_B^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_B^{(1)} & 0 & y_B^{(1)} \\ 1 & 0 & x_C^{(1)} & 0 & y_C^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_C^{(1)} & 0 & y_C^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix},$$

josta ne kaikki kuusi on ratkaistavissa.

Kirjoitetaan mielivaltaisen pisteen P koordinaatit (x, y) seuraavasti:

$$\begin{aligned} x &= p^A x_A + p^B x_B + p^C x_C, \\ y &= p^A y_A + p^B y_B + p^C y_C, \end{aligned}$$

lisäehdolla $p^A + p^B + p^C = 1$. Silloin myös

$$\delta x = p^A \delta x_A + p^B \delta x_B + p^C \delta x_C, \quad (3.1)$$

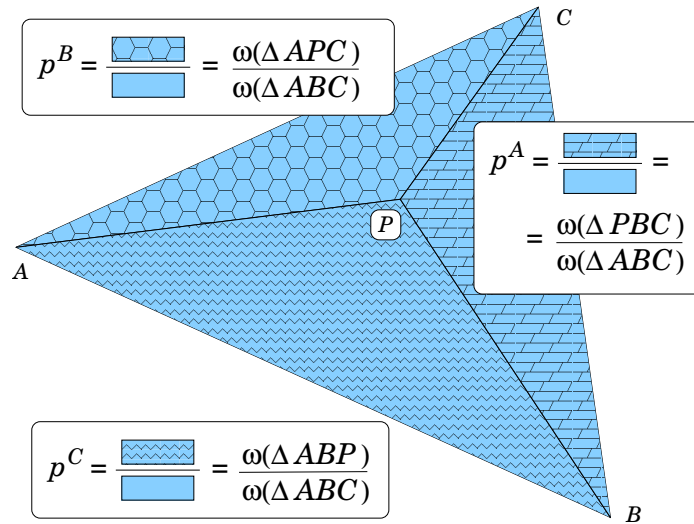
$$\delta y = p^A \delta y_A + p^B \delta y_B + p^C \delta y_C. \quad (3.2)$$

Kolmikkoa (p^A, p^B, p^C) kutsutaan pisteen P *barysentrisiksi koordinaateiksi*. Ks. kuva 3.1.

Ne löytyvät seuraavasti (geometrisesti $p^A = \frac{\omega(\Delta BCP)}{\omega(\Delta ABC)}$ jne., jossa ω on kolmion pinta-ala) determinanttien avulla:

$$p^A = \frac{\begin{vmatrix} x_B & x_C & x \\ y_B & y_C & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, p^B = \frac{\begin{vmatrix} x_C & x_A & x \\ y_C & y_A & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, p^C = \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Nämä kaavat soveltuvat suoraan ohjelmoitaviksi.



Kuva 3.1: Barysentristen koordinaatien laskenta kahden kolmion pinta-alan suhteena

3.3 Affinimuunnosmenetelmän toteutus paikallisessa tilanteessa

Jos halutaan soveltaa JHS:ssa ehdotettua menetelmää paikallisella tasolla, käydään läpi seuraavat askeleet:

1. Konstruoidaan tarkistettavaan alueeseen sopiva kolmiointi. Valitaan valtakunnallisesta kolmioinnista sopiva kolmioiden yhdistelmä, joka peittää tarkistettavan alueen. Jaetaan alue riittävän pieniin kolmioihin, ja formuloidaan yhtälöt näiden kolmioiden kulmapisteiden koordinaattisiirtymien laskemiseksi.
2. Tutkitaan virhepropagaatio valitussa geometriassa ja todetaan se hyväksyttäväksi.
3. Muunnoskaavat kertoimineen toteutetaan ohjelmistossa.

Paras olisi toteuttamistapa, jossa käsittely on hajautettu: koordinaatit löytävät itse niille pätevä palvelimen ja muunnosohjelmiston. Tiheämpi ja tarkempi ratkaisu löytyy joillakin kunnilla, muilla valtakunnallinen ratkaisu. Internetissä sellainen olisi toteutettavissa RPC-arkkitehtuurin puitteissa (esim. XML/SOAP).

3.4 Virheiden kasautumisen teoreettinen analyysi

Menetelmän tarkkuusvaikutukset voidaan tutkia simuloimalla koordinaatilaskennat synteettisten mutta realistisen näköisten virheiden avulla. Voidaan myös käyttää oikeaa havaintoaineistoa, josta voidaan jättää pois piste kerrallaan, ja tutkia, kuinka hyvin tämä approksimaatiomenetelmä onnistuu reprodusoimaan tämän pisteen koordinaattisiirtymät (*ristivalidointi*).

Toisaalta voidaan tutkia ongelmaa teoreettisesti. Lähdetään siitä, että “vanha” verkko, josta y/kj -koordinaatit ovat peräisin, on mitattu perinteisellä kolmio- ja polygonimittauksilla, joilla on tietty tunnettu tarkkuuskäyttäytyminen¹. Todellisen tarkkuuden sijasta käytetään usein ns. *kriteerivarianssimatriisia* Baarda [1973], joka kuvaa yksinkertaisella matemaattisella tavalla pistekentän tarkkuuden spatiaalista käyttäytymistä.

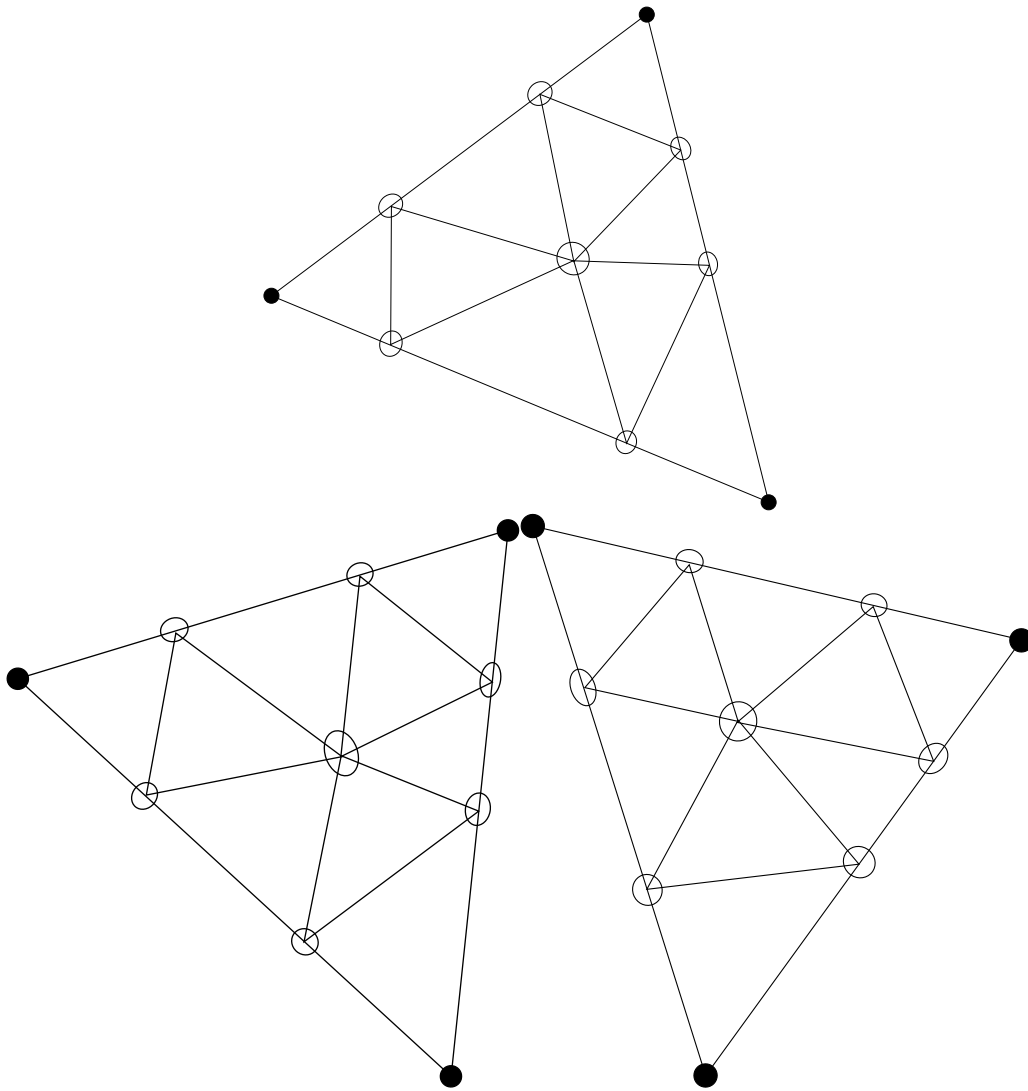
3.4.1 Affiiniset muunnokset

Samalla tavalla kuin yhdenmuotoismuunnokset, voidaan affinimuunnosten virhekasautumista käsitellä muodollisesti.

Jos on olemassa kolme pistettä A, B, C joiden koordinaatit on annettuna, on mielivaltaisen pisteen koordinaattien \mathbf{z}_i korjaus kirjoitettava seuraavasti (kompleksisena):

$$\mathbf{z}'_i = \mathbf{z}_i + p_i^A (\mathbf{z}'_A - \mathbf{z}_A) + p_i^B (\mathbf{z}'_B - \mathbf{z}_B) + p_i^C (\mathbf{z}'_C - \mathbf{z}_C).$$

¹Niiden verrattuna GPS-mittaukset voidaan olettaa absoluuttisen tarkkoiksi



Kuva 3.2: Virhepropagaatio eri kokoisissa kolmioissa. Vain kvalitatiivinen.

Taas matriisiin muotoon:

$$\mathbf{z}'_i = \begin{bmatrix} 1 & -p_i^A & -p_i^B & -p_i^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_A - \mathbf{z}'_A \\ \mathbf{z}_B - \mathbf{z}'_B \\ \mathbf{z}_C - \mathbf{z}'_C \end{bmatrix}.$$

Tässä taas $\mathbf{z}'_A, \mathbf{z}'_B, \mathbf{z}'_C$ ovat (ABC) -datum-määritelmänä annetut kiinteät koordinaatit.

Affiniset datum-muunnokset kirjoitetaan taas tuttuun tapaan² (kaava 2.5):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(PQR)} \\ \mathbf{z}_A^{(PQR)} - \mathbf{z}_A^{(ABC)} \\ \mathbf{z}_B^{(PQR)} - \mathbf{z}_B^{(ABC)} \\ \mathbf{z}_C^{(PQR)} - \mathbf{z}_C^{(ABC)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -p_i^P & -p_i^Q & -p_i^R \\ 0 & -p_A^P & -p_A^Q & -p_A^R \\ 0 & -p_B^P & -p_B^Q & -p_B^R \\ 0 & -p_C^P & -p_C^Q & -p_C^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^{(ABC)} \\ \mathbf{z}_P^{(ABC)} - \mathbf{z}_P^{(PQR)} \\ \mathbf{z}_Q^{(ABC)} - \mathbf{z}_Q^{(PQR)} \\ \mathbf{z}_R^{(ABC)} - \mathbf{z}_R^{(PQR)} \end{bmatrix}.$$

Tässä kaikki alkiot (p -arvot) ovat, toisin kuin yhdenmuotoismuunnoksen (S-muunnoksen) tapauksessa, reaaliarvoisia.

²Notaation vaihto: $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}^{(ABC)}$ ja $\mathbf{z}' \rightarrow \mathbf{z}^{(PQR)}$.

Kirjoitetaan taas symbolisesti:

$$\mathbf{S}_{(ABC)}^{(PQR)} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -p_i^P & -p_i^Q & -p_i^R \\ 0 & -p_A^P & -p_A^Q & -p_A^R \\ 0 & -p_B^P & -p_B^Q & -p_B^R \\ 0 & -p_C^P & -p_C^Q & -p_C^R \end{bmatrix},$$

jossa p -arvot lasketaan kuten aikaisemmin selostettu:

$$p_A^P = \frac{\omega(\Delta QRA)}{\omega(\Delta PQR)} = \frac{\begin{vmatrix} x_Q & x_R & x_A \\ y_Q & y_R & y_A \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_P & x_Q & x_R \\ y_P & y_Q & y_R \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}},$$

jne. Ihmisille tämä on vaikea, mutta tietokone osaa.

Myös affiinit muunnokset muodostavat matemaattisen *ryhmän*. Kahden peräkkäisen affiininmuunnoksen $(ABC) \rightarrow (UVW) \rightarrow (PQR)$ lopputulos on taas affiininmuunnos, $(ABC) \rightarrow (PQR)$:n käänteismuunnos $(PQR) \rightarrow (ABC)$ on, ja triviaalimuunnos $(ABC) \rightarrow (ABC)$ on.

3.4.2 Affiininmuunnos ja kriteerimatriisi

Lähdetään taas kriteerimatriisin standardimuodosta 2.2, 2.3:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{z}) &= \alpha^2, \\ \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) &= \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2(\mathbf{z} - \mathbf{w})(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{w}}). \end{aligned}$$

Varianssien kasautuminen antaa

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{z}'_i) &= \begin{bmatrix} 1 & -p_i^A & -p_i^B & -p_i^C \end{bmatrix} \text{Var}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_A, \mathbf{z}_B, \mathbf{z}_C) \begin{bmatrix} 1 \\ -p_i^A \\ -p_i^B \\ -p_i^C \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -p_i^A & -p_i^B & -p_i^C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{iA}\bar{\mathbf{z}}_{iA} & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{iB}\bar{\mathbf{z}}_{iB} & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{iC}\bar{\mathbf{z}}_{iC} \\ \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{iA}\bar{\mathbf{z}}_{iA} & \alpha^2 & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{AB}\bar{\mathbf{z}}_{AB} & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{AC}\bar{\mathbf{z}}_{AC} \\ \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{iB}\bar{\mathbf{z}}_{iB} & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{AB}\bar{\mathbf{z}}_{AB} & \alpha^2 & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{BC}\bar{\mathbf{z}}_{BC} \\ \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{iC}\bar{\mathbf{z}}_{iC} & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{AC}\bar{\mathbf{z}}_{AC} & \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{z}_{BC}\bar{\mathbf{z}}_{BC} & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -p_i^A \\ -p_i^B \\ -p_i^C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

huomaa, että taas rivivektorin alkioiden summa, $1 - p_i^A - p_i^B - p_i^C = 0$ ja α^2 häviää yhtälöstä. Saadaan

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{z}'_i) &= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & -p_i^A & -p_i^B & -p_i^C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iA}\bar{\mathbf{z}}_{iA} & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iB}\bar{\mathbf{z}}_{iB} & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iC}\bar{\mathbf{z}}_{iC} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iA}\bar{\mathbf{z}}_{iA} & 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{AB}\bar{\mathbf{z}}_{AB} & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{AC}\bar{\mathbf{z}}_{AC} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iB}\bar{\mathbf{z}}_{iB} & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{AB}\bar{\mathbf{z}}_{AB} & 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{BC}\bar{\mathbf{z}}_{BC} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{iC}\bar{\mathbf{z}}_{iC} & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{AC}\bar{\mathbf{z}}_{AC} & -\frac{1}{2}\mathbf{z}_{BC}\bar{\mathbf{z}}_{BC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -p_i^A \\ -p_i^B \\ -p_i^C \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & -p_i^A & -p_i^B & -p_i^C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \|\mathbf{z}_{iA}\|^2 & \|\mathbf{z}_{iB}\|^2 & \|\mathbf{z}_{iC}\|^2 \\ \|\mathbf{z}_{iA}\|^2 & 0 & \|\mathbf{z}_{AB}\|^2 & \|\mathbf{z}_{AC}\|^2 \\ \|\mathbf{z}_{iB}\|^2 & \|\mathbf{z}_{AB}\|^2 & 0 & \|\mathbf{z}_{BC}\|^2 \\ \|\mathbf{z}_{iC}\|^2 & \|\mathbf{z}_{AC}\|^2 & \|\mathbf{z}_{BC}\|^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -p_i^A \\ -p_i^B \\ -p_i^C \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tämä kaava ei valitettavasti ole kätevästi sievettävissä. Tietokoneelle se ei ole kuitenkaan ongelma.

3.5 Korkeudenmittauksen tapaus

Korkeudenmittauksen tapauksessa tutkittava suure on skalaari, h , joka on kuitenkin sijainnin \mathbf{z} funktio. Voimme siis kirjoittaa $h(\mathbf{z})$.

Korkeuskoordinaattien tapauksessa tiedetään, että *relatiiviset* eli pisteiden väliset virheet kasvavat pisteiden välisen etäisyyden *neliöjuuren* mukaan (koska mittausmenetelmä on vaaitus). Tästä syystä kannattaa tutkia yleisempi tapaus, jossa virhe on verrannollinen etäisyyden johonkin potenssiin ν , joka siis ei yleisesti ole $\nu = 1$ vaan $\nu = 0,5$.

Silloin voimme (vielä sijaintikoordinaattien tapauksessa) määrittää kriteerimatriisin standardimuoto seuraavasti:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{z}) &= \alpha^2, \\ \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) &= \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 (\mathbf{z} - \mathbf{w})^\nu (\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{w}})^\nu = \\ &= \alpha^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|^{2\nu}.\end{aligned}$$

Taas saadaan relatiiviseksi varianssiksi

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{z}_{AB}) &= \text{Var}(\mathbf{z}_A) + \text{Var}(\mathbf{z}_B) - 2\text{Cov}(\mathbf{z}_A, \mathbf{z}_B) = \\ &= 2\alpha^2 - 2\alpha^2 + \sigma^2 (\mathbf{z}_{AB}\bar{\mathbf{z}}_{AB})^\nu = +\sigma^2 (\mathbf{z}_{AB}\bar{\mathbf{z}}_{AB})^\nu.\end{aligned}$$

Sovelletaan tämä nyt korkeudenmittaukseen. Saadaan ($\nu = 0.5$)

$$\text{Var}(\Delta h_{AB}) = \sigma^2 \|\mathbf{z}_{AB}\|$$

ja

$$\sigma_{\Delta h_{AB}} = \sigma \sqrt{\|\mathbf{z}_{AB}\|},$$

kuten tiedetään.

Realistisissa verkoissa kuitenkin, tasoituksen tuoman verkon lisääntyneen vahvuuden ansiosta, yleensä myös sijaintiverkkojen tapauksessa $\nu < 1$, ja vaaitusverkkojen tapauksessa voi olla $\nu < 0,5$. Tässä annetut arvot ovat kuitenkin kelvollinen ensimmäinen approksimaatio.

GPS-mittausten tapauksessa tiedetään, että pistesijainnin relatiivista tarkkuutta voidaan hyvin kuvata etäisyyden potenssilain avulla, jossa eksponentti on $\nu \approx 0,5$ (ns. "Bernesen" — Bernin yliopiston GPS-tutkimusryhmän — nyrkkisääntö).

Luku 4

Kappaleen muodon määrittäminen (ympyrä, pallo, suora)

(Yleisemmin: mallien rakentaminen ja parametrisointi tasoitusta varten)

Kirjallisuus:

Kallio [1998b, s. 140-143]

Kallio [1998a]

Krakiwsky [1983]

Norri [1999a]

Strang and Borre [1997, s. 441-444]

Leick [1995, s. 123-130]

4.1 Yleinen tapaus

Olkoon annettuna tasossa kuvio, jonka reunalla

$$f(x, y) = 0.$$

Tämän kuvion reunapisteet on mitattuna n kertaa:

$$(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$$

Oletetaan, että kuvion muoto riippuu ulkoisilta parameteilta $a_j, j = 1, \dots, m$. Eli

$$f(x, y; a_j) = 0.$$

Kutsutaan havainnot $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$. Konstruoidaan havaintoja riittävän lähellä olevat *likiarvot*, joihin pätee

$$f(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}; a_j^{(0)}) = 0.$$

Nyt voidaan kirjoittaa TAYLOR-kehitemmä:

$$f(x_i, y_i; a_j) = f(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}; a_j^{(0)}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i^{(0)}} \Delta x_i + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_i^{(0)}} \Delta y_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_j} \Delta a_j,$$

jossa

$$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}, \Delta y_i = y_i - y_i^{(0)}, \text{ ja } \Delta a_j = a_j - a_j^{(0)}.$$

Ilmaisu $f(x_i, y_i; a_j) - f(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}; a_j^{(0)})$ on oltava nolla.

Näin saamme lopulliseksi havaintoyhtälöksi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \Delta y_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_j} \Delta a_j = 0.$$

Tässä kaksi vasenta termiä muodostaa reunapisteiden havaintojen (x_i, y_i) lineaariyhdistelmä, joka on laskettavissa, jos reunafunktion $f(x, y; a_j)$ osittaisderivaatat x :n ja y :n suhteen ovat laskettavissa. Samalla rakennematrisiin alkio $\frac{df}{da_j}$.

Yleisemmin, jos käyrän sijasta meillä olisi pinta kolmiulotteisessa avaruudessa, saataisiin havaintoyhtälöiksi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \Delta z_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_j} (a_j - a_j^0) = 0.$$

Mikäli havainnot (x_i, y_i) on samanapainoisia (ja yhtä tarkkoja x - ja y -suunnassa) on vielä vaadittava, että

$$\|\nabla f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^2}$$

on vakio, ts. riippumaton x_i :n ja y_i :n arvoista. Vain silloin "korvaavan havaintosuureen" $\ell_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \Delta z_i$ varianssit ovat samoja ja voidaan käyttää yksikkömatriisi painokerroinmatriisina.

4.2 Esimerkki: Ympyrä

Ympyrän kaava on

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

jossa r on ympyrän säde. Vapaasti sijoitetun ympyrän kaava on

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = r^2,$$

jossa (X, Y) on ympyrän keskuksen koordinaatit.

Funktio f on

$$f(x, y; a_j) = (x - X)^2 + (y - Y)^2 - r^2$$

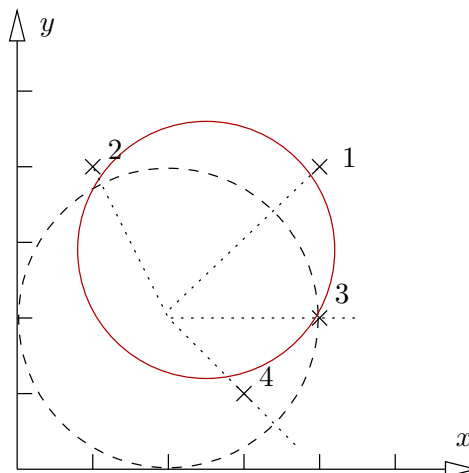
ja vektori a_j :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ r \end{bmatrix}.$$

Osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - X), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - Y), \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = -2(x - X), \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = -2(y - Y), \quad \frac{\partial f}{\partial a_3} = -2r.$$

Nämä osittaisderivaatat evaluoidaan sopivilla likiarvoilla $X^{(0)}, Y^{(0)}, r^{(0)}$.



Havaintoyhtälöiksi saadaan

$$\left(x_i^{(0)} - X^{(0)}\right) \Delta x_i + \left(y_i^{(0)} - Y^{(0)}\right) \Delta y_i - \left(x_i^{(0)} - X^{(0)}\right) \Delta X - \left(y_i^{(0)} - Y^{(0)}\right) \Delta Y - r^{(0)} \Delta r = 0,$$

josta linearisoidut tuntemattomat $\Delta X, \Delta Y$ ja Δr (korjaukset oletettuihin likiarvoihin) on ratkaistavissa jos yhtälöitä on yli kolme.

Olkoon annettuna havaintopisteet $(4, 4), (1, 4), (4, 2)$ ja $(3, 1)$. Lähtö- eli likiarvot olkoon $X^0 = Y^0 = 2, r^0 = 2$. Havaintojen likiarvot lasketaan seuraavasti. Kuvasta näkyy, että

$$\begin{aligned} x_i^{(0)} &= X^{(0)} + r^{(0)} \cos \varphi_i^{(0)}, \\ y_i^{(0)} &= Y^{(0)} + r^{(0)} \sin \varphi_i^{(0)}, \end{aligned}$$

jossa φ suuntakulma. Graafisesti saadaan sopivat φ -arvot, ja näin

i	$\varphi^{(0)}$	x_i	y_i	$x_i^{(0)}$	$y_i^{(0)}$	Δx_i	Δy_i	$x_i^{(0)} - X^{(0)}$	$y_i^{(0)} - Y^{(0)}$
1	45°	4	4	3,414	3,414	0,586	0,586	1,414	1,414
2	120°	1	4	1,000	3,732	0,000	0,268	-1,000	1,732
3	0°	4	2	4,000	2,000	0,000	0,000	2,000	0,000
4	-45°	3	1	3,414	0,586	-0,414	0,414	1,414	-1,414

Näin saadaan

$$\left(x_i^{(0)} - X^{(0)}\right) \Delta x_i + \left(y_i^{(0)} - Y^{(0)}\right) \Delta y_i = \begin{bmatrix} 1,657 \\ 0,464 \\ 0,000 \\ -1,171 \end{bmatrix},$$

ja havaintoyhtälöiksi

$$\begin{bmatrix} 1,657 \\ 0,464 \\ 0,000 \\ -1,171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,414 & 1,414 & 2 \\ -1,000 & 1,732 & 2 \\ 2,000 & 0,000 & 2 \\ 1,414 & -1,414 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta r \end{bmatrix}.$$

Ratkaiseminen Matlabin/Octaven avulla antaa $\Delta X = 0,485, \Delta Y = 0,966, \Delta r = -0,322$, ja siis $X = 2,485, Y = 2,966, r = 1,678$. Tämä ratkaisu on piirretty kuvaan. Kuten näkyy, on r -ratkaisu aika huono, mitä mahdollisesti johtuu epälineaarisuudesta yhdessä huonojen lähtöarvojen kanssa. Iterointi paranisi ratkaisua.

4.3 Harjoitukset

Suoran viiveen määrittämiseksi pistepilven läpi on olemassa seuraavat regressiovaihtoehdot:

- o *Perinteinen lineaariregressio:*

$$y_i + v_i = a + bx_i,$$

minimoi $s \equiv \sum_i v_i^2$ muuttujien a, b avulla.

Esim. a :n laskenta: vaadi

$$\frac{\partial s}{\partial a} = 0 = \frac{\partial}{\partial a} \sum_i (a + bx_i - y_i)^2 = 2n(a + b\bar{x} - \bar{y}),$$

jossa \bar{x}, \bar{y} ovat n mittauspisteiden (x_i, y_i) painopisteen koordinaatit. Mikäli koordinaatiston origo valitaan siten, että

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

(ns. barysentriset koordinaatit), seuraa, että $2na = 0 \Rightarrow a = 0$. Eli regressioviiva menee mittauspisteiden painopisteen kautta.

- o Vaihda keskenään x :n ja y :n roolit ja suorita x :n regressio y :n suhteen :

$$y_i = a + b(x_i + w_i),$$

minimoi $\sum w_i^2$.

- o *Ortogonaaliregressio:*

$$y_i - u_i \sqrt{1 - b^2} = a + \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} (x_i + u_i \sqrt{b^2}), \quad (4.1)$$

minimoi $\sum u_i^2$.

1. *Todista*, että myös x :n regressioon y :n suhteen -tapauksessa regressioviiva menee mittauspisteiden painopisteen kautta.

Vastaus: $s = \sum w_i^2$ minimoitava. Laskee samalla tavalla

$$\begin{aligned} \frac{ds}{da} &= \frac{d}{da} \sum w_i^2 = \sum \frac{d}{da} \left(\frac{y_i - a - bx_i}{b} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{b} \cdot \sum_i \left(\frac{y_i - a - bx_i}{b} \right) = -\frac{2n}{b^2} (\bar{y} - a - b\bar{x}); \end{aligned}$$

barysentrisissä koordinaateissa $\bar{x} = \bar{y} = 0$ tämä häviää **joss** (jos ja ainoastaan jos):

$$\frac{2na}{b^2} = 0 \Rightarrow a = 0.$$

(Vaatimuksena tässä tapauksessa, että $b \neq 0$.)

2. Sama todistus ortogonaaliregressioon tapauksessa.

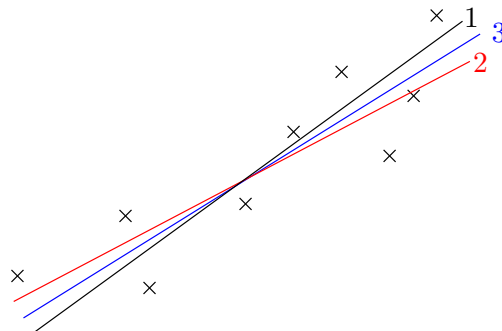
Vastaus: Minimoitava $s = \sum u_i^2$. Ensin siirretään u_i vasemmalle puolelle kaavasta 4.1:

$$\begin{aligned} u_i \sqrt{1 - b^2} + bu_i \sqrt{b^2} &= a + \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} x_i - y_i \Rightarrow \\ \Rightarrow u_i (\sqrt{1 - b^2} + b^2) &= a + \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} x_i - y_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{da} &= \frac{d}{da} \sum_i \left(\frac{a + \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} x_i - y_i}{b^2 + \sqrt{1 - b^2}} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{b^2 + \sqrt{1 - b^2}} \cdot \sum_i \frac{a + \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} x_i - y_i}{b^2 + \sqrt{1 - b^2}} = \\ &= \frac{2n}{(b^2 + \sqrt{1 - b^2})^2} \left(a + \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} \bar{x} - \bar{y} \right), \end{aligned}$$

mikä taas häviää tapauksessa $\bar{x} = \bar{y} = 0$ **joss** $a = 0$. Tässä tapauksessa tämä onnistuu vaikka $b = 0$.

3. Kuvassa on piirretty kolmen eri regressiomenetelmän viivaratkaisut. *Identifioi* ne yllä olevan kolmijaon mukaisesti.



Vastaus: Vähiten kalteva viiva on perinteinen regressio. Keskeinen on ortogonaaliregressio. Jyrkin viiva on x :n regressio y :n suhteen.

Luku 5

3D-verkko, teollisuusmittaukset useamman teodoliitin järjestelmällä

Kirjallisuus:

Norri [1999b]

Norri [1999a]

Kärkäs [1993]

Strang and Borre [1997, s. 363-368]

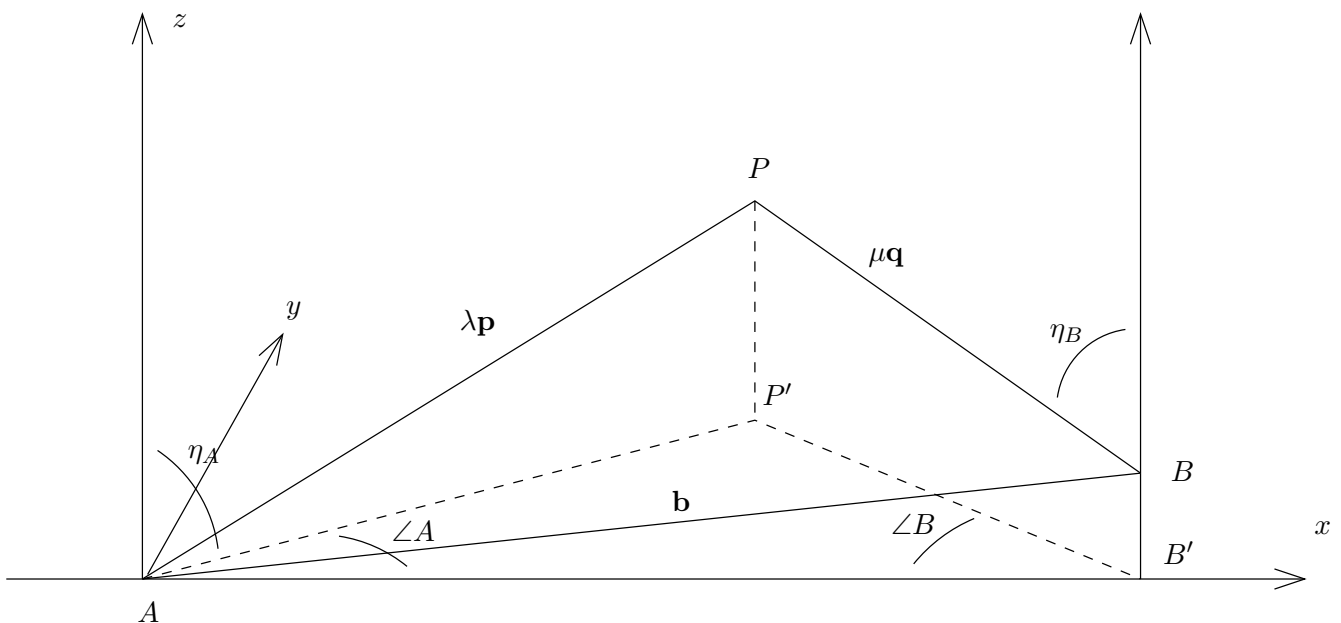
Salmenperä [1995, ss. 17-31]

5.1 Kolmiulotteinen teodoliittimittaus (EPLA)

Tässä kuvataan Cooper ja Allanin menetelmää, Allan [1987]. Menetelmässä havaitaan keskenään orientoitujen teodoliittien avulla piste P .

Menetelmässä avaruusetäisyys janojen AP ja BP välillä minimoidaan. Näiden viivojen suunnat ilmaistaan yksikkövektoreilla \mathbf{p} ja \mathbf{q} ; teodoliittien välinen vektori on \mathbf{b} . Nämä vektorit ovat nyt, kun origo on pisteessä A ja X -akseli AB :tä pitkin:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \\ z_B \end{bmatrix},$$



Kuva 5.1: Cooper & Allanin menetelmä

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos \eta_A \cos \angle A \\ \cos \eta_A \sin \angle A \\ \sin \eta_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\cos \eta_B \cos \angle B \\ \cos \eta_B \sin \angle B \\ \sin \eta_B \end{bmatrix}.$$

Tässä η on elevaatiokulma.

Nyt sulkuvektori on

$$\mathbf{e} = -\lambda \mathbf{p} + \mathbf{b} + \mu \mathbf{q},$$

jossa valitsemme kertoimet λ ja μ minimoidakseen vektorin \mathbf{e} pituus eli normi. Sen jälkeen pisteen P paras estimaatti on vektorin \mathbf{e} keskipiste, siis

$$\mathbf{x}_P = \frac{1}{2} (\lambda \mathbf{p} + \mathbf{b} + \mu \mathbf{q}).$$

Alempana annetaan esimerkki, miten tätä voidaan laskea likimääräisesti.

5.2 Esimerkki

Piste P havaitaan kahdella teodoliitilla kahdelta asemapisteltä. Asemapisteidien A, B koordinaatit ovat teollisuushallin koordinaatistossa:

	x (m)	y (m)	z (m)
A	900	1240	255
B	1545	1666	295

Kulmahavainnot ovat seuraavia:

Piste	Vaaka (gon) \angle	Pysty η (gon)
A	61,166	14042
B	345,995	9081

Mittaukset suoritetaan teodoliittien määrittelemässä paikallisessa koordinaatistossa. Ks. kuva 5.1. Minimoidaan vektorin

$$\mathbf{e} \equiv -\lambda \mathbf{p} + \mathbf{b} + \mu \mathbf{q}$$

pituus. \mathbf{p} ja \mathbf{q} ovat yksikkövektoreita.

Likimääräinen menetelmä:

1. Laske ensin vain pisteen P vaakakoordinaatit x, y teodoliittien määrittelemässä paikallisessa koordinaatistossa.
2. Laske parametrit λ ja μ .
3. Laske pystysuunnan erotusvektorin \mathbf{e} pituus $\|\mathbf{e}\|$.

Vastaus: lasketaan ensin $\mathbf{b} = AB$:n projektiio vaakatasoon:

$$\|\mathbf{b}_\perp\| = \sqrt{(15,45 - 9,00)^2 + (16,66 - 12,40)^2} = \sqrt{41,6025 + 18,1476} = 7,7298 \text{ m.}$$

Vaakatasokolmiossa $AB'P'$ on

$$\angle P = 200 - 61,166 - (400 - 345,995) = 84,829 \text{ gon.}$$

Sinikaava:

$$AP_\perp = AP' = AB_\perp \frac{\sin \angle B}{\sin \angle P} = 7,7298 \frac{0,75016}{0,97174} = 5,9672 \text{ m.}$$

Tämä etäisyys on *projisoitu* vaakatasoon. *Avaruudessa* vinoetäisyys on

$$AP = \frac{AP_\perp}{\cos \eta_A} = 6,1510 \text{ m} = \lambda.$$

Nyt pystykulman avulla

$$z_P = z_A + AP_{\perp} \tan \eta_A = 2,55 + 5,9672 \tan (14,042 \text{ gon}) = 3,8880 \text{ m.}$$

$$BP_{\perp} = B'P' = AB_{\perp} \frac{\sin \angle A}{\sin \angle P} = 7,7298 \frac{0,81965}{0,97174} = 6,5200 \text{ m.}$$

Taas tämä etäisyys on vaakatasossa. *Avaruudessa*

$$BP = \frac{BP_{\perp}}{\cos \eta_B} = 6,6028 \text{ m} = \mu.$$

Taas

$$z_P = z_B + BP_{\perp} \tan \eta_B = 2,95 + 6,5200 \tan (9,081 \text{ gon}) = 3,8864 \text{ m.}$$

Siis

$$\|\mathbf{e}\| = z_{P,B} - z_{P,A} = 3,8864 - 3,8880 = -1,6 \text{ mm.}$$

Koordinaatit teodoliitin määrittelemässä systeemissä (origo piste A , x -akseli suunta AB , z -akseli ylöspäin):

$$x_P = AP_{\perp} \cos \angle A = 5,9672 \cdot 0,5729 \text{ m} = 3,4184 \text{ m}$$

$$y_P = AP_{\perp} \sin \angle A = 5,9672 \cdot 0,81965 \text{ m} = 4,8910 \text{ m}$$

$$z_P = \frac{1}{2} (z_{P,1} + z_{P,2}) - z_A = 3,8872 \text{ m} - 2,55 \text{ m} = 1,3372 \text{ m}$$

Huomautuksena, että tämä on *likimääräinen* menetelmä, joka on hyväksyttävissä vain, jos pystykulmat η ovat lähellä 0^{g} , eli mittaukset lähes vaakasuuntaisia: silloin lyhyin \mathbf{e} on lähes pystysuuntainen. Tietysti myös eksakti pienimmän neliösumman menetelmä (yleiselle eli vinolle \mathbf{s} -vektorille) on mahdollinen.

5.3 Mittakaavan luomisen vaihtoehdot

- Tietämällä teodoliitipisteiden A, B välinen etäisyys. Nykyteodoliiteilla on sisäärakennettuna etäisyysmittari, mutta sen tarkkuus voi olla, näille muutaman metrin etäisyyksillä, huona verrattuna kulmamittaukseen.
- Käyttämällä tunnettu mittakaavatanko tai -sauva, mittaamalla sauvassa olevia merkkejä joiden välinen etäisyys on tarkasti tiedossa kalibroinnin ansiosta.
- Sisällyttämällä vähintään kaksi välimatkaltaan tunnettua pistettä mittauksiin.

Luku 6

Deformaatioanalyysi

Kirjallisuus:

Ahola [2001]

FIG Commission 6 [1998, s. 191-256]

Kallio [1998b, s. 95-101]

Cooper [1987, s. 331-352]

Vaniček and Krakiwsky [1986, s. 611-659]

6.1 Yksiuotteinen deformaatioanalyysi

Yksinkertaisin tapaus on se, jossa sama vaaituslinja tai -verkko on mitattu kaksi kertaa:

$$\begin{aligned}h_i(t_1), i = 1, \dots, n \\ h_i(t_2), i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

ja vastaavasti on olemassa niiden korkeuksien varianssimatriisit $Q(t_1)$ ja $Q(t_2)$.

Ilmeisesti vertailu onnistuu vain, jos molemmat mittaukset redukoidaan ensin samaan lähtöpisteeseen eli *datumiin*. Esimerkiksi valitaan ensimmäinen piste datum-pisteeksi:

$$h_1^{(1)}(t_1) = h_1^{(1)}(t_2) \quad (= \text{joku tunnettu arvo, esim. } 0)$$

Tämän jälkeen molempien mittausaikojen eli *epookkien* varianssimatriisit ovat enää $(n-1) \times (n-1)$ -kokoisia, koska nyt piste 1 on *tunnettu* ja ilman (ko-)varianssia.

$$Q^{(1)}(t_1) = \begin{bmatrix} q_{22}^{(1)} & q_{23}^{(1)} & \cdots & q_{2n}^{(1)} \\ q_{32}^{(1)} & q_{33}^{(1)} & \cdots & q_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n2}^{(1)} & q_{n3}^{(1)} & \cdots & q_{nn}^{(1)} \end{bmatrix},$$

ja samoin $Q^{(1)}(t_2)$:lle. Tässä

$$\begin{aligned}q_{ii}^{(k)} &= \text{Var}\left(h_i^{(k)}\right), \\ q_{ij}^{(k)} &= \text{Cov}\left(h_i^{(k)}, h_j^{(k)}\right).\end{aligned}$$

Lasketaan nyt kahden mittausepookin väliset korkeuserot ja niiden varianssit, olettaen, että t_1 aikana ja t_2 aikana tehdyt mittaukset ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan:

$$\Delta h_i^{(1)} = h_i^{(1)}(t_2) - h_i^{(1)}(t_1), \quad i = 2, \dots, n;$$

$$Q_{\Delta h \Delta h}^{(1)} = Q^{(1)}(t_1) + Q^{(1)}(t_2).$$

Tämän jälkeen on intuitiivisesti selvä, että seuraava suure on χ_{n-1}^2 -jakauman mukaan jakautunut:

$$\mathcal{E} = \left[\underline{\Delta h}^{(1)}\right]^T \left[Q_{\Delta h \Delta h}^{(1)}\right]^{-1} \underline{\Delta h}^{(1)}.$$

Tilastollinen testaus käyttää tätä suuretta. Tässä

$$\underline{\Delta h}^{(1)} = \begin{bmatrix} \Delta h_2^{(1)} \\ \Delta h_3^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta h_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

on korkeuserojen vektori.

6.2 Kaksiulotteinen deformaatioanalyysi

Tämä menee samalla tavalla kuin yksiulotteisessa tapauksessa, paitsi, että

1. koordinaatit käsitellään kompleksisina lukuina, ja
2. on kaksi datum-pistettä, joiden koordinaatit katsotaan tunnetuksi.

Siis jos on n pistettä, on varianssimatriisin koko nyt $(n - 2) \times (n - 2)$. Varianssimatriisikin on kompleksinen.

Testaussuure on

$$\mathcal{E} = \left[\underline{d}^{(AB)} \right]^\dagger \left[Q_{dd}^{(AB)} \right]^{-1} \underline{d}^{(AB)},$$

jossa \underline{d} on kaikkien koordinaatti-erojen kompleksinen vektori:

$$\underline{d}^{(AB)} = \begin{bmatrix} x_3^{(AB)}(t_2) - x_3^{(AB)}(t_1) + i \left[y_3^{(AB)}(t_2) - y_3^{(AB)}(t_1) \right] \\ x_4^{(AB)}(t_2) - x_4^{(AB)}(t_1) + i \left[y_4^{(AB)}(t_2) - y_4^{(AB)}(t_1) \right] \\ \vdots \\ x_n^{(AB)}(t_2) - x_n^{(AB)}(t_1) + i \left[y_n^{(AB)}(t_2) - y_n^{(AB)}(t_1) \right] \end{bmatrix}.$$

AB on valittu datumi eli lähtöpisteparina molemmissa epookissa t_1 ja t_2 . Muut pisteet on numeroitu $3, 4, \dots, n$. Symboli \dagger merkitsee sekä transpoosi että kompleksikonjugaatti, ns. *hermitointi*:

$$A^\dagger \equiv \overline{A^T} = \overline{A}^T.$$

Varoitus

Cooperin kirjassa Cooper [1987, s. 335] on kaavan (9.52) alapuolella *virhe*, oikea kaava on (käänteismatriisi eikä transpoosi):

$$\Omega = \widehat{\mathbf{d}}^\dagger Q_d^{-1} \widehat{\mathbf{d}}.$$

6.3 Esimerkki

Olkoon deformaatiomittausverkon ensimmäisen mittausepookin tasoitettut koordinaatit $\mathbf{x}_i(t_1)$, $i = 1, \dots, 4$ seuraavat:

Piste	x (m)	y (m)
1	1234,123	2134,453
2	2224,045	2034,487
3	2232,495	975,456
4	1148,865	879,775

ja toisen mittausepookin koordinaatit $\mathbf{x}_i(t_2)$, $i = 1, \dots, 4$ seuraavat:

Piste	x (m)	y (m)
1	1234,189	2134,485
2	2224,004	2034,433
3	2232,451	975,497
4	1148,929	879,766

Intermezzo: lasketaan siis:

d	x	y
1	-0,066	-0,032
2	+0,041	+0,054
3	+0,044	-0,041
4	-0,064	+0,009

$$\underline{d}^T \underline{d} = \sum_{i=1}^4 [\{x_i(t_2) - x_i(t_1)\}^2 + \{y_i(t_2) - y_i(t_1)\}^2] = 0.017771 \text{m}^2$$

(Vastaavasti kompleksiluvuilla:

$$\underline{d}^\dagger \underline{d} = \sum_{i=1}^4 \{\bar{z}_i(t_2) - \bar{z}_i(t_1)\} \{z_i(t_2) - z_i(t_1)\} = 0.017771 \text{m}^2,$$

kuten voidaan verifioida laskemalla. Tässä $z_i \equiv x_i + iy_i$ ja $\bar{z}_i = x_i - iy_i$.)

Olkoon ensimmäisen epookin koordinaattien $x_i(t_1)$ ja $y_i(t_1)$ tarkkuudet (koordinaattikeskivirheet) $m_{0,1} = \pm 5 \text{cm}$, ja toisen mittauksen koordinaattien $x_i(t_2)$, $y_i(t_2)$ tarkkuudet $m_{0,2} = \pm 1 \text{cm}$. Koordinaattivektorien varianssimatriisit ovat siis $Q_1 = m_{0,1}^2 I$ ja $Q_2 = m_{0,2}^2 I$.

1. Laske yhden koordinaattieron $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ keskivirhe m_0 . Varianssien kasautumislaki antaa

$$m_0^2 = m_{0,1}^2 + m_{0,2}^2 = (25 + 1) \text{cm}^2 = 26 \text{cm}^2.$$

Nyt koordinaattierojen varianssimatriisi on

$$Q = Q_1 + Q_2 = m_0^2 I.$$

Tästä vielä $m_0 = \sqrt{26} \text{cm} = 5,1 \text{cm} = 0,051 \text{m}$.

2. Laske deformaation testisuure

$$\mathcal{E} = \underline{d}^T Q^{-1} \underline{d} = \frac{\underline{d}^T \underline{d}}{m_0^2}.$$

Tässä $\underline{d} = \underline{x}_2 - \underline{x}_1$ on siirtymävektori, siis epookkien välisten koordinaattierojen vektori. Koska oletetaan, että molemmat koordinaattisetit ovat annettuna samassa, yhteisessä datumissa, jonka lähtöpisteet *eivät* kuitenkaan kuulu joukkoon 1–4, voimme olettaa, että kaikki koordinaatit ovat vapaita. Silloin vapausasteiden määrä on $h = 2n = 8$, jossa n on pisteiden määrä. Siirtovektorin \underline{d} koordinaattien varianssimatriisi on $m_0^2 I$.

Vastaus:

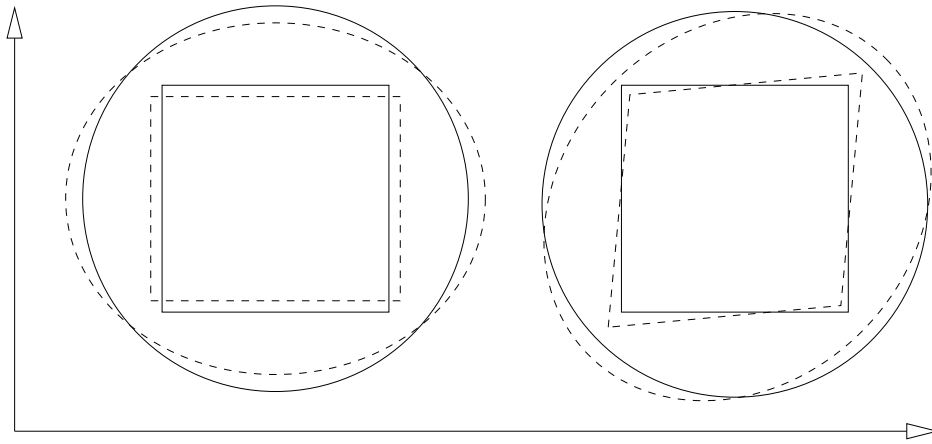
$$\mathcal{E} = \frac{1}{0.0026 \text{m}^2} \left(\underline{d}^T \underline{d} \right) = \frac{0.017771 \text{m}^2}{0.0026 \text{m}^2} = 6.835.$$

3. Suure \mathcal{E} on jakautunut χ_8^2 -jakauman mukaisesti. Jos tämän jakauman 95% merkitsevyytason raja-arvo on 15.51 (ks. Cooper [1987] sivu 355), onko tässä verkossa luultavasti tapahtunut deformaatio?

Vastaus: Ei ole. $6.835 < 15.51$.

4. Jos kuitenkin oletetut tarkkuudet olisivat $m_{0,1} = m_{0,2} = \pm 1 \text{cm}$, olisiko silloin 95% merkitsevyytetasolla luultavasti tapahtunut deformaatio?

Vastaus: Olisi $m_0^2 = (1 + 1) \text{cm}^2 = 0.0002 \text{m}^2$ ja $\mathcal{E} = \frac{1}{0.0002 \text{m}^2} \left(\underline{d}^T \underline{d} \right) = \frac{0.017771 \text{m}^2}{0.0002 \text{m}^2} = 88.9 > 15.51$.



Kuva 6.1: Venymätensoren kaksi pääkomponenttia

6.4 Venymätensori ja affiinen muunnos

Lähdetään tunnetusta affinimuunnoksen kaavasta:

$$\begin{aligned}x^{(2)} &= \Delta x + a_1 x^{(1)} + a_2 y^{(1)}, \\y^{(2)} &= \Delta y + b_1 x^{(1)} + b_2 y^{(1)}.\end{aligned}$$

Nyt käytämme tätä, ei kahden välisen *datum*in suhteen kuvaamiseksi, vaan saman pistekentän sijainnit kahdella eri *epookilla* t_1 ja t_2 kuvaamiseksi:

$$\begin{aligned}x(t_2) &= \Delta x + a_1 x(t_1) + a_2 y(t_1), \\y(t_2) &= \Delta y + b_1 x(t_1) + b_2 y(t_1),\end{aligned}$$

eli matriisimuodossa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} (t_2) = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} (t_1).$$

Nyt määrittelemme skaalauksen ja kierron parametrit:

$$\begin{aligned}m &= \frac{1}{2}(a_1 + b_2), \\ \theta &= \frac{1}{2}(b_1 - a_2),\end{aligned}$$

mitä mahdollistaa kirjoittamaan

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a_1 - b_2) & \frac{1}{2}(b_1 + a_2) \\ \frac{1}{2}(b_1 + a_2) & -\frac{1}{2}(a_1 - b_2) \end{bmatrix}.$$

Oikean puoleinen matriisi on symmetrinen ja voidaan kirjoittaa se seuraavaksi

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a_1 - b_2) & \frac{1}{2}(b_1 + a_2) \\ \frac{1}{2}(b_1 + a_2) & -\frac{1}{2}(a_1 - b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{xy} & s_{yy} \end{bmatrix}.$$

Tätä matriisia kutsutaan *venymätensoriksi*, ks. <http://www.stuk.fi/julkaisut/stuk-a/stuk-a198.pdf>. Se kuvaa, miten pienen Maan pinnan *neliön muoto muuttuu*, ja on siis ainoa “intrinsinen” deformaation kuvaaja (Parametri m kuvaa pinta-alan muutosta; θ kova kiertoliiketta joka ei muuta pinta-alaa eikä muotoa.).

Tällä tensorilla on kaksi pääkomponenttia jotka ovat 45° kulmalla toisiinsa nähden: $\frac{1}{2}(s_{xx} - s_{yy}) = \frac{1}{2}(a_1 - b_2)$ (“päävenymä”) kuvaa pitenemistä x -suunnassa ja samanaikaista kutistumista y -suunnassa — tai painvastainen käyttäytyminen jos etumerkki on negatiivinen —, kun taas $s_{xy} = \frac{1}{2}(b_1 + a_2)$ (“leikkausvenymä”) kuvaa pitenemistä suunnassa 45° yhdessä lyhenemisen kanssa suunnassa -45° .

Tämä on helppoa generalisoida kolmeen ulottuvuuteen, jossa on kolme pääjännitystä ja kolme leikkausjännitystä. Myöskin voidaan suorittaa analyysiä kokonaiselle alueelle sen jälkeen kuin on suoritettu DELAUNAY-kolmiointi alueen mittauspisteille. Tämä on käytetty tutkimaan maankuoren deformaatioita maanjäristyksen jälkeen.

Luku 7

Stokastiset prosessit ja aikasarjat

Kirjallisuutta:

Santala [1981, s. 31-46]

Papoulis [1965]

7.1 Määritelmät

Stokastinen prosessi on stokastinen muuttuja, jonka arvoavaruus on funktioavaruus.

Stokastinen muuttuja \underline{x} on resepti, jolla tuotetaan realisaatioita $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$. Jokaisella realisaatioarvolla on tietty *todennäköisyys* toteuttaa. Kun realisaatioita eli "heittoja" toistetaan riittävän usein, pitkäaikaiset toteuttamisprosentit "taipuvat" siihen todennäköisyysarvoon.

Ensimmäinen esimerkki Esim. nopanheitto: arvoavaruus on $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja toteuttamistodennäköisyys on $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$ eli n. 16%.

Toinen esimerkki kulmamittaus teodoliitilla: arvoavaruus on \mathbb{R} , kaikki reaaliarvot¹ ja todennäköisyysjakauma on

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

jossa σ on jakauman keskivirhe (standardipoikkeama) ja μ sen odotusarvo. Tässä on oletettu, että jakauma on *normaali* eli GAUSSIN kellokäyrä.

Tässä tapauksessa puhutaan todennäköisyystiheydestä eikä tietyn toteutumisarvon x todennäköisyydestä. Realisaation todennäköisyys osua tiettyyn väliin $[x_1, x_2]$ lasketaan integraalina

$$p = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

Stokastinen prosessi $\underline{x}(t)$ on nyt stokastinen muuttuja, jonka realisaatiot ovat *funktioita* $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_i(t), \dots$.

Argumentti t on tavallisesti aika, mutta voi olla myös, esimerkiksi, paikka (φ, λ) maan pinnalla.

Aikasarja on stokastisesta prosessista saatu sarja erikoistamalla argumentti t tiettyihin enemmän tai vähemmän säännöllisiin väleihin valittuihin arvoihin $t_j, j = 1, 2, \dots$. Eli stokastinen prosessi säännöllisesti mitattuna.

Stokastinen prosessi — tai aikasarja — kutsutaan *stationaariseksi* jos sen tilastolliset ominaisuudet eivät muutu, vaikka argumentti t korvattaisiin argumentilla $t + \Delta t$.

7.2 Stokastisten muuttajien varianssit ja kovarianssit

Muistutamme stokastisten muuttajien varianssin ja kovarianssin määritelmät:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\underline{x}) &\equiv E\left\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})^2\right\} \\ \text{Cov}(\underline{x}, \underline{y}) &\equiv E\left\{(\underline{x} - E\{\underline{x}\})(\underline{y} - E\{\underline{y}\})\right\}\end{aligned}$$

ja *korrelaatio*:

$$\text{Corr}(\underline{x}, \underline{y}) \equiv \frac{\text{Cov}(\underline{x}, \underline{y})}{\sqrt{\text{Var}(\underline{x})}\sqrt{\text{Var}(\underline{y})}}.$$

Korrelaatio on aina -100% ja 100% välillä.

¹Tarkemmin: kaikki rationaaliarvot \mathbb{Q} .

7.3 Auto- ja ristikovarianssi ja -korrelaatio

Stokastisten prosessien tutkimus perustuu niiden välisten riippuvuuksien tutkimiseen. Stokastisen prosessin *autokovarianssifunktio* kuvaa yhden prosessin sisäistä tilastollista riippuvuutta:

$$\begin{aligned} A_x(t_1, t_2) &= \text{Cov}\{\underline{x}(t_1), \underline{x}(t_2)\} = \\ &= E\{[\underline{x}(t_1) - E\{\underline{x}(t_1)\}] \cdot [\underline{x}(t_2) - E\{\underline{x}(t_2)\}]\}. \end{aligned}$$

Vastaavasti kahden eri prosessin *ristikovarianssifunktiota* voidaan määrittää:

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= \text{Cov}\{\underline{x}(t_1), \underline{y}(t_2)\} = \\ &= E\{[\underline{x}(t_1) - E\{\underline{x}(t_1)\}] \cdot [\underline{y}(t_2) - E\{\underline{y}(t_2)\}]\}. \end{aligned}$$

Siinä tapauksessa, että kyseiset prosessit ovat stationaarisia, saadaan

$$\begin{aligned} A_x(t_1, t_2) &= A_x(\Delta t), \\ C_{xy}(t_1, t_2) &= C_{xy}(\Delta t), \end{aligned}$$

jossa $\Delta t = t_2 - t_1$.

Autokorrelaatio on määritelty seuraavalla tavalla²:

$$\text{Corr}_x(\Delta t) \equiv \frac{A_x(t_1, t_2)}{\sqrt{A_x(t_1, t_1) A_x(t_2, t_2)}} = \frac{A_x(\Delta t)}{A_x(0)}.$$

Tästä näkyy, että, jos $\Delta t = 0$, autokorrelaatio on 1, ja muulloin aina -1 ja $+1$ välillä.

Ristikorrelaatiota määritellään seuraavalla, ei-triviaalilla tavalla:

$$\text{Corr}_{xy}(\Delta t) \equiv C_{xy}(\Delta t) / \sqrt{A_x(0) A_y(0)}$$

olettaen koko aikaa stationaarisuutta.

Muista, että

$$A_x(0) = \text{Var}(x(t)) = E\{(x(t) - E\{x(t)\})^2\}.$$

Koska³

$$\begin{aligned} &|E\{(x(t_1) - E\{x(t_1)\})(y(t_2) - E\{y(t_2)\})\}| \leq \\ &\leq \sqrt{E\{(x(t_1) - E\{x(t_1)\})^2\} E\{(y(t_2) - E\{y(t_2)\})^2\}}, \end{aligned}$$

²Huomaa, että kirjassa Papoulis [1965] käytetään aivan toisenlainen auto- ja ristikorrelaation määritelmä!

³Miksi? Eric WEISSTEIN antaa seuraava todistusx (<http://mathworld.wolfram.com/StatisticalCorrelation.html>):

Annettuna stokastiset suureet \underline{x} ja \underline{y} — jotka voivat olla stokastisen prosessin arvot $\underline{x}(t_1)$ ja $\underline{x}(t_2)$, tai kahden eri prosessin arvot $\underline{x}(t_1)$ ja $\underline{y}(t_2)$ — määrittele normalisoidut suureet:

$$\underline{\xi} = \frac{\underline{x}}{\sqrt{\text{Var}(\underline{x})}}, \quad \underline{\eta} = \frac{\underline{y}}{\sqrt{\text{Var}(\underline{y})}}.$$

Silloin

$$\text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \frac{\text{Cov}(\underline{x}, \underline{y})}{\sqrt{\text{Var}(\underline{x}) \text{Var}(\underline{y})}} = \text{Corr}(\underline{x}, \underline{y}).$$

Seuraavat varianssit on oltava positiivisia:

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Var}(\underline{\xi} + \underline{\eta}) &= \text{Var}(\underline{\xi}) + \text{Var}(\underline{\eta}) + 2 \cdot \text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \\ 0 \leq \text{Var}(\underline{\xi} - \underline{\eta}) &= \text{Var}(\underline{\xi}) + \text{Var}(\underline{\eta}) - 2 \cdot \text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}). \end{aligned}$$

Myös

$$\text{Var}(\underline{\xi}) = \frac{\text{Var}(\underline{x})}{\sqrt{(\text{Var}(\underline{x}))^2}} = 1, \quad \text{Var}(\underline{\eta}) = 1.$$

Seuraa, että

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 + 2 \cdot \text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \\ 0 &\leq 2 - 2 \cdot \text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}), \end{aligned}$$

eli

$$-1 \leq \text{Cov}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \text{Corr}(\underline{x}, \underline{y}) \leq 1.$$

on ristikorrelaatio aina -1 ja $+1$ välillä, ja on 1 jos *sekä* $\Delta t = 0$ että $\underline{x} = \underline{y}$.

7.4 Autokovarianssin estimaatio

Tämä tapahtuu suunnilleen samalla tavalla kuin varianssiestimaatio yleisemmin. Jos stokastisen prosessin $\underline{x}(t)$ realisaatioita $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ on käytettävissä, on harhaton autokovarianssin estimaattori (oletettu on stationaarisuus):

$$\widehat{A_x}(\Delta t) \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [(x_i(t) - \bar{x}(t))(x_i(t + \Delta t) - \bar{x}(t + \Delta t))] dt,$$

jossa

$$\bar{x}(t) \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t).$$

Taas olettaen, että prosessi $\underline{x}(t)$ on stationaarinen⁴, ja että meillä on käytettävissä prosessin n eri realisaatiota $x_i(t_j)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ eli *aikasarjoja*, voidaan konstruoida niistäkin estimaattori. Kuitenkin on joko

- oletettava, että argumentit t_j ovat vakioväleillä, ts. $t_{j+1} - t_j = \delta t$, tai
- jaettava kaikki mahdolliset Δt -arvot luokkiin eli "koreihin" $[0, \delta t)$, $[\delta t, 2\delta t)$, $[2\delta t, 3\delta t)$, ...

Valitaan ensimmäinen vaihtoehto. Silloin voidaan laskea

$$\widehat{A_x}(k\delta t) \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m-k-1} \sum_{j=1}^{m-k} [(x_i(t_j) - \bar{x}(t_j))(x_i(t_{j+k}) - \bar{x}(t_{j+k}))].$$

Siis käytetään jokaisen autokovarianssiarvon laskemiseksi vain ne prosessin argumenttiarvot, joiden välinen etäisyys on sopiva. Haittana on, että autokovarianssit saadaan lasketuksi vain näihin diskreettisiin arvoihin $0, \delta t, 2\delta t, \dots$

Toisella mainitulla lähestymistavalla meillä on sama ongelma takaoven kautta: luokkien koko on äärellinen.

Huomautus. Siinä tapauksessa, että meillä on maantieteellisen paikan (φ, λ) eikä ajan stokastinen prosessi, käytetään lokeroita pallokulmaetäisyyden ψ mukaan. Tämä on yleinen käytäntö painovoimakentän teoriassa. Usein tehty oletus, joka vastaa stationaarisuutta, on *homogeenisuus* (prosessin tilastolliset ominaisuudet eivät riipu paikasta) ja *isotrooppisuus* (eivät riipu myöskään kahden pisteen P, Q välisestä kompassisuunnasta, vain ainoastaan kulmaetäisyydeltä ψ_{PQ}).

7.5 Autokovarianssi ja spektrumi

Oletetaan *stationaarinen* stokastinen prosessi $\underline{x}(t)$ joka on samalla *kohina* eli sen odotusarvo häviää:

$$E\{x(t)\} = 0.$$

Tämän prosessin autokovarianssin FOURIER-muunnos on (tässä notaatio t kun aikaisemmin käytettiin Δt):

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (7.1)$$

Tätä funktiota kutsutaan PSD eli Power Spectral Density -funktio. Toinen kaava tämän laskemiseksi on

$$\underline{S}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T \underline{x}(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2, \quad (7.2)$$

eli pitkäaikainen "keskimääräinen teho" eri taajuuksilla ω . Tämä kaava soveltuu käytettäväksi S :n empiriseen laskentaan, jos itse prosessista $\underline{x}(t)$ on käytettävissä realisaatioita $x_i(t)$. Aikaisempi kaava taas käytetään, jos autokovarianssista on tiedossa suljettu ilmaisu.

Käänteinen FOURIER-kaava A_x :n laskemiseksi $S(\omega)$:sta on

$$A_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Todistukset löytyvät kirjasta [Papoulis \[1965\]](#).

⁴... ja ns. ergodinen.

7.6 AR(1), linear regression and variance

7.6.1 Pienimmän neliösumman regressio ilman autocorrelaatiota

Lineaariregression lähtökohtana on tunnettu kaava

$$y = a + bx$$

where we have given many point pairs $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$. This is more precisely an *observation equation*

$$\underline{y}_i = a + bx_i + \underline{n}_i,$$

where stochastic process \underline{n}_i models the *stochastic uncertainty of the measurement process*, i.e., the *noise*.

We assume the noise to behave so, that the variance is a constant independent of i (“homoskedasticity”), and the covariance vanishes identically (“white noise”)⁵:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{n}_i) &= \sigma^2, \\ \text{Cov}(\underline{n}_i, \underline{n}_j) &= 0, i \neq j. \end{aligned}$$

This is called the *statistical model*.

We may write the observation equations into the form

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ & \vdots \\ 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

where now $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$ is the vector of observations (in an n -dimensional abstract vector space), $\mathbf{x} = [a \ b]^T$ is the vector of unknowns (parameters), and

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

is the (second order) *design matrix*. This way of presentation is referred to as the *functional model*.

Based on the assumed statistical model we may compute the least squares solution with the help of the *normal equations*:

$$(A^T A) \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{y}.$$

More concretely:

$$A^T A = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix},$$

or (CRAMER’s rule):

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix},$$

from which

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \\ \hat{b} &= \frac{-\sum x \sum y + n \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \end{aligned}$$

⁵This set of assumptions is often called i.i.d., “independent, identically distributed”

are the least squares *estimators* of the unknowns. Their precision (uncertainty, mean error) is given (formal error propagation) by the diagonal elements of the inverted normal matrix $(A^T A)^{-1}$, scaled by σ :

$$\sigma_a = \sigma \sqrt{\frac{\sum x^2}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}}, \quad \sigma_b = \sigma \sqrt{\frac{n}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}}.$$

Most often we are particularly interested in the trend b , meaning that we should compare the value \hat{b} obtained with its own mean error σ_b . If σ is not known *a priori*, it should be evaluated from the *residuals*: the square sum of residuals

$$\sum \underline{v}^2 = \sum (y - \hat{a} - \hat{b}x)^2$$

has the expected value of $(n - 2) \sigma^2$, where $n - 2$ is the number of *degrees of freedom* (overdetermination), 2 being the number of unknowns estimated. Or

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum v^2}{n - 2}.$$

7.6.2 AR(1) processi

The assumption made above, that the observational errors \underline{n}_i are uncorrelated between themselves, is often *wrong*. Nevertheless least squares regression is such a simple method – available, e.g., in popular spreadsheets and pocket calculators – that it is often used even though the zero correlation requirement is not fulfilled.

If the autocorrelation of the noise process \underline{n}_i does not vanish, we can often model it as a so-called AR(1) (auto-regressive first-order) or Gauß-Markov process. Such a process is described as a *Markov chain*:

$$\underline{n}_{i+1} = \rho \underline{n}_i + \tilde{n}_i, \quad (7.3)$$

where ρ is a suitable parameter, $0 < \rho < 1$, and \tilde{n} is a truly non-correlating “white noise” process:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{n}_i) &= \tilde{\sigma}^2, \\ \text{Cov}(\tilde{n}_i, \tilde{n}_j) &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Write now the observation equation two times, multiplied the second time around by $-\rho$:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= a + bx_{i+1} + n_{i+1}, \\ -\rho y_i &= -\rho a - \rho b x_i - \rho n_i, \end{aligned}$$

... and sum together:

$$y_{i+1} - \rho y_i = (a - \rho a) + b(x_{i+1} - \rho x_i) + (n_{i+1} - \rho n_i).$$

This equation is of the form

$$Y_i = A + bX_i + \tilde{n}_i,$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{n}_i &\quad \text{as described above,} \\ A &= (1 - \rho) a, \\ X_i &= x_{i+1} - \rho x_i, \\ Y_i &= y_{i+1} - \rho y_i. \end{aligned}$$

i.e., the formula for the non-correlated linear regression.

The recipe now is:

1. Compute X_i and Y_i according to above formulae;
2. Solve \hat{A} and \hat{b} according to non-correlated linear regression;
3. Compute $\hat{a} = (1 - \rho)^{-1} \hat{A}$;

4. The ratio between $\tilde{\sigma}^2$ and σ^2 : from equation 7.3 it follows, that based on stationarity

$$\sigma^2 = \rho^2 \sigma^2 + \tilde{\sigma}^2,$$

in other words,

$$(1 - \rho^2) \sigma^2 = \tilde{\sigma}^2.$$

So, one either computes an empirical $\tilde{\sigma}^2$ and transforms it into a σ^2 of the original observations, or the given σ^2 of the original observations is transformed to $\tilde{\sigma}^2$ in order to evaluate the precisions of the estimators of A and b .

5. From point 4 we may also conclude that

$$\sigma_{b,AR(1)}^2 = \frac{\sigma_{b,nocorr}^2}{1 - \rho^2},$$

where $\sigma_{b,nocorr}^2$ is the “naively” calculated variance of the trend parameter.

Conclusion: if there is autocorrelation in the data, a simple linear regression will give a *much too optimistic picture* of the trend parameter b 's mean error, and thus also of its significance (difference from zero).

If the data is given as an equi-spaced function of time, i.e., $x_i = x_0 + (i - 1) \Delta t$, we may connect the parameter ρ of the AR(1) process in a simple way to its *correlation length*: the solution of equation 7.3 (without noise) is

$$n_j = \rho^{j-i} n_i = e^{(j-i) \ln \rho} = \exp\left(-\frac{(j-i) \Delta t}{\tau}\right),$$

where τ is the correlation length in units of time.

For consideration of non-strictly-AR(1) processes, see Tamino [2008].

Dimensioanalyysi

Sanotaan, että prosessin $\underline{x}(t)$ *dimensio* on (esimerkiksi) [pituus]. Kaavassa 7.1 meillä on silloin $A_x(t)$:n dimensiona [pituus]² ja $S(\omega)$:n dimensiona [pituus]² [aika]. Myös kaavan 7.2 mukaan dimensio on ([pituus] × [aika])² /aika.

Luku 8

Tasointuslaskun variantteja

8.1 Kaksivaihetasointus

Usein tulee vastaan tilanne, jossa paikallinen verkko on kiinnitettävä ”annettuihin” kiintopisteisiin. Silloin $\underline{\ell}_1$ ovat paikallisen verkon havainnot ja $\underline{\ell}_2$ ovat korkeamman tason verkon annettujen pisteiden koordinaatit. Olkoon \mathbf{x}_2 koordinaattituntemattomat joista on myös olemassa ”annettuja” koordinaatteja.

Havaintoyhtälöt ovat nyt

$$\begin{aligned}\underline{\ell}_1 + \underline{v}_1 &= A_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + A_2 \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \underline{\ell}_2 + \underline{v}_2 &= I \hat{\mathbf{x}}_2\end{aligned}$$

– eli A -matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Varianssimatriisi on

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix},$$

kun havainto-, jäännös- ja tuntemattomien vektorit ovat

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}, \underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}.$$

Tässä Q_2 on annettujen pisteiden varianssimatriisi. Ratkaisuksi saadaan

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} \underline{\ell},$$

missä

$$A^T Q^{-1} A = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} A_1 & A_1^T Q_1^{-1} A_2 \\ A_2^T Q_1^{-1} A_1 & A_2^T Q_1^{-1} A_2 + Q_2^{-1} \end{bmatrix}$$

ja

$$A^T Q^{-1} \underline{\ell} = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} \underline{\ell}_1 \\ A_2^T Q_1^{-1} \underline{\ell}_1 + Q_2^{-1} \underline{\ell}_2 \end{bmatrix},$$

ja siis

$$\begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} A_1 & A_1^T Q_1^{-1} A_2 \\ A_2^T Q_1^{-1} A_1 & A_2^T Q_1^{-1} A_2 + Q_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} \underline{\ell}_1 \\ A_2^T Q_1^{-1} \underline{\ell}_1 + Q_2^{-1} \underline{\ell}_2 \end{bmatrix}.$$

Tästä näkyy, että yleensä tasointu $\hat{\ell}_2 = \hat{\mathbf{x}}_2$ eroaa alkuperäisarvoista $\underline{\ell}_2$!

Tämä ei ole yleensä hyväksyttävissä.

Korkeamman luokan verkon koordinaatit ei saa muuttaa matalamman luokan verkon tasointuksen seurauksena!

Mitä ratkaisuksi?

Eräs ehdotettu ratkaisu on ns. pseudo-pienimmän neliösumman menetelmä (BAARDA).

Laitetaan matriisiin Q_2 eteen kerroin α , jolloin

$$\begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} A_1 & A_1^T Q_1^{-1} A_2 \\ A_2^T Q_1^{-1} A_1 & A_2^T Q_1^{-1} A_2 + \alpha^{-1} Q_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} \ell_1 \\ A_2^T Q_1^{-1} \ell_1 + \alpha^{-1} Q_2^{-1} \ell_2 \end{bmatrix}.$$

Annetaan nyt $\alpha \rightarrow 0$, eli annetut pisteet oletetaan äärettömän tarkoiksi.

Kerro viimeinen rivi α :lla:

$$\begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} A_1 & A_1^T Q_1^{-1} A_2 \\ \alpha A_2^T Q_1^{-1} A_1 & \alpha A_2^T Q_1^{-1} A_2 + Q_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} \ell_1 \\ \alpha A_2^T Q_1^{-1} \ell_1 + Q_2^{-1} \ell_2 \end{bmatrix}.$$

Nyt $\alpha \rightarrow 0$:

$$\begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} A_1 & A_1^T Q_1^{-1} A_2 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} \ell_1 \\ Q_2^{-1} \ell_2 \end{bmatrix}$$

eli (kerro viimeinen rivi Q_2 :lla):

$$\begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} A_1 & A_1^T Q_1^{-1} A_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}.$$

Kuten nähdään, nyt annetut koordinaatit eivät muutu enää: viimeinen rivi sanoo $\hat{x}_2 = \ell_2$.

Ratkaisu \hat{x}_1 saadaan seuraavista normaaliyhtälöistä:

$$(A_1^T Q_1^{-1} A_1) \hat{x}_1 = A_1^T Q_1^{-1} \ell_1 - A_1^T Q_1^{-1} A_2 \ell_2 = A_1^T Q_1^{-1} (\ell_1 - A_2 \ell_2).$$

Kun tarkastellaan tätä kaavaa, nähdään, että se kertoo \hat{x}_1 olevan havaintojen $\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \end{bmatrix}^T$ lineaariyhdistelmä: näin voidaan kirjoittaa

$$\hat{x}_1 = L_1 \ell_1 + L_2 \ell_2,$$

jossa

$$\begin{aligned} L_1 &= (A_1^T Q_1^{-1} A_1)^{-1} A_1^T Q_1^{-1}, \\ L_2 &= (A_1^T Q_1^{-1} A_1)^{-1} A_1^T Q_1^{-1} (-A_2). \end{aligned}$$

\hat{x}_1 :n todellinen varianssi tulee nyt olemaan kasautumislain mukaan:

$$Q_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} = L_1 Q_1 L_1^T + L_2 Q_2 L_2^T = (A_1^T Q_1^{-1} A_1)^{-1} (A_1^T Q_1^{-1} A_1 + A_1^T A_2 Q_2^{-1} A_2^T A_1) (A_1^T Q_1^{-1} A_1)^{-1},$$

joidenkin yksinkertaistumisien jälkeen.

Huomaa että tämä on *suurempi* kuin “naivisti” laskettu varianssi

$$Q_{\hat{x}_1 \hat{x}_1}^* = (A_1^T Q_1^{-1} A_1)^{-1},$$

joka ei ota huomioon että annetut koordinaatit, vaikka niitä oletettiin koordinaattien laskemisen vuoksi “virheettömiksi”, kuitenkin sisältävät virhettä joka kulkee paikalliseen ratkaisuun \hat{x}_1 .

Eli:

- Lasketaan tuntemattomien estimaatit “vaarällä” varianssimallilla;
- lasketaan sitten estimaattoreiden varianssit “oikein”, käyttämällä varianssien propagaatiolaki.

8.2 A priori -tiedon käyttö tasoituksessa

Joskus estimoidaan tuntemattomat havainnoista, vaikka tuntemattomista tiedetaan jo “jotain”. Esim. estimoidaan pisteiden koordinaatit geodeettisista havainnoista, mutta samat koordinaatit ovat jo tiedossa likimääräisinä esim. kartalta luettuina (olemmehan löytäneet mitattavat pisteet!). Mittaushan on suunniteltu likikoordinaattien avulla, siis ne ovat jo olemassa.

Olkoon tuntemattomille olemassa *a priori* arvot ja varianssimatriisi

$$\underline{x}, Q_{xx}$$

ja havaintoyhtälöt olkoon

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{x}.$$

Havaintovektorin varianssimatriisi olkoon

$$Q_{\ell\ell}$$

ja havainnot ja *a priori* tuntemattomien arvot olkoot tilastollisesti riippumattomia toisistaan. Silloin voimme laajentaa havaintoyhtälöt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\ell} \\ \underline{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{v}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \hat{x}.$$

Jos määritetään muodollisesti

$$\tilde{A} \equiv \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}, \tilde{Q} \equiv \begin{bmatrix} Q_{\ell\ell} & 0 \\ 0 & Q_{xx} \end{bmatrix}, \tilde{\underline{\ell}} \equiv \begin{bmatrix} \underline{\ell} \\ \underline{x} \end{bmatrix}, \tilde{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{v}_x \end{bmatrix}$$

on ratkaisu

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \left[\tilde{A}^T \tilde{Q}^{-1} \tilde{A} \right]^{-1} \tilde{A}^T \tilde{Q}^{-1} \tilde{\underline{\ell}} = \\ &= \left[A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A + Q_{xx}^{-1} \right]^{-1} \left[A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{\ell} + Q_{xx}^{-1} \underline{x} \right]. \end{aligned}$$

Jos on kyse *linearisoiduista* havaintoyhtälöistä, ja linearisoinnissa on käytetty samat likiarvot kun nyt käytetään *a priori* -arvoina (eli $\underline{x}_0 = \underline{x}$, siis $\underline{\Delta x} = \underline{x} - \underline{x}_0 = \underline{0}$), saadaan

$$\widehat{\underline{\Delta x}} = \left[A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A + Q_{xx}^{-1} \right]^{-1} \left[A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{\Delta \ell} + Q_{xx}^{-1} \underline{\Delta x} \right] = \left[A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A + Q_{xx}^{-1} \right]^{-1} A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{\Delta \ell}.$$

Tuntemattomien varianssimatriisi tasoituksen jälkeen (*a posteriori*) on kasautumislain perusteella

$$\begin{aligned} Q_{\hat{x}\hat{x}} &= \left[A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A + Q_{xx}^{-1} \right]^{-1} \left[A^T Q_{\ell\ell}^{-1} (Q_{\Delta\ell\Delta\ell}) Q_{\ell\ell}^{-1} A + Q_{xx}^{-1} (Q_{\Delta x\Delta x}) Q_{xx}^{-1} \right] \left[A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A + Q_{xx}^{-1} \right]^{-1} = \\ &= \left[A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A + Q_{xx}^{-1} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

koska $\text{Var}(\underline{\Delta \ell}) = Q_{\Delta\ell\Delta\ell} = Q_{\ell\ell}$ ja $\text{Var}(\underline{\Delta x}) = Q_{\Delta x\Delta x} = Q_{xx}$.

Joskus tätä menetelmää käytetään epästabiliin havainto- tai normaalilyhtälöiden *stabiloimiseksi*. Käytetty nimitys on TIKHONOV- tai ridge-regularisointi. Yllä olevan matriisin kääntäminen voi olla mahdotonta, esim. jos matriisilla A on rangivaje. Silloin matriisin Q_{xx}^{-1} lisääminen tekee sen kääntäminen mahdolliseksi.

Usein oletetaan, että

$$Q_{xx}^{-1} = \alpha I,$$

jossa α kutsutaan *regularisointiparametriksi*. Mikäli tämä tehdään vain yhtälöiden stabiloimiseksi, on muistettava, että tämä merkitsee *tiedon lisääminen tehtävän ratkaisuun*. Mikäli tieto ei ole oikeasti olemassa, on tasoituksen tulos liian optimistinen tarkkuuden suhteen.

8.3 Normaalilyhtälöiden pinotus

Oletetaan, että on käytettävissä toisistaan riippumattomia havaintoja $\underline{\ell}_1$ ja $\underline{\ell}_2$ jotka riippuvat samoista tuntemattomista x . Havaintoyhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \underline{\ell}_1 + \underline{v}_1 &= A_1 \hat{x} \\ \underline{\ell}_2 + \underline{v}_2 &= A_2 \hat{x} \end{aligned}$$

ja havaintojen varianssimatriisit ovat Q_1 ja Q_2 . Silloin yhteinen varianssimatriisi on

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

ja yhteinen havaintoyhtälöryhmä

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{x},$$

missä $\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ ja $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$. Normaaliyhtälöryhmä on

$$(A^T Q^{-1} A) \hat{x} = A^T Q^{-1} \underline{\ell}$$

eli

$$(A_1^T Q_1^{-1} A_1 + A_2^T Q_2^{-1} A_2) \hat{x} = (A_1^T Q_1^{-1} \underline{\ell}_1 + A_2^T Q_2^{-1} \underline{\ell}_2), \quad (8.1)$$

mistä näkyy, että kokonaisratkaisua saadaan ynnäämällä sekä normaalimatriisit $A^T Q A$ että normaalivektorit $A^T Q^{-1} \underline{\ell}$. Menetelmä kutsutaan *normaaliyhtälöiden pinotukseksi* (“normals stacking”).

GPS-laskennassa käytetään tätä periaatetta hyväksi; GPS-verkkojen tasoituksen tulokset jakellaan usein kompaktissa “normaaliyhtälöiden” muodossa. Niitä on sitten helppoa yhdistää. Tähän tarkoitukseen on keksitty ns. SINEX-standardi. SINEX = Software Independent EXchange format.

Mikäli tuntemattomien vektorin x alkioista vain pieni osa riippuu molempiin havaintovektoriin ℓ_1 ja ℓ_2 , voidaan tätä käyttää hyväksi ja ratkaista yhtälöryhmä 8.1 tehokkaasti vaiheittain (Helmert-Wolf blocking). Yleisemmin on olemassa ns. *harvojen matriisien menetelmiä*, jotka käyttävät hyväksi erikoistilanne, missä matriisien A ja/tai Q alkioit ovat suurilta osin nollia.

8.4 Helmert-Wolf blokkimenetelmä

8.4.1 Periaate

Usein suuri tasoitustehtävä voidaan jakaa luonnollisesti pieniin osiin. Esimerkiksi suuren kansainvälisen kolmioverkon tasoitus voidaan suorittaa niin, että ensin tasoitetaan jokainen maa erikseen; siitä saadut rajapisteiden koordinaatit syötetään mannerlaajuiseen tasoitukseen; ja siitä saadut korjaukset rajapisteisiin propagoidaan taas jokaisen maan sisäisiin pisteisiin.

Tätä menetelmää käytettiin esimerkiksi ED50 eurooppalaisessa kolmioverkkotasoituksessa, sekä NAD (North American Datum)-tasoituksessa Pohjois-Amerikassa.

Teoria on seuraava: Olkoon kahdenlaisia tuntemattomia,

1. “globaaliset” tuntemattomat \hat{x}_e joista havainnot $\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_2, \dots, \underline{\ell}_n$ *kaikissa* maissa $1, 2, \dots, n$ riippuvat, eli “ylimman tason”, “eurooppalaiset” tuntemattomat;
2. “paikalliset” tuntemattomat \hat{x}_i , $i = 1, 2, \dots, n$ joista riippuvat vain havainnot $\underline{\ell}_i$ yhdessä maassa i .

Silloin havaintoyhtälöt ovat¹

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \\ \hat{x}_e \end{bmatrix}.$$

Tästä saadaan normaaliyhtälöryhmä:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} A_1^T Q_1^{-1} A_1 & & & & A_1^T Q_1^{-1} B_1 & & & \\ & A_2^T Q_2^{-1} A_2 & & & A_2^T Q_2^{-1} B_2 & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & A_n^T Q_n^{-1} A_n & A_n^T Q_n^{-1} B_n & & & \\ \hline B_1^T Q_1^{-1} A_1 & B_2^T Q_2^{-1} A_2 & \cdots & B_n^T Q_n^{-1} A_n & \sum_{i=1}^n B_i^T Q_i^{-1} B_i & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \\ \hat{x}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} \underline{\ell}_1 \\ A_2^T Q_2^{-1} \underline{\ell}_2 \\ \vdots \\ A_n^T Q_n^{-1} \underline{\ell}_n \\ \sum_{i=1}^n B_i^T Q_i^{-1} \underline{\ell}_i \end{bmatrix}$$

missä $Q_i \equiv Q_{\ell_i}$ on havaintojen $\underline{\ell}_i$ varianssimatriisi — oletetaan, että eri “maiden” havainnot ℓ_i, ℓ_j eivät korreloi.

¹Huomaa, että “normaaliyhtälöiden pinotus” on tämän erikoistapaus: $A_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ ja x_i eivät ole olemassa.

Huomaa että yllä oleva normaalimatriisi on “nuolen muotoinen” (\searrow) eli “reunustettu päälävistäjämatrisi”. Sellaisia esiintyy usein tasoituskassa ja ne mahdollistavat yksinkertaistettua käsittelytapaa.1

Symbolisemmin:

$$\begin{bmatrix} N_{II} & N_{IE} \\ N_{EI} & N_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_I \\ \mathbf{b}_E \end{bmatrix},$$

jossa eri osamatriisien ja -vektoreiden määritelmät ovat selviä.

Tämä matriisikaava edustaa kaksi yhtälöä:

$$\begin{aligned} N_{II}\mathbf{x}_I + N_{IE}\mathbf{x}_E &= \mathbf{b}_I, \\ N_{EI}\mathbf{x}_I + N_{EE}\mathbf{x}_E &= \mathbf{b}_E. \end{aligned}$$

Kerro ensimmäinen kaava matriisilla $N_{EI}N_{II}^{-1}$ ja vähennä se toisesta “paikallisten” tuntemattomien \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, n$ eliminoimiseksi:

$$(N_{EE} - N_{EI}N_{II}^{-1}N_{IE})\mathbf{x}_E = \mathbf{b}_E - N_{EI}N_{II}^{-1}\mathbf{b}_I, \quad (8.2)$$

ns. redukoitu normaaliyhtälöryhmä, josta ratkaisu $\hat{\mathbf{x}}_E$ saadaan. Auki kirjoitettuna:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n B_i^T (I_i - Q_i^{-1}A_i (A_i^T Q_i^{-1}A_i)^{-1} A_i^T) Q_i^{-1} B_i \right) \mathbf{x}_E = \\ & = \left(\sum_{i=1}^n B_i^T (I_i - Q_i^{-1}A_i (A_i^T Q_i^{-1}A_i)^{-1} A_i^T) Q_i^{-1} \ell_i \right). \end{aligned}$$

Sen jälkeen sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön:

$$N_{II}\mathbf{x}_I = \mathbf{b}_I - N_{IE}\hat{\mathbf{x}}_E,$$

eli paikalliset ratkaisut. Auki kirjoitettuna:

$$\begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} A_1 & & & \\ & A_2^T Q_2^{-1} A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^T Q_n^{-1} A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} (\ell_1 - B_1 \hat{\mathbf{x}}_E) \\ A_2^T Q_2^{-1} (\ell_2 - B_2 \hat{\mathbf{x}}_E) \\ \vdots \\ A_n^T Q_n^{-1} (\ell_n - B_n \hat{\mathbf{x}}_E) \end{bmatrix},$$

eli yksittäisen maan i ratkaisu saadaan kauniisti erikseen:

$$(A_i^T Q_i^{-1} A_i) \mathbf{x}_i = A_i^T Q_i^{-1} (\ell_i - B_i \hat{\mathbf{x}}_E), \quad (8.3)$$

josta saadaan estimaattorit $\hat{\mathbf{x}}_i$, $i = 1, \dots, n$.

HELMERT-WOLFin suuri etu on, että uudet normaaliyhtälöt (8.2, 8.3) ovat kooltaan vain vektoreiden \mathbf{x}_E tai \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, n$ kokoa eikä koko ryhmän, $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \mid \mathbf{x}_E \end{bmatrix}^T$ kokoa. Tämä on tärkeä, koska yhtälöryhmän ratkaisemisen laskentatyö (kuten matriisin kääntämisenkin laskentatyö) on verrannollinen sen koon *kolmanteen* potenssiin!

8.4.2 Varianssit

Koko tuntemattomien vektorin $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_I & \mathbf{x}_E \end{bmatrix}^T$ varianssimatriisi on normaalimatriisin

$$N \equiv \begin{bmatrix} N_{II} & N_{IE} \\ N_{EI} & N_{EE} \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi N^{-1} . Tämä käänteismatriisi on

$$\begin{aligned} N^{-1} &= \begin{bmatrix} N_{II}^{-1} + N_{II}^{-1} N_{IE} Q_E N_{EI} N_{II}^{-1} & -N_{II}^{-1} N_{IE} Q_E \\ -Q_E N_{EI} N_{II}^{-1} & Q_E \end{bmatrix}, \\ Q_E &\equiv (N_{EE} - N_{EI} N_{II}^{-1} N_{IE})^{-1}, \end{aligned}$$

mikä voidaan helposti verifioida kertomalla $N \cdot N^{-1} = I$.

Seuraa, että pienimmän neliösumman estimaattoreiden varianssit ovat:

$$\text{Var}(\widehat{\mathbf{x}}_E) = Q_E;$$

$$\text{Var}(\widehat{\mathbf{x}}_I) = N_{II}^{-1} + N_{II}^{-1} N_{IE} Q_E N_{EI} N_{II}^{-1}.$$

Koska N_{II} (ja siis myös N_{II}^{-1}) on blokkidiagonaalimatriisi

$$N_{II} = \begin{bmatrix} A_1^T Q_1^{-1} A_1 & & & \\ & A_2^T Q_2^{-1} A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^T Q_n^{-1} A_n \end{bmatrix},$$

voimme kirjoittaa erikseen jokaiselle paikalliselle blokille $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{\mathbf{x}}_i) &= (A_i^T Q_i^{-1} A_i)^{-1} + (A_i^T Q_i^{-1} A_i)^{-1} N_{iE} Q_E N_{Ei} (A_i^T Q_i^{-1} A_i)^{-1} = \\ &= (A_i^T Q_i^{-1} A_i)^{-1} + (A_i^T Q_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T Q_i^{-1} B_i Q_E B_i^T Q_i^{-1} A_i (A_i^T Q_i^{-1} A_i)^{-1}. \end{aligned}$$

Eri maablokkien $i \neq j$ sisäisten tuntemattomien välille syntyy globaalitason tasoituksen myötä *korrelaatiota*. Kuitenkaan kaikkien kovarianssien $\text{Cov}(\widehat{\mathbf{x}}_i, \widehat{\mathbf{x}}_j)$ laskeminen, vaikkakin mahdollista, on harvoin järkevää tai hyödyllistä. HELMERT-WOLFIN säästö onkin pitkälti siinä, että ne jätetään laskematta.

8.4.3 Käytännön sovellus

Kansainvälisessä yhteistyössä on ollut tapana lähettää *vain* maan i "puskurimatriisit",

$$\left(B_i^T \left(I_i - Q_i^{-1} A_i (A_i^T Q_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T \right) Q_i^{-1} B_i \right)$$

ja

$$\left(B_i^T \left(I_i - Q_i^{-1} A_i (A_i^T Q_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T \right) Q_i^{-1} \ell_i \right),$$

kansainväliselle laskentakeskukselle, joka lähettää puolestaan laskemansa vektori $\widehat{\mathbf{x}}_E$ varianssimatriiseineen Q_E takaisin yksittäisille maille.

HELMERT-WOLF menetelmän suurina etuina on vielä, että

1. kerralla käsiteltävät datamäärät jäävät pieniksi
2. Myös paikallista havainto-aineistoa voidaan testata erikseen ennen sen käyttöä "jumbo-tasoituksessa," ja poistaa niistä mahdolliset karkeat virheet
3. Laskennasta suurin osa eli suuri määrä kansallisia/osavaltioiden/osa-alueiden/eri mittausepookkien osatsoituksia voidaan suorittaa toisista riippumatta, esimerkiksi *rinnakkain*. HELMERT-WOLF on mitä oivallisin rinnakkaisprosessoinnin esimerkki!

8.5 Eteenpäin leikkaus tasossa

8.5.1 Tarkkuus tasossa

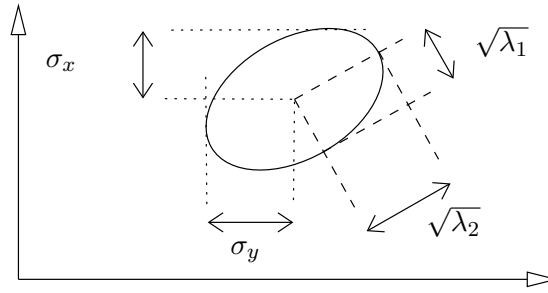
Eteenpäin leikkaus kahdesta tunnetusta pisteestä on hyvä virheiden kasautumisen esimerkki. Se on myös hyvä *optimoinnin* esimerkki, koska tuloksen optimointi voidaan tehdä ainakin kolmella eri tavalla, jotka kaikki kolme ovat eri tavalla järkeviä.

Lähdetään virhe-ellipsistä (kuva 8.1), joka kuvaa pisteen koordinaattien (x, y) määrittystarkkuutta tasossa. Jos vektorin $\widehat{\mathbf{x}} \equiv \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ varianssimatriisi on

$$\Sigma_{\widehat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix},$$

on virhe-ellipsin kaava

$$\widehat{\mathbf{x}}^T \Sigma_{\widehat{\mathbf{x}}}^{-1} \widehat{\mathbf{x}} = 1.$$



Kuva 8.1: Virhe-ellipsin parametrit.

Matriisilla $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ on kaksi *ominaisarvoa*, λ_1 ja λ_2 , jonka neliöjuuret ovat ellipsin pitkä ja lyhyt askelin puolikkaat, ks. kuva.

Virhe-ellipsin kokoa voidaan nyt määrittää seuraavalla eri tavalla:

1. Ympärän, jonka sisälle ellipsi mahtuu, *säde*. Tämä on ilmaisun $Max(\lambda_1, \lambda_2)$ minimointi, eli suurin matriisin ominaisarvo on saatava mahdollisimman pieneksi. Tämä ns. minimax-optimointi vastaa käytännössä ns. *toleranssi*, eli virhe ei saa ylittää ennalta annettua arvoa.
2. *Pistekeskivirhe*, $\sigma_P \equiv \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}$. Varianssimatriisin $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ jälki eli päälävistäjäalkioiden summa. Tämä vastaa myös suorakulman, mihin virhe-ellipsi mahtuu, diagonaalin (“TV-ruudun tuumakoon”) minimointi.
3. Minimoidaan matriisin *determinantti* $\det(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}})$. Tämä vastaa suureen $\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ eli ellipsin *pinta-alan* minimointiin.

8.5.2 Eteenpäinleikkauksen geometria

Olkoon yksinkertaisuuden vuoksi pisteiden A, B koordinaatit $(-1, 0)$ ja $(+1, 0)$. Pisteistä on mitattu *suunnat* pisteeseen P vakiotarkkuudella. Jos pisteen P koordinaatit ovat (x, y) , ovat havaintoyhtälöt:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right),$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right).$$

Linearisoidaan:

$$d\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x+1} dy - \frac{y}{(x+1)^2} dx \right),$$

$$d\beta = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x-1}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x-1} dy - \frac{y}{(x-1)^2} dx \right).$$

Yksinkertaistamisen jälkeen:

$$d\alpha = \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} ((x+1) dy - y dx),$$

$$d\beta = \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} ((x-1) dy - y dx).$$

A -matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} & \frac{-y}{(x+1)^2 + y^2} \\ \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} & \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \cos \alpha & -\frac{1}{a} \sin \alpha \\ \frac{1}{b} \cos \beta & -\frac{1}{b} \sin \beta \end{bmatrix},$$

jossa $a = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ ja $b = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Normaalimatriisi:

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} \left(\frac{\cos \alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos \beta}{b}\right)^2 & -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{a^2} - \frac{\sin \beta \cos \beta}{b^2} \\ -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{a^2} - \frac{\sin \beta \cos \beta}{b^2} & \left(\frac{\sin \alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin \beta}{b}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Determinantti:

$$\begin{aligned} \det N &= \left(\frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{a^4} + \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{a^2 b^2} + \frac{\cos^2 \beta \sin^2 \alpha}{a^2 b^2} + \frac{\cos^2 \beta \sin^2 \beta}{b^4} \right) - \\ &- \left(\frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{a^4} + \frac{\cos^2 \beta \sin^2 \beta}{b^4} + 2 \frac{\sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta}{a^2 b^2} \right) = \\ &= \frac{\cos^2 \beta \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta}{a^2 b^2} = \\ &= \left(\frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{ab} \right)^2 = \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{ab} \right)^2. \end{aligned}$$

Lasketaan käänteismatriisi CRAMÈRIN säännöllä:

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = N^{-1} = \frac{1}{\det N} \begin{bmatrix} \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} & \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{a^2} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{b^2} \\ \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{a^2} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{b^2} & \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin jälki on

$$\begin{aligned} (\Sigma_{\hat{x}\hat{x}})_{11} + (\Sigma_{\hat{x}\hat{x}})_{22} &= \frac{a^2 b^2}{\sin^2(\alpha - \beta)} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} \right) = \\ &= \frac{a^2 b^2}{\sin^2(\alpha - \beta)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{(a^2 + b^2)}{\sin^2(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Tässä vielä $a^2 + b^2 = (x - 1)^2 + (x + 1)^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2 + 1)$.

Geometrisesti:

1. Käyrät $\sin(\alpha - \beta) = \text{vakio}$ ovat *ympyröitä*, jotka menevät pisteiden A ja B kautta.
2. Käyrät $a^2 + b^2 = \text{vakio}$, eli $x^2 + y^2 = \text{vakio}$, ovat *ympyröitä* myös, mutta *origon* $(0, 0)$ *ympäri*.
3. Tästä johtuen arvo $a^2 + b^2 = 2(x^2 + y^2 + 1)$ minimoituu² käyrällä $\sin(\alpha - \beta) = \text{vakio}$, kun $x = 0$.

Johtopäätös:

Optimaalinen piste sijaitsee y -akselilla eli symmetria-akselilla $x = 0$.

8.5.3 Pistekeskivirheen minimointi

Lasketaan vielä, missä. y -akselilla olevalle pisteelle pätee

$$\alpha = \arctan y = 180^\circ - \beta,$$

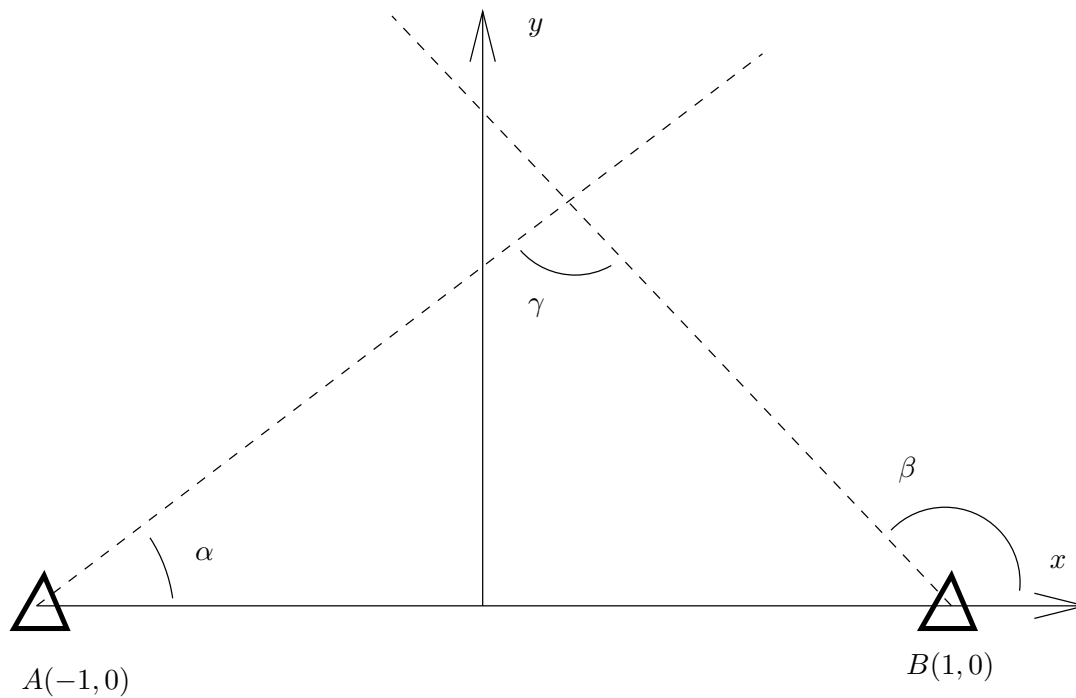
eli

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(2\alpha - 180^\circ) = -\sin 2\alpha.$$

Nyt

$$\begin{aligned} (\Sigma_{\hat{x}\hat{x}})_{11} + (\Sigma_{\hat{x}\hat{x}})_{22} &= \frac{(a^2 + b^2)}{\sin^2(\alpha - \beta)} = \frac{2(y^2 + 1)}{\sin^2 2\alpha} = \frac{2(y^2 + 1)}{(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2} = \\ &= \frac{2(y^2 + 1)}{\left(2 \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}\right)^2} = \frac{(y^2 + 1)^3}{2y^2}. \end{aligned}$$

²Oletus: kulma $\gamma > 90^\circ$. Tulomme näkemään, että tämä pitää paikkansa.



Kuva 8.2: Eteenpäinleikkaus tasolla

Vaadi nyt tämän derivaatta nolllaksi, eli *stationaarinen piste*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{(y^2 + 1)^3}{2y^2} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (y^4 + 3y^2 + 3 + y^{-2}) = \\ &= 2y^3 + 3y - 1y^{-3} = \frac{2y^6 + 3y^4 - 1}{y^3} = 0. \end{aligned}$$

Tämä onnistuu seuraavasti:

$$2y^6 + 3y^4 - 1 = 0$$

MATLAB antaa (*verifioi* sijoittamalla!):

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ y_{3,4} &= \pm i \\ y_{5,6} &= \pm i \end{aligned}$$

Näistä vain reaaliarvoiset kiinnostavat:

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \arctan y = 35^\circ.2644.$$

Silloin $\beta = 180^\circ - 35^\circ.2644 = 144^\circ.7356$ ja $\gamma = 109^\circ.4712$.

Tämä niin vaikeasti saatu tulos on muutenkin mielenkiintoinen: se on juuri timanttikiteessä, tai metaanimolekyylissä, eri atomien välisten kemiallisten sidosten välinen kulma...

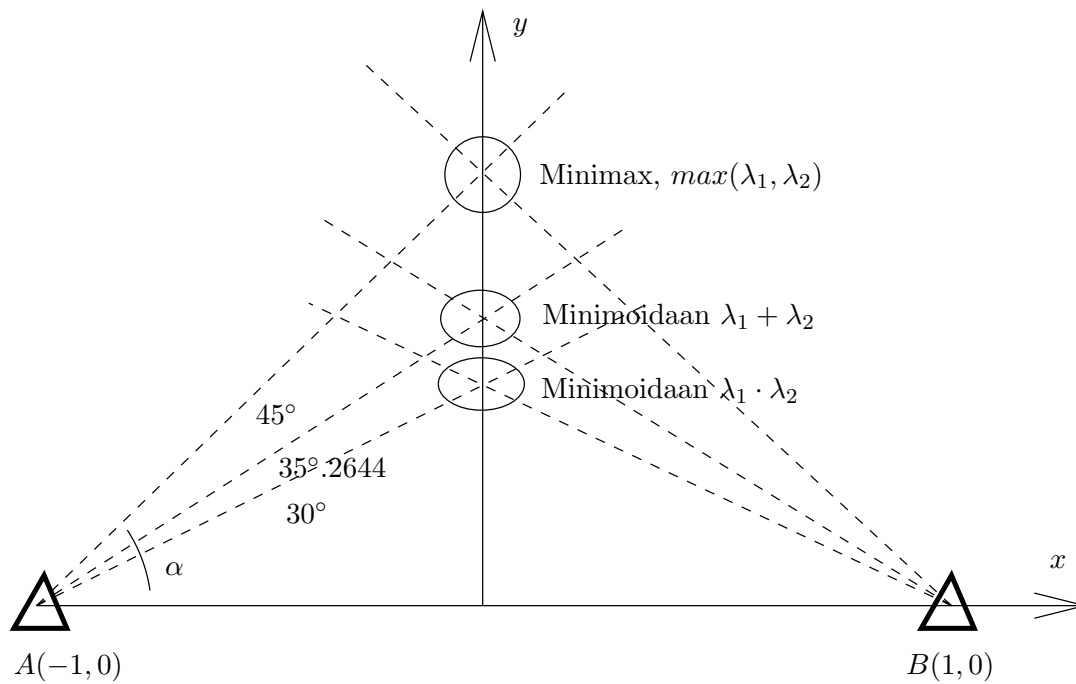
8.5.4 Determinantin minimointi

Vaihtoehtoisesti voimme minimoida $\det(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}})$ (tai sen neliöjuuri), eli $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$:n ominaisarvojen geometrinen keskiarvo, $\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ (kun jäljen minimointi on niiden aritmeettisen keskiarvon $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ minimointi). Silloin lasketaan ensin

$$a^2 b^2 = [(x+1)^2 + y^2] [(x-1)^2 + y^2].$$

Kun $x = 0$ on tämä

$$a^2 b^2 = (y^2 + 1)^2.$$



Kuva 8.3: Kolme eri eteenpäinleikkauksen optimiratkaisua

Silloin on myös, kuten ennen

$$\sin^2(\alpha - \beta) = \sin^2 2\alpha = \left(2 \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}\right)^2$$

ja saadaan lopputulokseksi

$$\det(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}) = \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{ab}\right)^{-2} = \frac{(y^2 + 1)^4}{4y^2},$$

jonka stationaariset pisteet etsitään.

MATLAB³ antaa ratkaisuksi

$$y_{1,2} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

muut ratkaisut ovat imaginaarisia $\pm i$. Tästä $\alpha = \arctan y = 30^\circ$.

8.5.5 “Minimax”-optimointi

Kolmantena vaihtoehtona minimoidaan ominaisarvoista suurin, eli $\max(\lambda_1, \lambda_2)$ minimoidaan. Akselilla $x = 0$ meillä on $a = b$ ja $\sin \alpha \cos \alpha = -\sin \beta \cos \beta$, siis matriisin N muoto on:

$$N = \frac{2}{a^2} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha \end{bmatrix} = \frac{2}{y^2 + 1} \begin{bmatrix} \frac{y^2}{y^2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

Koska $\alpha = \arctan y$, seuraa, että $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}$ ja $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$, ja $a^2 = y^2 + 1$.

Tämän matriisin ominaisarvot ovat siis

$$\mu_1 = \frac{2y^2}{(y^2 + 1)^2}, \quad \mu_2 = \frac{2}{(y^2 + 1)^2}$$

ja käänteismatriisin ominaisarvot

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{2y^2} (y^2 + 1)^2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{2} (y^2 + 1)^2.$$

³Käytä *symbolista laskentaa*. Ensin määritetään funktio $f(y)$, sitten sen derivaatta (*diff*-funktio), ja lopuksi *solve*-funktion avulla sen nollakohdat.

Kun $y = 1$, ne ovat samoja; kun $y > 1$, on λ_2 suurempi ja kasvaa y :n mukaan.

Kun y on välillä $(0, 1)$, on λ_1 suurempi, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(y^2 + 2 + y^{-2}) \Rightarrow \frac{d}{dy}\lambda_1 = y - y^{-3} < 0$, eli λ_1 laskee monotonisesti.

Lopputulos:

optimaalinen arvo on $y = 1$ ja $\alpha = \arctan 1 = 45^\circ$.

8.6 Harjoitukset

- Johda vastavat kaavat kuin osiossa 8.5 siinä tapauksessa, että suoritetaan pisteistä A ja B etäisyysmittauksia, joiden tarkkuus ei riipu etäisyydestä.
- Näytä, että jos matriisin N ominaisarvot ovat lähellä toisiaan, eli

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_0 + \Delta\lambda_1, \\ \lambda_2 &= \lambda_0 + \Delta\lambda_2, \\ &\dots \\ \lambda_n &= \lambda_0 + \Delta\lambda_n,\end{aligned}$$

jossa $\Delta\lambda_i$ ovat pieniä λ_0 verrattuna, silloin

$$(\det N)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \text{Tr}(N).$$

[Vihje: käytä binomiaaliekspansio $(1+x)^y \approx 1+yx+\dots$]

Eli tässä tapauksessa *determinantin minimointi on samanarvoinen jäljen minimoinnin kanssa.*

- [Haastava.] Näytä, että kun kolmiulotteisessa avaruudessa mitataan pisteen P etäisyyttä

$$s = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2}$$

kolmesta tunnetusta pisteestä A , B ja C , on optimaalinen geometria se, jossa kolme suuntaa PA , PB ja PC ovat keskenään kohtisuoria, eli $PA \perp PB \perp PC$. Oletus on, että mittaukset kaikesta kolmesta pisteestä ovat yhtä tarkkoja ja etäisyydestä riippumattomia.

[Vihje: kirjoita 3×3 rakennematriisi joka koostuu kolmesta yksikkövektorista, ja maksimoi sen determinantti eli (geometris-intuitiivisesti) näiden vektoreiden virittämää tilavuutta. $\det(N^{-1}) = (\det A)^{-2}$ eli tämä minimoi $Q_{\hat{x}\hat{x}}$:n determinantti]

- [Haastava.] Näytä, että kun tasossa mitataan aluksen A pseudoetäisyyttä (DECCA-järjestelmä!)

$$\rho = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} + c\Delta T_A,$$

kolmesta pisteestä M , R , G (Master, Red Slave, Green Slave), optimaalinen geometria on se, jossa suuntien AM , AR , AG väliset kulmat ovat 120° .

Kaavassa ΔT_A on aluksen A kellotuntematon.

[Vihje: kirjoita 3×3 rakennematriisi; muista, että ΔT -kin on tuntematon. Sen jälkeen kuten edellisessä.]

Luku 9

Kalman-suodatin

Kirjallisuus:

Kallio [1998b, s. 62-66, 154-155]

Strang and Borre [1997, s. 543-584]

Leick [1995, s. 115-130]

Cooper [1987, s. 215-223]

Mikhail and Ackermann [1976, s. 333-392]

Kalman-suodatin on lineaarinen, prediktiivinen suodatin. Kuten kahvisuodatin suodattaa kahvia porosta, Kalman-suodatin suodattaa signaali (ns. *state vector*, tilavektori) havaintoprosessin kohinasta.

Kalman-suodattimen keksijät olivat Rudolf KALMAN ja Richard BUCY vuosina 1960-1961 (Kalman [1960]; Kalman and Bucy [1961]). Keksintö käytettiin laajasti avaruusohjelmassa (rendez-vous!) sekä ohjusten ohjausjärjestelmien yhteydessä. Kuitenkin Kalman-suodatin on yleispätevä ja on käytetty paitsi navigaatioissa myös taloustieteessä, säätieteessä mm.

Kalman-suodatin koostuu kahdesta osasta:

1. Dynaaminen malli; se kuvaa liikeprosessia, jonka mukaan *tilavektori* kehittyy ajassa.
2. Havaintomalli; se kuvaa prosessi millä saadaan havaintosuureet jotka kertovat jotain havaintohetken tilavektorista.

Kalman-suodattimelle erikoinen on se, että tilavektori kehittyy eteenpäin ajassa askel kerrallaan; myös havainnot käytetään tilavektorin korjaamiseksi vain itse havaintohetkellä. Tästä syystä Kalman-suodatin ei vaadi suurta laskentatehoa eikä käsittele suuria matriiseja. Sitä voidaan käyttää kulkuneuvon sisällä ja tosiaikaisesti.

9.1 Dynaaminen malli

Dynaaminen malli on lineaarisessa tapauksessa seuraavan näköinen:

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = F\underline{x} + \underline{n}, \quad (9.1)$$

missä \underline{x} on tilavektori, \underline{n} on dynaaminen kohina (eli, kuinka epätarkasti yllä olevat liikeyhtälöt pitävät paikkansa) ja F on kerroinmatriisi.

Tilavektorin \underline{x} tietyllä hetkellä käytettävissä olevan estimaattorin \hat{x} *varianssimatriisi* voidaan kutsua Q tai $Q_{\hat{x}\hat{x}}$. Se kuvaa siis todennäköinen poikkeama todellisen tilan \underline{x} ja estimoidun tilan \hat{x} välillä. Kohinavektori \underline{n} yllä olevassa kaavassa kuvaa, kuinka epätarkasti liikeyhtälöt eli dynaaminen malli *tosiasiassa* pitävät paikkansa, esim. satelliittiliikkeen tapauksessa vaihteleva ilmakedän vastuksen vaikutus. Suuri dynaaminen kohina \underline{n} merkitsee $Q_{\hat{x}\hat{x}}$:n nopea paisuminen aikaa myöten. Sen saa taas pienennetyksi tehtävien *havaintojen* ja niiden avulla suoritettujen *tilapäivityksien* avulla.

9.2 Tilapropagaatio ajassa

Itse tilavektorin *estimaattorin* laskennallinen propagaatio ajassa on yksinkertainen (ilman kohinaa):

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = F\hat{x}.$$

Vastaavassa diskreettissä tapauksessa:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_1) = \Phi_0^1 \hat{\mathbf{x}}(t_0),$$

jossa (olettaen, että F on vakio¹)²

$$\Phi_0^1 = e^{F(t_1-t_0)},$$

kerroinmatriisiin ajan $[t_0, t_1)$ yli integroitu, diskreetti versio.

Jos \underline{n} :n varianssimatriisi (tarkemmin: $\underline{n}(t)$:n autokovarianssifunktio) kutsutaan N , voidaan kirjoittaa myös varianssimatriisin diskreetti propagaatiokaava:

$$Q(t_1) = (\Phi_0^1) Q(t_0) (\Phi_0^1)^T + \int_{t_0}^{t_1} N(t) dt.$$

Tässä on oletettu, että $\underline{n}(t)$ on luonteeltaan *valkoinen kohina*. Tämän kaavan todistus on vaikea.

9.3 Havaintomalli

Tilavektorin kehitys ajassa ei ole kovin mielenkiintoista, ellei vektoria voitaisiin *havaita* jollain tavalla. Havaintomalli on seuraava:

$$\underline{\ell} = H\underline{x} + \underline{m},$$

missä $\underline{\ell}$ on havaintosuure (vektori), \underline{x} on tilavektori (“oikea arvo”) ja \underline{m} on havaintoprosessin kohina. H on *havaintomatriisi*. Kohinan varianssina on annettu varianssimatriisi R ; $E\{\underline{m}\} = 0$ ja $E\{\underline{m} \underline{m}^T\} = R$.

9.4 Päivitystapahtuma

Päivitys on uuden havaintotiedon optimaalisesti hyväksikäyttäminen. Se tehdään näin, että ero *a priori* tilavektorista $\hat{\mathbf{x}}_i$ lasketun havaintosuureen arvon $\underline{\ell}_i = H\hat{\mathbf{x}}_i$ ja tosiasiallisesti havaitun havaintosuureen $\underline{\ell}_i$ välillä käytetään *sulkuvirheenä* jota yritetään *tasoiittaa pois* optimaalisesti, pienimmän neliösumman periaatteen mukaan.

Konstruoidaan parannettu estimaattori

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_i + K(\underline{\ell}_i - H_i \hat{\mathbf{x}}_i).$$

Tässä $\hat{\mathbf{x}}_{i+1}$ on tilavektorin estimaattori havainnon i jälkeen eli *a posteriori*. Kuitenkin seuraavan havainnon $i+1$ suhteen se on taas *a priori*. Matriisi K kutsutaan Kalmanin “gain matrix”.

“Optimaalinen” ratkaisu saadaan valitsemalla

$$K = QH^T (HQH^T + R)^{-1},$$

joka antaa ratkaisuksi

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_i + Q_i H_i^T (H_i Q_i H_i^T + R)^{-1} (\underline{\ell}_i - H_i \hat{\mathbf{x}}_i).$$

Tilavarianssien päivitys tehdään seuraavasti:

$$Q_{i+1} = Q_i - Q_i H_i^T (H_i Q_i H_i^T + R)^{-1} H_i Q_i = (I - K_i H_i) Q_i,$$

ilman todistusta.

¹Jos F ei ole vakio, kirjoitetaan

$$\Phi_0^1 = \exp \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt.$$

²Neliön muotoisen matriisin eksponenttifunktion määritelmä on sama kuin numeron eksponenttifunktio: kuten $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$, meillä on myös $e^A = 1 + A + \frac{1}{2}A \cdot A + \frac{1}{6}A \cdot A \cdot A + \dots$

9.5 Sekventiaalinen tasoitus

Sekventiaalinen tasoitus on Kalman-suodatin sovellettu tapaukseen jossa estimoitava tilavektori (eli tuntemattomien vektori) ei ole ajasta riippuvainen. Tässä tapauksessa kaavat yksinkertaistuvat, mutta Kalman-formalismin käyttö voi kuitenkin olla edullinen, koska se mahdollistaa uuden informaation lisääminen ratkaisuun heti kun se tulee käytettäväksi. Myös verkkotasoituksessa joskus sovelletaan eri havaintojen ryhmät peräkkäin, mikä helpottaa mahdollisten virheiden löytäminen. Koordinaatit ovat tässä tapauksessa aikariippumattomia tilavektorin alkioita.

Dynaaminen malli tässä tapauksessa on

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = 0,$$

eli $F = 0$ ja $\underline{u} = 0$. Ei ole dynaamista kohinaa.

Löytyy myös sovelluksia, jossa osa tilavektorin alkioista ovat vakioita, osa taas ajassa muuttuvia. Esim. satelliittigeodesiassa maa-asemien koordinaatit ovat (lähes) vakioita, kun satelliittien rata-elementit muuttuvat ajassa.

9.5.1 Sekventiaalinen tasoitus ja normaalilyhtälöiden pinotus

Voimme kirjoittaa Kalman-suodattimen päivitysaskel myös parametriseena tasoitustehtävänä.

”Havaintoina” ovat oikea havaintovektori $\underline{\ell}_i$ ja *a priori* estimoitu tilavektori $\hat{\underline{x}}_i$. Havaintoyhtälöt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\ell}_i \\ \hat{\underline{x}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{v}_i \\ \underline{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i \\ I \end{bmatrix} [\hat{\underline{x}}_{i+1}].$$

Tässä rakennematriisi on

$$\tilde{A} \equiv \begin{bmatrix} H_i \\ I \end{bmatrix}.$$

”Havaintojen” varianssimatriisi on

$$\tilde{Q} \equiv \text{Var} \left(\begin{bmatrix} \underline{\ell}_i & \hat{\underline{x}}_i \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix},$$

ja saamme rakaisuksi

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_{i+1} &= \left[\tilde{A}^T \tilde{Q}^{-1} \tilde{A} \right]^{-1} \tilde{A}^T \tilde{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\ell}_i \\ \hat{\underline{x}}_i \end{bmatrix} = \\ &= \left[H_i^T R_i^{-1} H_i + Q_i^{-1} \right]^{-1} \left[H_i^T R_i^{-1} \underline{\ell}_i + Q_i^{-1} \hat{\underline{x}}_i \right]. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Varianssiksi saadaan

$$Q_{i+1} = \left[H_i^T R_i^{-1} H_i + Q_i^{-1} \right]^{-1}. \quad (9.3)$$

Ks. [Kallio \[1998b, ss. 63-64\]](#).

Nyt käytetään hyväksi liitteessä [A](#) johdettu toinen kaava:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

Tällä tavalla:

$$\left[H_i^T R_i^{-1} H_i + Q_i^{-1} \right]^{-1} = Q_i - Q_i H^T (R_i + H_i Q_i H_i^T)^{-1} H_i Q_i.$$

Sijoitus antaa

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_{i+1} &= \left[Q_i - Q_i H^T (R_i + H_i Q_i H_i^T)^{-1} H_i Q_i \right] \left[H_i^T R_i^{-1} \underline{\ell}_i + Q_i^{-1} \hat{\underline{x}}_i \right] = \\ &= \left[I - Q_i H^T (R_i + H_i Q_i H_i^T)^{-1} H_i \right] \left[Q_i H_i^T R_i^{-1} \underline{\ell}_i + \hat{\underline{x}}_i \right] = \\ &= \left[Q_i H_i^T R_i^{-1} \underline{\ell}_i + \hat{\underline{x}}_i \right] - Q_i H^T (R_i + H_i Q_i H_i^T)^{-1} \left[H_i Q_i H_i^T R_i^{-1} \underline{\ell}_i + H_i \hat{\underline{x}}_i \right] \\ &= \hat{\underline{x}}_i + Q_i H_i^T R_i^{-1} \underline{\ell}_i - Q_i H^T (R_i + H_i Q_i H_i^T)^{-1} (H_i Q_i H_i^T + R_i) R_i^{-1} \underline{\ell}_i + \\ &\quad + Q_i H^T (R_i + H_i Q_i H_i^T)^{-1} R_i R_i^{-1} \underline{\ell}_i - Q_i H^T (R_i + H_i Q_i H_i^T)^{-1} H_i \hat{\underline{x}}_i = \\ &= \hat{\underline{x}}_i + Q_i H^T (R_i + H_i Q_i H_i^T)^{-1} \left[\underline{\ell}_i - H_i \hat{\underline{x}}_i \right], \end{aligned} \quad (9.4)$$

ja

$$Q_{i+1} = Q_i - Q_i H^T (R_i + H_i Q_i H_i^T)^{-1} H_i Q_i. \quad (9.5)$$

Kaavat 9.4 ja 9.5 ovat juuri Kalman-suodattimen päivityskaavat. Verrattuna kaavoihin 9.2 ja 9.3 on invertoitava matriisi havaintosuorien vektorin $\underline{\ell}$ kokoinen eikä tilavektorin \underline{x} kokoinen. Usein matriisin koko on jopa 1×1 eli se on pelkkä luku³. Nopea käänteismatriisin laskeminen tekee tosiaikaiset sovellukset helpoimmiksi.

Edellisestä näkyy, että sekventiaalinen tasoitus on sama kuin KALMAN-suodatus siinä tapauksessa, että tilavektori on vakio. Vaikka laskentamenetelmä tasoituksessa yleensä on parametrinen tasoitus (havaintoyhtälöt) kun KALMANIN tapauksessa käytetään ehtoyhtälötasoitusta.

9.6 Kalman “kahdesta päästä”

Jos on käytettävissä havainnot $\underline{\ell}_i$, $i = 1, \dots, n$ ja funktionaalinen malli on differentiaaliyhtälöryhmä

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = F \mathbf{x}$$

(ilman dynaamista kohinaa \underline{n}), silloin voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{x}(t_i) = \Phi_0^i \mathbf{x}(t_0),$$

jossa Φ_0^i on laskettavissa oleva tilansiirtomatriisi. Näin havaintoyhtälöt voidaan kirjoittaa

$$\underline{\ell}_i + \underline{v}_i = H_i \mathbf{x}(t_i) = H_i \Phi_0^i \mathbf{x}(t_0),$$

perinteinen havaintoyhtälöryhmä, jossa rakennematriisi on

$$A = \begin{bmatrix} H_0 \\ \vdots \\ H_i \Phi_0^i \\ \vdots \\ H_n \Phi_0^n \end{bmatrix}$$

ja tuntemattomat $\mathbf{x}(t_0)$.

Tästä näkyy, että pienimmän neliösumman ratkaisu voidaan saada tasoitustehtävää ratkaisemalla.

Kuten luvussa 8.3 näytettiin, voimme jakaa havainnot esimerkiksi kahteen osaan:

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_b \\ \underline{\ell}_a \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_b \\ A_a \end{bmatrix}$$

ja muodostaa erilliset normaaliyhtälöt:

$$\begin{aligned} [A_b^T Q_b^{-1} A_b] \hat{\mathbf{x}}_b &= A_b^T Q_b^{-1} \underline{\ell}_b, \\ Q_{xx,b} &= [A_b^T Q_b^{-1} A_b]^{-1}, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} [A_a^T Q_a^{-1} A_a] \hat{\mathbf{x}}_a &= A_a^T Q_a^{-1} \underline{\ell}_a, \\ Q_{xx,a} &= [A_a^T Q_a^{-1} A_a]^{-1}. \end{aligned}$$

Ne erillisratkaisut (b = ennen, a = jälkeen) voidaan nyt “pinota” tai yhdistää:

$$[A_b^T Q_b^{-1} A_b + A_a^T Q_a^{-1} A_a] \hat{\mathbf{x}} = [A_b^T Q_b^{-1} \underline{\ell}_b + A_a^T Q_a^{-1} \underline{\ell}_a],$$

alkuperäinen kokonainen normaaliyhtälöryhmä, sekä

$$Q_{xx} = [Q_{xx,b}^{-1} + Q_{xx,a}^{-1}]^{-1} = [A_b^T Q_b^{-1} A_b + A_a^T Q_a^{-1} A_a]^{-1},$$

kokonaistasoituksen ratkaisun varianssimatriisi.

Tärkeä huomautus tässä nyt on, että osittaiset tehtävät — “ennen” ja “jälkeen” — voidaan ratkaista myös Kalman-suodattimen avulla! Eli, me voimme, mielivaltaisen havainto-ajan t_i tapauksessa, laskea erikseen

³... tai se on redukoitavissa sellaiseksi, jos yhden epookin havainnot ovat tilastollisesti riippumattomia toisistaan. Silloin ne voidaan käsitellä muodollisesti sekventiaalisesti eli erikseen.

1. Kalman-suodattimen ratkaisu alkuketkestä t_0 eteenpäin, integroimalla dynaaminen malli ja päivittämällä tilavektori ja sen varianssimatriisi havaintojen $0, \dots, i$ avulla, ja
2. Kalman-suodattimen ratkaisu loppuketkestä t_n taaksepäin ajassa integroimalla dynaaminen malli, päivittämällä tilavektori ja varianssimatriisi havaintojen $n, \downarrow, i + 1$ avulla (käänteisessä järjestyksessä).
3. Yhdistämällä saadut osaratkaisut kokonaisratkaisuksi yo. kaavojen avulla.

Näin voidaan hyödyntää KALMAN-menetelmän edut myös jälkilaskentatilanteessa.

9.7 Harjoitukset

Olkoon x tuntematon vakio, jota yritetään estimoida. x on havaittu hetkellä 1, havaintoarvo 7, keskivirhe ± 2 , ja hetkellä 2, havaintoarvo 5, keskivirhe ± 1 .

1. Formuloi tavallisen tasoitustehtävän havaintoyhtälöt ja havaintovektorin varianssimatriisi. Laske \hat{x} .

$$\underline{\ell} + \underline{v} = A\hat{x}$$

jossa $\ell = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $Q_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Silloin

$$\begin{aligned} \hat{x} &= [A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A]^{-1} A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \underline{\ell} = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{27}{5} = 5.4. \end{aligned}$$

Varianssimatriisi:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = [A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A]^{-1} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

Kirjoita tämän esimerkin Kalman-suodattimen dynaamiset yhtälöt. Muista, että x on vakio.

Vastaus:

Yleinen dynaaminen yhtälö voidaan kirjoittaa diskreettisessä tapauksessa

$$\underline{x}_{i+1} = \Phi \underline{x}_i + \underline{w}$$

jossa $\Phi = I$ (yksikkömatriisi) ja $\underline{w} = 0$ (deterministinen liike, dynaaminen kohina olematon). Näin saadaan

$$x_{i+1} = x_i.$$

Vaihtoehtoisesti kirjoitetaan differentiaaliyhtälö:

$$\frac{dx}{dt} = Fx + n$$

Taas meidän esimerkkitapauksessa:

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

ei dynaamista kohinaa: $n = 0$.

2. Kirjoita tämän esimerkin Kalman-suodattimen päivitysyhtälöt:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{i-1} + K_i (\underline{\ell}_i - H_i \hat{x}_{i-1})$$

ja

$$Q_{\hat{x}\hat{x},i} = [I - K_i H_i] Q_{\hat{x}\hat{x},i-1},$$

jossa hyötymatriisi

$$K_i = Q_{\hat{x}\hat{x},i-1} H_i^T (Q_{\ell\ell,i} + H_i^T Q_{\hat{x}\hat{x},i-1} H_i)^{-1}.$$

(siis minkä näköisiä ovat tässä tapauksessa H - ja K -matriisit?)

Vastaus:

Koska tässä tapauksessa havainto $\ell_i = x_i$ (eli tilaa havaitaan suoraan) on $H_i = [1]$, eli 1×1 matriisi jonka ainoa elementti on 1.

$$K = \frac{Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}}{Q_{\ell\ell} + Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}}.$$

Jos alkuperäinen $Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}$ on suuri, on $K \sim 1$.

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \hat{x}_{i-1} + \frac{Q_{\hat{x}\hat{x}}}{Q_{\ell\ell} + Q_{\hat{x}\hat{x}}} (\ell_i - \hat{x}_{i-1}) = \\ &= \frac{Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}}{Q_{\ell\ell,i} + Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}} \ell_i + \frac{Q_{\ell\ell,i}}{Q_{\ell\ell,i} + Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}} \hat{x}_{i-1} = \frac{Q_{\hat{x}\hat{x},i-1} \ell_i + Q_{\ell\ell,i} \hat{x}_{i-1}}{Q_{\ell\ell,i} + Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}}. \end{aligned}$$

Eli: *a posteriori* tila \hat{x}_i on *a priori* tilan \hat{x}_{i-1} ja havainnon ℓ_i painotettu keskiarvo.

$$Q_{\hat{x}\hat{x},i} = [1 - K] Q_{\hat{x}\hat{x},i-1} = \frac{Q_{\ell\ell,i}}{Q_{\ell\ell,i} + Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}} Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}.$$

Eli: miten huonompaa on *a priori* tilan varianssi $Q_{\hat{x}\hat{x},i-1}$ havaintotarkkuuden $Q_{\ell\ell,i}$ verrattuna, sitä enemmän päivitetty tilavarianssi $Q_{\hat{x}\hat{x},i}$ paranee.

3. Laske manuaalisesti läpi molemmat Kalman-havaintotapahtumat ja anna sen jälkeinen tila-arvio \hat{x}_1 ja sen varianssimatriisi. Tilasuureen x alkuarvioksi saa ottaa 0 ja sen varianssimatriisin alkuarvoksi "numeerisesti ääretön":

$$Q_0 = [100].$$

Vastaus:

Ensimmäinen askel:

$$K_1 = 100 (4 + 100)^{-1} = \frac{100}{104}.$$

siis

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= 0 + \frac{100}{104} (7 - 0) = 6.73 \\ Q_1 &= \left[1 - \frac{100}{104} \right] 100 = \frac{400}{104} = 3.85. \end{aligned}$$

Toinen askel:

$$K_2 = 3.85 (1 + 3.85)^{-1} = 0.79.$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &= 6.73 + 0.79 (5 - 6.73) = \\ &= 6.73 - 0.79 \cdot 1.73 = \\ &= 5.36. \end{aligned}$$

$$Q_2 = [1 - 0.79] \cdot 3.85 = 0.81.$$

Luku 10

Approksimaatio, interpolaatio, estimaatio

10.1 Käsitteet

Approksimaatio on se, että yritetään löytää funktio, joka on tietyssä mielessä “mahdollisimman lähellä” annettua funktiota. Esim. vertausellipsoidi, joka on mahdollisimman lähellä geoidia eli keskimerenpintaa

Usein käytetty sääntö on *neliöintegraalisääntö*: jos funktion argumentti on $x \in D$, minimoidaan integraali

$$\int_D (\Delta f(x))^2 dx,$$

jossa

$$\Delta f(x) = \bar{f}(x) - f(x),$$

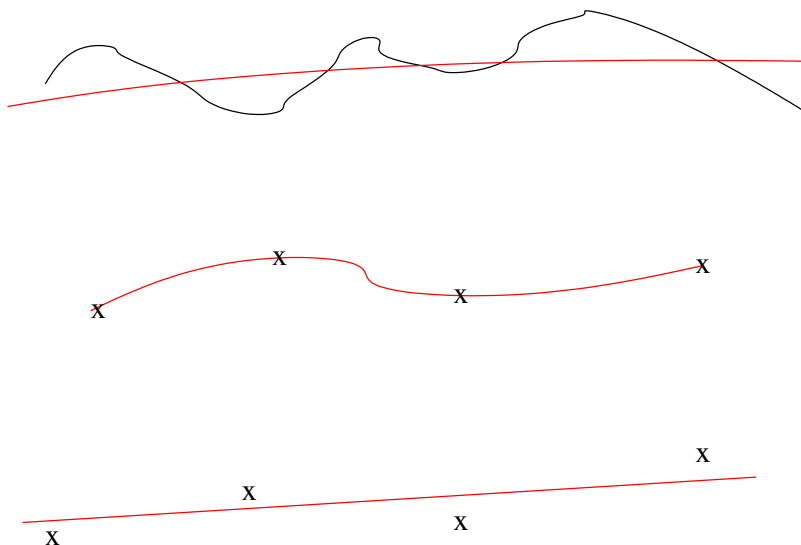
funktion $f(x)$ ja sen approksimaation $\bar{f}(x)$ välinen ero. Tässä D on funktion *domeeni*.

Interpolaatio on se, että yritetään löytää funktio, joka kuvaa annettuja datapisteitä sillä tavalla, että funktion arvot *reprodusoivat* annettuja datapisteitä. Tämä merkitsee se, että funktiota kuvaavien parametrien määrä on oltava sama kuin annettujen pisteiden määrä.

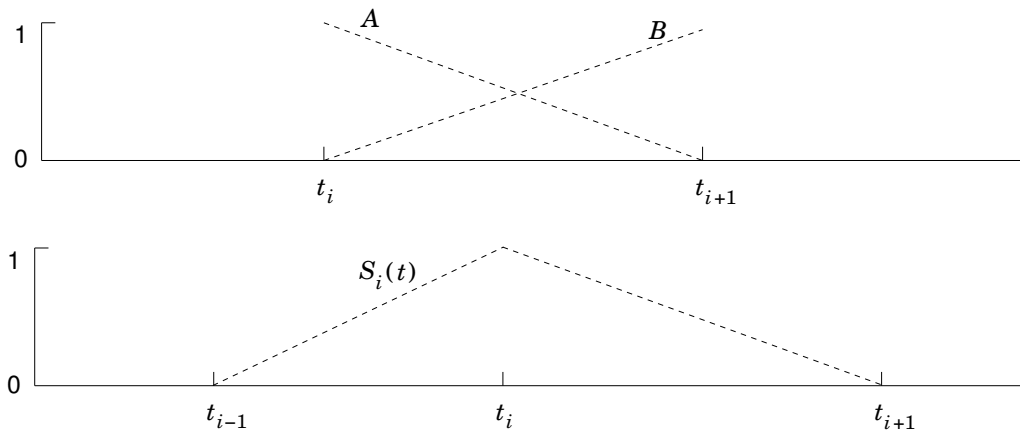
Estimaatio on se, että yritetään löytää funktio, joka on mahdollisimman lähellä annettuja datapisteitä. Funktiota kuvaavien parametrien määrä on pienempi kuin datapisteiden määrä, esim. lineaariregressiossa parametrien määrä on kaksi kun datapisteiden määrä voi olla hyvinkin suuri.

“Mahdollisimman lähellä” tulkitaan yleensä — muttei aina! — pienimmän neliösumman mielessä. Vaihtoehtoiset tulkintatavat voivat olla

- o Minimax-sääntö: suurin esiintyvä jäännösvirhe minimoidaan
- o $L1$ -sääntö: jäännösvirheiden itseisarvojen summa minimoidaan.



Kuva 10.1: Approksimaatio (ylh.), interpolaatio (kesk.) ja estimaatio (alh.)



Kuva 10.2: Lineaarinen spline

10.2 Spline-interpolaatio

Perinteisesti “spline” on taipuisa puulatta eli viivoitin, jollaisia laivanrakentajat käyttivät sileän käyrän luomiseksi. http://en.wikipedia.org/wiki/Flat_spline.

Nykyisin spline on matemaattinen funktio jolla on samanlaisia ominaisuuksia. Sileyksensä minimoi taivutuksen sisältämän energiamäärän. Funktiota käytetään interpoloimiseksi annettujen tukipisteiden välillä. Jokaisen vierekkäisten pisteiden parin välillä on yksi polynomi, jonka arvo (ja mahdollisesti derivaattojen arvot) on sama kuin viereisen välin polynomin arvo. Eli voidaan puhua *pätkittäisestä polynomi-interpoloinnista*. Jos tukipisteet ovat $(x_i, t_i), i = 1, \dots, n$, pätee spline-funktiolle f , että $f(t_i) = x(t_i)$, *reprodusoiva* ominaisuus.

On olemassa seuraavat spline-tyypit:

- Lineaarinen: pisteet yhdistetään suorilla viivoilla. Pätkittäin lineaarinen interpolointi. Funktio on jatkuva muttei differentioitavaa
- Kvadraattinen: pisteiden välille laitetaan *paraboleja*. Sekä itse funktio että sen ensimmäinen derivaatta ovat jatkuvia tukipisteissä
- Kuutiollinen, ns. *cubic splines*. Nämä ovat kaiken tavallisimpia¹. Itse funktio ja sen ensimmäiset ja toiset derivaatat ovat jatkuvia tukipisteissä
- Korkeamman asteluvun splinet.

10.2.1 Lineaariset splinet

Lineaariset splinet määritetään seuraavalla tavalla: olkoon funktio annettuna muotoon

$$f_i = f(t_i), i = 1, \dots, N,$$

jossa N on tukipisteiden määrä. Nyt välillä $[t_i, t_{i+1}]$ funktiota $f(t)$ voidaan approksimoida lineaarisella interpolaatiolla

$$\bar{f}(t) = A_i(t) f_i + B_i(t) f_{i+1},$$

jossa

$$A_i(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \quad B_i(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}.$$

Funktio $A_i(t)$ on lineaarinen t :n funktio, jonka arvo on 1 pisteessä t_i ja 0 pisteessä t_{i+1} . Funktio $B_i(t) = 1 - A_i(t)$ taas on 0 pisteessä t_i ja 1 pisteessä t_{i+1} .

Ks. kuva 10.2. Jos nyt määritetään koko väliin $[t_1, t_N]$ funktiot

$$S_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{jos } t < t_{i-1} \\ B_{i-1} = \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} & \text{jos } t_{i-1} < t < t_i \\ A_i = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} & \text{jos } t_i < t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jos } t > t_{i+1} \end{cases},$$

¹Kuutiollisia splinejä käytetään myös tietokonetyppografiassa merkkien muotojen kuvaamiseksi, ns. BÉZIER-käyrät.

jonka kuvaaja on myös piirretty (kuva 10.2 alempana). Tietysti jos i on reunapiste, jää tästä “pyramidifunktiosta” puolet pois.

Nyt voidaan kirjoittaa funktion $f(t)$ approksimaatioksi:

$$\bar{f}(t) = \sum_{i=1}^N f_i S_i(t),$$

pätkittäin lineaarinen funktio.

10.2.2 Kuutiolliset splinet

Ks. <http://mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html>.

Olkoon annettuna taas arvot

$$f_i = f(t_i).$$

Välillä $[t_i, t_{i+1}]$ approksimoidaan funktiota $f(t)$ taas funktiolla

$$\bar{f}(t) = A_i(t) f_i + B_i(t) f_{i+1} + C_i(t) g_i + D_i(t) g_{i+1}, \quad (10.1)$$

jossa g_i :stä puhutaan vielä, ja

$$C_i = \frac{1}{6} (A_i^3 - A_i) (t_{i+1} - t_i)^2 \quad D_i = \frac{1}{6} (B_i^3 - B_i) (t_{i+1} - t_i)^2.$$

Nähdään heti, että $A_i^3 - A_i = B_i^3 - B_i = 0$ sekä pisteessä t_i että pisteessä t_{i+1} (koska sekä A_i että B_i on joko 0 tai 1 kummassakin pisteessä). Siis edelleen

$$\bar{f}(t_i) = f(t_i)$$

tukipisteissä.

Arvot g_i , $i = 1, \dots, N$ kiinnitetään vaatimalla funktion $\bar{f}(t)$ toisen derivaatan jatkuvaksi kaikissa tukipisteissä, ja nolla² päätepisteissä 1 ja N . Derivoidaan kaava (10.1):

$$\bar{f}''(t) = f_i \frac{d^2 A_i(t)}{dt^2} + f_{i+1} \frac{d^2 B_i(t)}{dt^2} + g_i \frac{d^2 C_i(t)}{dt^2} + g_{i+1} \frac{d^2 D_i(t)}{dt^2}.$$

Tässä ilmeisesti ensimmäiset kaksi termiä oikealla puolella häviävät, koska sekä A_i että B_i ovat lineaarisia t :n funktioita. Saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 C_i(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} A_i^2(t) \frac{dA_i}{dt} - \frac{1}{6} \frac{dA_i}{dt} \right] (t_{i+1} - t_i)^2 = \\ &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} A_i^2(t) - \frac{1}{6} \right] (t_{i+1} - t_i) = \\ &= +A_i(t). \end{aligned}$$

Samoin

$$\frac{d^2 D_i(t)}{dt^2} = B_i(t),$$

ja saadaan

$$\bar{f}''(t) = A_i(t) g_i + B_i(t) g_{i+1}.$$

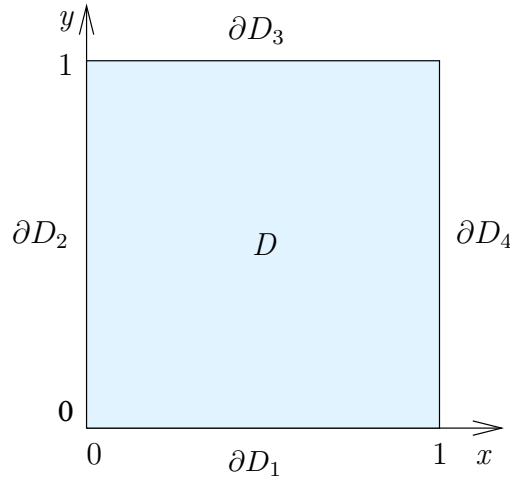
Siis parametrit g_i ovat kakkosderivaatteja tukipisteessä!

$$g_i = \bar{f}''(t_i).$$

Nyt jatkuvuusehdot. Ensimmäinen derivaatta on

$$\begin{aligned} \bar{f}'(t) &= f_i \frac{dA_i}{dt} + f_{i+1} \frac{dB_i}{dt} + g_i \frac{dC_i}{dt} + g_{i+1} \frac{dD_i}{dt} = \\ &= f_i \frac{-1}{t_{i+1} - t_i} + f_{i+1} \frac{+1}{t_{i+1} - t_i} \\ &\quad - g_i \left[\frac{1}{2} A_i^2 - \frac{1}{6} \right] (t_{i+1} - t_i) + \\ &\quad + g_{i+1} \left[\frac{1}{2} B_i^2 - \frac{1}{6} \right] (t_{i+1} - t_i) = \\ &= \frac{f_{i+1} - f_i}{t_{i+1} - t_i} + (t_{i+1} - t_i) \left(-g_i \left[\frac{1}{2} A_i^2 - \frac{1}{6} \right] + g_{i+1} \left[\frac{1}{2} B_i^2 - \frac{1}{6} \right] \right). \end{aligned}$$

²Vaihtoehtoja: annettuja (kiinteitä) arvoja, jatkuvuusehto $f''(t_N) = f''(t_1), \dots$



Kuva 10.3: Yksinkertainen domeeni

Eli yksikön kokoinen neliö tasossa. Domeenin reunaa voidaan kutsua ∂D ja se koostuu neljästä osasta $\partial D_1 \dots \partial D_4$, ks. kuva.

Olkoon nyt g reaaliarvoinen funktio D :llä. Tehtävänä on löytää funktio $u(x, y)$ eli *ratkaisu*, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. Kahdesti differentioitava D :llä. Kutsutaan kaikkien sellaisten funktioiden joukko nimellä V .
2. $u_{xx} + u_{yy} = g$ domeenillä D
3. *Periodiset* reunaehdot, ts.
 - a) $u(x, y) = u(x + 1, y)$ ja
 - b) $u(x, y) = u(x, y + 1)$.

Tätä voidaan visualisoida rullaamalla D kokoon *torukseksi*, eli toruksen topologia.

Ilmaisu

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

kutsutaan usein Δu :ksi, jossa delta-operaattori

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

kutsutaan LAPLACE-operaattoriksi kahdessa ulottuvuudessa. Esim. gravitaatiokenttää tyhjiössä tai kokoonpuristumatonta nesteen virtausta voidaan kuvata

$$\Delta u = 0$$

avulla.

Esimerkimme tapauksessa

$$\Delta u = g,$$

ja g kutsutaan *lähdefunktioksi*, esim. gravitaatiokentän tapauksessa $4\pi G\rho$, jossa G on NEWTONin gravitaatiovakio ja ρ aineen tiheys.

10.3.2 Tehtävän “heikko” formulaatio

Tehtävä $\Delta u = g$ voidaan formuloida myös seuraavaan muotoon. Olkoon ϕ *funktionaali* V :ssä — siis kuvaus, joka tuottaa jokaiselle *funktiolle* $v \in V$ reaaliarvon $\phi(v)$ —, niin, että

$$\phi(tu + v) = t\phi(u) + \phi(v),$$

eli *lineaarinen* funktionaali. Kutsutaan kaikkien sellaisten lineaaristen funktionaalien joukko nimellä V^* .

³Sirkulaarisen reunaehdon tapauksessa matriisin nurkissa oleva 2 muuttuu 4:ksi, ja b_1 ja b_N muuttuvat vastaavasti.

Silloin seuraavat lauseet ovat samantarvoisia:

$$\Delta u = g$$

ja

$$\forall \phi \in V^* : \phi(\Delta u) = \phi(g).$$

Tätä kutsutaan tehtävän $\Delta u = g$ heikoksi muodoksi.

10.3.3 Delta-operaattorin bilineaarinen muoto

Oikeastaan emme tarvitse tutkia koko joukko V^* , riittää jos tutkitaan kaikki funktionaalit, jotka ovat muotoa

$$\phi_v(f) \equiv \int_0^1 \int_0^1 v(x, y) f(x, y) dx dy,$$

joissa $v(x, y)$ toteuttaa jo esitetyt (periodiset) reunaehdot.

Siis nyt tehtävän formulointi on löytää $u \in V$ siten, että

$$\phi_v(\Delta u) = \phi_v(g) \tag{10.4}$$

kaikille $v \in V$.

Osittaisen integroinnin avulla voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 v u_{xx} dx dy &= \int_0^1 [v u_x]_0^1 dy - \int_0^1 \int_0^1 v_x u_x dx dy, \\ \int_0^1 \int_0^1 v u_{yy} dx dy &= \int_0^1 [v u_y]_0^1 dx - \int_0^1 \int_0^1 v_y u_y dx dy. \end{aligned}$$

Periodisen reunaehdon johdosta ensimmäiset oikean puolen termit häviävät, ja ynnäämällä saadaan

$$\int_0^1 \int_0^1 v (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = - \int_0^1 \int_0^1 (v_x u_x + v_y u_y) dx dy.$$

Näin löydämme, että

$$\phi_v(\Delta u) = - \int_0^1 \int_0^1 (v_x u_x + v_y u_y) dx dy.$$

Kutsutaan tätä⁴

$$\psi(u, v) \equiv \phi_v(\Delta u) = \phi_v(g) = \int_0^1 \int_0^1 v(x, y) g(x, y) dx dy.$$

Nyt saamme tehtävän heikon formuloinnin (10.4) integraalikaavana

$$- \int_0^1 \int_0^1 (v_x u_x + v_y u_y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 v g dx dy.$$

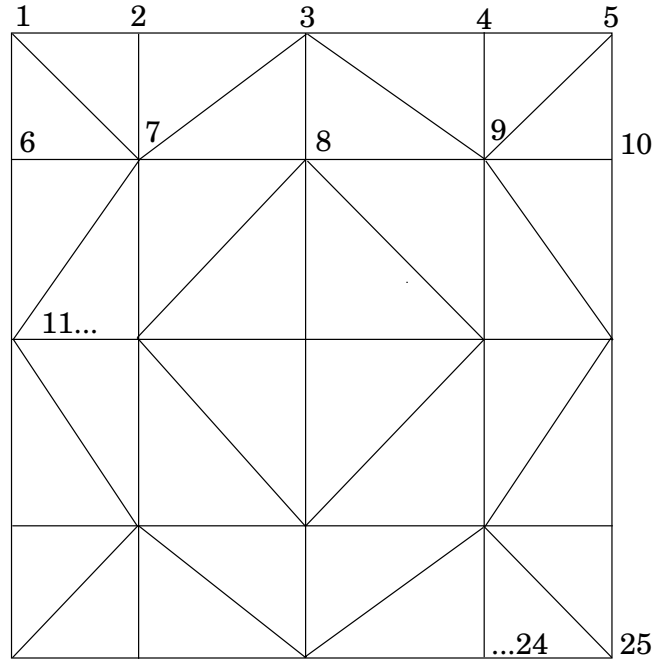
Tässä kaavassa esiintyy vain funktioiden u, v paikan ensimmäiset derivaatat: jos kirjoitetaan

$$\nabla v \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}, \nabla u \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix},$$

(jossa ∇ eli *nabla* on *gradientti*-operaattori) voidaan kirjoittaa

$$- \int_0^1 \int_0^1 \langle \nabla v \cdot \nabla u \rangle dx dy = \int_0^1 \int_0^1 v g dx dy.$$

⁴Tämä on operaattorin Δ bilineaarinen muoto.



Kuva 10.4: Domeenin kolmiointi ja nooiden numerot

10.3.4 Koefunktiot

Seuraavaksi erikoistetaan funktio v koefunktioiden sarjana. Olkoon sopivien koefunktioiden (laskettavan ääretön) joukko

$$E \equiv \{e_1, e_2, e_3, \dots\}.$$

Vaaditaan, että kaikille e_i :lle

$$\psi(u, e_i) = \int_0^1 \int_0^1 g e_i dx dy. \quad (10.5)$$

Tämän ongelman ratkaisemiseksi kirjoitetaan

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i e_i.$$

Käytännössä käytetään äärettömästä joukosta E vain äärellinen alajoukko $E_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset E$, ja myös u :n sarjakehitelmä katkaistaan. Nyt tehtävä on redukoitunut n kertoimen u_1, u_2, \dots, u_n määrittämiseen n :ltä yhtälöltä:

$$u = \sum u_i e_i, \quad (10.6)$$

$$g = \sum g_i e_i. \quad (10.7)$$

Nyt diskretisoidaan domeeni D seuraavalla tavalla: jaetaan se kolmioihin, joilla on yhteiset reunat ja nurkkapistet, ks. kuva.

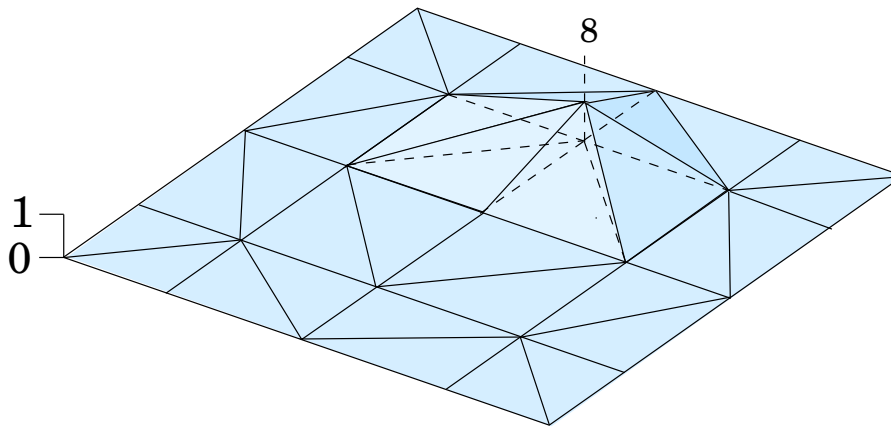
Jokaiselle noodipisteelle i kiinnitetään yksi koefunktio e_i , joka on seuraavan näköinen:

1. Jokaisen kolmion sisällä se on lineaarinen
2. Sen arvo on 1 noodilla i ja 0 kaikilla muilla noodeilla
3. Se on jatkuva ja "pätkeittäin" differentioitava.

Ks. kuva.

Nyt yo. yhtälöryhmä (10.5) sijoitusten (10.6, 10.7) jälkeen on seuraavan muotoinen:

$$\sum_{j=1}^n \psi(e_j, e_i) u_j = \sum_{j=1}^n g_j \int_0^1 \int_0^1 e_j e_i dx dy, \quad i = 1, \dots, n,$$



Kuva 10.5: Koefunktio e_8

eli matriisiyhtälönä:

$$Pu = Qg,$$

jossa

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ ja } g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}.$$

Matriisit ovat

$$P_{ji} = \psi(e_j, e_i) = - \int_0^1 \int_0^1 \langle \nabla e_j \cdot \nabla e_i \rangle dx dy,$$

$$Q_{ji} = \int_0^1 \int_0^1 e_j e_i dx dy.$$

P -matriisi kutsutaan *jäykkymatriisiksi* ja Q -matriisi *massamatriisiksi*.

10.3.5 Matriisien laskenta

Matriisin P elementtien laskemiseksi tutkitaan kolmio ABC . Koefunktiot ovat tässä tapauksessa jo aikaisemmin esitetyt *barysentriset koordinaatit*:

$$e_A = \frac{\begin{vmatrix} x_B & x_C & x \\ y_B & y_C & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, e_B = \frac{\begin{vmatrix} x_C & x_A & x \\ y_C & y_A & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, e_C = \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Ne ovat suoraan laskettavissa. Gradientit taas ovat

$$\begin{aligned} \nabla e_A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} e_A = \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_B & y_C \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} x_B & x_C \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_B - y_C \\ x_C - x_B \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ja niin edelleen gradienteille ∇e_B ja ∇e_C , syklisesti vaihtaen nimitykset A, B, C . Saadaan

$$\langle \nabla e_A \cdot \nabla e_A \rangle = \left(\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-2} \|\vec{BC}\|^2$$

ja

$$\langle \nabla e_A \cdot \nabla e_B \rangle = \left(\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-2} \langle \vec{BC} \cdot \vec{CA} \rangle,$$

ja niin edelleen.

Gradientit ovat vakioita, siis integraali koko kolmion yli voidaan laskea kertomalla sen pinta-alalla, joka sattuu

olemaan $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Kun on laskettu

$$\iint_{\Delta} \langle \nabla e_j \cdot \nabla e_i \rangle dx dy$$

kaikkien kolmioiden yli — kuusi arvoa kolmiota kohtaan —, ovat P -matriisin elementit helposti laskettavissa summaamalla jokaisen koefunktioon kuuluvien kolmioiden yli. Koska näitä kolmioita on vain pieni lukumäärä, on matriisi P käytännössä *harva*, mikä on huomattava numeerinen etu.

Termien $e_A e_B$ jne. laskeminen ja integroiminen kolmion yli Q -matriisin laskentaa varten jätetään harjoitukseksi.

10.3.6 Tehtävän ratkaiseminen

Seuraavasti:

1. Lasketaan (generoidaan) matriisit P ja Q . Matlabissa on tätä varten valmiit apuvälineet
2. Lasketaan (ratkaistaan) funktiosta $g(x, y)$ kertoimet g_i , siis vektorin g elementit, yhtälöistä

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) e_j(x, y) dx dy = \sum_i g_i \int_0^1 \int_0^1 e_i(x, y) e_j(x, y) dx dy, \quad j = 1, \dots, n.$$

3. Ratkaise matriisiyhtälö $Pu = Qg$ tuntemattoman u ja sen elementit u_i varten
4. Laske $u(x, y) = \sum u_i e_i$. Piirrä paperille tai kuvaruudulle.

10.3.7 Muunlaiset reuna-ehdot

Mikäli reuna-ehdot on sellaisia, että avainasemassa olevassa osittaisessa integroinnissa termit

$$\begin{aligned} \int_0^1 [vu_x]_0^1 dy + \int_0^1 [vu_y]_0^1 dx &= \\ &= \int_0^1 (v(1, y) u_x(1, y) - v(0, y) u_x(0, y)) dy + \\ &+ \int_0^1 (v(x, 1) u_y(x, 1) - v(x, 0) u_y(x, 0)) dx \end{aligned}$$

eivät häviää, ovat nekin integraalit laskettavia reuna-elementtien yli: syntyy

$$\begin{aligned} \int_0^1 e_j(0, y) \frac{\partial}{\partial x} e_i(0, y) dy, \int_0^1 e_j(1, y) \frac{\partial}{\partial x} e_i(1, y) dy, \\ \int_0^1 e_j(x, 0) \frac{\partial}{\partial y} e_i(x, 0) dx, \int_0^1 e_j(x, 1) \frac{\partial}{\partial y} e_i(x, 1) dx \end{aligned} \quad (10.8)$$

-muotoisia integraaleja, siis yksiulotteisia integraaleja domeenin reunaa pitkin. Tässä tapauksessa on erotettava toisistaan *sisäisiä* noodeja ja elementtejä, ja *reunanoodeja* ja -elementtejä. Yllä olevat integraalit eroavat nolasta vain, jos e_i ja e_j ovat molemmat reuna-elementtejä. Reunaehto annetaan usein seuraavassa muodossa:

$$u(x, y) = h(x, y) \text{ domeenin reunalla } \partial D.$$

Tämä on ns. DIRICHLETIN reuna-arvotettava. Kirjoitetaan

$$h(x, y) = \sum h_i e_i(x, y)$$

kuten aikaisemmin u - ja g -funktioille.

Vaihtoehtoisesti NEUMANN-tehtävä, jossa on annettu ratkaisufunktion *normaaliderivaatta* reunalla:

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x, y) = h(x, y) \text{ domeenin reunalla } \partial D.$$

Mikäli reuna ei ole kaunis neliö, voidaan käyttää GREENIN lause osittaisintegroinnin suorittamiseksi. Silloin reunalle ilmaantuu taas integraaleja, jotka sisältävät sekä itse koefunktiot e_i että niiden ensimmäiset derivaatat reunan *normaalisuuntaan* $\frac{\partial}{\partial n} e_j$. Aivan kuten yllä (kaava 10.8) jo nähtiin.

Myös yleistys kolmiulotteisiin tehtäviin ja ajassa kehittäviin tehtäviin, jossa on lisäulottuvuutena aika t , lienee selvä. Siinä tapauksessa on reunaehtoien sijasta — tai niiden lisäksi — *alkuehtoja*.

10.4 Funktioavaruudet ja Fourier-teoria

Abstraktisessa vektoriavaruudessa voidaan luoda *kanta*, jonka avulla jokainen vektori voidaan kirjoittaa kanta-vektoreiden lineaariyhdistelmänä: Jos kanta on $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, voidaan mielivaltainen vektori \mathbf{r} kirjoittaa muotoon:

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{e}_i.$$

Koska kolme kantavektoria aina riittää, kutsutaan tavallinen avaruus *kolmiulotteiseksi*.

Vektoriavaruuteen voidaan määrittää *skalaaritulo*, joka on lineaarikuvaus kahdesta vektorista yhteen lukuun (“bilineaarinen muoto”):

$$\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \rangle.$$

Lineaarisuus merkitsee, että

$$\langle \alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s} \rangle = \alpha \langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s} \rangle + \beta \langle \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s} \rangle,$$

ja symmetrisyys, että

$$\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \rangle$$

Jos kantavektorit ovat keskenään *ortogonaalisia*, ts. $\langle \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \rangle = 0$ jos $i \neq j$, voidaan yksinkertaisesti laskea kertoimet r_i :

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \rangle} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{e}_i \quad (10.9)$$

Jos tämän lisäksi vielä $\langle \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \rangle = \|\mathbf{e}_i\|^2 = 1 \ \forall i \in \{1, 2, 3\}$, ts. kantavektorit ovat *ortonormaaleja* – suure $\|\mathbf{r}\|$ kutsutaan vektorin \mathbf{r} *normiksi* – kaava 10.9 yksinkertaistuu edelleenkin:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i. \quad (10.10)$$

Tässä kertoimet $r_i = \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i \rangle$.

Funktiotkin voidaan katsoa vektoriavaruuden alkioiksi. Jos määritetään kahden funktioiden f, g skalaaritulo seuraavaksi integraaliksi:

$$\langle \vec{f} \cdot \vec{g} \rangle \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx,$$

on helppoa todeta että ylläolevat vaatimukset skalaarituloon täyttyvät.

Tämän vektoriavaruuden (*funktioavaruuden*) eräs kanta muodostuvat ns. FOURIER-funktiot,

$$\begin{aligned}\vec{e}_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (k=0) \\ \vec{e}_k &= \cos kx, \quad k=1, 2, 3, \dots \\ \vec{e}_{-k} &= \sin kx, \quad k=1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Tämä kanta on *ortonormaalin* (todistus: harjoitus). Se on myös *täydellinen* kanta, jota me emme todista. Nyt jokainen funktio $f(x)$ joka täyttää tietyt vaatimukset, voidaan kehittää kaavan (10.10) tapaan, eli

$$f(x) = a_0 \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

– tuttu FOURIER-kehitemä – missä kertoimet ovat

$$\begin{aligned}a_0 &= \langle \vec{f} \cdot \vec{e}_0 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{2}\sqrt{2} dx = \sqrt{2} \cdot \overline{f(x)} \\ a_k &= \langle \vec{f} \cdot \vec{e}_k \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \langle \vec{f} \cdot \vec{e}_{-k} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx\end{aligned}$$

Tämä on tunnettu tapa miten FOURIER-sarjan kertoimet lasketaan.

10.5 Waveletit eli aallokkeet

Fourier-analyysissä käytettyjen perusfunktioiden eli sinusten ja kosinusten haittapuolena on niiden ulottuminen koko tarkasteludomeenin yllä nollasta eroavina funktioarvoina.

Usein toivotaan käytettäväksi perusfunktiot, jotka eroavat nollasta vain rajatulla alueella. Tietenkin yllä ja esitetyt finiittien elementtien perusfunktiot ovat sellaisia. Ne eivät kuitenkaan luonteeltaan ole “aaltomaisia”.

Ratkaisu tarjoaa *waveletit*. Wavelet eli aallocke on aaltomainen funktio, jonka tukialue on rajattu (en. *bounded support*). Waveletteja on eri tasoisia; korkeampitasoisella waveletilla on pienempi tukialue, mutta se tarjoaa sillä korkeampi resoluutio. Korkeampitasoinen wavelet saadaan matalampitasoisesta *skaalamalla ja siirtämällä*.

Kaiken yksinkertaisempi “emo-wavelet” ja hyvä esimerkki on ns. HAAR-wavelet. Sen muoto on

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{jos } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

Tästä saadaan sitten kaikki muut tarvittavat waveletit seuraavasti:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

Siis wavelet $\psi_{j,k}$ on 2^j kertaa kapeampi kuin ψ , $\sqrt{2^j}$ kertaa korkeampi, ja siirettynä vaaka-akselia pitkin k :n verran oikealle.

Luku j kutsutaan *resoluutiotasoksi*, luku k *sijaintiluvuksi*.

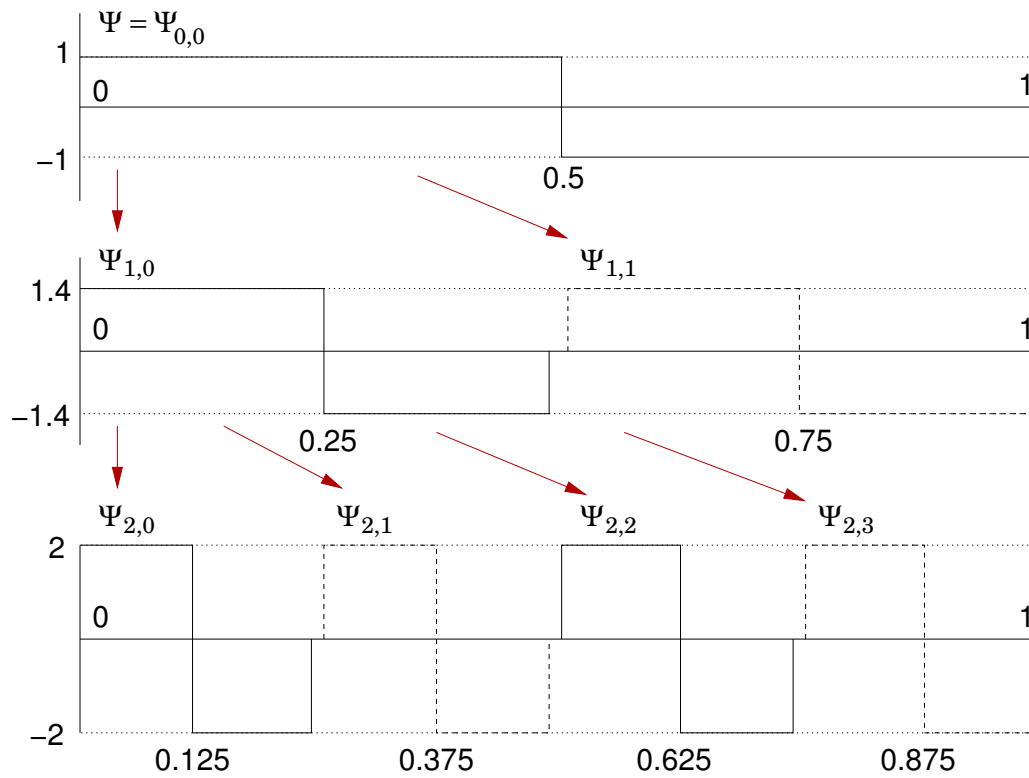
Yhdestä emosta saadaan 2 ensimmäisen tason, 4 toisen tason, 8 kolmannen tason tyttäriä, jne.

On helppoa verifioida, että waveletit ovat *ortonormaalina*:funktioavaruuden “pistetulo” on

$$\langle \psi_{j,k} \cdot \psi_{j',k'} \rangle = \int_0^1 \psi_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{jos } j = j' \text{ ja } k = k' \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tästä syystä voidaan kirjoittaa mielivaltainen funktio seuraavaksi sarjakehitelmäksi:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} f_{j,k} \psi_{j,k}(x),$$



Kuva 10.6: Haar-waveletit

jossa kertoimet ovat

$$f_{j,k} = \int_0^1 f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$

eli taas funktioavaruuden pistetulo $\langle f \cdot \psi_{j,k} \rangle$, f :n projektio akseliin $\psi_{j,k}$.

Kokeillaan funktio

$$f(x) = \sin 2\pi x.$$

Lasketaan

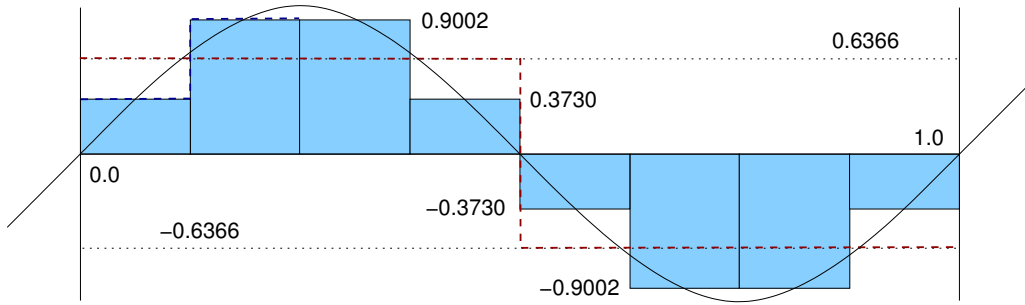
$$\begin{aligned} \langle f \cdot \psi_{0,0} \rangle &= \int_0^{0.5} \sin 2\pi x - \int_{0.5}^1 \sin 2\pi x = \\ &= 2 \int_0^{0.5} \sin 2\pi x = -\frac{1}{\pi} [\cos 2\pi x]_0^{0.5} = \\ &= \frac{2}{\pi} \approx 0.6366. \end{aligned}$$

Myös (symmetria)

$$\langle f \cdot \psi_{1,0} \rangle = \langle f \cdot \psi_{1,1} \rangle = 0$$

ja

$$\begin{aligned} \langle f \cdot \psi_{2,0} \rangle &= 2 \int_0^{0.125} \sin 2\pi x \cdot 2 dx - 2 \int_{0.125}^{0.25} \sin 2\pi x \cdot 2 dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} [\cos 2\pi x]_0^{0.125} + \frac{1}{\pi} [\cos 2\pi x]_{0.125}^{0.25} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0 \right) + \frac{1}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} (1 - \sqrt{2}) \approx -0.1318. \end{aligned}$$



Kuva 10.7: Sinifunktio kehitettynä Haar-waveleteihin

Symmetria-argumentilla saadaan nyt

$$\begin{aligned}\langle f \cdot \psi_{2,1} \rangle &= \frac{1}{\pi} (\sqrt{2} - 1) \approx +0.1318, \\ \langle f \cdot \psi_{2,2} \rangle &= \frac{1}{\pi} (\sqrt{2} - 1) \approx +0.1318, \\ \langle f \cdot \psi_{2,3} \rangle &= \frac{1}{\pi} (1 - \sqrt{2}) \approx -0.1318.\end{aligned}$$

Tämän avulla voimme suorittaa synteysi: tulos on askelfunktio, jota on piirretty kuvassa.

Tulos on jokseenkin kantikas; kirjallisuudesta löytyy paljon “aaltomaisempia” waveletteja. HAAR-wavelettien erotuskyvyn asteittainen, hierarkisesti kaksijakoinen parantuminen muistuttaa, miten GIF-kuva rakennetaan asteittain tietokoneuudulla, jos se tulee hidasta linjaa pitkin. Itse asiassa wavelettien eräs suuri sovellusalue on juuri kuva-aineistojen tiivistäminen.

10.6 Legendre and Chebyshev approximation

10.6.1 Polynomisovitus

Jos meillä on tehtävänä approksimoida funktio, josta on annettuna mittausarvot välillä $[-1, 1]$, on looginen lähestymistapa käyttää polynomisovitusta. Kuvaamme funktio seuraavasti:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,$$

ja estimoimme kertoimet a_i from the data. In practice, the series is truncated at $i = I$: the approximation obtained is then

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^I a_i x^i.$$

This can be written as an observation equation as

$$\tilde{f}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_I \end{bmatrix}.$$

Now, let us have *observations* regularly spread out over the interval $[-1, 1]$, e.g., at the points $-1, -0.5, 0, +0.5$ and $+1$. Let us also assume, for the sake of example, that $I = 3$. Then the set of observation equations becomes

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}(-1) \\ \tilde{f}(-0.5) \\ \tilde{f}(0) \\ \tilde{f}(0.5) \\ \tilde{f}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -0.5 & 0.25 & -0.125 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

The matrix in the above equation is A , the design matrix. From it, the normal matrix is calculated as

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 2.125 \\ 2.5 & 0 & 2.125 & 0 \\ 0 & 2.125 & 0 & 2.03125 \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin konditioluku $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \approx 50$. Se on selvästi ei-diagonaalinen. Kokemuksen perusteella voidaan sanoa, että polynomisovitus näissä tapauksessa sopii vain alhaisille polynomien asteluvuille I . Jo arvoille $I > 12$ alkaa ratkaisu olla niin huonosti konditionoitu, että numeerinen tarkkuus kärsii.

10.6.2 Legendre interpolation

See http://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials.

We can choose as base functions, instead of simple polynomials $1, x, x^2, x^3, \dots$, LEGENDRE⁵ *polynomials*, which have the useful property of *orthogonality* on the interval $[-1, 1]$: if we formally define the inner product of two functions $f(x)$ and $g(x)$ as the integral

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x) g(x) dx,$$

then we can say for the LEGENDRE polynomials $P_n(x)$, that

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}.$$

The LEGENDRE polynomials are most easily generated by the following *recursive relationship*:

$$nP_n(x) = -(n-1)P_{n-2}(x) + (2n-1)xP_{n-1}(x).$$

In this way we find

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \end{aligned}$$

etcetera.

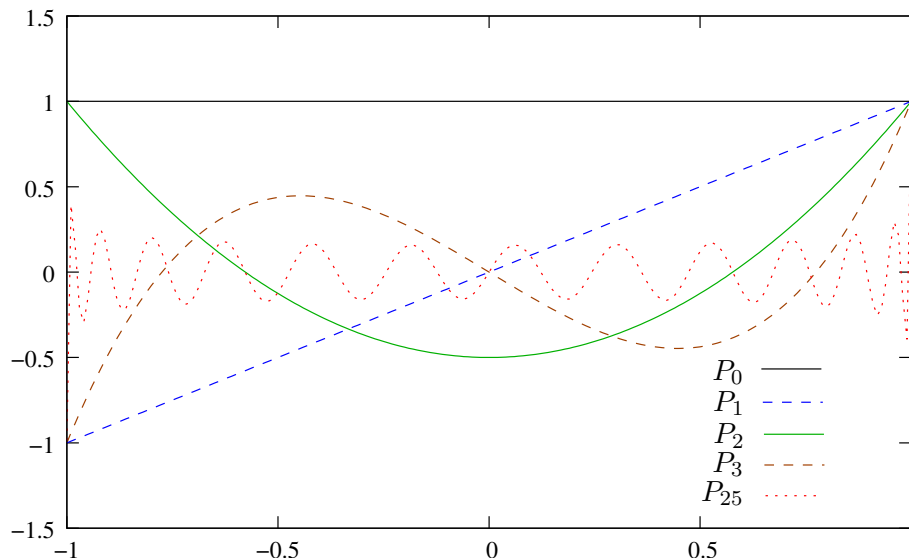
Now if we write our approximation of function $f(x)$ as follows:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^I a_i P_i(x),$$

we obtain again for a row of our observation equation:

$$\tilde{f}(x) = \begin{bmatrix} P_0(x) & P_1(x) & P_2(x) & \cdots & P_I(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_I \end{bmatrix}.$$

⁵Adrien-Marie LEGENDRE, 1752 - 1833, French mathematician.



Kuva 10.8: Examples of LEGENDRE polynomials

Again choosing the values $-1, -0.5, 0, 0.5$ and 1 yields:

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}(-1.0) \\ \tilde{f}(-0.5) \\ \tilde{f}(0.0) \\ \tilde{f}(0.5) \\ \tilde{f}(1.0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -0.5 & -0.125 & 0.4375 \\ 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 & -0.125 & -0.4375 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

and the corresponding normal matrix is

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 1.5625 \\ 1.25 & 0 & 2.28125 & 0 \\ 0 & 1.5625 & 0 & 2.38281 \end{bmatrix}.$$

Now, the condition number $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ is 6.25, a lot better than for simple polynomials!

The normal matrix looks approximately, but not precisely, diagonal. If we had a larger number of support points, all spread uniformly over the interval $[-1, 1]$, we would see the N matrix become very nearly a diagonal matrix. (And even if some of the support points would be missing, the matrix would still be close to diagonal.)

What this means is that the polynomial approximation done this way is *more stable* even for very high polynomial degree numbers. Evaluating each polynomial $P_n(x)$ for a given support point argument x can be done very efficiently using the above given recurrence relationship.

10.6.3 Chebyshev interpolation

See http://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_approximation#Chebyshev_approximation, http://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials.

Another kind of polynomials often used for interpolation are CHEBYSHEV⁶ *polynomials* of the first kind. They can be formally defined as⁷

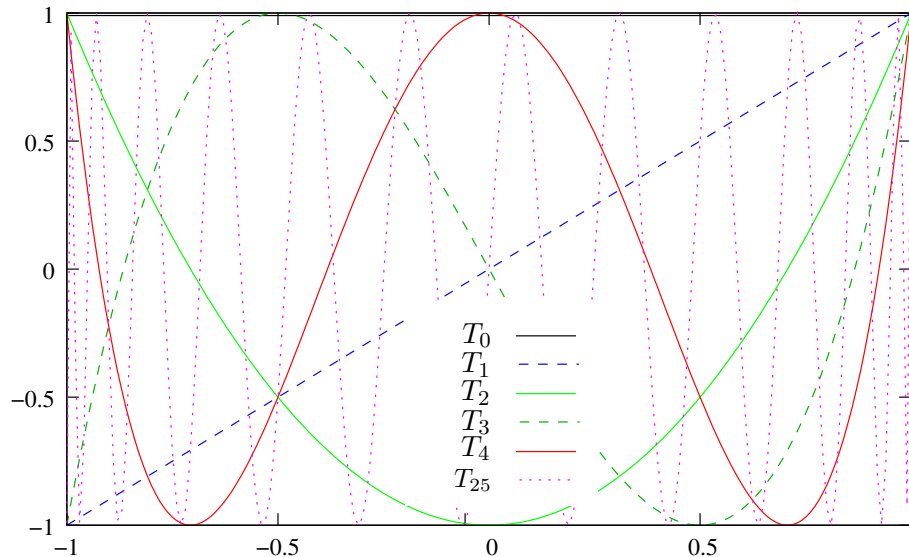
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (10.11)$$

Like LEGENDRE's polynomials, they are easily computed recursively:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

⁶Pafnuty Lvovich CHEBYSHEV, 1821 - 1894, Russian mathematician.

⁷ T like in the French transliteration TSHEBYSHEV.



Kuva 10.9: Examples of CHEBYSHEV polynomials.

starting from $T_0(x) = 1$ and $T_1(x) = x$. The first few polynomials are:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \end{aligned}$$

and so on.

Like LEGENDRE's polynomials, also CHEBYSHEV's polynomials satisfy an orthogonality relationship, but for a different inner product: if we define

$$\langle \vec{f} \cdot \vec{g} \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (10.12)$$

where we call $(1-x^2)^{-1/2}$ the *weighting factor*, we have

$$\langle T_n \cdot T_m \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m = 0 \\ \pi/2 & n = m \neq 0 \end{cases} .$$

Again, we may approximate a function f as follows:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^I a_i T_i(x), \quad (10.13)$$

from which the observation equation for the coefficients a_i becomes

$$\tilde{f}(x) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) & T_2(x) & \cdots & T_I(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_I \end{bmatrix} .$$

For the same case of observed function values in support points $-1, -0.5, 0, 0.5$ and 1 we get:

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}(-1.0) \\ \tilde{f}(-0.5) \\ \tilde{f}(0.0) \\ \tilde{f}(0.5) \\ \tilde{f}(1.0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -0.5 & -0.5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0.5 & -0.5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

The normal matrix is

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

with a condition number of $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2.5$, which is pretty good!

This all looks very interesting. . . but what is the advantage of using CHEBYSHEV approximation? To understand that, look at the figure 10.9. Or look at equation (10.11). Each polynomial oscillates between the extremal values $+1$ and -1 . Compare this to LEGENDRE polynomials, which also oscillate, and at the ends of the interval ± 1 assume values ± 1 as well. . . but *in-between they oscillate a lot less*.

If we assume for a moment that the CHEBYSHEV expansion (10.13) converges rapidly, then we may say approximately, that the error is equal to the first neglected term:

$$f(x) - \tilde{f}(x) = \sum_{i=I+1}^{\infty} a_i T_i(x) \approx a_{I+1} T_{I+1}(x).$$

Where a_{I+1} is a constant, and $T_{I+1}(x)$ a function that is *uniformly bounded* from above by $+1$ and from below by -1 on the domain $[-1, 1]$.

This demonstrates what CHEBYSHEV approximation is useful for: it constitutes *uniform* approximation, where the error is absolutely bounded to the *same* value $|a_{I+1}|$ *all over* the domain $[-1, 1]$. For this reason it is used, e.g., in pocket calculators, or numerical libraries, for evaluating standard functions like sines and cosines and logarithms. It is a way to guarantee that always the same number of computed decimals is correct, irrespective of the argument value of the function chosen.

For comparison: if you look at the LEGENDRE polynomials drawn in Fig. 10.8, they are oscillating much less in the middle than towards the end points ± 1 . This means by the same argument, that the error of approximation will also be larger towards the end points when using LEGENDRE approximation. The weight function $(1 - x^2)^{-1/2}$ which is present in the CHEBYCHEV inner product definition (10.12) serves just to “force” the approximation to become more precise there. The “floppy loose ends” of the approximation are suppressed.

10.7 “Inversion-free” interpolointi

Inversion-free interpolointi toimii yleensä sillä tavalla, että prediktiopisteen ympäristöstä poimitaan sopiva joukko datapisteitä ja lasketaan niiden arvojen painotettu keskiarvo. Painotus tapahtuu yleensä datapisteiden etäisyyden jonkin potenssin mukaan.

Robusti menetelmä syntyy, jos otetaan prediktiopisteen ympäristöstä yksi datapiste –lähin piste – jokaisesta kvadrantista.

10.8 Regridding

Jos joko geofysikaalinen kenttä on annettu säännöllisellä hilalla, jonka pisteväli on Δx , on tämän hilan sisältämässä signaalissa läsnä vain “taajuudet” tietyn rajan alapuolella. Lyhyin mahdollinen aallonpituus, joka hila vielä osaa ilmaista suhteellisen luotettavasti, on $2\Delta x$. Tätä kutsutaan NYQUIST-limiitiksi.

10.9 Spatiaalinen interpolointi, taajuusstatistiikka

Kirjallisuus:

Bailey and Gatrell [1995, s. 141-203]

Mikhail and Ackermann [1976, s. 393-426]

Shibili [2000]

Luku 11

Pienimmän neliösumman kollokaatio

Kirjallisuus:

Heiskanen and Moritz [1967] ss. 251-286.

11.1 Pienimmän neliösumman kollokaatio

11.1.1 Stokastiset prosessit

Kollokaatio on tilastollinen estimaatiotekniikka, joka ennustaa *stokastisen prosessin* arvoja, annettuna tietyt realisaatioarvot havaintojen muodossa.

Olkoon $\underline{s}(t)$ stokastinen prosessi, jonka autokovarianssifunktio on $C(t_1, t_2)$. Olkoon lisäksi prosessi *stationaarinen*, ts. $C(t_1, t_2) = C(t_2 - t_1)$. Argumentti t on yleensä aika, mutta se voi olla mitä tahansa parametri, esim. matkan etäisyys.

Olkoon nyt annettuna tästä prosessista n havaintoa, $\underline{s}(t_1), \underline{s}(t_2), \dots, \underline{s}(t_n)$; silloin näiden realisaatioiden, eli stokastisen *suureiden*, varianssimatriisi voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\text{Var}(\underline{s}_i) = \begin{bmatrix} C(t_1, t_1) & C(t_2, t_1) & \cdots & C(t_1, t_n) \\ C(t_1, t_2) & C(t_2, t_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t_1, t_n) & C(t_2, t_n) & \cdots & C(t_n, t_n) \end{bmatrix}.$$

Käytetään tähän symboli C_{ij} . Sekä matriisin yhdelle elementille, $C_{ij} = C(t_i, t_j)$, että koko matriisille, $C_{ij} = [C(t_i, t_j), i, j = 1, \dots, n]$. Symboli \underline{s}_i taas merkitsee havainnoista $\underline{s}(t_i)$, $i = 1, \dots, n$ koostuva vektori – tai sen alkio $\underline{s}(t_i)$.

Huomaa, että, jos funktio $C(t_2 - t_1)$ on tiedossa, koko matriisi ja kaikki sen elementit voidaan laskea kun vain kaikki parametriarvot t_i on tiedossa.

Olkoon nyt ongelman asettelu se, että pitäisi *estimoida* prosessin \underline{s} arvo hetkellä (epookilla) T . Käytettävissä on *havainnot* prosessista hetkillä t_i , siis $\underline{s}(t_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Samalla tavalla kun yllä laskettiin $\underline{s}(t_i)$:n ja $\underline{s}(t_j)$ väliset kovarianssit (varianssimatriisin C_{ij} alkiot), voidaan myös laskea $\underline{s}(T)$:n ja kaikkien $\underline{s}(t_i)$, $i = 1, \dots, n$ väliset kovarianssit. Saadaan

$$\text{Cov}(\underline{s}(T), \underline{s}(t_i)) = \begin{bmatrix} C(T, t_1) \\ C(T, t_2) \\ \vdots \\ C(T, t_n) \end{bmatrix}.$$

Tähän voidaan taas käyttää merkintä C_{Tj} .

11.1.2 Signaali ja kohina

Tässä on hyvä muistaa, että prosessi $\underline{s}(t)$ on *fysikaalinen ilmiö* josta olemme *kiinnostuneita*. Sellainen stokastinen prosessi kutsutaan *signaaliksi*. On myös olemassa fysikaalisia ilmiöitä jota ovan samalla tavalla käyttäytyviä, mutta mistä me *emme* ole kiinnostuneita. Sellaisia stokastisia prosesseja kutsumme *kohinaksi*.

Kun suoritetaan havainto, jonka tarkoitus on saada arvo suurelle $\underline{s}(t_i)$, saadaan todellisuudessa arvo, joka ei ole absoluuttisen tarkka. Me saadaan siis todellinen havainto

$$\underline{\ell}_i = \underline{s}(t_i) + \underline{n}_i.$$

Tässä \underline{n}_i on stokastinen suure nimeltä *havaintovirhe* eli *kohina*. Olkoon sen varianssi D_{ij} ; tämä on aivan samanlainen matriisi kuin yllä C_{ij} . Ainoa ero on, että D kuvaa ilmiön, *josta emme ole kiinnostuneita*. Yleensä on turvallista olettaa, että kahden eri havainnon ℓ_i, ℓ_j virheet eivät korreloidu, jolloin D_{ij} on diagonaalimatriisi.

11.1.3 Estimaattori ja sen virhevarianssi

Nyt konstruoidaan estimaattori

$$\widehat{\underline{s}}(T) \equiv \sum_j \Lambda_{Tj} \underline{\ell}_j,$$

käytettävissä olevien havaintojen $\underline{\ell}_j$ lineaariyhdistelmä. Tämän estimaattorin elämän tarkoituksena on päästä mahdollisimman lähelle $\underline{s}(T)$. Siis minimoitava suure on erotus

$$\widehat{\underline{s}}(T) - \underline{s}(T) = \Lambda_{Tj} \underline{\ell}_j - \underline{s}(T) = \Lambda_{Tj} (\underline{s}(t_j) + \underline{n}_j) - \underline{s}(T).$$

Tässä jätettiin kirjoitusmukavuuden vuoksi summausmerkki \sum pois (EINSTEININ summauskonventio).

Tutkitaan tämän erotuksen *varianssi* eli

$$\Sigma_{TT} \equiv \text{Var}(\widehat{\underline{s}}(T) - \underline{s}(T)).$$

Käytämme hyväksi *varianssien kulkulain*, yllä annetut notaatiot sekä tiedomme, että tuskinpa havaintoprosessin \underline{n}_i ja signaalin \underline{s} välillä ole olemassa mitään fysikaalista yhteyttä eli *korrelaatiota*. Näin:

$$\Sigma_{TT} = \Lambda_{Tj} (C_{jk} + D_{jk}) \Lambda_{kT}^T + C_{TT} - \Lambda_{Tj} C_{jT}^T - C_{Ti} \Lambda_{iT}^T. \quad (11.1)$$

11.1.4 Optimaalinen ja vaihtoehtoinen estimaattori

Valitse nyt

$$\Lambda_{Tj} \equiv C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1}.$$

Silloin kaavasta (11.1):

$$\begin{aligned} \Sigma_{TT} &= C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{jT}^T + C_{TT} - \\ &- C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{jT}^T - C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{jT}^T = \\ &= C_{TT} - C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{jT}^T. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Tutkitaan seuraavaksi *vaihtoehtoinen valinta*

$$\Lambda_{Tj} = C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} + \delta \Lambda_{Tj}.$$

Tässä tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned} \Sigma'_{TT} &= C_{TT} - C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{jT}^T + \\ &+ \delta \Lambda_{ij} C_{jT}^T + C_{Ti} \delta \Lambda_{iT}^T - \delta \Lambda_{Tj} C_{jT}^T - C_{Ti} \delta \Lambda_{iT}^T + \\ &+ \delta \Lambda_{Tj} (C_{ij} + D_{ij}) \delta \Lambda_{jT}^T = \\ &= C_{TT} - C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{jT}^T + \delta \Lambda_{Tj} (C_{ij} + D_{ij}) \delta \Lambda_{jT}^T. \end{aligned}$$

Tässä viimeinen termi on positiivinen, koska matriisit C_{ij} ja D_{ij} ovat positiivis-definiittejä. Eli $\Sigma'_{TT} > \Sigma_{TT}$, paitsi jos $\delta \Lambda_{Tj} = 0$.

Toisin sanoen, jo annettu ratkaisu

$$\Lambda_{Tj} = C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} \Rightarrow \widehat{\underline{s}}(T) = C_{Ti} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} \underline{\ell}_j$$

on tosiaan *optimaalinen* pienimmän neliösumman (tarkemmin, virhevarianssin Σ_{TT} minimoimisen) merkityksessä.

11.1.5 Stokastiset prosessit maan pinnalla

Pienimmän neliösumman kollokaatio käytetään paljon maan pinnalla painovoima-arvojen ja painovoimakentän muiden funktionaalien arvojen optimaaliseksi estimoinniseksi.

Jos pisteen P_i – jonka sijainti on (φ_i, λ_i) – painovoima-anomalia kirjoitetaan Δg_i , on kahden painovoima-anomalioiden välinen kovarianssi

$$\text{Cov}(\Delta g_i, \Delta g_j) = C_{ij}.$$

Yleensä C_{ij} riippuu vain pisteiden P_i, P_j välisestä etäisyydestä ψ ; jos näin on, puhutaan *isotrooppisesta prosessista* $\Delta g(\varphi, \lambda)$.

Suosittu kovarianssifunktio jota käytetään painovoima-anomalioiden, on HIRVOSEN kaava:

$$C(\psi) = \frac{C_0}{1 + \psi^2/\psi_0^2} = \frac{C_0}{1 + s^2/d^2}, \quad (11.3)$$

jossa $C_0 = C(0)$ ja d ovat painovoimakentän käyttäytymistä kuvaavia parametreja. C_0 kutsutaan *signaalivarianssiksi*, d *korrelaatiopituudeksi*. d kuvaa se tyypillinen etäisyys, jonka yli eri pisteiden painovoima-anomalioiden välillä on vielä merkittävä korrelaatio. Metrinen etäisyys $s \approx R\psi$ ja $d \approx R\psi_0$.

Jos nyt on annettuna n pistettä $P_i, i = 1, \dots, n$, joissa on mitattuna painovoima-arvot (anomaliat) Δg_i , voidaan, kuten yllä, konstruoida *varianssimatriisi*

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{\Delta g}_i) &= \begin{bmatrix} C_0 & C(\psi_{21}) & \cdots & C(\psi_{n1}) \\ C(\psi_{12}) & C_0 & \cdots & C(\psi_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\psi_{1n}) & C(\psi_{2n}) & \cdots & C_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_0 & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_0 & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_0 \end{bmatrix} \equiv C_{ij}, \end{aligned}$$

jossa kaikki $C(\psi_{ij})$ lasketaan yllä annetun kaavan (11.3) avulla.

Jos vielä lasketaan myös painovoimaltaan tuntemattomalle pisteelle Q :

$$\text{Cov}(\Delta g_Q, \Delta g_i) = \begin{bmatrix} C(\psi_{Q1}) \\ C(\psi_{Q2}) \\ \vdots \\ C(\psi_{Qn}) \end{bmatrix} \equiv C_{Qj},$$

saadaan, täysin samalla tavalla kuin ennen, *pienimmän neliösumman kollokaation* ratkaisuksi:

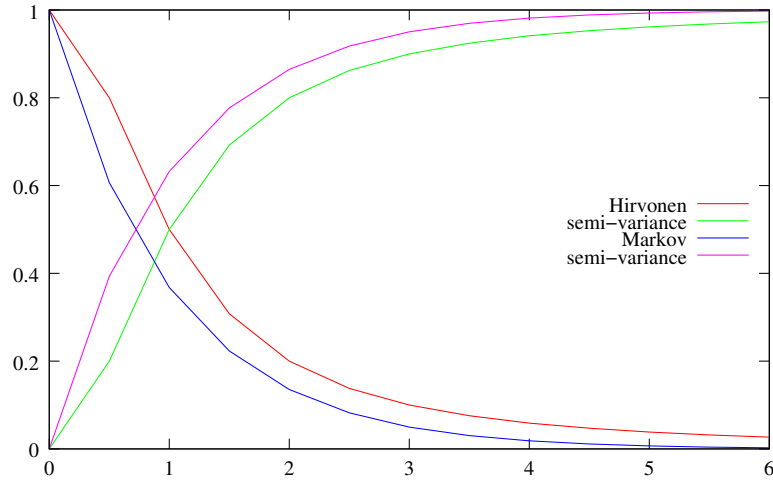
$$\widehat{\Delta g}_Q = C_{Qj} (C_{jk} + D_{jk})^{-1} \underline{\Delta g}_k,$$

jossa $\underline{\Delta g}_k$ on pisteissä $P_k, k = 1, \dots, n$ suoritettujen painovoima-anomaliahavaintojen tulokset. Matriisi D_{jk} kuvaa taas näiden havaintojen tekemisen yhteydessä esiintyvä satunnainen havaintovirhe (epätarkkuus). Yleensä saa olettaa, että D_{jk} on diagonaalimatriisi (havainnot eivät korreloidu) ja lisäksi, että $D_{jk} \ll C_{jk}$: painovoimahavaintojen tarkkuus on nykyisin parempi kuin 0.1 mGal, kun painovoimakentän oma vaihtelu on luokkaa 50-100 mGal (eli $C_0 \sim 2500 - 10\,000 \text{ mGal}^2$).

11.1.6 Painovoimakenttä ja kollokaation sovellukset

Yllä selostettu pienimmän neliösumman kollokaatiomenetelmä sovelletaan esim. painovoima-anomalioiden laskentaan pisteessä, jossa ei ole tehty mittauksia, mutta jonka lähistöllä on mittauspisteitä. Esim. jos laskentatehtävä edellyttää, että painovoima-anomaliat olisivat saatavissa säännöllisen hilan solmupisteissä, mutta todellisuudessa käytettävissä olevat mittausarvot ovat vapaasti valittujen pisteiden arvoja – silloin joudutaan käyttämään kollokaatiotekniikka.

Kollokaatiota voidaan käyttää myös erityyppisten suureiden estimaatioon: esim. geoidikorkeuksien tai luotiviiva-poikkeamien estimaatio painovoima-anomaliaita käyttäen. Tämä vaatii paljon kehittyneempi teoria kun se, joka tässä esitettiin. Ks. esimerkiksi <http://www.uni-stuttgart.de/gi/research/schriftenreihe/kotsakis.pdf>.



Kuva 11.1: HIRVOSEN kovarianssifunktio (parametriarvoille $C_0 = \psi_0 = 1$) ja vastaava semivarianssifunktio. MARKOV-kovarianssifunktio ja vastaava semivarianssifunktio

11.2 Kriging

Kriging on pienimmän neliösumman kollokaation eräs muoto, interpolaatiotekniikka.

Jos lähdetään yllä olevasta Hirvosen kaavasta (11.3), voimme laskea kahden pisteen P ja Q välisen painovoiman $eron$ varianssi, seuraavasti:

$$\begin{aligned} Var \{ \underline{\Delta g}_P - \underline{\Delta g}_Q \} &= Var \{ \underline{\Delta g}_P \} + Var \{ \underline{\Delta g}_Q \} - 2Cov \{ \underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q \} = \\ &= 2C_0 - 2 \frac{C_0}{1 + (\psi/\psi_0)^2} = \frac{2C_0 (\psi/\psi_0)^2}{1 + (\psi/\psi_0)^2} = \\ &= \frac{2C_0 \psi^2}{\psi^2 + \psi_0^2}. \end{aligned}$$

Tilanteessa jossa $\psi \ll \psi_0$, saamme

$$Var \{ \underline{\Delta g}_P - \underline{\Delta g}_Q \} \approx 2C_0 \psi^2 / \psi_0^2.$$

Toisaalta, jos $\psi \gg \psi_0$, saamme

$$Var \{ \underline{\Delta g}_P - \underline{\Delta g}_Q \} \approx 2C_0.$$

Puolet tästä ilmaisusta, $\frac{1}{2} Var \{ \underline{\Delta g}_P - \underline{\Delta g}_Q \}$, voidaan identifioida $\underline{\Delta g}$:n semivarianssin kanssa. Tunnistamme myös ψ_0 , tai ehkä muutama kertaa ψ_0 , ”kynnyksenä” eli ”sill”, jossa semivarianssi tasoittuu vakioksi C_0 .

Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää MARKOVIN kovarianssifunktio, joka on määritetty seuraavasti:

$$C(\psi) = C_0 e^{-\psi/\psi_0},$$

ja saamme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Var \{ \underline{\Delta g}_P - \underline{\Delta g}_Q \} &= C_0 - C_0 e^{-\psi/\psi_0} = \\ &= C_0 (1 - e^{-\psi/\psi_0}). \end{aligned}$$

Tapauksessa $\psi \ll \psi_0$ saadaan $C_0 \psi / \psi_0$, kun taas tapauksessa $\psi \gg \psi_0$ saadaan C_0 . Huomaa lineaarinen käyttäytyminen pienille ψ arvoille, mikä eroaa HIRVOSEN funktion kvadraattisesta käyttäytymisestä ja on tyypillistä ”random walk” -tyyppisille prosessille.

Kriging on pienimmän neliösumman kollokaation versio jota kuvataan tämän semivarianssifunktion avulla.

11.3 Harjoitukset

11.3.1 Hirvoisen kovarianssikaava

HIRVOSEN kovarianssikaava on

$$C(s_{PQ}) = \frac{C_0}{1 + (s_{PQ}/d)^2},$$

missä (Ohion tapauksessa) $C_0 = 337 \text{ mGal}^2$ ja $d = 40 \text{ km}$. Kaava antaa kahden pisteen P ja Q painovoima-anomalioiden välistä kovarianssia:

$$C(s_{PQ}) = \text{Cov}(\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q).$$

s_{PQ} on pisteiden välinen etäisyys.

1. Laske $\text{Var}(\underline{\Delta g}_P)$ ja $\text{Var}(\underline{\Delta g}_Q)$ [Vihje: muista, että määritelmän mukaan $\text{Var}(x) = \text{Cov}(x, x)$].
2. Laske $\text{Cov}(\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q)$ jos $s_{PQ} = 10 \text{ km}$.
3. Laske *korrelaatio*

$$\text{Corr}(\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q) \equiv \frac{\text{Cov}(\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_Q)}{\sqrt{\text{Var}(\underline{\Delta g}_P) \text{Var}(\underline{\Delta g}_Q)}}.$$

4. Toista laskut (osatehtävät) 2 ja 3 jos $s_{PQ} = 80 \text{ km}$.

11.3.2 Painovoima-anomalioiden prediktio

Olkoon annettuna kahden pisteen 1 ja 2 mitatut painovoima-anomaliat $\underline{\Delta g}_1$ ja $\underline{\Delta g}_2$. Pisteiden välinen etäisyys on 80 km ja niiden välillä, samalla etäisyydellä 40 km molemmista, sijaitsee piste P . Laskettavana on pisteen P painovoima-anomalia $\underline{\Delta g}_P$ *prediktio-menetelmällä*. Prediktio-kaava on

$$\widehat{\underline{\Delta g}}_P = C_{Pi} (C_{ij} + D_{ij})^{-1} \underline{\Delta g}_j,$$

missä $\underline{\Delta g}_j = \begin{bmatrix} \underline{\Delta g}_1 & \underline{\Delta g}_2 \end{bmatrix}^T$ on havaittujen anomalioiden vektori,

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \text{Var}(\underline{\Delta g}_i) & \text{Cov}(\underline{\Delta g}_i, \underline{\Delta g}_j) \\ \text{Cov}(\underline{\Delta g}_i, \underline{\Delta g}_j) & \text{Var}(\underline{\Delta g}_j) \end{bmatrix}$$

on sen varianssimatriisi, ja $C_{Pi} = \begin{bmatrix} \text{Cov}(\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_1) & \text{Cov}(\underline{\Delta g}_P, \underline{\Delta g}_2) \end{bmatrix}$ on sen ja $\underline{\Delta g}_P$:n välinen kovarianssimatriisi. D_{ij} on anomalioiden $\underline{\Delta g}_1, \underline{\Delta g}_2$ *havaintoprosessin* varianssimatriisi.

1. Laske (kaavana) matriisi C_{ij} , olettamalla HIRVOSEN kovarianssikaava (edellinen tehtävä) ja parametriarvot.
2. Laske (kaavana) C_{Pi} .
3. Laske (kaavana, auki kirjoitettuna) $\widehat{\underline{\Delta g}}_P$. Oleta, että $D_{ij} = 0$. (C_{ij} -matriisin käännös on mahdollista paperilla mutta saatte käyttää Matlab tms.)
4. Laske (kaavana) *prediktio varianssi* (Huom. $C_{jP} = C_{Pi}^T$):

$$m_{PP}^2 = C_{PP} - C_{Pi} C_{ij}^{-1} C_{jP}$$

11.3.3 Painovoiman prediktio (2)

Olkoon taas kahden pisteen 1 ja 2 mitatut painovoima-anomaliat $\underline{\Delta g}_1$ ja $\underline{\Delta g}_2$. Nyt kuitenkin pisteet 1, 2 ja P sijoittuvat suorakulmaisessa kolmiossa, niin, että suora kulma on pisteen P kohdalla, ja pisteen P etäisyydet pisteistä 1 ja 2 ovat edelleen 40 km. Pisteiden 1 ja 2 välinen etäisyys on nyt vain $40\sqrt{2} \text{ km}$.

1. Laske C_{ij} , C_{Pi} , $\widehat{\underline{\Delta g}}_P$ ja m_{PP}^2 .
2. Vertaile edellisen tuloksen kanssa. Johtopäätös?

11.3.4 Kollokaatio-esimerkki aika-akselilla

On annettuna, että signaalifunktion $s(t)$ kovarianssifunktio kahden hetken t_1 ja t_2 välillä on

$$C(t_2 - t_1) = \frac{C_0}{\left(1 + \frac{\|t_2 - t_1\|}{\Delta t}\right)},$$

jossa vakiot $C_0 = 100$ mGal ja $\Delta t = 10$ s. On annettuna havaintosuureen

$$\underline{\ell}_i = \underline{s}(t_i) + \underline{n}_i$$

arvot: $t_1 = 25$ s, $\ell_1 = 25$ mGal ja $t_2 = 35$ s, $\ell_2 = 12$ mGal. Laske pienimmän neliösumman kollokaatiolla $\hat{s}(t_3)$, jos $t_3 = 50$ s. Saa olettaa, että $\underline{n}_i = 0$, eli havainnot ovat tarkkoja.

Vastaus:

$$\hat{s}_3 = \begin{bmatrix} C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix},$$

jossa

$$C_{11} = C_{22} = 100 \text{ mGal},$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{100}{1 + \frac{10}{10}} \text{ mGal} = 50 \text{ mGal},$$

$$C_{31} = \frac{100}{1 + \frac{25}{10}} \text{ mGal} = \frac{1000}{35} \text{ mGal} = 28.57 \text{ mGal}$$

$$C_{32} = \frac{100}{1 + \frac{15}{10}} \text{ mGal} = 40 \text{ mGal},$$

siis:

$$\begin{aligned} \hat{s}_3 &= \begin{bmatrix} 28.57 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 25 \\ 12 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 28.57 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 12 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1045.86}{150} = 6.97 \text{ mGal}. \end{aligned}$$

Luku 12

Eri hyödyllisiä analyysimenetelmiä

Monessa käytännön tasoitus- ja vastaavissa ongelmissa pitää manipuloida suuret yhtälöryhmät. Myös geofysiikkalisissa sovelluksissa tarvitaan tasoitus- tai muita analyysimenetelmiä arvokkaan, tärkeän tiedon erottamiseksi ja ei-tärkeän tiedon poisjättämiseksi. Käytetyt menetelmät ovat myös oltava numeerisesti stabiileja.

Näissä tapauksissa alla esitetyt tekniikat voivat olla hyödyksi. Ne esitetään käytännön kannalta; tyypillisesti nopeat kokeilukielet kuten Matlab tai Octave sisältävät käyttökelpoisen implementaation. On aina parempi kokeilla näitä ennen kuin käytetään resursseja tuotantovalmiin sovelluksen koodaamiseksi.

12.1 Ominaisarvojen ja -vektoreiden laskenta

Ominaisarvotekijä formuloidaan seuraavasti

$$[A - \lambda I] \mathbf{x} = 0, \quad (12.1)$$

määrittävänä on kaikki arvot λ_i — ominaisarvot — ja vastaavat vektorit \mathbf{x}_i — ominaisvektorit — joille tämä pätee. Matriisi A on $n \times n$ ja vektori \mathbf{x} on dimensioltaan n .

Suureiden λ_i määrittäminen tehdään muodollisesti laskemalla *determinantti*:

$$\det [A - \lambda I] = 0.$$

Tämä on n :n asteen yhtälö jolla on n juuria — jotka saattavat hyvinkin olla kompleksisia. Kun ne ovat ratkaistuja, ne sijoitetaan takaisin, ja jokainen tuottaa lineaarisen yhtälöryhmän

$$[A - \lambda_i I] \mathbf{x}_i = 0$$

josta \mathbf{x}_i ratkaistaan.

12.1.1 Symmetrinen (itseadjungoitu) tapaus

Jos A on symmetrinen, siis $A = A^T$, eli *itseadjungoitu*, eli $\langle A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} \rangle$, tai vastaavasti, matriisikielillä, $\mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ kaikille \mathbf{x}, \mathbf{y} , voimme näyttää, että ominaisarvot ovat reaaliarvoisia ja näille vastaavat ominaisvektorit keskenään ortogonaalisia. Näin: olkoon λ_i vektorin \mathbf{x}_i kanssa, ja λ_j vektorin \mathbf{x}_j kanssa. Silloin saamme ylläolevasta

$$\begin{aligned} \lambda_i \mathbf{x}_i &= A\mathbf{x}_i, \\ \lambda_j \mathbf{x}_j &= A\mathbf{x}_j. \end{aligned}$$

Kerro ensimmäinen yhtälö vasemmalta \mathbf{x}_j :lla, ja toinen oikealta \mathbf{x}_i :lla. Tulos:

$$\begin{aligned} \lambda_i \langle \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}_j \cdot A\mathbf{x}_i \rangle, \\ \lambda_j \langle \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i \rangle &= \langle A\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i \rangle. \end{aligned}$$

Vähennä toisistaan:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i \rangle = 0$$

käyttämällä hyväksi matriisin A itse-adjungoituneisuutta. Jos meillä nyt on kaksi eri ominaisarvoa $\lambda_i \neq \lambda_j$, on pakko olla

$$\langle \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i \rangle = 0,$$

toisin sanoen, $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j$. Jos $\lambda_i = \lambda_j$, meillä on *degeneraatio*, mutta voimme aina löytää kaksi vektoria \mathbf{x}_i ja \mathbf{x}_j jotka virittävät kaksiulotteista aliavaruutta joka koostuu kaikista vektoreista joille ominaisarvot λ_i ja λ_j on ratkaisu tällä ominaisarvolla.

Voimme koota kaikki nämä ominaisvektorit $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$ matriisiin R sarakkeina:

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_i & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}.$$

Koska silloin

$$\langle \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \rangle = \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

meillä on myös

$$R^T R = I,$$

toisin sanoen, R on *ortogonaalinen matriisi*.

Koska kaikki R :n sarakkeet täyttävät yhtälöä (12.1), vaikkakin eri arvoille λ_i , saamme kirjoittaa

$$[A - \Lambda] R = 0,$$

where nowmissä nyt Λ on ominaisarvoista koostuva päälävistäjämatriisi: $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Kerro vasemmalta matriisiin R^T kanssa:

$$R^T A R = R^T \Lambda R = \Lambda,$$

matriisiin R ortogonaalisuuden vuoksi. Näin olemme löytäneet *kiertomatriisia joka muuntaa A pääakseleille*:

$$A = R \Lambda R^T,$$

jota saadaan helposti kertomalla vasemmalta matriisilla R ja oikealta matriisilla R^T , sekä havaitsemalla, että $R R^T = I$.

12.1.2 Potenssimenetelmä

Usein haluamme laskea vain matriisin suurinta ominaisarvoa. Silloin hyvä menetelmä on "potenssimenetelmä".

Jos matriisimme on A , valitsemme alkuvektori \mathbf{x} ja kerromme sen toistuvasti matriisilla A , tuloksena

$$A^n \mathbf{x}, n \rightarrow \infty.$$

Tämä konvergoi ominaisvektorille \mathbf{x}_1 joka kuuluu suurimpaan ominaisarvoon λ_1 , mitä sen jälkeen saadaan lasketuksi kaavalla

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A^{n+1} \mathbf{x}\|}{\|A^n \mathbf{x}\|}.$$

Matriisin pienimmän ominaisarvon saa laskettua samalla tavalla soveltamalla menetelmä käänteismatriisille A^{-1} .

Huomaa, että A^n ei välttämättä ole laskentakelpoista suurille arvoille n : voi tapahtua ylivuoto (jolloin ohjelma kaatuu) tai alivuoto (jolloin menetetään tarkkuutta). Siksi pitää *uudelleen skaalata* välitulos $A^n \mathbf{x}$ jokaisessa laskennan askeleessa.

12.2 Singulaariarvohajotelma (SVD)

12.2.1 Periaate

Singulaariarvohajotelma kirjoittaa mielivaltainen matriisi A kolmen matriisin tulona:

$$A = U S V^T.$$

Tässä matriisi S edustaa ilmiön komponenttien *suuruutta* kun taas matriisit U ja V edustavat *rotaatioita* – ne ovat molemmat ortogonaalisia¹. S on diagonaalimatriisi (tarkemmin, diagonaalimatriisi johon voi olla lisätty nollia sisältäviä sarakkeita tai -rivejä.).

Huomaa, että tämä toimii mielivaltaisille matriiseille. A saa olla suorakaiteinen, ts. sarakkeiden ja rivien määrä saa olla eri, ja siinä saa olla rangivajaus. Jos A :n dimensiot ovat $n \times m$, silloin U on $n \times n$ -kokoinen ja V on $m \times m$ -kokoinen. Matriisi S on samankokoinen kuin A .

¹Eli $U^T U = U U^T = I$ ja samoin V :lle.

12.2.2 Neliön muotonen matriisi

Jos A on neliön muotoinen, voimme laskea matriisin A determinantti:

$$\det A = \det U \det S \det V,$$

ja koska ortogonaalisen matriisin determinantti on aina ± 1 , saadaan

$$\det A = \pm \det S.$$

S -matriisin alkiot sen päälävistäjällä ovat samalla sen ominaisarvot:

$$\det S = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

jossa n on S :n koko eli sarakkeiden ja rivien määrä.

Tästä näkyy, että jos S :n joku ominaisarvo on nolla, silloin $\det S = 0$ ja pakosta myös $\det A = 0$, eli A on singulaarinen.

Käänteismatriisin laskeminen:

$$A^{-1} = (USV^T)^{-1} = (V^T)^{-1} S^{-1} U^{-1} = VS^{-1}U^T.$$

Siis, käänteismatriisin SVD:llä on samat U ja V kuin alkuperäismatriisin SVD – vain niiden roolit on vaihtuneet keskenään. Matriisin S^{-1} laskeminen on triviaali: jokainen lävistäjä-alkio on S :n vastaavan lävistäjä-alkion käänteisluku. Tämä tietenkin edellyttää, että ne kaikki ovat $\neq 0$!

12.2.3 Yleinen matriisi

Geometrisesti voimme sanoa, että rotaatiomatriisit U ja V kääntävät matriisi A “pääakseleihin”, jonka jälkeen jokainen akseli on riippumaton toisista: jokaisella akselilla on oma kerroin λ_i . Tarkemmin, U :n sarakkeet ovat matriisin AA^T , ja V :n sarakkeet, matriisin $A^T A$ ominaisvektorit. Molemmat viimeksimainitut matriisit ovat neliön muotoisia ja symmetrisiä.

Voimme kirjoittaa $A^T A = (USV^T)^T USV^T = VS^T U^T USV^T = VS^T SV^T$, josta näkyy, että tämän matriisin ominaisvektorit ovat V :n sarakkeet ja sen ominaisarvot ovat $m \times m$ -kokoisen matriisin $S^T S$:n ominaisarvot. Ne ovat S -matriisin omien ominaisarvojen neliöt. Todistaminen, että AA^T :n ominaisvektorit ovat U :n sarakkeet, sujuu samalla tavalla. Huomaa, että jos $m > n$, silloin AA^T :lla on $|m - n|$ nolla-ominaisarvoa, kuten $A^T A$:lla jos $m < n$.

Yleisessä tapauksessa matriisin S muoto on yksi seuraavista, riippuen siitä, onko $n < m$ vai $n > m$:

$$\begin{bmatrix} \Lambda \\ \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Lambda & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \left| \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right. \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n & \left| \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right. \end{bmatrix}.$$

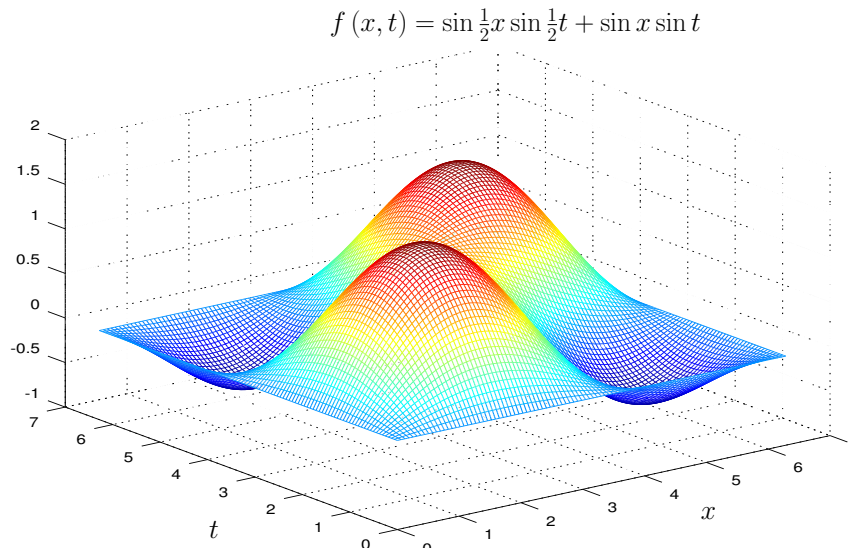
Silloin, jos hajotamme myös matriisit U ja V sarakevektoreiksi,

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix},$$

voimme kirjoittaa

$$A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i.$$

Tämä kehitelmä selittää, mistä nimi “singulaariarvohajotelma” tulee: λ_i ovat ominais- eli singulaariarvot, järjestettynä laskevan itseisarvon mukaan.

Kuva 12.1: Funktio $\sin \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}t + \sin x \sin t$.

12.2.4 Sovelluksia

Sovelluksissa usein on kyse siitä, että A -matriisi sisältää *havaintoarvoja* : alkio $A_{ij} = A(x_i, t_j)$, jossa $x_i, i = 1 \dots n$ on paikka ja $t_j, j = 1 \dots m$ aika. Tässä tapauksessa V :n sarakkeet, $V_{ki} = V_k(x_i), i = 1 \dots n$ ovat jokaiselle k -arvolle eri paikan kuvioita, ja $U_{kj} = U_k(t_j), j = 1 \dots m$ ovat vastaavasti eri aikasarjoja myös jokaiselle k -arvolle. Jokaisella spatiaalikuviolla on oma aikasarja, jolla on sama k -arvo ja amplitudi S_{kk} .

Näin SVD on hyödyllistä geofysikaalisia ilmiöitä analysoidessa, jotka riippuvat sekä paikasta että ajasta. S -matriisiin vastaava alkio $S_{kk} = \lambda_k$ kuvaa ko. kuvion/aikasarjan *vahvuutta* koko ilmiön osana.

Esimerkki: valtameren vuorovesiliike. A_{ij} on vuoroveden kokonaisamplitudi paikalla x_i (joka on siis kaksiulotteinen, $x_i = (\varphi, \lambda)_i \in \mathbb{R}^2$), ajanhetkellä t_j . Ratkaisut ovat vuoroveden eri komponentit, esim. $k = 1$ puolivuorokautinen kuuvuorovesi, $k = 2$ puolivuorokautinen aurinkovuorovesi, jne.

12.2.5 SVD kompressiomenetelmä

Ainoastaan komponenteilla joilla on merkittävä osuus kokonaissignaalissa on $S_{kk} \neq 0$. Ne S :n alkiot jotka ovat käytännössä 0, voidaan poistaa S -matriisista, ja vastaavasti rotaatiomatriisien U ja V merkitsettömät sarakkeet. Itse asiassa tämä on paljon käytetty *kompressiomenetelmä*: $A_{ij} = A(x_i, t_j)$ voi olla videokuva, ja U, V ja S voivat olla yhdessä huomattavasti pienempiä kuin alkuperäinen A !

Voimme myös tarkastaa kehitelmää

$$A = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i.$$

Realistisessa tapauksessa ominaisarvoista monet ovat hyvin lähellä nollaa, ellei suorastaan nolla. Ellivät ole nolla johtuu se yleensä siitä, että käsitelty aineisto on kohinainen. Poistamalla kaikki ominaisarvot jotka ovat absoluuttisesti pienempi kuin sopiva raja-arvo, saadaan matriisi A myös *suodatetuksi* kohinasta. SVD on siis myös *datan siistimismenetelmä*.

12.2.6 Esimerkki (1)

Käytämme tässä esimerkkinä yksiulotteinen värähtelevä kammio kahden peilin välissä $x \in [0, 2\pi)$. Aikaulottuvuus t voisi olla ääretön, mutta rajoitamme senkin nyt tässä väliin $t \in [0, 2\pi)$. Oletamme, että aaltofunktio on kahden värähtelyn summa:

$$f(x, t) = \sin \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}t + \sin x \sin t.$$

Aaltoliikettä kuvaava matriisi A nyt on, jos valitsemme 5×5 tukipistettä neliön muotoisella domeenilla:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.500 & 0.707 & 1.500 & 0 \\ 0 & 0.707 & 1.000 & 0.707 & 0 \\ 0 & 1.500 & 0.707 & -0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tässä olemme säilyneet kolme desimaalia (arvo 0.707 on arvon $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ katkaisu).

Suorittamalla SVD tällä matriisilla saa

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.00000 & 0 \\ -0.70711 & -0.50000 & 0.50000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.70711 & -0.70711 & 0 & 0 \\ 0.70711 & -0.50000 & 0.99992 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00000 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 2.00000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.99985 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00015 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ja

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.00000 & 0 \\ 0.70711 & -0.50000 & 0.50000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.70711 & -0.70711 & 0 & 0 \\ -0.70711 & -0.50000 & 0.99992 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

Kun tarkastetaan S -matriisi, nähdään kaksi isoa ominaisarvoa 2 and 1.99985, joiden jälkeen paljon pienempi 0.00015. Tämä pienempi arvo on numeroiden pyöristämisen seuraus, kuten on suoraan verifioitavissa toistamalla laskenta suuremmalla desimaalien määrällä matriisissa A .

Jos pidetään ainoastaan ensimmäiset kaksi termiä, voidaan laskea

$$A = U\tilde{S}V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.50004 & 0.70705 & 1.49996 & 0 \\ 0 & 0.70705 & 0.99992 & 0.70705 & 0 \\ 0 & 1.49996 & 0.70705 & -0.50004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lähellä alkuperäismatriisia.

12.2.7 Esimerkki (2)

Lähdetään Merentutkimuslaitoksen mareografiaineistosta 1943-1968, ks. taulukko 12.2.

Olemme suorittaneet singulaariarvohajotelman tällä datalla taulukkona A . Singulaariarvot, matriisin S päälävistäjä-alkiot, annetaan taulukossa 12.3 laskevan suuruuden järjestyksessä.

Nähdään, että on noin kolme dominoivaa arvoa, ja loput on tasaisesti paljon pienempi.

Saadakseen selville, mitä datassa olevia kuvioita nämä singulaariarvot edustavat, olemme piirtäneet vastaavat matriisin V sarakkeet, jotka edustavat spatiaalisia kuvioita joissa kaikki 13 mareografia ovat mukana. Jokaisen sarakkeen pituus on 13. Piirroksat ovat kuvassa 12.2.

Nähdään, että ensimmäinen singulaariarvo, vaakaviiva, edustaa kaikkien mareografiene *yhteistä moodia*: Itämeren vedet jotka liikkuvat ylös ja alas yhdessä, lähes samalla tavalla joka paikassa. Tämä moodi edustaa Itämeren

Taulukko 12.1: Suomalaiset mareografit

	Mareografi	Latitudi	Longitudi
1	Hamina	60.56	27.17
2	Helsinki	60.15	24.97
3	Hanko	59.83	22.97
4	Degerby	60.03	20.39
5	Turku	60.41	22.10
6	Rauma	61.13	21.48
7	Mäntyluoto	61.60	21.48
8	Kaskinen	62.39	21.22
9	Vaasa	63.10	21.57
10	Pietarsaari	63.72	22.70
11	Raahe	64.70	24.50
12	Oulu	65.03	25.43
13	Kemi	65.75	24.55

kokonaisvesivolyyymiä, johon vaikuttaa lähinnä veden sisääntulo ja ulosmeno Tanskan salmien kautta, jokiveden tulo, sekä sadanta (haihdunta on pieni).

Toinen ja kolmas moodi ovat hyvin samanlaisia, vaikkakin erinäköisiä. Ne edustavat vedenpinnan (taso-)kallistuksia, ns. “kylpyammemoodit”. Kuten argumentoitiin julkaisussa [Vermeer et al. \[1988\]](#), nämä kolme moodia yhdessä selostavat lähes koko Itämeren pinnan vaihtelevuutta pystysuunnassa.

Me voimme testata tämä hypoteesi. Säilytetään S -matriisissa vain ensimmäiset kolme singulaariarvoa (päälävistäjä-alkiota), ja nollattan loput. Sen jälkeen lasketaan $A - U\tilde{S}V^T$, missä \tilde{S} on näin katkaistu S -matriisi. Näin saadut jäännösvirheet, jotka edustavat kaikkea signaalia, jota ensimmäiset kolmet moodit jättävät selittämättä, ovat annettuna taulukossa [12.3](#).

Tämän kuvan yksikkö on millimetrejä. Näemme, että suurimmat jäännösvirheet ovat ± 21 mm. Useimmat jäännösvirheet ovat välissä ± 10 mm. Vertailun vuoksi, vain ensimmäisen sigulaariarvon (yhteisen moodin) poisto jättää monet jäännösvirheet yli ± 50 mm, erityisesti Pohjanlahden ja Suomenlahden pohjukissa.

Kuvan oikealla puolella näkyy koe, jossa lisättiin *karkea virhe* yhteen havaintoarvoon. Se tulee näkyviin poikkeamana. Kuitenkin on syytä olla huolellinen käyttäessä SVD karkeiden virheiden löytövälineenä: jos rekonstruktiossa on mukana monta singulaariarvoa, voi yksi niistä “absorboida” karkean virheen, ja se vääristää koko ratkaisun.

Piirretään vielä yhteinen moodi ajan funktiona, laskettuna seuraavasti:

$$\bar{h}(t_i) U_{i1} S_{11} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m V_{k1}.$$

Ks. kuva [12.4](#), missä myös vertailun vuoksi Hangon ja Kemin aikasarjat. Näemme, että veden yleispiirteinen käyttäytyminen on hyvin mallinnettu.

12.3 Pääkomponenttianalyysi (PCA) eli Empiirisiä ortogonaalisia funktioita (EOF)

Tämä menetelmä on lähellä SVD:tä. Tarkastele taas havaintojen matriisi $A_{ij} = A(x_i, t_j)$, ja nyt oletta, että se sisältää, ei raakahavaintoja vaan *poikkeamia* jostain keskiarvosta tai yksinkertaisesta malliarvosta. Silloin voimme generoida (empiirisen) *varianssi-kovarianssimatriisin*, seuraavalla yksinkertaisella toimeenpiteellä:

$$Q = A^T A$$

eli

$$Q_{ik} = \sum_{j=1}^n A(x_i, t_j) A(x_k, t_j).$$

Taulukko 12.2: Mareografidataa Suomen rannikolta, vuodet 1943-86. Vuoden keskiarvot. Vuodet 1949 ja 1953 puuttuvat epätäydellisinä.

A = [2083,2060,2035,1994,2030,1972,1972,1970,1964,1938,1969,1996,2011; %1943
 1998,1987,1973,1933,1964,1896,1899,1894,1885,1856,1880,1906,1936; %1944
 1986,1978,1971,1928,1933,1880,1877,1858,1849,1810,1827,1850,1850; %1945
 1952,1935,1922,1882,1893,1849,1848,1839,1819,1799,1827,1869,1867; %1946
 1832,1827,1807,1763,1767,1725,1718,1701,1700,1656,1686,1720,1722; %1947
 2042,2006,1992,1942,1955,1908,1902,1885,1869,1849,1885,1906,1929; %1948
 1977,1972,1955,1914,1920,1872,1866,1854,1820,1810,1829,1862,1862; %1950
 1847,1830,1812,1782,1786,1742,1737,1732,1701,1699,1730,1769,1769; %1951
 1997,1963,1959,1912,1919,1870,1850,1831,1801,1781,1808,1845,1848; %1952
 1933,1912,1888,1835,1847,1795,1784,1779,1742,1712,1759,1801,1794; %1954
 1996,1975,1945,1883,1896,1830,1814,1786,1764,1726,1765,1807,1786; %1955
 1966,1951,1923,1871,1876,1811,1793,1768,1747,1697,1740,1762,1753; %1956
 2008,1985,1953,1887,1900,1840,1822,1795,1768,1725,1777,1812,1799; %1957
 1914,1900,1881,1824,1832,1769,1745,1717,1690,1647,1689,1741,1721; %1958
 1853,1842,1824,1767,1768,1711,1688,1663,1644,1603,1656,1692,1683; %1959
 1772,1778,1770,1721,1723,1669,1635,1608,1573,1530,1572,1605,1590; %1960
 2036,2004,1977,1922,1943,1873,1851,1824,1799,1764,1817,1852,1843; %1961
 2004,1980,1951,1882,1891,1825,1802,1772,1750,1708,1786,1819,1786; %1962
 1860,1829,1804,1738,1750,1683,1661,1626,1603,1569,1610,1662,1637; %1963
 1964,1930,1894,1824,1843,1762,1747,1720,1696,1675,1719,1766,1759; %1964
 1895,1891,1865,1798,1804,1733,1702,1670,1638,1607,1637,1693,1657; %1965
 1857,1847,1825,1761,1778,1709,1684,1655,1627,1597,1639,1712,1670; %1966
 2024,2012,1980,1916,1927,1860,1841,1806,1782,1748,1796,1850,1834; %1967
 1886,1868,1840,1768,1776,1700,1648,1642,1615,1578,1616,1658,1645]; %1968

Tässä olemme keskiarvostaneet ajan yli saadaksemme spatiaalisia kovariansseja. Q on neliön muotoinen, positiivis-definiitti matriisi johon voimme soveltaa SCD:tä, tai yksinkertaisemmin, kiittää se pääakseleihin:

$$Q = R\Lambda R^T,$$

jossa R on ortogonaalinen matriisi ja Λ diagonaalinen ominaisarvojen matriisi. Jokainen R :n sarake nyt edustaa *spatiaalista kuviota*; vastaava ominaisarvo λ_i Λ -matriisista edustaa sen *vahvuutta*. Koska spatiaalikuviot eivät ole korreloitua (eli matriisin R sarakkeet ovat ortogonaalisia) on nimitys “empiiriset ortogonaaliset funktiot” ymmärrettävää.

Käytännön tilanteissa usein vain muutama selkeästi nollasta eroava ominaisarvo säilytetään; muut heitetään pois, mikä pienentää matriisit Λ ja R (josta tulee nyt suorakaide). Tämä ratkaisu edustaa alkuperäisdataa hyvällä tarkkuudella, mutta datan määrä on vain murto-osa alkuperäisestä. Se on siis taas *kompresiotekniikka*.

Analysoidaan sama mareografidata kuin aiemmin SVD:llä. Nyt annetaan varianssi-kovarianssimatriisin ominaisarvot, ja sen jäännösvirheet kun käytetään vain kolme dominanttia ominaisarvoa. Tämä on signaalin “energia” jota jää “selostamatta” näiltä pääkomponenteilta.

Päätös montako pääkomponenttiä on säilytettävä – eli mitä on signaali ja mitä kohina – on hieman mielivaltainen ja riippuvainen käyttötarkoituksesta.

12.4 RegEM-menetelmä

RegEM (Regularized Expectation-Maximation) on pääkomponenttianalyysin variantti jossa datassa voi olla aukkoja mielivaltaisissa paikoissa, ja aukot täytetään optimaalisella tavalla lähtemällä ei-puuttuvista datasta lasketulta varianssi-kovarianssimatriisilta. Sen jälkeen päivitetään varianssi-kovarianssimatriisi, nyt ottamalla täyttödata mukaan, huolellisesti silmälläpitäen täyttämisen aiheuttamaa epävarmuutta. Menetelmä iteroidaan kunnes saavutetaan konvergenssia.

Tarvittava Matlab-koodi löytyy Tapio Schneiderin webbisivulta, <http://www.clidyn.ethz.ch/imputation/index.html>. Schneider [2001].

Taulukko 12.3: SVD:n tuottamat singulaariarvot laskevassa suuruusjärjestyksessä.

1	32163.6050
2	377.3280
3	99.2063
4	52.3408
5	37.3715
6	32.1409
7	29.5212
8	26.3864
9	22.2418
10	19.6933
11	17.5263
12	10.6901
13	9.1831

Taulukko 12.4: Pääkomponenttianalyysin varianssi-kovarianssimatriisin Q ominaisarvot, laskevassa suuruusjärjestyksessä.

1	98762.0346
2	3398.0554
3	419.6834
4	92.7742
5	57.5507
6	43.4691
7	37.7828
8	27.1429
9	18.6642
10	16.3040
11	11.9502
12	4.7022
13	3.2739

12.5 Matriisimenetelmiä

12.5.1 Choleskyn hajotelma

Choleskyn hajotelma soveltuu symmetriseen positiivis-definiittiin matriisiin: annettuna matriisi A , löydä matriisi Γ jolle

$$A = \Gamma\Gamma^T.$$

Yleisessä tapauksessa kompleksinen matriisi A on oltava hermiittinen, ts. $A^\dagger = \overline{A}^T = A$, missä \dagger on hermitointioperaattori: kompleksin konjugaatin ja transponoinnin yhdistelmä. Silloin hajotelma on

$$A = \Gamma\Gamma^\dagger = \Gamma\overline{\Gamma}^T.$$

12.5.2 LU -hajotelma

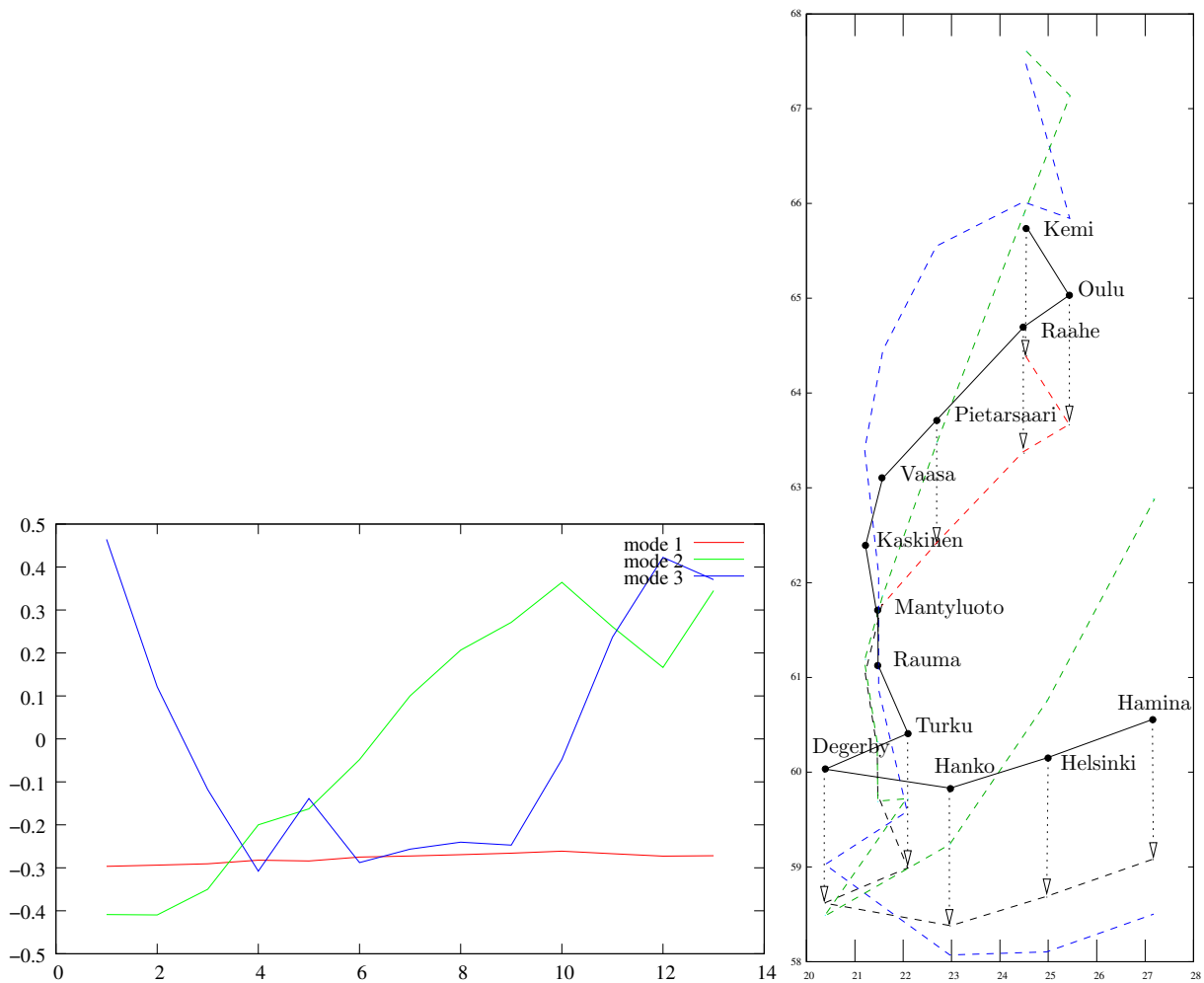
Tämä merkitsee annetun matriisin A kirjoittaminen yli- ja alakolmiomatriisin tulona:

$$A = LU,$$

eli

$$A = LDU,$$

jossa D on päälävistäjämatriisi.



Kuva 12.2: Spatiaalikuviot SVD:n löytämässä ensimmäisessä kolmessa singulaariarvossa. Vasemmalla, vaakakselissa mareografin numero; oikealla, maantieteellinen kuva.

http://en.wikipedia.org/wiki/LU_decomposition.

Käytämme 3×3 -matriisin tapaus yksinkertaisena esimerkkinä:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Redukoidaan tämä matriisi vähentämällä toisesta rivistä, a_{21}/a_{11} kertaa ensimmäistä riviä, ja kolmannesta rivistä, a_{31}/a_{11} kertaa ensimmäistä riviä. Tämä on sama asia kuin kertominen seuraavalla matriisilla:

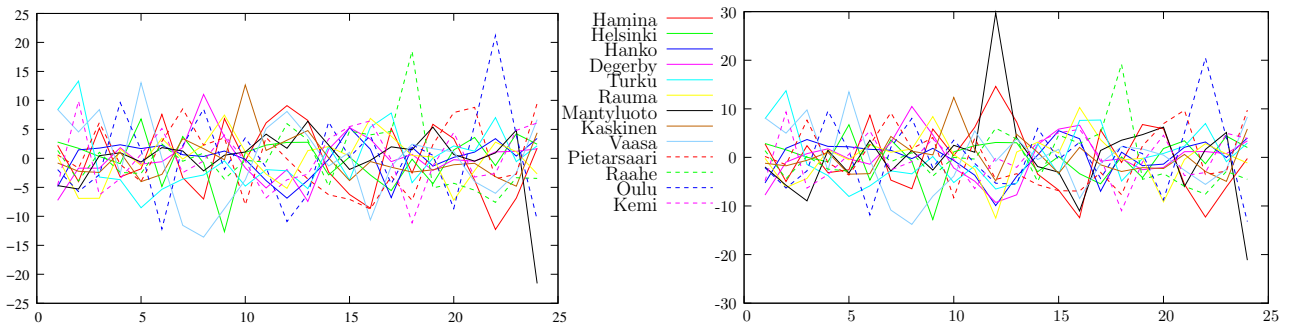
$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seuraavasti redukoidaan vähentämällä kolmannelta riviltä toinen rivi kerrottuna ilmaisulla $\widetilde{a}_{32}/\widetilde{a}_{22}$, jossa aaltoviiva kertoo, että nämä alkioit tulevat ensimmäisestä reduktio-askeltestä: $\widetilde{a}_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}$ ja $\widetilde{a}_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}$. Tämä taas on samanarvoinen kertomisen kanssa seuraavalla matriisilla:

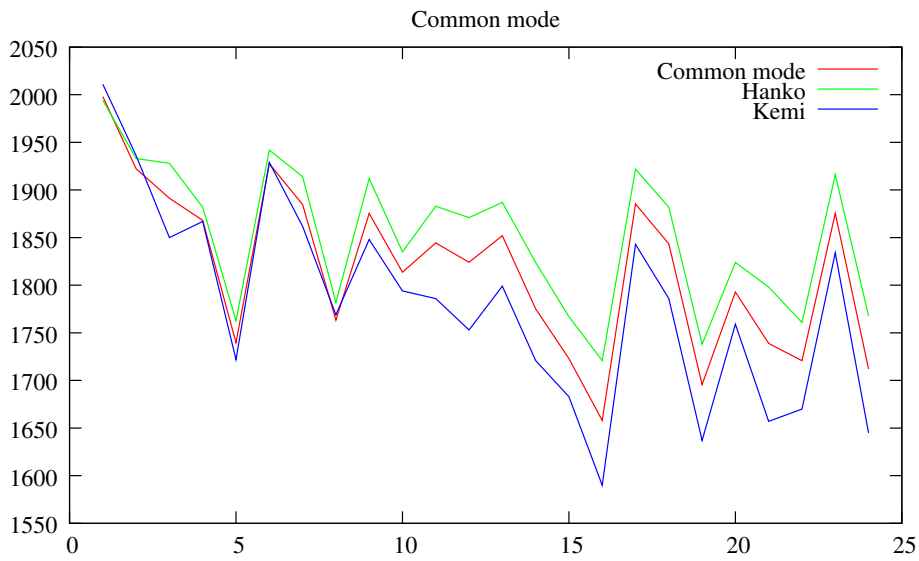
$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\widetilde{a}_{32}}{\widetilde{a}_{22}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Nähdään, että $L = L_2L_1$ on taas alakolmiomatriisi:

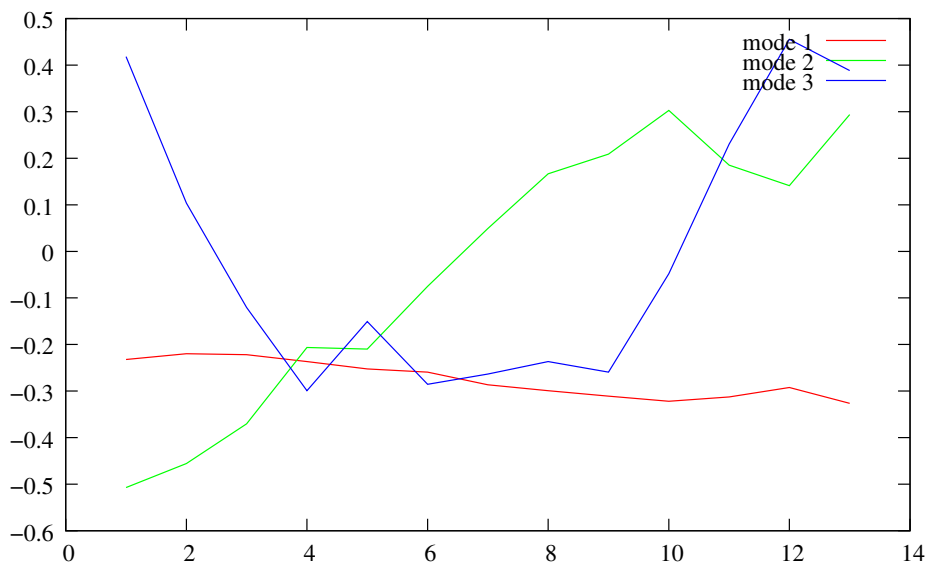
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} + \frac{a_{21}}{a_{11}}\frac{\widetilde{a}_{32}}{\widetilde{a}_{22}} & -\frac{\widetilde{a}_{32}}{\widetilde{a}_{22}} & 1 \end{bmatrix}.$$



Kuva 12.3: Jäännösvirheet sen jälkeen, kun ensimmäiset kolme singulaariarvoa on postettu. Yksikkö mm. Oikealla: 50 mm:n karkea virhe oli lisätty Mäntyluodon aikasarjaan epookkiin 12.



Kuva 12.4: Yhteinen moodi, Hangon ja Kemin mareograafiaikasarjat.



Kuva 12.5: PCA:n löytämät ensimmäisten kolmen singulaariarvon spatiaalikuviot. Vaaka-akselilla mareografin numero. Nähdään, että tulos on hyvin samanlainen kuin SDV:n tapauksessa.

Taulukko 12.5: Jäännöskovarianssimatriisi ensimmäisten kolmen singulaariarvon poistamisen jälkeen. Yksikkö mm^2

23	-6	-6	-6	-9	-3	0	4	12	8	0	-21	0
-6	16	0	-4	-3	-9	-3	1	11	1	0	0	-3
-6	0	8	4	-1	0	-3	-3	-3	1	-1	3	3
-6	-4	4	11	0	4	-1	-2	-14	0	2	4	3
-9	-3	-1	0	27	0	-8	-4	-4	-1	-8	5	9
-3	-9	0	4	0	15	5	0	-15	-9	2	9	0
0	-3	-3	-1	-8	5	27	-2	-9	-10	1	13	-8
4	1	-3	-2	-4	0	-2	14	-4	0	0	-2	-2
12	11	-3	-14	-4	-15	-9	-4	43	0	2	-18	-2
8	1	1	0	-1	-9	-10	0	0	30	-12	-10	0
0	0	-1	2	-8	2	1	0	2	-12	27	-6	-8
-21	0	3	4	5	9	13	-2	-18	-10	-6	42	-15
0	-3	3	3	9	0	-8	-2	-2	0	-8	-15	23

Redukoitu A -matriisi on nyt seuraavan näköinen:

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \\ 0 & 0 & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} - \frac{a_{32} - a_{31}a_{12}/a_{11}}{a_{22} - a_{21}a_{12}/a_{11}} \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \right) \end{bmatrix}.$$

Tämä on monimutkaisena näköinen, mutta laskennallisesti se on suoranaista. Se toimii yhtä hyvin suuremmille dimensioille kuin 3^2 . Meillä on nyt siis

$$A = LU.$$

Huomaa, että L -matriisin päälävistäjä-alkiot ovat 1, kun U :n päälävistäjä-alkiot eivät ole; voimme vielä kirjoittaa

$$U = D\bar{U},$$

jossa D on päälävistäjä-matriisi ja matriisilla \bar{U} on ykkösiä päälävistäjällä. Nyt meillä on

$$A = LD\bar{U}.$$

LU -hajotelma on keino ratkaista yhtälöryhmä

$$A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b} :$$

ensin ratkaistaan

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

ratkaisuna \mathbf{y} , mikä onnistuu alkio kerrallaan takasinsijoituksella. Sel jälkeen ratkaistaan

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

samalla tavalla, ratkaisuna \mathbf{x} , mutta nyt työskennellen viimeisestä alkioista takanapäin alkuun.

Symmetriselle matriisille A on

$$A = LDU = \Gamma\Gamma^T,$$

jossa $L = U^T$ ja $\Gamma = L\sqrt{D} = (\sqrt{D}U)^T$. Päälävistäjä-matriisin neliöjuuren määritelmä on triviaalinen.

12.6 Informaatiokriteereitä

Usein haluamme tietää, mikä on “paras” malli annettuna tietty havaintoaineisto. Mitä usein mutkistaa tähän kysymykseen vastaamisesta on, että vahvasti autokorreloineet aikasarjat sisältävät huomattavasti vähemmän *riippumatonta* informaatiota kuin näyttävät sisältävän vain datapisteiden määrän perusteella. Looginen kysymys nyt on, miten arvioida paljonko merkitsevää informaatiota havaintoaineistossa oikeasti on, eli tilastollisen päättelyn kontekstissä, kinka hyvin voimme mallintaa, siis kuvata, aineistoa käyttämällä mahdollisimman vähän vapaita parametreja.

Tässä on kyse kahdesta asiasta:

²Kuitenkin stabiili ratkaisu edellyttää rivien ja sarakkeiden uudelleen järjestelyä laskevaan päälävistäjä-alkion suuruusjärjestykseen – “pivoting”.

1. miten hyvin malli sopii dataan, mitä tyypillisesti arvioidaan käyttämällä jäännösvirheitten neilöitten summa;
2. montako vapaita parametreja tarvitaan.

On olemassa erilaisia tapoja yhdistää näitä näkökohtia kun muodostetaan arviointikriteereja *mallien valitsemiseksi*.

12.6.1 Akaike

Akaiken informaatiokriteeri on (http://en.wikipedia.org/wiki/Akaike_information_criterion):

$$\underline{AIC} = 2k - 2 \ln \underline{L},$$

jossa k on tuntemattomien eli mallin parametrien määrä, ja L on mallin uskottavuusfunktion (“likelihood function”) arvo, mikä pitää maksimoida.

Tavallisessa tapauksessa missä havainnot ovat normaalisti jakautuneet ja toisistaan riippumattomat, tämä on

$$\underline{AIC} = 2k + n \left[\ln \frac{2\pi \sum_{i=1}^n v_i^2}{n} + 1 \right],$$

jossa v_i ovat jäännösvirheet ja n on havaintojen määrä.

Tyypillisesti informaatiokriteeriä käytetään siihen, että *vertaillaan keskenään* samaan dataan perustuvia, vaihtoehtoisia malleja, siis joille n -arvo on sama. Silloin saamme jättää pois vaihtoehtoiset ja kirjoittaa

$$\underline{AIC} = 2k + n \ln \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n}.$$

Yleisemmässä tapauksessa, jolloin datassa on mahdollisesti tilastollisia riippuvuuksia eli korrelaatiota, kirjoitetaan

$$\underline{AIC} = 2k + n \ln \frac{\underline{\mathcal{E}}}{n},$$

where we definemissä määritellään

$$\underline{\mathcal{E}} = \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\Sigma}^{-1} \underline{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j (\underline{\Sigma}^{-1})_{ij},$$

painotettu jäännösvirheiden neliöllinen summa. Tässä $\underline{\Sigma}$ on havaintojen varianssi-kovarianssimatriisi. Suure $\underline{\mathcal{E}}$ on jakautunut χ_{n-k}^2 -jakauman mukaan, missä $n - k$ on vapausasteiden määrä eli redundanssi.

12.6.2 Akaike pienille datan määrille

Jos n on pieni tai k ei ole kovin pientä verrattuna n , usein sovelletaan “pienien näytteiden korjaus”:

$$\underline{AIC}_c = \underline{AIC} + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}.$$

12.6.3 Bayesiläinen

Vaihtoehtoinen Schwarzin eli Bayesiläinen informaatiokriteeri (http://en.wikipedia.org/wiki/Bayesian_information_criterion) on

$$\underline{BIC} = k \ln n - 2 \ln \underline{L},$$

ja taas normaalijakauman ja tilastollisen riippumattomuuden tapauksessa

$$\underline{BIC} = k \ln n + n \ln \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n}.$$

Tämän kaiken idea on, että tämä parametri on minimoitava, tuottaen mahdollisimman pieniä jäännösvirheitä, muttei lisäämällä vapaiden parametrien määrää ylenpalttisesti.

12.7 Tilastollisia temppuja

12.7.1 Monte Carlo, Resampling, Jackknife, Bootstrap

Monte Carlo -tyyppiset simulointimenetelmät ovat nykyisin suosittuja. Idea on generoida suuri määrä tutkitun fysikaalisen prosessin mallilaskennan toteutuksia, esimerkiksi lisäämällä yhteen ratkaisuun synteettistä, realistisen näköistä kohinaa.

Näin generoidun ratkaisujoukon eli *ensemblen* tilastolliset ominaisuudet sitten tutkitaan empiirisesti, avain kuin olisi kyse oikeasta havaintodatasta. Ensemblen jäsenten määrä voi olla varsin suuri, kymmeniä tuhansia; itse asiassa paljon suurempi kuin olemassa olevan havaintodatan määrä.

Menetelmän variantti generoi realisaatioita poimimalla, satunnaisesti, alkioita olemassa olevasta realisaatioiden joukosta. Poimintaprosessi on oltava aikuisten oikeasti satunnainen; yksi tekniikka on *näyteotto palautuksella*, joka mahdollistaa varsin suurten ensembleiden muodostamista, joilla on kuitenkin alkuperäisen havaintodatan tilastolliset ominaisuudet. Tätä tekniikkaa kutsutaan *bootstrappingiksi*.

Yksi varhainen, alkeellinen bootstrappingin versio kehitti (ellei peräti keksi) John Tukey. John Tukey tunnetaan lähinnä FFT:n keksijänä. Menetelmän nimi on *jackknife*, koska se on sekä yksinkertainen että yleiskäyttöinen. Se toimii näin: jos sinulla on menetelmä M hyödyllisten parametrien laskemiseksi havaintodatasta, sovelta menetelmä *jättäen pois yksi havainto*, vuorollaan jokaiselle aineiston havainnolle.

Sen jälkeen lasket keskiarvon ja varianssin jokaiselle estimoitavissa olevalle parametrille näistä n tuloksesta: $M_{-1}, M_{-2}, \dots, M_{-(n-1)}, M_{-n}$. Kokemuksen mukaan keskiarvo on harhaton parametrin keskiarvon estimaattori, ja *jackknifen* varianssi on, skaalauksen jälkeen, aika hyvä parametrin varianssin estimaattori.

Taulukossa 12.6 on Matlab-skripti joka suorittaa lineaariregression perinteisellä pienimmän neliösumman menetelmällä, mutta laskee myös *Jackknifen* avulla estimaatioita lineaarisovituksen parametreille ja niiden keskivirheille. *Jackknifen* etu on, että ei tarvitse olla syvä ymmärrys, miten parametrimme estimoidaan. Tässä esimerkkitapauksessa meillä on tuo syvä ymmärrys, mitä tekee vertailun mahdolliseksi.

12.7.2 Parzenin ikkunamenetelmä

http://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_density_estimation

Tämä tekniikka generoi jatkuvan funktion diskreetteistä, realisaatioiden antamista arvoista, esimerkiksi Monte-Carlo simulaatiosta. Se toimii kertomalla jokainen diskreetti todennäköisyysarvo kellomäisellä jakaumafunktiolla jonka keskipiste laitetaan realisaation paikalle, ja summaamalla ne kaikki.

Jos annetut arvot ovat $(x_i, y(x_i))$, $i = 1, \dots, n$, konstruoitu funktio voi olla seuraavan näköinen:

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n y(x_i) \left(\Delta \sqrt{2\pi} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x_i)^2}{\Delta^2} \right),$$

gaussilaisille perusfunktioille. Perusfunktion leveysarvo Δ tulee valita huolellisesti, ihan oma ongelmansa.

12.7.3 Bayesiläinen päättely

Tämä on hyvin laaja aihe. Aloitetaan Internetiltä poimitulla esimerkillä.

Tämän esimerkin antoi Yudkowsky [2003]:

- 1.0% 40-vuotiaaisesta naisista sairastuu rintasyöpään.
- 80% naisista joilla on rintasyöpä, saavat positiivisen tuloksen seulontamammografiasta.
- Myös terveistä naisista 9.6% saavat positiivisen testituloksen.

Paljonko on todennäköisyys, että naisella, jonka testituloksella oli positiivinen, oikeasti sairastuu rintasyöpään?

Tässä tapauksessa Bayesiläinen analyysi tutkii *esiintymistiheyksiä*³. Olettakaamme, että on 1000 naista. Olkoon parametri P , jolla on kaksi mahdollista arvoa, $P = 0$ ei ole syöpää, $P = 1$ on syöpä. Olkoon havainto testi Q , 0 negatiivinen testituloksella, 1 positiivinen tulos. Silloin voimme piirtää seuraava PQ esiintymistiheyksien diagramma:

³Kirjallisuudessa löytyy usein vastakkainasettelua Bayesiläisen ja "frekventistisen" lähestymistapojen välillä. Tämän näennäisen ristiriidan taustana löytyy runsaasti filosofiaa.

Taulukko 12.6: *Jackknife* vastaan perinteinen pinimmän neliösumman menetelmä.

```

%
% This script computes a linear regression for 30 annual mean global
% temperatures from the GISTemp data set. Units: C, relative 1951-1980.
%
giss = [1978 0.055;
1979 4.04769e-18;
1980 0.19;
1981 0.225833;
1982 0.119167;
1983 0.200833;
1984 0.166667;
1985 0.0575;
1986 0.121667
1987 0.1475;
1988 0.349167;
1989 0.179167;
1990 0.328333;
1991 0.368333;
1992 0.29;
1993 0.0991667;
1994 0.129167;
1995 0.336667;
1996 0.32;
1997 0.339167;
1998 0.528333;
1999 0.434167;
2000 0.343333;
2001 0.365;
2002 0.575833;
2003 0.491667;
2004 0.544167;
2005 0.545;
2006 0.564167;
2007 0.610833];
dataspan = [1:30];
n = size(dataspan,2)
% Loop through the data items, leaving one out in turn
% NOTE: the last looping (n+1) produces the LSQ solution for ALL data
for i = 1:n+1
dataspan = [1:i-1 i+1:n];
times = giss(dataspan,1) - 1978;
ell = giss(dataspan,2);
o = ones(size(dataspan))';
% Design matrix:
A = [o times];
% least squares:
N = inv(A'*A);
RHS = A'*ell;
sol = N*RHS;
v = ell-A*sol;
% Variance of unit weight, posterior est.
sigma2 = (v'*v)/(n-1);
N = sigma2 * N;
% Store jackknife solutions
if i < n+1
J1(i) = sol(1);
J2(i) = sol(2);
end
end
fprintf(1,'\nLeast Squares solution:\n');
fprintf(1,'—————\n');
fprintf(1,'Intercept: %10.5f +/- %10.5f\n', sol(1), sqrt(N(1,1)));
fprintf(1,'Trend: %10.5f +/- %10.5f\n', sol(2), sqrt(N(2,2)));
Jmean1 = mean(J1);
dJ = J1 - Jmean1;
Jvar1 = ((n-1)/n) * (dJ*dJ');
Jmean2 = mean(J2);
dJ = J2 - Jmean2;
Jvar2 = ((n-1)/n) * (dJ*dJ');
fprintf(1,'\nJackknife solution:\n');
fprintf(1,'Intercept: %10.5f +/- %10.5f\n', Jmean1, sqrt(Jvar1));
fprintf(1,'Trend: %10.5f +/- %10.5f\n', Jmean2, sqrt(Jvar2));
fprintf(1,'\nCompare this with the above.\n');

```


	$Q = 0$	$Q = 1$
$P = 0$	895	95
$P = 1$	2	8

Tästä nähdään, että $95+8$ naisesta joiden testitulokseksi on positiivinen, 8, eli hieman alle 8%, sairastuvat oikeasti rintasyöpään.

Voimme abstrahoida tästä populaation koko pois jakamalla sillä, jolloin saa prosenttimääriä:

	$Q = 0$	$Q = 1$
$P = 0$	89.5	9.5
$P = 1$	0.2	0.8

Voimme nyt määritellä seuraavat todennäköisyydet:

$p(P)$ todennäköisyys olla sairastunut ($p(P = 1) = 1\%$) tai ei olla sairastunut ($p(P = 0) = 99\%$) syöpään.

$p(Q)$ positiivisen ($p(Q = 1) = 10.3\%$) tai negatiivisen ($p(Q = 0) = 89.7\%$) testituloksen todennäköisyys.

$p(Q|P)$ Q :n ehdollinen todennäköisyys annettuna P : esim., $9.5\% / (89.5\% + 9.5\%) = 9.6\%$ että saisi $Q = 1$ kun $P = 0$, siis väärä positiivinen testitulos.

$p(P|Q)$ P :n ehdollinen todennäköisyys annettuna Q : esim., $0.8\% / (0.8\% + 9.5\%) = 7.7\%$ että saisi $P = 1$ jos $Q = 1$, siis olla sairastumassa kun testitulos oli positiivinen.

Nyt Bayesin lause sanoo (ja tämä on helppoa todistaa tapauksessa, jolloin meillä on populaation täydellistä esiintymistiheysdataa):

$$p(P|Q) = p(Q|P)p(P)/p(Q).$$

Mielenkiintoinen tapaus on, kun ei ole saatavissa näin täydellistä dataa. Esimerkiksi meillä on havainnot Q ja tiedämme, minkälainen havaintojen jakauma jokainen annettu P -arvo tuottaisi; ja haluamme tietää, eli päätellä, mikä on P :n todennäköisyysjakauma annettuna havainnomme Q . Tätä kutsutaan *käänteiseksi päättelyksi*, ja yllä oleva lause mahdollistaa juuri sen. . . mikäli meillä on käytettävissä jakauma $p(P)$, niin sanottu parametrin P *a priori* jakauma. Monessa tosielämän tilanteessa ainoa *a priori* -informaation lähde on asiantuntijoiden arvailu.

Kirjallisuutta

- Joel Ahola. Nuottavaaran siirroksen deformaatiotutkimus GPS-mittausten avulla. Master's thesis, Teknillinen korkeakoulu, maanmittausosasto, Espoo, helmikuu 2001. [31](#)
- A.L. Allan. The principles of theodolite intersection systems. In *Proceedings, 2nd FIG/ISRPS Industrial and Engineering Survey Conference*, London, 1987. [27](#)
- Anon. JHS154. ETRS89 -järjestelmään liittyvät karttaprojektiot, tasokoordinaatit ja karttalehtijako (Map projections, plane co-ordinates and map sheet division in relation to the ETRS89 system). Web site, Finnish National Land Survey, 2008. URL: <http://www.jhs-suositukset.fi/suomi/jhs154>, accessed Sep. 18, 2009. [17](#)
- Willem Baarda. *S-transformations and criterion matrices*, volume 5 no. 1 of *New*. Netherlands Geodetic Commission, Delft, 1973. [1](#), [9](#), [10](#), [19](#)
- T.C. Bailey and A.C. Gatrell. *Interactive Spatial Data Analysis*. Longman Scientific & Technical, England, 1995. [76](#)
- M. A. R. Cooper. *Control surveys in civil engineering*. Collins, Department of Civil Engineering, The City University, London, 1987. [1](#), [4](#), [9](#), [31](#), [32](#), [33](#), [53](#)
- FIG Commission 6. Engineering Surveys. Technical report, FIG, 1998. [31](#)
- Weikko A. Heiskanen and Helmut Moritz. *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1967. [77](#)
- Ulla Kallio. Suora, ympyrä, pallo ja taso. In Jaakko Santala, editor, *Moniulotteinen mallintaminen ja visualisointi*, pages 372–399. Teknillinen korkeakoulu, maanmittausosasto, Otaniemi, 1998a. Mittaus- ja kartoitustekniikan tutkijankoulutuskurssi (1. jakso), 2-6 marraskuuta 1998. [23](#)
- Ulla Kallio. *Tasotituslasku*. Number 587. Otatieto, 1998b. [1](#), [3](#), [4](#), [7](#), [9](#), [23](#), [31](#), [53](#), [55](#)
- R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME, J. Basic Eng., Series 82D*, pages 35–45, 1960. [53](#)
- R.E. Kalman and R.S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME, J. Basic Eng., Series 83D*, pages 95–108, 1961. [53](#)
- Esa Kärkäs. 3d approach in theodolite observation analysis. In Jaakko Santala, editor, *Esitelmien tekstit*, pages 66–75. Teknillinen korkeakoulu, maanmittausosasto, Otaniemi, 1993. Mittaus- ja kartoitustekniikan tutkijankoulutusseminaari, 6-10 syyskuuta 1993. [27](#)
- J. Edward Krakiwsky, editor. *Papers for the CIS adjustment and Analysis seminar*, 1983. The Canadian Institute of Surveying. [23](#)
- Ulla Lankinen. Vapaan pisteverkon tasoituksesta ja analysoinnista. Master's thesis, Teknillinen korkeakoulu, rakennus- ja maanmittaustekniikan osasto, Espoo, joulukuu 1989. [1](#)
- Alfred Leick. *GPS Satellite Surveying*. Wiley, 1995. [1](#), [9](#), [23](#), [53](#)
- Edward M. Mikhail and F. Ackermann. *Observations and Least Squares*. Harper & Row, 1976. [53](#), [76](#)
- Tommi Norri. Optinen kolmiulotteinen koordinaattimittaus. In Jaakko Santala and Katri Koistinen, editors, *Mittausteknologiat ja mittausprosessit*, pages 66–75. Teknillinen korkeakoulu, maanmittausosasto, Otaniemi, 1999a. Mittaus- ja kartoitustekniikan tutkijankoulutuskurssi, 25-26 marraskuuta 1999. [23](#), [27](#)
- Tommi Norri. Tarkka kolmiulotteinen teodoliittimittausjärjestelmä ja sen tarkkuustutkimus. Master's thesis, Teknillinen korkeakoulu, maanmittausosasto, Espoo, toukokuu 1999b. [27](#)
- Athanasios Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1965. [35](#), [36](#), [37](#)
- Hannu Salmenperä. Valvonta- ja muodonmuutosmittaukset. Technical report, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Geoinformatiikka, Tampere, 1995. [27](#)

- Jaakko Santala. *Teodoliitin jaotusvirheiden määrittäminen multikollimaattorihavainnoista*. PhD thesis, Teknillinen korkeakoulu, maanmittausosasto, 1981. lisensiaattityö. 35
- Tapio Schneider. Analysis of Incomplete Climate Data: Estimation of Mean Values and Covariance Matrices and Imputation of Missing Values. *Journal of Climate*, 14:853–871, 2001. <http://clidyn.ethz.ch/papers/imputation.pdf>. 89
- Syed Abdul Rahman Shibili. Afaq on geostatistics. <http://www.ai-geostatis.org/>, 2000. 76
- Gilbert Strang and Kai Borre. *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley - Cambridge Press, 1997. 1, 9, 23, 27, 53
- Govert Strang van Hees. Variance- Covariance Transformation of Geodetic Networks. *manuscripta geodaetica*, 7:1–18, 1982. 9
- Tamino. To AR1 or not to AR1. URL: <http://tamino.wordpress.com/2008/08/04/to-ar1-or-not-to-ar1>, August 2008. Accessed August 5, 2008. 40
- Peter Vaníček and Edward Krakiwsky. *Geodesy – The Concepts*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1986. 31
- Martin Vermeer, Juhani Kakkuri, Pentti Mälkki, Kimmo Kahma, Matti Leppäranta, and Hanna Boman. Land uplift and sea level variability spectrum using fully measured monthly means of tide gauge readings. In *Finnish Marine Research*, pages 3–75. Finnish Institute of Marine Research, Helsinki, 1988. 88
- Eliezer Yudkowsky. An Intuitive Explanation of Bayesian Reasoning, 2003. URL: <http://www.yudkowsky.net/rational/bayes>. Accessed March 26, 2015. 95

Liite A

Hyödyllisiä matriisikaavoja

Ensimmäinen kaava:

$$\begin{aligned}(A + B)^{-1} &= [A(I + A^{-1}B)]^{-1} = [A(B^{-1} + A^{-1})B]^{-1} = \\ &= B^{-1}[A^{-1} + B^{-1}]^{-1}A^{-1}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan

$$B^{-1} = (A^{-1} + B^{-1}) - A^{-1}$$

ja saadaan

$$\begin{aligned}(A + B)^{-1} &= [(A^{-1} + B^{-1}) - A^{-1}][A^{-1} + B^{-1}]^{-1}A^{-1} = \\ &= A^{-1} - A^{-1}[A^{-1} + B^{-1}]^{-1}A^{-1}.\end{aligned}$$

Toinen kaava:

Kirjoitetaan

$$B = UCV.$$

Tutkitaan seuraava partitioitu yhtälö:

$$\begin{bmatrix} A & U \\ V & -C^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Tätä voidaan kirjoittaa neljäksi matriisiyhtälöksi:

$$AD_{11} + UD_{21} = I, \tag{A.1}$$

$$AD_{12} + UD_{22} = 0,$$

$$VD_{11} - C^{-1}D_{21} = 0, \tag{A.2}$$

$$VD_{12} - C^{-1}D_{22} = I.$$

Näistä neljästä yhtälöstä vain *ensimmäistä* ja *kolmatta* tarvitaan jatkossa.

Ynnätään yhtälö A.2 kerrottuna UC :n kanssa yhtälöön A.1:

$$(A + UCV)D_{11} = I \Rightarrow D_{11} = (A + UCV)^{-1}. \tag{A.3}$$

Vähennetään yhtälö A.1 kerrottuna VA^{-1} :n kanssa yhtälöstä A.2:

$$(C^{-1} - VA^{-1}U)D_{21} = -VA^{-1} \Rightarrow D_{21} = -(C^{-1} - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

Sijoitetaan takaisin yhtälöön A.1:

$$AD_{11} - U(C^{-1} - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = I \Rightarrow D_{11} = A^{-1} + A^{-1}U(C^{-1} - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}. \tag{A.4}$$

Nyt meillä on kaksi eri ilmaisua alamatriisille D_{11} , jotka ovat oltavia *identtisiä*. Näin saadaan

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(C^{-1} - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}, \tag{A.5}$$

Woodburyn matriisikaava (K. INKILÄ, henk. tied.), (http://en.wikipedia.org/wiki/Woodbury_matrix_identity).

Liite B

Gaussin reduktiomenetelmä

Jo K.F. Gaussin ajoista on peräisin perin yksinkertainen ja kätevä reduktiomenetelmä lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisun laskemiseksi.

Olkoon ratkaistava yhtälöryhmä seuraava:

$$AX = B.$$

Sen ratkaisu on ilmeisesti

$$X = A^{-1}B.$$

Kirjoitetaan auki:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}.$$

Tämän yhtälöryhmän ratkaisumatriisi X ei muutu, vaikka

1. sekä A :n että B :n tietty rivi kerrotaan vakion c kanssa, tai
2. sekä A :n että B :n tietty rivi ynnätään vastaavaan toiseen sekä A :n että B :n riviin.

Jätetään nyt matriisit pois ja käytetään *notaatio*:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{array} \right]$$

Tässä notaatiossa voidaan nyt, samalla tavalla kuin yllä luettelointiin, kertoa rivejä vakion kanssa tai ynnätä rivi toiseen riviin, elementti kerrallaan.

Menetellään seuraavalla tavalla:

1. Kerro ensimmäinen rivi kertoimella a_{11}^{-1} .
2. Vähennä se kaikilta muilta riviltä i kertoimella a_{i1} :lla kerrottuna (*Gauss*-reduktio).

Lopputulokset:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & a_{11}^{-1}a_{1m} & a_{11}^{-1}b_{11} & a_{11}^{-1}b_{12} & \cdots & a_{11}^{-1}b_{1k} \\ 0 & a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & a_{2m} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{1m} & b_{21} - a_{21}a_{11}^{-1}b_{11} & b_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}b_{12} & \cdots & b_{2k} - a_{21}a_{11}^{-1}b_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - a_{n1}a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & a_{nm} - a_{n1}a_{11}^{-1}a_{1m} & b_{n1} - a_{n1}a_{11}^{-1}b_{11} & b_{n2} - a_{n1}a_{11}^{-1}b_{12} & \cdots & b_{nk} - a_{n1}a_{11}^{-1}b_{1k} \end{array} \right].$$

Kirjoitetaan symbolisesti

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1m}^{(1)} & b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} & \cdots & b_{1k}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2m}^{(1)} & b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & \cdots & b_{2k}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nm}^{(1)} & b_{n1}^{(1)} & b_{n2}^{(2)} & \cdots & b_{nk}^{(1)} \end{array} \right]$$

Elementti (1) kutsutaan tämän operaation *pivotiksi*¹.

¹“Tappi, sarana”.

3. Toista operaatiot 1,2 alkiolla $a_{22}^{(1)}$. Lopputulos on tämän näköinen:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1m}^{(2)} & b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} & \cdots & b_{1k}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2m}^{(2)} & b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} & \cdots & b_{2k}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3m}^{(2)} & b_{31}^{(2)} & b_{32}^{(2)} & b_{33}^{(2)} & \cdots & b_{3k}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nm}^{(2)} & b_{n1}^{(1)} & b_{n2}^{(2)} & b_{n3}^{(2)} & \cdots & b_{nk}^{(2)} \end{array} \right]$$

Huomaa yksikkömatriisin ilmaantuminen vasemmalle ylänurkalle.

4. Yllä olevaa reduktiomenetelmää voidaan suorittaa, paitsi rivi kerrallaan, myös *riviblokki* kerrallaan. Partitoidaan yhtälö:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Osittainen reduktio tässä tapauksessa antaa

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} I & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1}B_{11} & A_{11}^{-1}B_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & B_{21} - A_{21}A_{11}^{-1}B_{11} & B_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{array} \right]$$

Tästä näkyy, että, jos haluaa laskea matriisi-ilmaisua $P - UQ^{-1}V$ — usein esiintyvä tarve — voi laittaa ne neljä osa-matriisiä vain laskentataulukkoon seuraavalla tavalla:

$$\frac{Q \mid V}{U \mid P}$$

... ja *redukoida* tämä taulukko rivi kerrallaan, kunnes osamatriisin Q paikkaan ilmaantuu yksikkömatriisi:

$$\frac{I \mid Q^{-1}V}{0 \mid P - UQ^{-1}V}$$

Nyt voidaan “poimia” osamatriisin P paikasta ilmaisu $P - UQ^{-1}V$.

5. Sovellusesimerkki: *parametrinen tasoitustehtävän ratkaisu on*

$$\begin{aligned} \hat{x} &= [A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A]^{-1} A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \ell, \\ Q_{xx} &= [A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A]^{-1}. \end{aligned}$$

Muodostetaan seuraava taulukko:

$$\frac{Q_{\ell\ell} \mid A \mid \ell}{A^T \mid 0 \mid 0}.$$

Reduktio antaa:

$$\frac{I \mid Q_{\ell\ell}^{-1} A \mid Q_{\ell\ell}^{-1} \ell}{0 \mid -A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A \mid -A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \ell}$$

Poistetaan tästä diagrammasta ensimmäiset rivi ja sarake ja lisää sarake oikealle:

$$-A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A \mid -A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \ell \mid -I$$

Jatketaan reduktio:

$$I \mid [A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A]^{-1} A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \ell \mid [A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A]^{-1}$$

Kuten näkyy, on sekä *ratkaisu* \hat{x} että sen *painokerroinmatriisi* Q_{xx} valmiit poimittaviksi!

Tätä lähestymistapaa voidaan helposti laajentaa esim. jäännösvirheiden ja painoyksikön keskivirheen laskemiseen. Myös pienimmän neliösumman kollokaation ja Kalman-suodattimen kaavat voidaan laskea tällä tavoin, joka on helposti implementoitavissa tietokoneella.