

TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Rakenne- ja rakennustuotantotekniikan laitos
Rakennetekniikan tutkinto-ohjelma

Adaptiiviset verkontihennysmenetelmät lujuuslaskentaohjelmistossa

Kandidaatintyö

28.4.2008

Mari Vuorinen

Tekijä:	Mari Vuorinen
Työn nimi:	Adaptiiviset verkkotihennysmenetelmät lujuuslaskentaohjelmistossa
Päiväys:	28.4.2008
Sivumäärä:	22 + 2
Vastuupettaja:	Professori Jukka Aalto. Rakenteiden mekaniikka.
Ohjaajat:	TkT Jarkko Niiranen & DI Timo Manninen, TKK. Rakenne- ja rakennustuotantotekniikan laitos.
Adaptiivinen verkkotihennys pyrkii pienentämään elementtimenetelmän numeerisuu- desta aiheutuvaa virhettä vähillä laskentakustannuksilla. Tässä työssä selvitetään Aba- qus-ohjelmiston automaattisten adaptiivisten verkkotihennysmenetelmien toimintaperi- aatteita sekä tutkitaan niiden toimintaa ohuilla laattarakenteilla. Laattarakenteiden yk- sinkertaisimmat laskentamallit eli Kirchhoffin-Loven sekä Reissnerin-Mindlinin laatta- mallit selitetään. Lisäksi kerrotaan elementtimenetelmän perusperiaatteet ja adaptiivisen verkkotihennyksen idea. Abaqus-ohjelmiston käyttämän Zienkiewiczin ja Zhun kehitte- lemän verkkotihennyksen perusperiaatteet selostetaan lyhyesti. Tutkimus painottuu adaptiivisella verkkotihennysmenetelmällä tihennetyn verkon ver- tailuun tasaisesti tihennetyn verkon kanssa. Vertailun kohteena tasaisesti tihennetyn verkon kanssa ovat laskentakustannukset eli ratkaisun tarkkuus suhteessa elementtien lukumäärään, ja vertailuarvona käytetään laatan venymäenergiaa sekä maksimitaipu- maa. Tutkimuksen tuloksia vertaillaan aikaisempiin tutkimuksiin. Vertailun kohteena aikaisempien tutkimuksien kanssa on pääasiassa adaptiivisesti tihennetyn verkon muoto. Tutkimustapauksia on kolme: ensimmäisessä laatasta on singulaarinen nurkkapiste; toisen laatan reunoilla on nopeasti muuttuvia jännityssuureita; kolmas laatta on kuormi- tettu osittain. Ensimmäisen laatan kanssa Abaqus-ohjelmiston adaptiivinen verkkotihennys tuottaa suuria hyötyjä, toisen laatan kanssa sillä ei huomata juurikaan eroa tasaiseen tihennyk- seen, ja kolmannelle laatalle sillä saadaan hieman tarkempia tuloksia suhteessa element- tien lukumäärään kuin tasaisen tihennyksen kanssa. Tulokset vastaavat melko hyvin vertailututkimuksia, mutta toisen tutkimustapauksen kanssa saadaan osittain poikkeavia tuloksia.	
Avainsanat:	Elementtimenetelmä, FEM, Adaptiivinen verkkotihennys, Superconvergent Patch Recovery, laattarakenne, Abaqus
Kieli:	Suomi

Sisällysluettelo

1	Johdanto.....	1
2	Laattarakenteiden matemaattiset mallit.....	3
2.1	Laattamallien kinemaattiset oletukset.....	3
2.1.1	Kirchhoff–Love-laattamalli	3
2.1.2	Reissner–Mindlin-laattamalli.....	4
2.2	Muodonmuutokset	4
2.3	Jännitysresultanttien määritelmät	5
2.4	Tasapainoehdot.....	6
2.5	Reunaehdot.....	6
2.6	Materiaalimalli.....	7
3	Elementtimenetelmä	8
3.1	Pääperiaatteet.....	8
3.2	Elementtimenetelmän tarkkuus	9
3.3	Adaptiivinen verkontihennys.....	10
4	Abaqus-lujuuslaskentaohjelmisto	11
4.1	Laattaelementit Abaqus-ohjelmistossa	11
4.2	Adaptiiviset verkontihennysmenetelmät Abaqus-ohjelmistossa	11
4.2.1	Virheindikaattorit	11
4.2.2	Tihennysmenetelmät	13
4.2.3	Rajoitteet	13
5	Esimerkkitapaukset.....	14
5.1	Tutkimusongelmat ja -menetelmät	14
5.1.1	Mallinnusperiaatteet	14
5.1.2	Tasaisesti kuormitettu, L:n muotoinen laatta	15
5.1.3	Tasaisesti kuormitettu neliölaatta.....	15
5.1.4	Osittain kuormitettu neliölaatta.....	15
5.2	Tulokset.....	16
5.2.1	Tasaisesti kuormitetun L-laatan tutkimustulokset	16
5.2.2	Tasaisesti kuormitetun neliölaatan tutkimustulokset.....	18
5.2.3	Osittain kuormitetun neliölaatan tutkimustulokset.....	19
6	Johtopäätökset.....	20

1 Johdanto

Elementtimenetelmä (*finite element method, FEM*) on tapa ratkaista matemaattinen ongelma pilkkomalla ratkaisualue osiin. Sen käyttö rakennesuunnittelussa alkoi 1950-luvulla [1, s. 2], ja matemaattisesti sitä alettiin tutkia 1960-luvulla, jolloin se myös sai nykyisen nimensä [2, s. 13]. Tietokoneiden kehitys on helpottanut numeerista analyysia, ja mallinnus- ja laskentaohjelmistojen kehitys on tehnyt elementtimenetelmästä differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen [2, s. 14; 3, s. 4] sekä tietokoneavusteisen insinöörisuunnittelun (*computer aided engineering, CAE*) [1, s. 1] yleisimpiä työkaluja. Yksi yleisesti käytetty ohjelmisto on Dassault Systèmes'in 3D-mallinnus ja FEM-laskentaohjelmisto Abaqus [4].

Vaikka laskentaohjelmistojen kehitys on mahdollistanut yhä vaativampien rakenteiden suunnittelun, laskennan vieminen tietokoneen harteille on vähentänyt tietokonelaskelmien taustalla vaikuttavien matemaattisten mallien ja yksinkertaistusten ymmärtämistä. Matemaattinen malli (*general mathematical model*) on aina todellisuuden idealisointia, ja sen tarkkuus riippuu siitä, miten hyvin otetaan huomioon tulokseen vaikuttavat tekijät [5, s. 2–3]. Käytännön insinööriyössä matemaattisesta mallista tehdään yksinkertaistettu matemaattinen malli (*simplified mathematical model*), jolla otetaan kantaa siihen, mikä kyseisessä tehtävässä on tärkeää. Sen tarkkuus määräytyy insinöörikokemuksen perusteella, ja siihen vaikuttavat käytössä olevat laskentaresurssit [5, s. 3.] Elementtimenetelmä on numeerinen menetelmä, jolla saadaan likiarvoratkaisu yksinkertaistetulle matemaattiselle mallille.

Yleisen matemaattisen mallin luominen johtaa poikkeamiin todellisuudesta (*idealization error*) [6, s. 9–10] ja tämän mallin yksinkertaistaminen poikkeamiin yleisestä matemaattisesta mallista eli mallinnusvirheeseen (*modeling error*). Yksinkertaistetun mallin numeerinen laskenta johtaa puolestaan poikkeamiin yksinkertaistetun mallin tarkasta ratkaisusta eli diskretointivirheeseen (*discretization error*). [6, s. 9–10; 7, s. 1414; 8, s. 25.] Tämä poikkeaminen todellisuudesta useassa kohdassa analyysia voi johtaa suuriinkin virheisiin, jos yksinkertaistuksia ei ymmärretä. Virheanalyysistä onkin tullut yhä merkittävämpi osa rakenneanalyysiä.

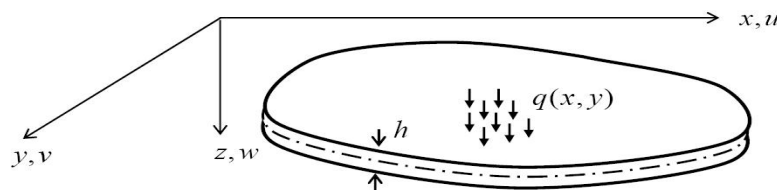
Diskretointivirheitä voidaan vähentää elementtien lukumäärää lisäämällä. Tällöin elementtien muodostama laskentaverkko tihenee. Näin ratkaisu saadaan tarkemmaksi, mutta samalla laskentatehtävä muuttuu raskaammaksi. Teollisuudessa ei yleensä pyritä mahdollisimman tarkkaan ratkaisuun vaan parhaaseen kompromissiin ratkaisun laadun ja laskennan viemien ajan sekä resurssien (*computation cost*) välillä [7, s. 1420]. Rajallisten tietokoneresurssien vuoksi onkin järkevää kohdentaa elementtiverkon tihennys ainoastaan kohtiin, joissa laskentasuureet muuttuvat eniten [3, s. 224]. Tätä kutsutaan

adaptiiviseksi verkkotihennykseksi (*adaptive mesh refinement*). Lujuuslaskentaohjelmistoihin on kehitetty menetelmiä, jotka tekevät verkon tihentämisen automaattisesti. Myös Abaqus-ohjelmistoon on kehitetty automaattisesti toimiva adaptiivinen verkkotihennystoiminto.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on perehtyä Abaqus-ohjelmiston automaattisiin verkkotihennysmenetelmiin. Tutkimuksen painopiste on kolmen esimerkkitapauksen analysoinnissa. Ne on valittu vastaamaan aikaisempia tutkimuksia [9; 10; 11], jotta saatuja tuloksia voidaan verrata toisten tutkijoiden tuloksiin. Ensimmäisenä esimerkkitapauksena käytetään tasaisesti kuormitettua L:n muotoista laattaa, toisena esimerkkitapauksena on neliönmuotoinen laatta tasaisella kuormituksella, ja kolmanneksi adaptiivista verkkotihennystä kokeillaan neliölaatalla, jota kuormittaa osittainen kuormitus. Esimerkkitapauksien laatat ovat ohuita ja kevyesti taipuvia, joten niitä voidaan tarkastella tasomuodonmuutostilassa olevina, Kirchhoffin-Loven tai Reissnerin-Mindlinin laattateorioita noudattavina laattamalleina. Lisäksi laatat ovat homogeenista ja isotrooppista materiaalia. Työn alussa on esitetty Kirchhoffin-Loven ja Reissnerin-Mindlinin laattamallit sekä elementtimenetelmän peruseriaatteet.

2 Laattarakenteiden matemaattiset mallit

2.1 Laattamallien kinemaattiset oletukset



Kuva 1. Laatta karteesisessa koordinaatistossa [12, s. 3]

Seuraavassa tarkastellaan jakaantuneella kuormalla q kuormitettua, h :n paksuista laat-
taa, joka on sijoitettu kuvan 1 mukaisesti karteesiseen koordinaatistoon siten, että x - ja
 y -akselit ovat laatan keskipinnassa ja z -akseli osoittaa kuorman ja taipuman suuntaan.

Siirtymävektorin $\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$, tai yleisimmin käytetyin merkinnöin $\bar{u} = (u, v, w)$, kom-
ponenteille voidaan kirjoittaa [5, s. 247]:

$$u_i = u_{i0}(x, y) + u_{i1}(x, y)z + u_{i2}(x, y)z^2 + u_{i3}(x, y)z^3 + \dots, \quad i = x, y, z. \quad (1)$$

Kun siirtymävektoria approksimoidaan huomioimalla sen sarjakehitelmästä (1) äärelli-
nen määrä termejä, saadaan erilaisia laattamalleja. Kun termejä lisätään, päädytään lo-
pulta kolmiulotteiseen kimmoteoriaan. [5, s. 257.] Siirtymävektoria approksimoimalla
tehdään mallinnusvirhe [5, s. 257] ja määrätään suurin tarkkuus, johon laskenta voi yl-
tää. Onkin ymmärrettävä, ettei paraskaan laskentaohjelmisto korjaa mallissa tehtyjä
virheitä [3, s. 6]. Mallin valinta perustuu ratkaisun matemaattiseen sileyteen ja reunaeh-
toihin sekä siihen, mikä laskentatuloksena on kiinnostuksen kohteena [5, s. 257; 9, s. 1850].
Yleisimmin käytetyt laattamallit ovat Kirchhoffin-Loven ja Reissnerin-Mindlinin laatta-
teoriat [9, s. 1850], joita kutsutaan klassisiksi laattateorioiksi [5, s. 246–247]. Ne oletta-
vat laatan olevan ohut ja yksinkertaistavat sen kaksiulotteiseksi malliksi [3, s. 335].

2.1.1 Kirchhoff–Love-laattamalli

Kirchhoffin-Loven laattateoria (1850) [3, s. 344] vastaa palkkien Bernoulli–Euler-
palkkiteoriaa [12, s. 3]. Sitä kutsutaan myös muun muassa lineaariseksi laattateoriaksi
[13, s. 38], ja se perustuu seuraaville kinemaattisille oletuksille [6, s. 11–12; 13, s. 38]:

- Keskipinta ei veny, eli se on niin sanottu normaalipinta.
- Keskipinnan normaalit säilyvät suorina ja kohtisuorassa deformatiivista keskipin-
taa vasten.
- Keskilinjan pisteet siirtyvät ainoastaan z -akselin suunnassa.

Oletukset ovat luonnollisesti todellisuuden yksinkertaistuksia, mutta Kirchhoff–Love-laattateoria antaa usein riittävän tarkkoja tuloksia ohuen laatan tapauksessa, jos taipumat ovat pieniä laatan paksuuteen nähden [12, s. 2; 13, s. 38]. Kirchhoffin-Loven kinemaattiset oletukset pelkistävät siirtymäkomponentit (1) seuraavasti [5, s. 252; 6, s. 12]:

$$u_x = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \quad u_z = w(x, y). \quad (2)$$

2.1.2 Reissner–Mindlin-laattamalli

Reissnerin-Mindlinin laattateoria (Reissner, 1945 & Mindlin, 1951) [3, s. 344] vastaa palkkien puolella Timoshenkon palkkiteoriaa [12, s. 3]. Se perustuu seuraaville kinemaattisille oletuksille [6, s. 11]:

- Keskipinta ei veny, eli se on niin sanottu normaalipinta.
- Keskipinnan normaalit säilyvät suorina, mutta eivät välttämättä kohtisuorassa keskipintaa vasten.
- Keskilinjän pisteet siirtyvät ainoastaan z-akselin suunnassa.

Oletukset siis yksinkertaistavat todellisuutta vähemmän kuin Kirchhoffin-Loven oletukset. Reissner–Mindlin-laattateoria pätee suhteellisen ohuille laatoille [9, s. 1850]. Siirtymäkomponentit (1) pelkistyvät oletuksista seuraavasti [10, s. 3]:

$$u_x = -\beta_x(x, y) z, \quad u_y = -\beta_y(x, y) z, \quad u_z = w(x, y). \quad (3)$$

Lausekkeissa $\beta_x(x, y)$ on kiertymä y-akselin ja $\beta_y(x, y)$ x-akselin ympäri.

2.2 Muodonmuutokset

Jos siirtymien oletetaan olevan pieniä, lineaarisen kimmoteorian (*linear theory of elasticity*) mukaan muodonmuutoksille eli venymille ja liukumille saadaan johdettua [14, s. 1–3] niiden määritelmistä seuraavanlaiset lausekkeet [5, s. 247; 14, s. 2–3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

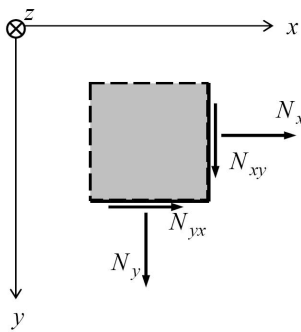
Kirchhoffin-Loven laattamallilla muodonmuutoksiksi saadaan [6, s. 12]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}, & \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}, & \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{xy} &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}, & \gamma_{yz} &= 0, & \gamma_{xz} &= 0,\end{aligned}\quad (5)$$

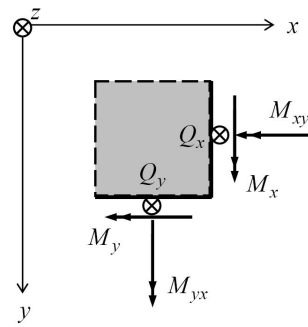
ja Reissnerin-Mindlinin laattamallilla puolestaan [6, s. 12]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial \beta_x(x, y)}{\partial x}, & \varepsilon_y &= -z \frac{\partial \beta_y(x, y)}{\partial y}, & \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right), & \gamma_{xy} &= \frac{z}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (6)$$

2.3 Jännitysresultanttien määritelmät



Kuva 2. Kalvovoimat [12, s. 9]



Kuva 3. Leikkausjännitykset sekä taivutus- ja vääntömomentit [12, s. 10]

Kalvovoimat N_x , N_y ja N_{yx} , leikkausjännitykset Q_x ja Q_y , taivutusmomentit M_x ja M_y sekä vääntömomentit M_{xy} määritellään seuraavasti [5, s. 248]:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz, \quad (7)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz, \quad (8)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z dz, \quad M_{xy} = -M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z dz. \quad (9)$$

Lausekkeissa σ on normaalijännitys ja τ on leikkausjännitys. Koska laattaa kuormittaa nyt vain pystysuora kuormitus, ja koska siirtymien oletetaan olevan pieniä, laatta noudattaa tasomuodonmuutostilaa ja kalvovoimat häviävät [3, s. 337].

2.4 Tasapainoehdot

Virtuaalisen työn periaatteen mukaan sisäisten ja ulkoisten voimien virtuaalisten töiden summa häviää kaikille reunaehdot toteuttaville virtuaalisille siirtymille [15, s. 5]:

$$\delta W^{\text{int}} + \delta W^{\text{ext}} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in U. \quad \delta W^{\text{int}} = - \int_V \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{f}} dV, \quad \delta W^{\text{ext}} = - \int_V \delta \mathbf{u}^r \cdot \dot{\mathbf{f}} dV. \quad (10)$$

Kun laatan kuormitus jaetaan tilavuusvoimiin f ja pintavoimiin t , saadaan [16, s. 25]

$$\begin{aligned} & \int_V (f_x \delta u_x + f_y \delta u_y + f_z \delta u_z) dV + \int_A (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y + t_z \delta u_z) dA \\ & - \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Koska nyt kalvovoimat häviävät, $f_x = f_y = t_x = t_y = 0$.

Kun virtuaalisen työn periaatteen lausekkeeseen (11) sijoitetaan jännitysresultanttien määritelmät (7)–(9), saadaan laatan tasapainoehdot [6, s. 13; 13, s. 40]

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad (12)$$

jotka Kirchhoffin-Loven laattamallin tapauksessa yhdistetään seuraavasti [13, s. 41]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0. \quad (13)$$

2.5 Reunaehdot

Reunaehdoista tiedetään joko taipuma tai leikkausjännitys sekä joko kiertymä tai taivutusmomentti [5, s. 253]. Kirchhoffin-Loven laattamallin yleisimpiä reunaehtoja ovat [5, s. 253; 6, s. 14]

jäykkä tuenta (*clamped*), $w(s) = 0$, $\frac{\partial w(s)}{\partial n} = 0$, ja

vapaa tuenta (*simply supported*), $w(s) = 0$, $M_n(s) = 0$.

Reissnerin-Mindlinin laattamallin yleisimmät reunaehdot ovat [5, s. 257; 6, s. 13]

jäykkä tuenta, $w(s) = \beta_n(s) = \beta_s(s) = 0$,

vapaa tuenta (*hard simply supported*), $w(s) = \beta_s(s) = 0$, $M_n(s) = 0$, ja

nivelellinen tuenta (*soft simply supported*), $w(s) = 0$, $M_n(s) = M_s(s) = 0$.

Lausekkeissa $w(s)$ tarkoittaa taipumaa reunalla s ja β_s tarkoittaa kiertymää reunan ympäri. β_n puolestaan tarkoittaa kiertymää reunan normaalin n ympäri. Vastaavasti M_s tarkoittaa momenttia reunan ympäri ja M_n momenttia reunan normaalin ympäri. Kirchhoffin-Loven laattamalli ei tunne soft simply supported -tuentaa [6, s. 14].

2.6 Materiaalimalli

Materiaalimalli kytkee jännitykset ja muodonmuutokset toisiinsa. Tässä keskitytään homogeeniseen ja isotrooppiseen materiaaliin, joka noudattaa Hooken lakia

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Laatan tasomuodonmuutosotaksuma jättää jännityksen σ_z pienenä huomioimatta. Materiaalimallista (14) sijoitetaan joko jännitykset tai siirtymät edellisiin lausekkeisiin. Ensimmäistä ratkaisutapaa nimitetään siirtymämenetelmäksi, toista voimamenetelmäksi, ja niiden yhdistämistä kutsutaan sekamenetelmäksi [2, s. 21]. Kun materiaalimalli (14) sijoitetaan jännitysresultanttien yhtälöihin (7)–(9), Kirchhoffin-Loven jännitysresultanteille saadaan [5, s. 252]

$$Q_x = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_y = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right), \quad (15)$$

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

Reissner-Mindlinin jännitysresultanteiksi puolestaan tulee [5, s. 255]

$$Q_x = \kappa G h \left(-\beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad Q_y = \kappa G h \left(-\beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (16)$$

$$M_x = D \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right), \quad M_y = D \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right), \quad M_{xy} = \frac{G h^3}{12} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right).$$

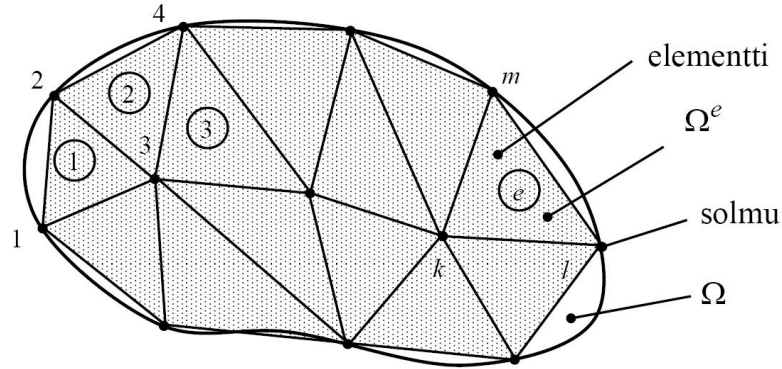
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ on liukumoduuli [5, s. 247], } D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \text{ taivutusjäykkyys [5, s. 252],}$$

ja κ on Poissonin vakiosta ν riippuva vakio (*shear correction factor*) [5, s. 255].

Laattaongelmalle ei yleensä saada analyyttistä, suljetussa muodossa esitettävää ratkaisua. Usein laatat ratkaistaan approksimoimalla taipumafunktiota ja hyödyntämällä energiaperiaatteita. Elementtimenetelmä perustuu tällaiseen menettelyyn.

3 Elementtimenetelmä

3.1 Pääperiaatteet



Kuva 4. Elementtimenetelmä [8, s. 5]

Elementtimenetelmän ideana on jakaa tarkasteltava alue Ω äärellisiin osa-alueisiin eli elementteihin (*finite element*) Ω^e , jotka muodostavat elementtiverkon (*finite element mesh*). Seuraavassa h tarkoittaa elementin kokoa erotuksena aikaisempaan. Jokaiselle elementille osoitetaan oma approksimaatio, joka kuvaa halutun laskenta-arvon, esimerkiksi taipuman tai lämpötilan, jakauman elementin solmupisteiden (*nodal point*) välillä, kun arvot niissä tunnetaan [2, s. 13; 3, s. 1–4]. Approksimaatio on yleensä polynomifunktio [3, s. 2]. Näin tuntemattomien suureiden lukumäärä vähenee solmupisteiden lukumääräksi, koska loput arvot saadaan johdettua solmupistearvoista. Tuntemattomia arvoja kutsutaan vapausasteiksi (*degrees of freedom*) [3, s. 4]. Esimerkiksi jos $u_e(x,y,z)$ kuvaa jatkuvaa siirtymätilaa elementin Ω^e alueella, sille voidaan muodostaa approksimaatio $u_{h,e}(x,y,z)$ muotofunktion $N_e(x,y,z)$ ja elementin solmuvapausasteiden U_e avulla seuraavasti [2, s. 184; 8, s. 10]:

$$u_e(x, y, z) \approx u_{h,e}(x, y, z) = [N_e(x, y, z)] \{U_e\} = [N_{1e}, \dots, N_{ne}] \{u_{e1}, \dots, u_{en}\}^T, \quad (17)$$

missä n kuvaa solmuvapausasteiden lukumäärää. Kun vapausasteita on vain elementin nurkissa, $u_{e,h}$ saa ensimmäisen asteen polynomifunktion muodon ja puhutaan lineaarisesta elementistä [3, s. 98; 8, s. 10]. Kun vapausasteita lisätään elementin reunoille ja sisälle, polynomifunktion kertaluku kasvaa ja puhutaan korkeamman kertaluvun elementeistä, joista alin on kvadraattinen eli toisen kertaluvun elementti [3, s. 106; 8, s. 12]. Jatkuvasta, äärettömän määrän vapausasteita sisältävästä systeemistä (*continuous system*) on tällä menetelmällä saatu nyt rajallinen eli diskreetti (*discrete system*) [2, s. 19; 3, s. 4]. Elementtimenetelmä onkin jatkuvan systeemin korvaamista pistejoukolla, mitä kutsutaan diskretoinniksi (*discretization*) [2, s. 19].

Virtuaalisen työn periaatteen ja potentiaalienergian minimin periaatteen avulla saadaan johdettua [2, s. 184–193] elementtimenetelmän tasapainoyhtälö

$$\{F\} = [K]\{U\} , \quad (18)$$

jossa $[K]$ on koko diskretoituneen systeemin jäykkyyismatriisi, $\{F\}$ solmupisteisiin redusoitu voimavektori ja $\{U\}$ on koko systeemin solmuvapausasteiden muodostama vektori [2, s. 16–17]. Ne muodostetaan summaamalla elementtien vastaavat ratkaisut. Elementtien jäykkyyismatriisit saadaan integroitua materiaali- ja muodonmuutosyhteyksistä [2, s. 187]. Lauseke (18) on siirtymämenetelmän mukainen ratkaisutapa. Voimamenetelmässä saadaan vastaava tulos käyttämällä komplementaarisen virtuaalisen työn ja komplementaarienergian minimin periaatteita [2, s. 17 ja 25]:

$$\{U\} = [K]^{-1}\{F\} . \quad (19)$$

Approksimaatio on yleensä jatkuva (*compatibility requirement*), ja erityisesti sen tulee johtaa alkuperäisen systeemin suuruiseen ratkaisuun, kun vapausasteiden lukumäärä kasvaa (*completeness requirement*). Tätä kutsutaan approksimaation lähestymiskriteeriksi (*converge criterion*) [3, s. 92–93]. Laattamallien yksinkertaisimpien elementtiapproksimaatioiden derivaatat eivät yleensä ole jatkuvia, mutta ne lähestyvät jatkuvaa ratkaisua, kun vapausasteiden lukumäärä kasvaa [2, s. 393 ja 396; 3, s. 361].

3.2 Elementtimenetelmän tarkkuus

Koska jatkuva systeemi korvataan äärellisellä määrällä vapausasteita, syntyy diskreetointivirhe [8, s. 5], joka määritellään seuraavasti [1, s. 68; 8, s. 25]:

$$e_h = \|u - u_h\| , \quad (20)$$

missä u on jatkuvan systeemin, u_h on diskreetin systeemin ratkaisu ja $\| \cdot \|$ tarkoittaa valittua matemaattista normia eli virhemittaria. Virhe voidaan määrittää sekä yhdelle elementille (*local error*) [1, s. 188] että koko rakenteelle (*global error*) [7, s. 1416]. Virhettä voidaan arvioida etukäteen sen tiedon avulla, joka elementtimenetelmän kaavoihin laitetaan, jolloin puhutaan a priori -virhearviosta (*a priori error estimate*) [1, s. 110]. Se antaa teoreettista tietoa ratkaisun tarkkuudesta [6, s. 18]. A posteriori -virhearviot (*a posteriori error estimate*) puolestaan muodostetaan tehtävän ratkaisemisen jälkeen, ja ne ovat tärkeitä tulosten luotettavuuden arvioimisen välineitä [1, s. 415–417]. A priori -virhearvio on yleensä kvalitatiivinen ja globaali; a posteriori -virhearvio antaa myös kvantitatiivista ja lokaalia tietoa [6, s. 18]. Tyypillisesti virhearviot mitataan energianormissa (*energy norm*) [10, s. 6]. Arvioitava suure voi olla periaatteessa mikä tahansa, mutta Babuška ja Strouboulis muistuttavat, että suure tulee valita huolella laskentaongelman mukaan, ja että sen tulee olla mitattavissa ja kustannustehokkaasti lasketta-

vissa [1, s. 417]. A-posteriori -virhearvion tarkkuutta ja tehokkuutta mitataan tehokkuusindeksillä (*effectivity index*) [7, s. 1416]

$$\psi = \frac{\tilde{e}_h}{e_h}, \quad (21)$$

jossa $\tilde{e}_h$ on approksimaatio oikeasta virheestä e_h . Yleensä pyritään todellista virhettä suurempaan arvioon eli tehokkuusindeksiin $\psi \geq 1$ [7, s. 1416].

Elementtimenetelmän tarkkuutta voidaan parantaa joko lisäämällä elementtien vapausasteita tai tihentämällä elementtijakoa [1, s. 72; 3, s. 94–96]. Ensimmäistä lähestymistapaa kutsutaan p-menetelmäksi (*p-version*) ja toista h-menetelmäksi (*h-version*) [1, s. 72; 7, s. 1418; 8, s. 24]. Molemmat vaikuttavat siten, että laskentasuorituksen lukumäärä lisääntyy. Ne voidaan myös yhdistää hp-menetelmäksi (*hp-version*) [1, s. 72].

3.3 Adaptiivinen verkontihennys

Kun laskentaa tarkennetaan vain alueilla, joilla laskentasuureissa on suuria vaihteluja, puhutaan adaptiivisesta verkontihennyksestä. Yleensä käytetään elementtien lukumäärää lisäävää menetelmää, mutta myös adaptiivinen vapausasteiden lisäys on mahdollista [7, s. 1418]. Adaptiivisen verkontihennyksen tarkoituksena on saavuttaa tietty tarkkuus mahdollisimman pienillä laskentakustannuksilla [7, s. 1418]. Ideana on saavuttaa ratkaisu, jonka elementtikohtaiset virhenormit ovat pienempiä kuin jotkut määrätty arvot [10, s. 15].

Adaptiivinen verkontihennys toimii siten, että ensin melko harvalle verkolle suoritetaan laskenta ja lasketaan virheet sekä elementeille että koko alueelle. Tämän jälkeen h-menetelmään perustuvassa menettelyssä lasketaan uudet elementtikoot, jotka huomioivat, missä on suurin virhe, missä laskenta-arvo muuttuu jyrkimmin, ja miten paljon elementtien annetaan muuttua uudelleenverkottamisen aikana [7, s. 1420–1423]. Tämä tehdään virheindikaattoreiden (*error indicator*) avulla [1, s. 417; 10, s. 17]. Tihennystä toistetaan kunnes määrätty tarkkuus on saavutettu jokaiselle elementille [10, s. 17].

4 Abaqus-lujuuslaskentaohjelmisto

4.1 Laattaelementit Abaqus-ohjelmistossa

Abaqus-ohjelmistossa ei ole erikseen laattaelementtejä, vaan laattojenkin laskenta suoritetaan kuorielementeillä [17, luku 23.6.1]. Vaikka laattarakenteiden laatta- ja kuorielementeillä ei ole geometrista eroa, kuorielementti eroaa laattaelementistä siinä, että kalvovoimat otetaan huomioon laskennassa [2, s. 410]. Abaqus laskee laatat niin sanottujen yleiselementtien mukaan [18, luku 3.6.1]. Ne laskevat ohuet laatat Kirchhoffin-Loven kinemaattisten oletusten mukaisina, ja paksuuden kasvaessa siirrytään Reissnerin-Mindlinin kuoriteoriaan [17, luku 23.6.2].

Tutkimus suoritettiin siten, että ensimmäiselle tutkimustapaukselle käytettiin kolmioelementtejä, joita Abaqus-ohjelmassa merkitään koodeilla S3 ja STR165 [17, luku 23.6.7]. Toiselle ja kolmannelle tutkimustapaukselle käytettiin koodeilla S4R ja S8R nimitettyjä [17, luku 23.6.7] neliöelementtejä.

4.2 Adaptiiviset verkontihennysmenetelmät Abaqus-ohjelmistossa

Abaqus-ohjelmiston adaptiivinen verkontihennysmenetelmä valitaan verkontihennys säännön (*remeshing rule*) avulla. Siinä mallille määrätään alue ja kuormitustapaus, johon sääntöä käytetään, virheindikaattori (*error indicator*), elementtien koon määräävä tihennysmenetelmä (*sizing method*) sekä rajoitteet. [19, luku 17.11.1.] Säännön avulla Abaqus suorittaa iteratiivista verkontihennystä, jossa virheindikaattorin avulla elementeille lasketaan uudet koot. Se siis perustuu h-menetelmään. Adaptiivista verkontihennystä jatketaan käyttäjän määräämien iteraatiokertojen verran tai niin kauan kunnes verkontihennys säännössä määrätty tarkkuus on saavutettu [17, luku 12.3.1].

4.2.1 Virheindikaattorit

Virheindikaattorit ovat koko elementtiä kuvaavia muuttujia, jotka osoittavat virheen suuruutta. Abaqus-ohjelmiston manuaalissa muistutetaan, että ne ovat likimääräisiä, ja että niiden laatu voi olla hyvinkin heikko, jos verkko on harva. Abaqus käyttää Zienkiewiczin ja Zhun kehittämää indikaattorityyppiä [17, luku 12.3.2], jota nimitetään Superconvergent Patch Recovery (SPR) -menetelmäksi [20, s. 207]. Myös Okstad et al. [11, s. 698] sekä Lee ja Hobbs [10, s. 1] ovat tutkineet tätä menetelmää. Se muodostetaan yleensä jännityksien avulla. Jännityskenttä r_h saadaan elementtimenetelmän ratkaisun u_h funktiona. Virhearviota parannetaan korvaamalla jännityskentän approksimaatio r_h niin sanotulla parannetulla arvolla (*recovered value*) r_h^* . Parannettuja arvoja kerätään solmupisteistä kuten elementtimenetelmässäkin, ja solmupistearvojen väliä kuvataan

samanalaisilla, mutta korkea-asteisemmilla muotofunktioilla kuin yhtälössä (17) on esitetty. Elementin parannettu jännityskenttä (*recovered stress field*) ilmaistaan polynomifunktiona elementtijoukon yli [11, s. 698], ja virhettä $e_{h,r}$ approksimoidaan arvolla $e_{h,r}^*$ [20, s. 208]:

$$e_{h,r} \equiv \| \mathbf{r} - \mathbf{r}_h \| \approx e_{h,r}^* = \| \mathbf{r}_h^* - \mathbf{r}_h \| . \quad (22)$$

Saadut virhearviot lähestyvät oikeaa virhettä tarkkuuden kasvaessa [11, s. 698]. SPR-menetelmällä suoritettu verkontihennys kulkee Leen ja Hobbsin mukaan [10] pääpiirteittäin seuraavasti:

Suhteellisen virheen (*relative error*) η [10, s. 15] approksimaatioksi η^* tulee [10, s. 16]

$$\eta = \frac{\|e_h\|}{\|\mathbf{r}\|} \approx \eta^* = \frac{\|e_h^*\|}{\|\mathbf{r}_h^*\|} , \quad (23)$$

jossa $\|u\|$ on ratkaisun energianormi ja $\|u_h^*\|$ parannettujen arvojen avulla arvioitu energianormi (*estimated energy norm*) [10, s. 6] ja $\|e_h\|$ on virhenormi (*error norm*) ja $\|e_h^*\|$ parannettujen arvojen avulla arvioitu virhenormi (*estimated error norm*) [10, s. 10]. Ne perustuvat erilaisiin laskentasuureisiin. Adaptiivisen verkontihennyksen tavoitteena on saavuttaa ratkaisu, jossa suhteellinen virhe on enintään määrätty arvo η^* . Tästä saadaan paikallinen luvallinen virhenormi (*local allowable total error norm*) [10, s. 17]

$$e_a = \eta^* \frac{\|\mathbf{r}_h^*\|}{\sqrt{n_e}} , \quad (24)$$

jossa n_e on elementtien nykyinen lukumäärä. Elementtikohtaiseksi tihennysindikaattoriksi elementille i saadaan [10, s. 17]

$$\eta_i^* = \frac{\|e_h^*\|_{\Omega^e}}{e_a} , \quad (25)$$

jolla elementille lasketaan uusi koko, kun μ ilmaisee tihennyksen nopeutta [10, s. 17]:

$$h_i^{uusi} = \frac{h_i^{vanha}}{(\eta_i^*)^{1/(1+\mu)}} , \quad (26)$$

Abaqus-ohjelmistossa valitaan, käytetäänkö elementin energiatiheyyteen, Mises-jännityksiin, ekvivalenttiin plastiseen venymään, plastiseen venymään, virumaan, lämpövirtaan, sähkövuohon vai sähköpotentiaalın gradienttiin perustuvia virheindikaattoreita. Niitä voidaan myös yhdistää. [17, luku 12.3.2.] Laattaongelmaan sopivat elementin energiatihetyteen perustuva eli ohjelmistossa lyhenteellä ENDENERI merkitty [17, luku 12.3.2] ja Mises-jännityksiin perustuva eli lyhenteellä MISESERI merkitty [17, luku 12.3.2] indikaattori.

4.2.2 Tihennysmenetelmät

Menetelmälle, jolla elementtien uudet koot määritellään, on kaksi vaihtoehtoa: niin sanottu minimi/maksimi-menetelmä (*minimum/maximum control*) sekä tasaisen virhejakautuman menetelmä (*uniform error distribution*). Oletusarvoisesti Abaqus käyttää tasaisen virhejakautuman menetelmää ENDENERI-virheindikaattorin kanssa ja minimi/maksimi-menetelmää MISESeri:n kanssa.

Minimi/maksimi-menetelmä tekee kaksi tavoitetta virheelle: toinen kontrolloi elementtien kokoa alueilla, joilla laskentatulokset on korkein ja toinen alueilla, joilla ratkaisutulokset on pienin. Sitä, miten virhetavoitteet vaihtelevat näiden arvojen välillä, voidaan säätää bias factor -tekijällä (*bias factor*) arvojen heikko (*weak*) ja vahva (*strong*) välillä. Heikolla bias factor -arvolla elementtien koot vaihtuvat jyrkimmin minimiarvosta maksimiarvoon, ja vahvalla arvolla muutos on heikoin. Oletusarvoisesti Abaqus asettaa bias factor -arvon enemmän vahvan puolelle. Tavoitevirheiden suuruudet voidaan päättää itse tai voidaan käyttää Abaqus-ohjelmiston oletusasetuksia, jotka laskevat virheen edellisten iteraatioiden perusteella.

Tasaisen virhejakautuman menetelmä pyrkii samaan virheeseen koko alueella. Myös tässä menetelmässä virhe on mahdollista määrittää itse, ja Abaqus oletusarvoisesti määrittää virheen edellisten iteraatioiden perusteella. Abaqus-ohjelmiston manuaalissa suositellaan, että virheiden suuruuksien oletusasetuksia käytetään silloin, kun ei ole erityistä virhetavoitetta, mutta halutaan tietää verkontihennyksen vaikutuksia tuloksiin. [17, luku 12.3.3.]

4.2.3 Rajoitteet

Verkontihennyssäännön rajoitteet koskevat elementtien kokoa ja tihennysmenetelmän aggressiivisuutta. Elementtien kokoa säädetään määräämällä niille minimi- ja maksimikoot. Oletusarvoisesti Abaqus asettaa minimiarvoksi yhden prosentin oletuselementtikokosta ja maksimiarvoksi 10 kertaa oletuselementtikoon. [17, luku 12.3.3.] Oletuselementtikoko on elementin koko, jonka Abaqus oletusarvoisesti asettaa elementtiverkolle. Tihennysmenetelmän aggressiivisuus säädetään tihennys- ja harvennustekijöiden (*refinement and coarsening factors*) avulla: refinement-tekijä kontrolloi verkon tiheyttä tai pienten elementtien luomista; coarsening-tekijä kontrolloi verkon harvuutta tai suurten elementtien luomista [17, luku 12.3.3]. Ohjelmiston manuaalissa suositellaan käyttämään rajoituksia etenkin singulaaristen pisteiden kanssa, sillä adaptiivinen verkontihennysprosessi voi alkaa tihentää verkkoa liikaa singulaarisen pisteen alueelle [17, luku 12.3.1]. Tutkimuksessa on käytetty ohjelmiston oletusarvoja, jotka on suunniteltu estämään sekä liiallista harvuutta että laskennallisesti kallista hienoutta [17, luku 12.3.3].

5 Esimerkkitapaukset

5.1 Tutkimusongelmat ja -menetelmät

Abaqus-ohjelmiston verkontihennysmenetelmiä tutkittiin kolmella esimerkkitapauksella. Tutkimus suoritettiin versiolla Abaqus/CAE 6.7-1, ja sen painopisteenä oli verrata adaptiivista verkontihennystä tasaiseen verkon tihentämiseen. Vertailu suoritettiin tarkastelemalla valittujen laskenta-arvojen kehitystä elementtien lukumäärän lisääntyessä.

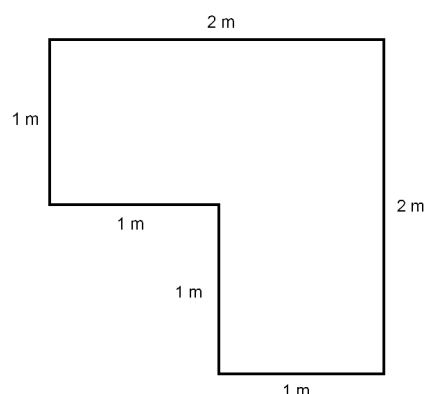
5.1.1 Mallinnusperiaatteet

Esimerkkitapaukset mallinnettiin siten, että geometria otettiin vertailututkimuksista ja kuorman suuruus skaalattiin sellaiseksi, että siirtymät säilyivät realistisina ja suhteellisen pieninä, jotta ne toteuttavat vertailututkimuksissa käytettyjen laattamallien ehdot. Malliin luotiin tasainen, melko harva elementtiverkko, jolle suoritettiin laskenta-analyysi, ja tulokset kirjattiin ylös. Verkko luotiin uudestaan tiheämpänä, ja analyysi suoritettiin uudelleen. Tihennystä jatkettiin joko kunnes tulokset alkoivat vakiintua tai kunnes tietokoneresurssit loppuivat. Tämä tasainen verkontihennys suoritettiin sekä lineaarisilla että kvadraattisilla elementeillä. Seuraavaksi mallille suoritettiin adaptiivinen verkontihennys eri menetelmin, ja laskennan tuloksia verrattiin tasaiseen tihennykseen. Adaptiivinen verkontihennys loppui joko kymmeneen iteraatioaskeleeseen tai kun verkontihennyssäännössä annetut ehdot täyttyivät.

Seuraavassa tasaisella verkontihennysmenetelmällä saatuja tarkimpia tuloksia merkitään suhdeluvulla 1, ja muut tulokset ilmoitetaan suhteessa tähän. Ideaalitapauksessa vertailuarvona käytettäisiin tehtävän tarkkaa ratkaisua, mutta koska tarkka ratkaisu ei ole tiedossa, ja koska kiinnostuksen kohteena on suhde tasaiseen tihennykseen, esitystapaa voidaan pitää selkeänä. Vertailusuureiksi valittiin maksimitaipuma sekä venymäenergia. Näihin päädyttiin, koska ongelmaa haluttiin katsoa kahdesta eri näkökulmasta: maksimitaipuman tarkastelu tarjoaa käytännönläheisen ja insinöörimäisen lähestymistavan, sillä taipuma on eräs laskentasuureista, joita tarvitaan rakennesuunnittelussa; venymäenergian seuraaminen puolestaan on teoreettisempi ja kattavampi tarkastelusuure. Vertailusuureet valittiin ennen tutkimusta, ja tutkimuksen aikana huomattiin, että toiset vertailusuurevalinnat olisivat voineet johtaa toisenlaisiin tuloksiin. Maksimitaipuma osoittautui heikoksi tarkkuuden arvioimisessa, minkä vuoksi tulokset on esitetty pääosin venymäenergian avulla. Vertailun kohteena olivat laskentakustannukset eli vapausasteiden lukumäärä suhteessa vertailusuuresarvon kehitykseen. Työssä ei keskitytty vertailemaan laskentasuureiden eroja, kun käytettiin samaa vapausastelukumäärää, mutta eri tihennysmetodeja, vaan tutkimuksen pääpaino oli vertailussa tasaisen tihennyksen kanssa.

5.1.2 Tasaisesti kuormitettu, L:n muotoinen laatta

Ensimmäisen tutkimustapauksen laatta valittiin Beirão da Vegan et al:n [9, s. 1861] tutkimuksesta. Kyseiseen valintaan päädyttiin myös, koska L-muotoinen laatta on yksinkertainen esimerkki singulaarisesta pisteestä eli pisteestä, johon syntyy jännityskeskittymiä. Singulaarisen pisteen vuoksi esimerkkitapauksen jännitysresultantin jakaumasta tulee rajoittamaton [10, s. 11]. Se siis sopii hyvin kuvaamaan virhekeskittymiä ja laskentatarkkuuden merkitystä [7, s. 1421]. Se on myös tapaus, jossa adaptiivinen verkontihennys tuottaa suuria hyötyjä [10, s. 2 ja 12]. Reunaehdot valittiin siten, että sivut on tuettu vapaasti eli hard simply supported -tuennalla. Tutkimustapauksen geometria on esitetty kuvassa 5.



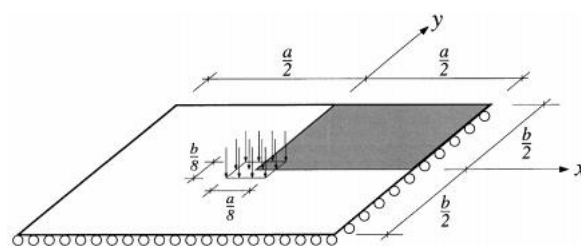
Kuva 5. Ensimmäinen tutkimustapaus

5.1.3 Tasaisesti kuormitettu neliölaatta

Toisen tutkimustapauksen laatta valittiin vastaamaan Leen ja Hobbsin tutkimustapausta 2 [10, s. 20 ja 27]. Syynä Leen ja Hobbsin kiinnostukseen tapausta kohtaan on jännitysresultanttien nopea muutos reunojen alueella [10, s. 2 ja 12–15]. Tuentana on nyt soft simply supported -tuenta. Se on realistisempi kuin hard simply supported -tuenta [10, s. 12]. Geometria ja tuenta on esitetty kuvassa 6.

5.1.4 Osittain kuormitettu neliölaatta

Kolmannen tutkimustapauksen geometria ja tuenta noudattavat edellistä tapausta, mutta kuormitusalue on siirretty Okstadin et al:n tutkimustapauksen [11, s. 708] mukaiseksi. Geometria, tuenta ja kuormitus on esitetty kuvassa 6. Lisäksi kuormituksen suuruutta lisättiin, jotta se tuottaa saman suuruusluokan tuloksia kuin tutkimustapaus 2. Kuorman suurentamisen idea saatiin Okstadin et al:n tutkimuksesta [11, s. 709].

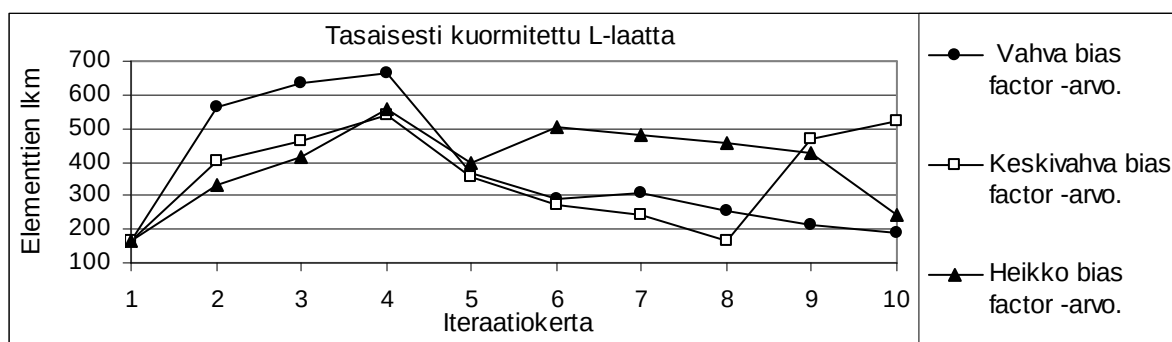


Kuva 6. Kolmas tutkimustapaus [10, s. 708]

5.2 Tulokset

5.2.1 Tasaisesti kuormitetun L-laatan tutkimustulokset

Adaptiivinen verkontihennys suoritettiin lineaarisille elementeille yhteensä 17 eri kriteerein. Kaikilla kriteereillä verkko tihentyi laatan nurkkaan sekä hieman laatan reunoille. Tihennetyn verkon muoto on esitetty liitteessä 1, ja se vastaa Beirão da Vegan et al:n tuloksia [9, s. 1860]. Huomattiin, että tasaiseen virhejakumaan pyrkivä menetelmä tuotti johdonmukaisimpia tuloksia, ja että ENDENERI- ja MISESERI-virheindikaattoreilla saatiin samansuuntaisia tuloksia. Tasaisen virhearvion menetelmällä suoritettiin analyysi myös kvadraattisilla elementeillä. Sekä lineaarisilla että kvadraattisilla elementeillä laskettaessa saatiin hieman tarkemmat tulokset suhteessa elementtien lukumäärään ENDENERI-indikaattorin kuin MISESERI-indikaattorin kanssa. Näin ollen lopulliset vertailut tasaisen tihennyksen kanssa suoritettiin tasaiseen virhejakautumaan perustuvala ENDENERI-indikaattorin verkontihennyssäännöllä.

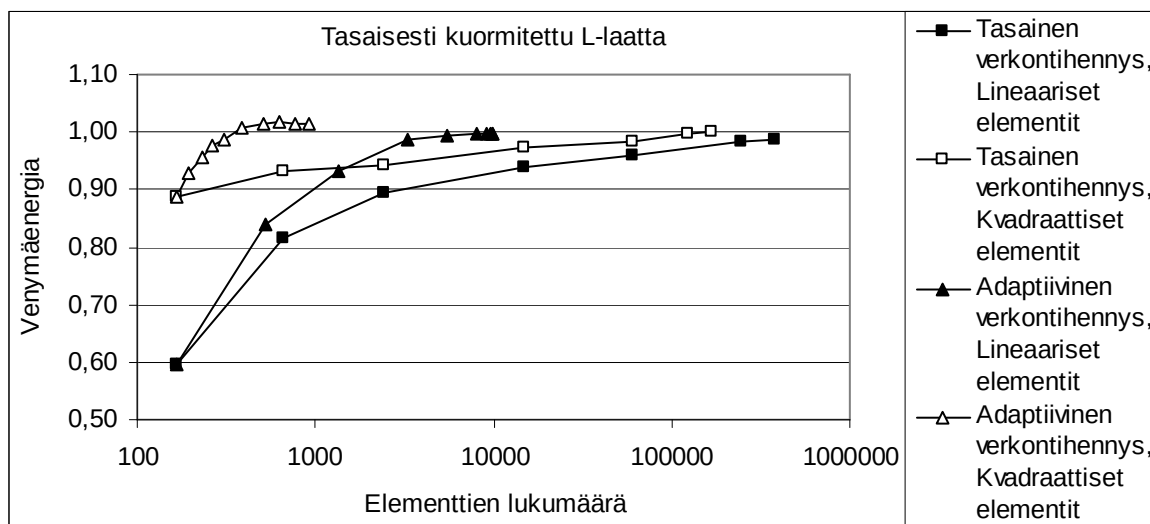


Kuva 7. Elementtien lukumäärän vaihtelu minimi/maksimi -menetelmän aikana. Tapaus 1.

Kuvassa 7 on esitetty elementtien lukumäärän kehitys minimi/maksimi-menetelmällä suoritetun verkontihennysprosessin iteraatioiden mukaan. Neljännen iteraation jälkeen minimi/maksimi-menetelmän adaptiivinen verkontihennysprosessi alkoi vähentää elementtien lukumäärää ja tehdä verkosta hyvin harvan muualle kuin singulaarisen pisteen alueelle. Tarkistukseksi menetelmälle suoritettiin 20 iteraation prosessi, ja huomattiin, että elementtien lukumäärä heilahteli prosessin kuluessa, eikä vakiintunut minnekään. Laskentatarkkuus väheni elementtien lukumäärän vähentyessä ja kasvoi elementtien lisääntyessä. Menetelmää kokeiltiin eri bias factor -arvoilla, ja parhaat tulokset antoi vahvan bias factor -arvon menetelmä. Se antoi jopa suuremman tarkkuuden suhteessa elementtien lukumäärään kuin tasaisen virhejakautuman menetelmä. Tämä tarkin arvo oli 0,9, ja se saavutettiin alle 700 elementillä, kun vastaavaan tarkkuuteen päästiin tasaisen virhejakautuman menetelmän kanssa vasta noin 1000 elementillä. Kuitenkin tasaisen virhejakautuman menetelmä johti lopulta parempiin ja vakiintuneempiin tuloksiin,

joten sitä voidaan pitää sopivampana vertailuun tasaisen tihennyksen kanssa. Huomattiin, että minimi/maksimi -menetelmä oli melko aggressiivinen oletusrajoitusten suhteen, ja tähän menetelmään olisi ehkä kannattanut säätää omat rajoitukset. Toisaalta myös minimi/maksimi-menetelmä antoi tasaista verkontihennystä tarkempia tuloksia suhteessa elementtien lukumäärään, ja tarkinta 0,9:n tulosta voitaisiin jo pitää riittävänä. Minimimaksimi-menetelmä onkin ilmeisesti parhaimmillaan, kun käytetään suhteellisen vahvaa bias factor -arvoa, vain muutama iteraatiokertaa sekä tarkoin säädettyjä rajoituksia.

Verkontihennyssäätöjen oletusarvoista parhaan tuloksen antoi ENDENERI- ja MISESERI-virheindikaattorien yhdistelmä, jolloin päästiin suurin piirtein samoihin tuloksiin tasaiseen virheeseen pyrkivien ENDENERI- ja MISESERI-indikaattorien kanssa. Muiden indikaattorien yhdistämisessä huomattiin, että yhdistetty menetelmä noudatti ENDENERI-indikaattorin antamia tuloksia.

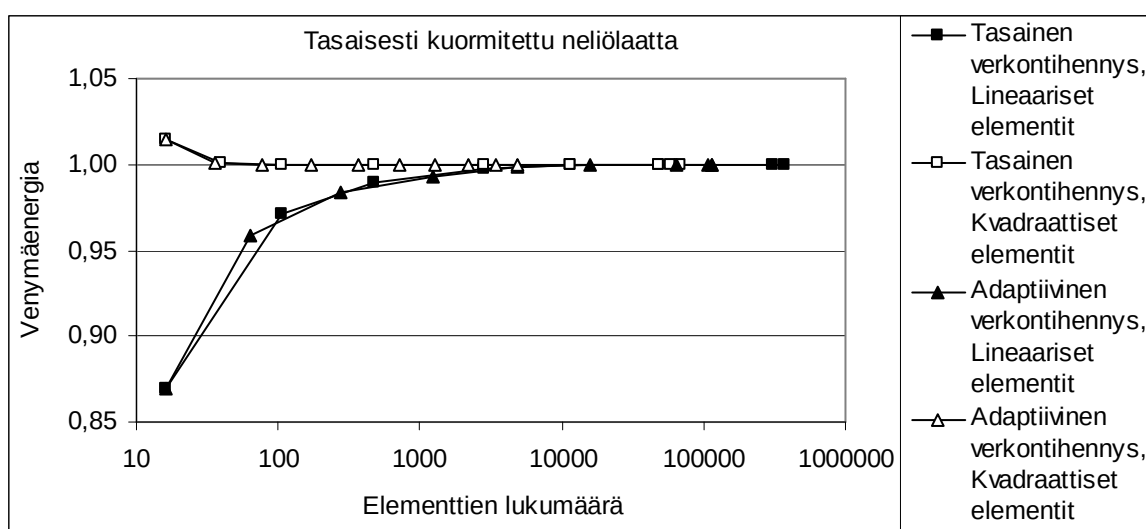


Kuva 8. Venymäenergian tarkkuuden kehitys elementtien lisääntyessä. Tapaus 1.

Tasaisen virhejakautuman menetelmällä suoritettu, kvadraattisiin elementteihin perustuva adaptiivinen verkontihennys antoi suuremmat laskenta-arvot kuin tasaisella tihennyksellä saadut tarkimmat arvot. Suurempien arvojen pääteltiin olevan tarkempia, koska ne vakiintuivat iteraatioprosessin edetessä ja elementtien lukumäärän lisääntyessä. Jo 400 elementtiä antoi tarkemman tuloksen kuin tasainen kvadraattinen tihennys, jonka tarkin arvo saavutettiin vasta noin 170 000 elementillä. Nämä verkot on esitetty liitteessä 1. Myös lineaarisilla elementeillä adaptiivinen verkontihennys saavutti tasaista tihennystä tarkemmat arvot, jotka saavutettiin noin 10 000 elementillä. Lineaaristen elementtien tasainen verkontihennys ei päässyt samaan tarkkuuteen muiden kanssa edes 380 000 elementillä. Kuva 8 esittää venymäenergian tarkkuuden kehitystä elementtien lukumäärän funktiona. Myös maksimitaipuman tarkkuus noudattelee samanlaista käyrää.

5.2.2 Tasaisesti kuormitetun neliölaatan tutkimustulokset

Tasaisesti kuormitetulla neliölaatatalla adaptiivisesti tihennetty verkko tihentyi hieman laatan reunoihin, laatan keskellä oli suurempia elementtejä ja suurin osa alueesta oli melko tasaista verkkoa. Verkon muoto on esitetty liitteessä 2. Verkon tihentymisen painopisteet vastasivat Leen ja Hobbsin tuloksia [10, s. 44–45]. Myös tälle tapaukselle tasaiseen virheeseen perustuva ENDENERI-virheindikaattori tuotti parhaat tulokset, ja muille indikaattoreille saatiin tutkimustapauksen 1 mukaisia tuloksia. Huomattiin, että adaptiivisen elementtiverkon kanssa saavutettiin suurin piirtein yhtä tarkkoja tuloksia suhteessa elementtien lukumäärään kuin tasaisella tihennyksellä. Venymäenergian tarkkuus elementtien lukumäärän suhteen on esitetty kuvassa 9.



Kuva 9. Venymäenergian tarkkuuden kehitys elementtien lisääntyessä. Tapaus 2.

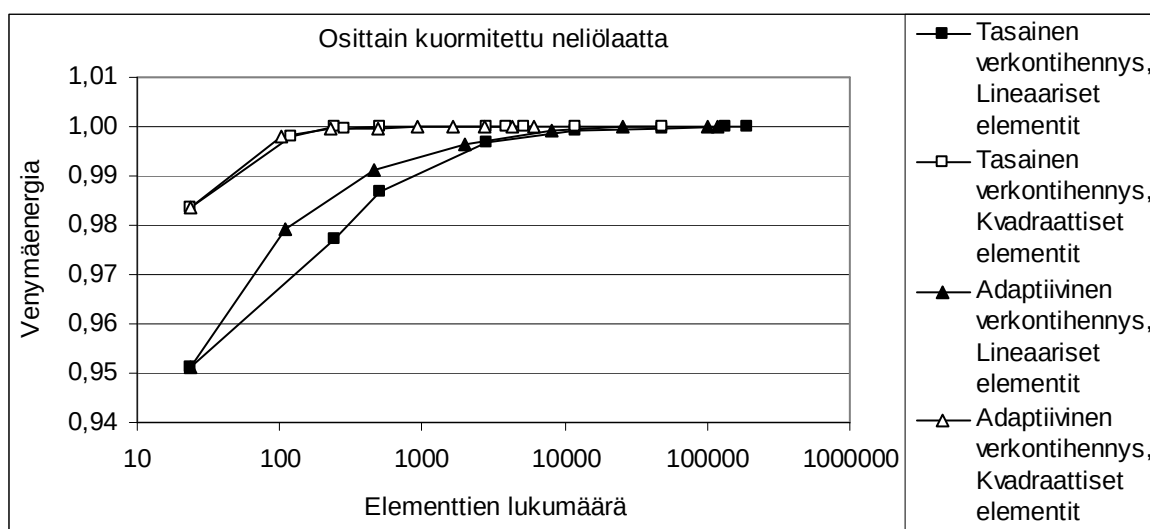
Syy siihen, miksi adaptiivisella tihennyksellä ei saavutettu tasaista tihennystä tarkempia tuloksia suhteessa elementtien lukumäärään, voi olla se, että indikaattori ei ehkä havaitse tihennystarvetta, minkä vuoksi tihennys ei johda optimaaliseen verkkoon. Toisaalta menetelmällä tulisi saada tasaista tihennystä tarkempia arvoja suhteessa elementtien lukumäärään, koska verkko muistuttaa Leen ja Hobbsin tutkimusta, jossa adaptiivinen tihennys tuotti parempia tuloksia [10, s. 28]. Lee ja Hobbs vertailivat kuitenkin jännitysresultantteja, ja syy voikin olla siinä, että adaptiivisesti tihennetty verkko johtaa vain taipuman ja venymäenergian suhteen samoihin tuloksiin tasaisen tihennyksen kanssa, ja jännitysarvoja vertailemalla saadaan aivan toisenlaisia tuloksia. Leen ja Hobbsin mukaan adaptiivisella tihennyksellä saadaan tasaista tihennystä tarkemmat reunojen taivutusmomenttien jakaumat suhteessa elementtien lukumäärään [10, s. 34]. Väitettä voidaan pitää järkevänä, ja se voi toimia myös Abaqus-ohjelmiston kanssa, koska adaptiivinen verkko on tiheämpi laatan reunoilla. Lee ja Hobbs saivat tutkimuksessaan tuloksen, että reunojen elementtikoon tulee olla laatan paksuinen, jotta taivutusmomentit

saadaan huomiotua [10, s. 34]. Myös Abaqus-ohjelmiston kanssa huomattiin, että suurin piirtein laatan paksuuden kokoisilla elementeillä saatiin riittävän tarkat tulokset, vaikka vertailuarvona olikin venymäenergia. Ei voidakaan sanoa, että adaptiivinen tihennys ei toiminut, vaikka se ei yltänyt venymäenergian suhteen tarkempiin tuloksiin kuin tasainen verkko.

Neliölaatan tapauksessa huomattiin maksimitaipuman sopimattomuus vertailuarvoksi. Arvojen seuranta kärsi siitä, että jos elementti osui laatan keskelle, aivan laatan keskipisteessä olevaa taipumaa ei saatu laskettua, sillä siinä ei ollut solmupistettä. Kun elementtien lukumäärä lisääntyi, ongelma poistui. Maksimitaipumalle saatiin kuitenkin riittävä tarkkuus jo parillakymmenellä elementillä. Myös venymäenergialle saavutettiin riittävä tarkkuus melko pienillä elementtimäärillä. Energiaa ja taipumaa parempi vertailuarvo olisikin ehkä ollut jokin jännityssuure.

5.2.3 Osittain kuormitetun neliölaatan tutkimustulokset

Kolmannelle tutkimustapaukselle saatiin melko samanlaisia tuloksia kuin tutkimustapaukselle 2. Ero tuli siinä, että adaptiivinen prosessi tihensi nopeammin kuorman alueelle sekä kuormitetun ja kuormittamattoman alueen rajapintaan. Tämän vuoksi adaptiivinen verkkotihennysmenetelmä saavutti tarkempia arvoja suhteessa elementtien lukumäärään, kun elementtejä oli melko vähän, ja saavutti riittävän tarkkuuden pienemmällä elementtimäärällä kuin tasainen verkkotihennys. Tämä näkyi selvemmin lineaaristen elementtien kanssa. Venymäenergian tarkkuus elementtien lukumäärän funktiona on esitetty kuvassa 10. Adaptiivinen verkko muistutti toisen tutkimustapauksen verkkoa sillä erolla, että kuorman läheisyyteen muodostui hieman tiheämpää verkkoa, mikä vastaa myös Okstadin et al:n tutkimuksia [11, s. 709]. Verkon muoto on esitetty liitteessä 2.



Kuva 10. Venymäenergian tarkkuus elementtien lisääntyessä. Tapaus 3.

6 Johtopäätökset

Tässä työssä on selostettu laattamallit ja elementtimenetelmän peruseriaatteet, virheiden teoriaa on avattu, ja adaptiivinen verkkotihennys on esitetty keinona vähentää diskretointivirhettä kustannustehokkaasti. Abaqus-ohjelmiston verkkotihennysmenetelmät on lyhyesti selvitetty, ja niitä on tutkittu kolmen esimerkin avulla. Tutkimuksessa keskityttiin adaptiivisen ja tasaisen verkkotihennyksen laskentakustannusten vertailuun.

Ensimmäisessä esimerkkitapauksessa adaptiivisen verkkotihennyksen avulla saatiin tasaista tihennystä huomattavasti tarkempia tuloksia suhteessa elementtien lukumäärään. Adaptiivinen verkkotihennys johti jopa tarkempiin tuloksiin kuin laskentakapasiteetin äärirajoilla suoritettu tasainen verkkotihennys.

Toinen tutkimustapaus ei tuottanut eroa adaptiivisen ja tasaisen tihennyksen välillä, kun tarkasteltiin venymäenergia-arvon tarkkuuden ja elementtilukumäärän suhdetta. Adaptiivisesti tihennetty verkko oli kuitenkin tiheämpi laatan reunoilla, joilla oli nopeasti muuttuvia jännityksiä. Jos vertailusuurena olisivat olleet jännitysarvot, olisi tutkimuksessa voitu havaita parempaa tarkkuutta niiden suhteen. Koska vertailuarvot valittiin etukäteen ja pyrittiin yhtenäisyyteen kaikkien tutkimustapausten kanssa, jännitysarvojen tarkkuus jää avoimeksi. Tutkimustapaus 2 osoittautuikin hyödylliseksi siinä, että se osoitti vertailuarvojen valinnan tärkeyden ja sen, että laskentaverkolla voidaan saavuttaa riittävä tarkkuus halutulle laskenta-arvolle, vaikka muilla arvoilla ei saavutettaisikaan hyvää tarkkuutta. Olisi kuitenkin kiinnostava tietää, tuottaako Abaqus-ohjelmiston adaptiivinen verkkotihennys tasaista tihennystä tarkempia jännitysresultanttituloksia. Jos parempaa tarkkuutta ei saavuteta, tämä tarkoittaa, että joko ohjelmiston indikaattorit eivät kykene havaitsemaan optimaalisinta tihennystarvetta tai verkkotihennyssäännön asetuksia tulee säätää paremmiksi. Asiaa voitaisiin selvittää lisätutkimuksilla.

Kolmas tapaus osoitti, että adaptiivista verkkotihennystä voidaan käyttää tarkkuuden parantamiseen myös kuormituskeskittymäalueilla. Adaptiivinen verkkotihennys ei tuottanut tässä tapauksessa yhtä suurta eroa tasaiseen tihennykseen kuin ensimmäisen tutkimustapausten kanssa, mutta tasaista tihennystä suurempi tarkkuus suhteessa elementtien lukumäärään on nähtävissä, kun elementtejä on vähän.

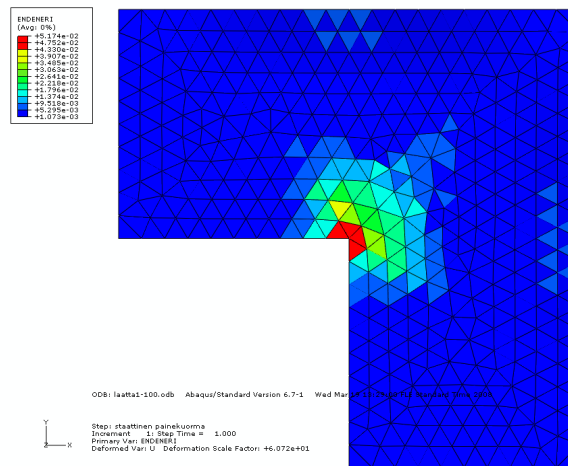
Abaqus-ohjelmiston automaattisten adaptiivisten verkkotihennysmenetelmien voidaan sanoa toimivan kohtalaisen hyvin. Niiden käyttö vaatii kuitenkin hyvää virheiden hallinnan ymmärtämistä, sillä pelkkä hienolta kuulostavan ominaisuuden käyttöönotto ei riitä. Adaptiivinen verkkotihennys voi johtaa jopa heikompiin tuloksiin, jos ohjelmiston rajoituksia ei säädetä sopiviksi, kuten minimi/maksimi-menetelmän kanssa saavutetut tulokset osoittavat.

Lähteet

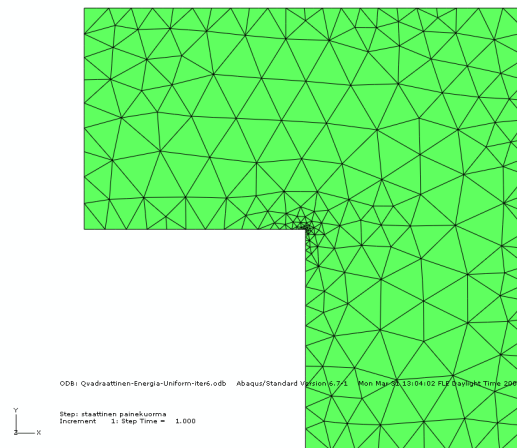
- [1] Babuška, Ivo & Strouboulis, Theofanis. *The Finite Element Method and its Reliability*. Clarendon Press, 2001.
- [2] Hakala, Matti. *Lujuusopin elementtimenetelmä*. Otatieto, 1980.
- [3] Ottosen, Niels & Petersson, Hans. *Introduction to the finite element method*. Prentice Hall, 1992.
- [4] *Abaqus/CAE* [verkkosivut]. Dassault Systèmes, 2004, 2008. [Viitattu 9.4.2008] Saatavilla http://www.simulia.com/products/abaqus_cae.html.
- [5] Szabó, Barna & Babuška, Ivo. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [6] Niiranen, Jarkko. *A Priori and a Posteriori Error Analysis of Finite Element Methods for Plate Models*. Väitöskirja. Teknillisen korkeakoulun matematiikan laitoksen tutkimusraporttisarja A534, 2007.
- [7] Bellenger, Emmanuel & Coorevits, Patrice. *Adaptive mesh refinement for the control of cost and quality in finite element analysis*. Finite Elements in Analysis and Design. Vol. 41:15. 2005. S. 1413–1440. DOI: 10.1016/j.finel.2005.04.002. ISSN 0168-874X.
- [8] Freund, Jouni. *Luento 6/11; Elementtiapproksimaatio* [verkkodokumentti]. Otaniemi TKK, Konetekniikan osasto, 2008. [Viitattu 5.4.2008]. Saatavilla http://konewww.hut.fi/courses/files/110/Luento_06.pdf.
- [9] Beirão da Vega, Lourenço & Niiranen, Jarkko & Stenberg, Rolf. *A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates II: Numerical results*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 197:21-24. 2008. S. 1850-1864. DOI: 10.1016/j.cma.2007.11.015. ISSN: 0045-7825.
- [10] Lee, C. K. & Hobbs, R. E. *Automatic Adaptive Refinement for Plate Bending Problems Using Reissner-Mindlin Plate Bending Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol: 41:1. 1998. S. 1-63. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19980115)41:1<1::AID-NME264>3.0.CO;2-O. ISSN: 0029-5981.

- [11] Okstad, Knut Morten & Kvamsdal, Trond & Mathisen, Kjell Magne. *Superconvergent Patch Recovery for Plate Problems Using Statically Admissible Stress Resultant Fields*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol: 44:5. 1999. S. 697-727. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990220)44:5<697::AID-NME526>3.0.CO;2-L. ISSN: 0029-5981.
- [12] Aalto, Jukka. *Laattarakenteiden kimmoiset menetelmät* [verkkodokumentti]. Otaniemi TKK, Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto, 2007. [Viitattu 20.3.2008]. Saatavilla <http://www.tkk.fi/Yksikot/Rakenteidenmekaniikka/ojkoti/rmII/pruju/LRKM.pdf>.
- [13] Mikkola, Martti. *Levyjen, laattojen ja kuorien teoriaa*. Otakustantamo, 1986.
- [14] Paavola, Juha. *Muodonmuutostila* [verkkodokumentti]. Otaniemi TKK, Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto, 2008. [Viitattu 4.4.2008]. Saatavilla http://www.tkk.fi/Yksikot/Rakenteidenmekaniikka/ojkoti/rmII/pruju/rm2_2.pdf.
- [15] Freund, Jouni. *Luento 5/11; Virtuaalisen työn periaate* [verkkodokumentti]. Otaniemi TKK, Konetekniikan osasto, 2008. [Viitattu 5.4.2008]. Saatavilla http://konewww.hut.fi/courses/files/110/Luento_05.pdf.
- [16] Paavola, Juha. *Suorat ja kaarevat tasosauvat* [verkkodokumentti]. Otaniemi TKK, Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto, 2008. [Viitattu 4.4.2008]. Saatavilla http://www.tkk.fi/Yksikot/Rakenteidenmekaniikka/ojkoti/rmII/pruju/rm2_3.pdf.
- [17] ABAQUS Analysis User's Manual. ABAQUS Inc., 2006. Saatavilla lisenssiä vastaan.
- [18] ABAQUS Theory Manual. ABAQUS, Inc., 2006. Saatavilla lisenssiä vastaan.
- [19] ABAQUS/CAE User's Manual. ABAQUS, Inc., 2006. Saatavilla lisenssiä vastaan.
- [20] Zienkiewicz, O. C. & Zhu, J. Z. *The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol: 101:1-3. 1992. S. 207–224. ISSN: 0045-7825.

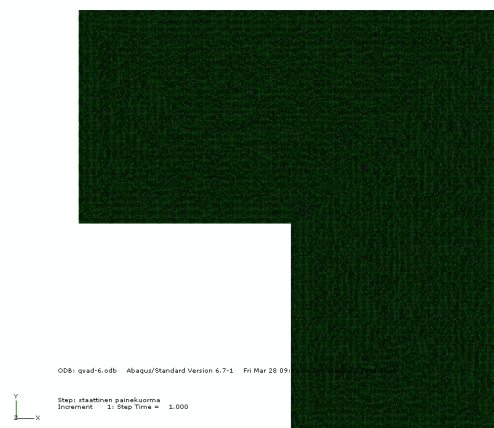
Liite 1



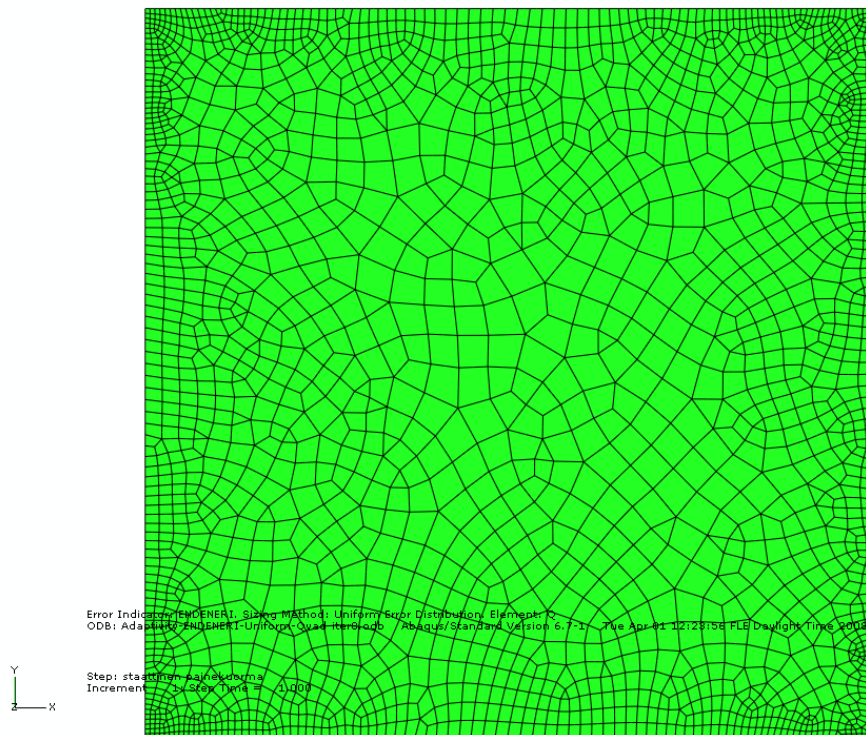
Kuva 1. Tasaisesti tihennetty, noin 700 lineaarisen elementin verkko ja ENDENERI-virheindikaattorin jakauma. Tapaus 1.



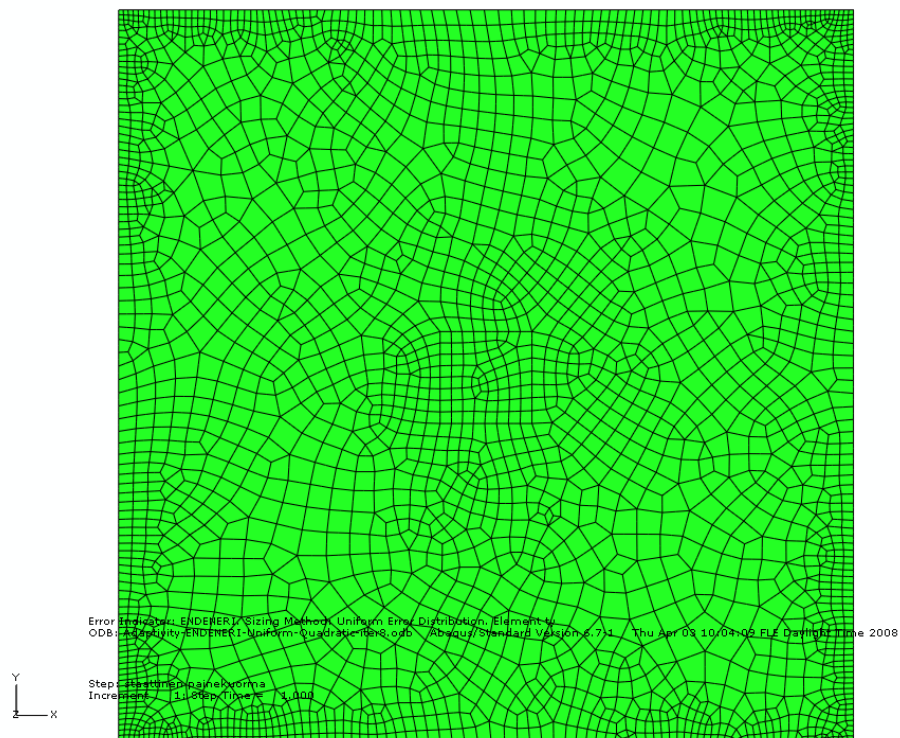
Kuva 2. Adaptiivisesti tihennetty, noin 400 kvadraattisen elementin verkko, jolla saatu tarkkuus ylittää alla kuvassa 3 esitetyllä tasaisesti tihennetyllä verkolla saadun tarkkuuden. Tapaus 1.



Kuva 3. Tasaisesti tihennetty, noin 170 000 kvadraattisen elementin verkko, jolla saatu tarkkuus alittaa yllä kuvassa 2 esitetyllä adaptiivisesti tihennetyllä verkolla saadun tarkkuuden. Elementit ovat niin pieniä, ettei niitä näy. Tapaus 1.



Kuva 1. Adaptiivisesti tihennetty, noin 2200 kvadraattisen elementin verkko. Tapaus 2.



Kuva 2. Adaptiivisesti tihennetty, noin 2700 kvadraattisen elementin verkko. Huomataan, että verkko muistuttaa yllä olevan kuvan 1 verkkoa sillä erolla, että kuormituksen alueella on tihennettyä verkkoa. Tapaus 3.