

TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto

Mika Isomäki

Matala-asteisia kolmioelementtejä kuoritehtäville

**Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin
tutkintoa varten Espoossa 6.10.2004**

Työn valvoja: Professori Rolf Stenberg

Työn ohjaajat: DI Jarkko Niiranen ja DI Eero Torkkeli

Tekijä:	Mika Isomäki	Sivumäärä: 81
Työn nimi:	Matala-asteisia kolmioelementtejä kuoritehtäville	
Päivämäärä:	6.10.2004	
Osasto:	Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto	
Professuuri:	Mat-5 Mekaniikka	
Työn valvoja:	Professori Rolf Stenberg	
Työn ohjaajat:	Diplomi-insinööri Jarkko Niiranen ja diplomi-insinööri Eero Torkkeli	
Diplomityössä perehdyttiin kuoriongelmiin ratkaisemiseen elementtimenetelmällä. Tavoitteena oli löytää lukkiutumattomat 3- ja 6-solmuiset kolmiokuorielementit. Tarkastellut kuorielementit perustuvat kontinuumimekaniikkaan ja on oletettu, että kuorella ei esiinny paksuussuuntaista normaalijännitystä, kuoren normaalit pysyvät suorina ja kuoren paksuussuuntaiset leikkausmuodonmuutokset ovat pieniä. Lisäksi on oletettu, että kuori on suhteellisen ohut ja paksuuden muutokset elementin alueella ovat vähäisiä. Tällöin voidaan käyttää kaksiulotteisia kuoriyhtälöitä. Tarkastelluissa elementeissä tavanomaista siirtymämenetelmään perustuvaa elementtiä vaivaavaa lukkiutumista pyritään estämään vähentämällä venymien interpolaatiopolynomien astelukua. Diplomityössä ohjelmoitiin Finnsap-lujuuslaskentaohjelmistoon 3-solmuinen MITC3-kolmiokuorielementti, 6-solmuinen ANS6-kolmiokuorielementti sekä neljä hiukan toisistaan poikkeavaa 6-solmuista MITC6-kolmiokuorielementtiä. Elementtien toimivuus pyrittiin varmistamaan suorittamalla useita testiajoja, joiden antamia tuloksia verrattiin kirjallisuudessa esitettyihin ratkaisuihin.		

Author:	Mika Isomäki	
Title of the thesis:	Low-order Triangular Finite Elements for Shell Problems	
Date:	6.10.2004	
		Number of pages: 81
Department:	Department of Engineering Physics and Mathematics	
Professorship:	Mat-5 Mechanics	
Supervisor:	Professor Rolf Stenberg	
Instructors:	Jarkko Niiranen M.Sc. (Tech.) and Eero Torkkeli M.Sc. (Tech.)	
In this thesis solving of shell problems by the finite element method was studied. The aim of this study was to find locking free linear and quadratic triangular shell elements. The elements are continuum-based and they use following hypothesis: zero normal stress, straight normals, small transverse shear deformations, mild taper, and the shell is relatively thin. The result is a two-dimensional shell element. The locking phenomenon of shell elements was avoided by employing assumed natural strains. In this thesis a three-node MITC3 shell element, a six-node ANS6 shell element, and four different six-node MITC6 shell elements were implemented in the general purpose finite element program Finnsap. The performance of the elements was tested in various types of problems.		

Alkusanat

Olen tehnyt tämän diplomityön Insinööritoimisto FEMdata Oy:n palkollisena. Tämä työ on osa kehitysprojektia RKK (Rakenteiden käytettävyys ja käyttöiän hallinta), johon on osallistunut FEMdata sekä energia-alan yrityksiä ja VTT. Kiitän FEMdata Oy:tä ja erityisesti Eero Torkkelia mahdollisuudesta diplomityön tekemiseen.

Kiitän diplomityöni valvojaa professori Rolf Stenbergiä sekä työni ohjaajia Jarkko Niirasta Teknillisestä korkeakoulusta ja Eero Torkkelia Insinööritoimisto FEMdata Oy:stä diplomityöni ohjauksesta.

Espoossa 6.10.2004

Mika Isomäki

Sisällysluettelo

SYMBOLIT JA MERKINNÄT	7
1 JOHDANTO	9
1.1 YLEISTÄ.....	9
1.2 TYÖN TAVOITTEET JA PÄÄKOHDAT	10
2 FINNSAP-OHJELMISTO	11
2.1 YLEISTÄ.....	11
2.2 KUORIELEMENTIT	12
2.2.1 Kuori-elementti	12
2.2.2 Semiloof-elementti.....	12
2.2.3 CBR-elementit	13
3 KUORIIHTÄLÖT JA ELEMENTTIMENETELMÄ	14
3.1 SIIRTYMÄMENETELMÄ JA MUOTOFUNKTIOT	14
3.2 VENYMÄT JA KOORDINAATISTOMUUNNOS	15
3.3 JÄYKKYYSMATRIISI.....	18
3.4 LUKKIUTUMINEN	19
4 MITC-LAATTAELEMENTIT.....	20
4.1 VENYMÄMATRIISI	20
4.2 MITC-LAATTAELEMENTTIFORMULAATIO	22
4.3 REDUSOIDUN MUOTOFUNKTIOMATRIISIN MUODOSTAMINEN.....	23
4.3.1 Redusoitu leikkausvenymä MITC3-laattaelementille.....	25
4.3.2 Redusoitu leikkausvenymä MITC7-laattaelementille.....	26
4.4 MITC3-ELEMENTIN STABILOINTI.....	27
4.5 7-SOLMUISEN ELEMENTIN SISÄSOLMUN KIERTYMIEN KONDENSOINTI	27
5 MITC-KUORIELEMENTIT.....	28
5.1 ELEMENTIN TASONSUUNTAISTEN VENYMIEN INTERPOLOINTI.....	28
5.1.1 Menetelmä 1	30
5.2 ELEMENTIN PAKSUUSSUUNTAISTEN LEIKKAUSVENYMIEN INTERPOLOINTI..	32
5.2.1 Menetelmä 1	33
5.2.2 Menetelmä 2	35
5.2.3 Menetelmä 3	36
5.2.4 Menetelmä 4	38
5.2.5 Menetelmä 5	38
5.3 TOTEUTETUT MITC-KUORIELEMENTIT	39
6 ANS-KUORIELEMENTTI.....	40
6.1 KALVO- JA TAIVUTUSVENYMIEN INTERPOLOINTI	41
6.2 PAKSUUSSUUNTAISTEN LEIKKAUSVENYMIEN INTERPOLOINTI.....	43
7 OHJELMOINTI.....	45
8 TESTITAPAUKSIA	46

8.1	NELIÖLAATTA (LAATAN TAIVUTUS).....	48
8.2	LAATTAKAISTA (LAATAN TAIVUTUS).....	51
8.2.1	<i>Painekuorma</i>	52
8.2.2	<i>Viivakuorma</i>	54
8.3	WEISSMAN–TAYLOR-TESTI (LAATAN TAIVUTUS).....	56
8.4	SALMIAKKILAATTA (LAATAN TAIVUTUS).....	59
8.5	ELLIPTINEN LAATTA (LAATAN TAIVUTUS)	61
8.6	LEVYULOKEPALKKI (KALVOTILAN TESTI)	62
8.6.1	<i>Momenttikuorma</i>	63
8.6.2	<i>Leikkausvoimakuorma</i>	64
8.7	COOKIN ONGELMA (KALVOTILAN TESTI).....	65
8.8	ELLIPTINEN KALVO (KALVOTILAN TESTI).....	68
8.9	KIERO ULOKEPALKKI (KAAREVA KUORI).....	69
8.10	KAAREVA KATTO (SCORDELIS-Lo) (KAAREVA KUORI)	72
8.11	YMPYRÄSYLINTERIN LITISTÄMINEN (KAAREVA KUORI)	74
8.12	LITISTETTY PALLOKALOTTI (KAAREVA KUORI)	77
9	YHTEENVETO	79
	LÄHDELUETTELO	80

Symbolit ja merkinnät

Skalaareja on merkitty kursivoiduilla kirjaimilla, vektoreita pienillä lihavoiduilla kirjaimilla ja matriiseja suurilla lihavoiduilla kirjaimilla.

$\mathbf{B}$	Venymämatriisi
$\mathbf{C}_\varepsilon, \mathbf{C}_\gamma$	Kimmomatriiseja
d_K	Elementin K pisimmän sivun pituus
$\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$	Käyräviivaisten koordinaattien tangenttivektorit
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Karteesisen paikalliskoordinaatiston kantavektorit
E	Kimmokerroin
$\mathbf{f}$	Voimavektori
h	Kuoren paksuus
$\mathbf{J}$	Jacobin matriisi
J	Jacobin determinantti
k	Leikkauskorjauskerroin
$\mathbf{K}$	Jäykkyysmatriisi
N_i	Solmun i muotofunktio
$\mathbf{q}$	Elementin solmujen siirtymien ja kiertymien vektori
$\mathbf{R}_K \mathbf{N}_\beta$	Redusoitu muotofunktio matriisi
r, s, t	Alakoordinaatit
$\mathbf{u}$	Siirtymävektori
$\bar{\mathbf{u}}$	Kuoren keskipinnan siirtymävektori
$\bar{\mathbf{u}}_i$	Solmun i siirtymävektori
$\hat{\mathbf{u}}$	Kuoren normaalin siirtymä (kiertymä)
$\hat{\mathbf{u}}_i$	Solmun normaalin siirtymä (kiertymä)

u_i, v_i, w_i	Solmun i siirtymäkomponentit
$\mathbf{v}$	Solmujen siirtymien ja kiertymien muodostama vektori
x, y, z	Globaalit karteesiset koordinaatit
x_i^l, y_i^l, z_i^l	Solmun i paikalliset karteesiset koordinaatit
$\mathbf{x}$	Paikkavektori
$\bar{\mathbf{x}}$	Kuoren keskipinnan paikkavektori
$\bar{\mathbf{x}}_i$	Solmun i paikkavektori
$\hat{\mathbf{x}}$	Kuoren normaalivektori
$\hat{\mathbf{x}}_i$	Solmun i yksikkönormaalivektori
α_K	Stabilointiparametri
$\varepsilon_{\xi\xi}, \dots, \varepsilon_{\eta\zeta}$	Venymät (ξ, η, ζ) -koordinaatistossa
$\varepsilon_{rr}, \dots, \varepsilon_{t\zeta}$	Venymät (r, s, t, ζ) -koordinaatistossa
$\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{yz}$	Venymät (x, y, z) -koordinaatistossa
ζ	Paksuussuuntainen koordinaatti
θ_1^i, θ_2^i	Kiertymät akselien $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ ympäri solmussa i
ν	Poissonin vakio
ξ, η	Luonnolliset käyräviivaiset koordinaatit

1 Johdanto

1.1 Yleistä

Kuorirakenne on kolmiulotteinen rakenne, jonka paksuus on pieni verrattuna muihin ulottuvuuksiin. Kuorirakenne vastustaa siihen kohdistuvia kuormia pääosin kaarevuudellaan. Kuorirakenteita ovat esimerkiksi autojen korit ja lentokoneiden sekä laivojen rungot. Kaikissa näissä tapauksissa ohut kuorirakenne kattaa suuren pinnan ja kantaa suuria ulkoisia voimia. Tällaisia rakenteita suunniteltaessa on tavoitteena tehdä rakenteesta turvallisuus ja käytettävyys huomioon ottaen mahdollisimman ohuita materiaalikustannusten minimoimiseksi ja jotta rakenne olisi kevyt. [Chapelle ja Bathe 2003, s. 1-2.]

Kuorirakenteiden mekaanista käyttäytymistä kuvaavat yhtälöt ovat yleensä, monista yksinkertaistuksista huolimatta, niin monimutkaisia, että niiden analyttinen ratkaiseminen ei ole mahdollista. Käytännössä kuoriongelmat (muodonmuutokset ja jännitykset kuorirakenteessa) ratkaistaan numeerisesti käyttämällä elementtimenetelmää (FEM). [Malinen 2001, s. 7.]

Elementtimenetelmä on yleinen numeerinen menetelmä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi. Sitä voidaan käyttää virtausmekaniikassa, lämmönjohtumisoongelmissa, sähköopissa jne. Kuitenkin juuri kuorirakenteiden analysointi antoi syvän käytännöllisten elementtimenetelmien kehittämiseksi [Chapelle ja Bathe 2003, s. 2-3].

Ohuiden kuorirakenteiden analysoinnissa on perusteltua käyttää erityisiä kuorielementtejä eikä 3D-elementtejä. Verkotettaessa ohut rakenne käyttämällä tetraedri- tai heksaedrielementtejä, verkosta täytyy generoida hyvin tiheä, koska muuten huononmuotoiset elementit heikentävät ratkaisun tarkkuutta. Käyttämällä kaksiulotteisia kuorielementtejä, joilla verkotetaan kuorirakenteen keskipinta, vapausasteiden lukumäärä ja sitä kautta ratkaisuaika pysyy pienempänä.

Monimutkaisten geometrioiden verkottaminen on helpompaa käyttämällä kolmioelementtejä kuin nelikulmioelementtejä. Useat automaattiset verkongeneroijat ja adaptiiviset ratkaisijat käyttävät kolmioelementtejä. Näin ollen on perusteltua kehittää myös kolmioelementtejä, vaikka nelikulmioelementit ovatkin yleensä tarkempia.

Varsinkin epälineaarisisessa analyysissä, jossa yhtälöryhmä joudutaan ratkaisemaan useita kertoja, on vapausasteiden lukumäärällä merkitystä, jolloin (bi)lineaaristen elementtien (3-solmuinen kolmioelementti ja 4-solmuinen nelikulmioelementti) käyttäminen voi olla tarpeellista. Näin ollen on tarvetta kehittää myös näitä lineaarisia elementtejä eikä pelkästään korkeampiasteisia elementtejä.

1.2 Työn tavoitteet ja pääkohdat

Tämän diplomityön tavoitteena oli perehtyä kuoriongelmiin ratkaisemiseen elementtimenetelmällä ja ohjelmoida lukkiutumattomat 3- ja 6-solmuiset kolmiokuorielementit Finnsap-lujuuslaskentaohjelmistoon.

Tavanomainen siirtymäelementti lukkiutuu eli elementti antaa huomattavasti liian pieniä siirtymätuloksia, kun kuorirakenne on ohut. Tässä työssä on tarkasteltu ensin tasokuorielementtiä, joka on yhdistetty kalvoelementistä ja laattaelementistä. Tällainen elementti kärsii leikkauslukkiutumisesta. Lukkiutumista on pyritty estämään käyttämällä ns. MITC-laattaelementtiä, jonka leikkausvenymätermejä on modifioitu verrattuna tavanomaiseen siirtymäelementtiin. Lineaarisella (3-solmuaisella) kolmioelementillä on lisäksi käytetty stabilointitekniikkaa, jossa leikkauskorjauskerrointa modifioidaan.

Tarkastellut kaarevasivuiset kvadraattiset (6-solmuiset) kolmiokuorielementit on muodostettu käyttämällä ns. MITC- ja ANS-tekniikoita. Kvadraattiset elementit kärsivät leikkauslukkiutumisen lisäksi kalvolukkiutumisesta, joten leikkausvenymätermien lisäksi myös elementin tasonsuuntaisia venymätermejä on modifioitu.

Luvussa 2 käsitellään lyhyesti Finnsap-ohjelmistoa ja sen kuorielementtejä. Luvussa 3 käsitellään lineaarisen ohuen kuoren teoriaa ja elementtimenetelmän soveltamista kuoriongelmiin. Luvuissa 4-7 kuvataan työssä implementoidut kolmiokuorielementit ja luvussa 8 esitellään 12 testitapausta, joilla on testattu implementoitujen elementtien toimivuutta.

2 Finnsap-ohjelmisto

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti Finnsap-lujuuslaskentaohjelmistoa. Esitys perustuu Finnsap-ohjelmiston aloitusohjeeseen ja ohjelaselosteeseen [FINNSAP I 2002].

2.1 Yleistä

Finnsap-lujuuslaskentaohjelmiston kehityksestä ja käyttötuesta huolehtii Insinööri-toimisto FEMdata Oy. Finnsap-ohjelmisto sisältää ohjelmat Finngen, Finnsap, Finn-draw, Finnpro, B7, EC3, Finndyn ja Ffatig.

Finngen on FEM-malligeneraattori, jonka avulla luodaan elementtimalli halutulle rakenteelle Finnsap-ohjelmaa varten. Finngen-ohjelmaan voidaan lukea rakenteen geometriaan liittyviä solmu- ja elementtitietoja myös suoraan CAD-järjestelmistä. Finnsap on FEM-analyysiohjelma, jolla suoritetaan varsinainen FEM-laskenta. Finn-draw on graafinen FEM-jälkikäsittelyohjelma Finnsap-ohjelman laskentamallin ja tulosten kuvalliseen esittämiseen.

Finnpro on ohjelma, joka laskee palkkien poikkipintasuuressa Finngen-mallintajalla luodun elementtimallin avulla. B7- ja EC3-ohjelmilla suoritetaan teräspalkkirakenteiden mitoituslaskelmia. Finndyn-ohjelmalla voidaan suorittaa dynaamisten vasteiden analyysi Finnsap-ohjelman ominaisarvotehtävän ratkaisun pohjalta. Ffatig-ohjelma on tarkoitettu väsymisanalyysien suorittamiseen.

Finnsap-ohjelmaa voidaan soveltaa mm. seuraavantyyppisten rakenteiden lujuuslaskentaan: ristikot sekä palkki-, kehä- ja arinarakenteet, putkistot, levy- ja laattarakenteet, pyörähdysymmetriset paksut kuoret, 3-ulotteiset ohutkuorirakenteet sekä 3-ulotteiset paksukuori- ja solidirakenteet.

Seuraavat analyysityypit ovat mahdollisia: staattinen, ominaisvärähtelytaajuuksien ja -muotojen ratkaisu, vastespektrianalyysi maanjäristyskuormituksille, impulssivaste-analyysi sysäyskuormituksille, satunnaisvärähtelyanalyysi kuormittavalle herätteelle, joka on satunnaisprosessi, suora vasteratkaisu (harmoninen vaste sinimuotoiselle jatkuvalle kuormitukselle), 3D20-solidielementin ja CBR-kuoren stationäärinen lämmönjohtuminen, epälineaarinen askeltava ratkaisu sekä lineaarinen stabiliteetin ominaisarvoratkaisu (toistaiseksi vain palkkielementille).

Mahdollisia staattisia kuormia ovat mm. solmupistevoimat ja -momentit, tukien pakosiirtymä tai esikiristys, kiihtyvyys tai omapaino haluttuun suuntaan, lämpölaajeneminen, erilaiset painekuormat ja viivakuormat tietyillä elementeillä, palkkielementtien jakautuneet ja jännevälikuormat, palkki- tai putkielementin esijännitys sekä pyörimisliike tietyillä elementeillä.

2.2 Kuorielementit

Finnsap-ohjelmassa on 3- ja 4-solmuiset kuori3- ja kuori4-elementit, 6- ja 8-solmuiset semiloof6- ja semiloof8-elementit sekä erityyppisiä 4-, 8- ja 9-solmuisia CBR-elementtejä. CBR-elementit ovat näistä uusimpia, yleisesti parhaiten toimivia ja niillä on monipuolisimmat lisätieto-ominaisuudet.

Finnsap-ohjelmassa ei ole erikseen laattaelementtejä, vaan laattarakenteet ajatellaan kuorirakenteiden erikoistapauksiksi ja analysoidaan käyttämällä kuorielementtejä.

2.2.1 Kuori-elementti

Kuori-elementillä on 20 vapausastetta (kolmioelementillä 15 vapausastetta): kolme siirtymää ja kaksi kiertymää jokaisessa solmupisteessä. Kuori-elementin jäykkyysmatriisi muodostetaan seuraavien oletusten pohjalta: pienet siirtymät, tasojännitystilä, kalvo- ja taivutusjäykkyyksien välillä ei kytkentää, leikkausmuodonmuutosta ei oteta huomioon taivutustilassa. Elementin ominaisuudet ovat periaatteessa klassillisen ohutkuoriteorian mukaiset.

Taivutusjäykkyyden kohdalla on kyseessä ns. Q-19-laattaelementti, joka kootaan neljästä ns. LCCT-11-kolmiosta, jotka edelleen kootaan kolmesta alikolmiosta. Taipuman lauseke on toisen asteen polynomi. Kuori-elementin kalvojäykkyys yhdistetään samalla tavoin kuin taivutusjäykkyyksin neljän kolmioelementin jäykkyyksistä. LCCT-11-kolmioita vastaavat nyt ns. LST-10-kolmiolevyelementit, joiden alueella venymät vaihtelevat lineaarisesti.

2.2.2 Semiloof-elementti

Semiloof-elementin kahdeksalla (kolmioelementin kuudella) geometriasolmulla (sivujen nurkka- ja keskisolmut) on vapausasteina globaaliset x -, y - ja z -siirtymät. Sivujen neljännespisteiden lähellä sijaitsevilla ns. Loof-solmuilla on vapausasteena kiertymä elementin sivuviivan ympäri.

Semiloof-elementin jäykkyysmatriisi muodostetaan seuraavien oletusten pohjalta: pienet siirtymät, kalvo- ja taivutusjäykkyyksien välillä on kytkentää, taivutustilan leikkausmuodonmuutosta ei oteta huomioon, keskipinnan normaalit säilyvät normaaleina, keskipintaa vastaan kohtisuorat normaalijännitykset ovat nolliä. Elementin ominaisuudet ovat siten periaatteessa klassillisen ohutkuoriteorian mukaiset.

Koska elementin nurkissa ei ole kiertymävapausasteita eikä kiertymä ole niissä jatkuva, tarkkuus on nurkkasolmuun kohdistetun taivuttavan pistevoiman tai siirtymätuen ympäristössä vaatimaton, ellei jakoa siinä tihennetä riittävästi.

2.2.3 CBR-elementit

CBR-elementit on degeneroitu yleisestä kolmidimensioisesta paksukuorielementistä olettamalla, että kuoren normaalit pysyvät suorina ja paksuusmuutokset elementin alueella ovat pieniä. Näillä oletuksilla on elementeistä ”poistettu” paksuussuuntainen ulottuvuus ja päästy klassillisen ohutkuoriteorian ns. resultanttimuotoon (CBR = Continuum Based Resultant). Käytettävissä ovat 4-solmuiset Lagrangen ja ANS-elementit, 8-solmuinen serendipity-elementti sekä 9-solmuiset heterosis- ja ANS-elementit. Näistä ANS-elementit toimivat parhaiten.

ANS-elementtien venymät interpoloidaan elementin käyräviivaisessa koordinaatistossa, josta ne transformoidaan karteesisen koordinaatistoon. Interpolointi suoritetaan yksiulotteisilla lineaarisilla Lagrangen muotofunktioilla.

ANS4-elementillä elementin tason suuntaiset kalvo- ja taivutussuureet interpoloidaan käyttäen 2×2 Gaussin interpolointipisteitä. Elementin tason suuntainen leikkaus ($F12$) ja vääntö ($M12$) interpoloidaan käyttäen elementin keskipisteen suureita. Paksuussuuntaiset leikkaustermit ($Q1$ ja $Q2$) interpoloidaan elementin keskipisteen kautta kulkevilla paikallisakseliston suuntaisilla lineaarisilla muotofunktioilla. Näin suoritettu interpolointi estää elementin lukkiutumisen.

ANS9-elementin eri termien interpoloinnissa pyritään lineaariseen venymien vaihteluun elementin alueella, koska variaatioanalyysillä tämän on todistettu olevan edullista paraboliselle elementille. Elementti integroidaan käyttämällä 3×3 Gaussin integrointia.

Nykyinen CBR-kolmioelementti muodostetaan nelikulmioelementistä yhden sivun solmut yhdistämällä eli antamalla kahdelle (3-solmuinen kolmioelementti) tai kolmelle (6-solmuinen kolmioelementti) solmulle samat koordinaatit. Näin muodostettu kolmioelementti toimii kalvotilassa kohtuullisesti. 3-solmuinen elementti vastaa vakiovenymäelementtiä. 6-solmuisella elementillä solmujärjestys (kolme vaihtoehtoa) vaikuttaa tuloksiin.

Taivutustilassa solmuja yhdistämällä muodostetut kolmiot ovat hyvin jäykkiä tai lukkiutuvat täysin. Jo muutama kolmio täyte-elementtinä nelikulmioverkossa voi heikentää ratkaisun tarkkuutta oleellisesti. Lisäksi sekä 3- että 6-solmuisella elementillä solmujärjestys vaikuttaa tuloksiin taivutustilassa. Ison leikkauskorjausparametrin α käyttäminen parantaa tuloksia, mutta tulokset eivät välttämättä konvergoi elementti-verkkoa tihennettäessä.

3 Kuoriyhtälöt ja elementtimenetelmä

Kuoret ovat kolmiulotteisia rakenteita, joiden yksi ulottuvuus, paksuus, on pieni verrattuna kahteen muuhun ulottuvuuteen. Kuorirakenteen geometria ja muodonmuutokset kuvataan kuoren kaksiulotteisen keskipinnan ja kuoren paksuuden avulla. Kuormituksen oletetaan kohdistuvan kuoren keskipintaan ja paksuussuuntainen normaaliännitys on nolla. Tässä työssä käsitellyillä elementeillä kuoren paksuuden suuntainen leikkausmuodonmuutos otetaan huomioon Reissner–Mindlin-teoriaa käyttämällä. Kuoren keskipinnan normaalien oletetaan pysyvän suorina, mutta ei välttämättä kohtisuorassa deformatiivista kuoren keskipintaa vastaan. [Lee 2004, s. 15, Määttänen 2001, luku 7 sekä Kouhia ja Tuomala 2003, s.176.]

Elementtimenetelmässä rakenne jaetaan niin sanottuihin elementteihin (luvun 8 testitapausten yhteydessä on esitetty esimerkkejä elementtiverkoista). Kuorirakenteella nämä elementit ovat nelikulmioita tai kolmioita, voidaan myös käyttää molempia yhtä aikaa. Elementit liittyvät toisiinsa niin sanotuissa solmupisteissä. Solmut sijaitsevat elementin kärkipisteissä. Solmuja voi sijaita myös elementin sivuilla ja myös sisäpisteissä. Kolmisolmuisella kolmioelementillä solmut sijaitsevat kolmion kärkipisteissä, kuusisolmuisella kolmioelementillä kärkipisteissä sekä sivujen keskipisteissä.

3.1 Siirtymämenetelmä ja muotofunktiot

Tässä työssä käsitellyt elementit perustuvat siirtymämenetelmään. Siirtymämenetelmässä tuntemattomia suureita (vapausasteita) ovat solmujen siirtymät. Kuorirakenteella nämä ovat siirtymät globaalien x -, y - ja z -akselien suunnissa sekä kiertymät näiden akselien ympäri (6 vapausastetta jokaisessa solmussa). Ratkaistuihin siirtymisiin määritetään edelleen rakenteeseen kohdistuvat voimat ja jännitykset. Voima-suuret ja jännitykset lasketaan elementin sisällä kolmessa Gaussin integrointipisteessä ja ekstrapoloidaan niistä lineaarisesti solmuihin.

N -solmuisen elementin mielivaltaisen pisteen paikkavektori suorakulmaisessa xyz -koordinaatistossa voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{\mathbf{x}}(\xi, \eta) + \zeta \hat{\mathbf{x}}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \bar{\mathbf{x}}_i + \zeta \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (3.1)$$

missä $\xi \in [0,1]$ ja $\eta \in [0, 1-\xi]$ ovat paikalliset käyräviivaiset (luonnolliset) koordinaatit, joiden avulla parametrisoidaan elementin keskipinta. $\zeta \in [-h/2, h/2]$ on paksuussuuntainen koordinaatti, h on elementin paksuus. $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\xi, \eta, 0)$ on elementin keskipinnalla olevan pisteen paikkavektori, jonka päätepiste on samalla ζ -viivalla kuin käsiteltävän pisteen paikkavektorin päätepiste. $\bar{\mathbf{x}}_i$ on solmun i paikkavektori globaalissa (rakennekohtaisessa) karteesisessa xyz -koordinaatistossa. $\hat{\mathbf{x}}$ on alkuasemassa kuoren normaalin suuntaan osoittava yksikkövektori ja $\hat{\mathbf{x}}_i$ on solmun i yksik-

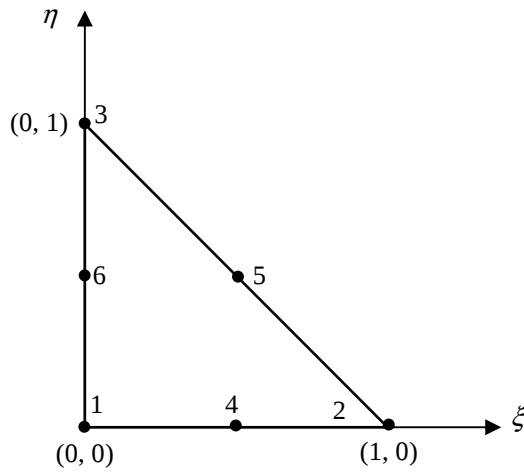
könormaalivektori. N_i on solmuun i liittyvä muotofunktio. Kolmisolmuiselle kolmiolle muotofunktiot ovat

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi, \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

ja kuusisolmuiselle kolmiolle

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi(2\xi - 1), \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta(2\eta - 1), \\ N_4(\xi, \eta) &= 4\xi(1 - \xi - \eta), \\ N_5(\xi, \eta) &= 4\xi\eta, \\ N_6(\xi, \eta) &= 4\eta(1 - \xi - \eta). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Kuvassa 3.1 on esitetty luonnollisessa koordinaatistossa olevan niin sanotun kanta-elementin solmunumerointi. [Sze ja Zhu 1999, s. 58, Vierros 1993, s. 8 sekä Kouhia ja Tuomala 2003, s. 234-235.]



Kuva 3.1. Kantakolmioelementti.

3.2 Venymät ja koordinaatistomuunnos

Määritellään kuoren keskipinnan tangenttitasoon paikallinen suorakulmainen koordinaatisto. Muodostetaan ensin elementin käyräviivaisten koordinaattien tangentti-vektorit

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\xi &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \bar{\mathbf{x}}_i, \\ \mathbf{e}_\eta &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \bar{\mathbf{x}}_i.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Paikallisakselisto määritellään siten, että sen 1-akseli on $\xi\eta$ -koordinaatiston akselin ξ tangentin suuntainen, 3-akseli keskipinnan normaalin suuntainen ja 2-akseli näitä vastaan kohtisuorassa oikeakätisesti eli paikalliskoordinaatiston kantavektorit ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_\xi / |\mathbf{e}_\xi|, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_\eta / |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_\eta|, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.\end{aligned}\tag{3.5}$$

[Vierros 1993, s. 20-21, FINNSAP I 2002, s. Os 4 - 42.]

Pienten kiertymien tapauksessa lineaarisessa kuoriteoriassa elementin pisteen siirtymä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{\mathbf{u}}(\xi, \eta) + \zeta \hat{\mathbf{u}}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \bar{\mathbf{u}}_i + \zeta \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \hat{\mathbf{u}}_i,\tag{3.6}$$

missä $\bar{\mathbf{u}}_i = [u_i \quad v_i \quad w_i]^T$ sisältää solmun i siirtymät globaalien x -, y - ja z -akselien suunnissa. $\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{e}_1 \theta_2^i - \mathbf{e}_2 \theta_1^i$, missä θ_1^i ja θ_2^i ovat kiertymät akselien $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ ympäri solmussa i . Siirtymät interpoloidaan käyttämällä samoja muotofunktioita kuin elementin koordinaattien interpoloinnissa. [Sze ja Zhu 1999, s. 59.]

Venymät luonnollisessa koordinaatistossa lasketaan kaavalla [Lee 2004, s. 72]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \right), \quad \text{missä } \xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta, \xi_3 = \zeta.\tag{3.7}$$

eli

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi\xi} &= \mathbf{x}_{,\xi}^T \mathbf{u}_{,\xi}, \\ \varepsilon_{\eta\eta} &= \mathbf{x}_{,\eta}^T \mathbf{u}_{,\eta}, \\ 2\varepsilon_{\xi\eta} &= \mathbf{x}_{,\xi}^T \mathbf{u}_{,\eta} + \mathbf{x}_{,\eta}^T \mathbf{u}_{,\xi}, \\ 2\varepsilon_{\xi\zeta} &= \mathbf{x}_{,\xi}^T \mathbf{u}_{,\zeta} + \mathbf{x}_{,\zeta}^T \mathbf{u}_{,\xi}, \\ 2\varepsilon_{\eta\zeta} &= \mathbf{x}_{,\eta}^T \mathbf{u}_{,\zeta} + \mathbf{x}_{,\zeta}^T \mathbf{u}_{,\eta}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Kun elementin tasonsuuntaisten venymien lausekkeissa otetaan huomioon ζ :n suhteen korkeintaan lineaariset termit ja paksuussuuntaisten leikkausvenymien lausekkeissa vain vakiotermit, saadaan [Sze ja Zhu 1999, s. 59-60]

$$\varepsilon_{\xi\xi}^m = \varepsilon_{\xi\xi}^m + \zeta \varepsilon_{\xi\xi}^b, \quad \varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{\eta\eta}^m + \zeta \varepsilon_{\eta\eta}^b, \quad 2\varepsilon_{\xi\eta} = 2\varepsilon_{\xi\eta}^m + 2\zeta \varepsilon_{\xi\eta}^b, \quad (3.9)$$

missä

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi}^m &= \bar{\mathbf{x}}_{,\xi}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\xi}, \\ \varepsilon_{\eta\eta}^m &= \bar{\mathbf{x}}_{,\eta}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\eta}, \\ 2\varepsilon_{\xi\eta}^m &= \bar{\mathbf{x}}_{,\xi}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\eta} + \bar{\mathbf{x}}_{,\eta}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\xi}, \\ \varepsilon_{\xi\xi}^b &= \hat{\mathbf{x}}_{,\xi}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\xi} + \bar{\mathbf{x}}_{,\xi}^T \hat{\mathbf{u}}_{,\xi}, \\ \varepsilon_{\eta\eta}^b &= \hat{\mathbf{x}}_{,\eta}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\eta} + \bar{\mathbf{x}}_{,\eta}^T \hat{\mathbf{u}}_{,\eta}, \\ 2\varepsilon_{\xi\eta}^b &= \hat{\mathbf{x}}_{,\xi}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\eta} + \hat{\mathbf{x}}_{,\eta}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\xi} + \bar{\mathbf{x}}_{,\xi}^T \hat{\mathbf{u}}_{,\eta} + \bar{\mathbf{x}}_{,\eta}^T \hat{\mathbf{u}}_{,\xi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ja

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\xi\xi}^r &= \hat{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\xi} + \bar{\mathbf{x}}_{,\xi}^T \hat{\mathbf{u}}, \\ 2\varepsilon_{\eta\xi}^r &= \hat{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{u}}_{,\eta} + \bar{\mathbf{x}}_{,\eta}^T \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Materiaaliominaisuudet määritellään yleensä suorakulmaisessa paikalliskoordinaatistossa. Sen vuoksi täytyy elementin käyräviivaisen koordinaatiston venymäsuureet transformoida paikalliseen karteesisen koordinaatistoon. Venymät paikallisessa karteesisessä koordinaatistossa saadaan seuraavasti [Sze ja Zhu 1999, s. 60]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ 2\varepsilon_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} x_{,\xi} & y_{,\xi} y_{,\xi} & x_{,\xi} y_{,\xi} \\ x_{,\eta} x_{,\eta} & y_{,\eta} y_{,\eta} & x_{,\eta} y_{,\eta} \\ 2x_{,\xi} x_{,\eta} & 2y_{,\xi} y_{,\eta} & x_{,\xi} y_{,\eta} + x_{,\eta} y_{,\xi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi}^m \\ \varepsilon_{\eta\eta}^m \\ 2\varepsilon_{\xi\eta}^m \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^b \\ \varepsilon_{yy}^b \\ 2\varepsilon_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} x_{,\xi} & y_{,\xi} y_{,\xi} & x_{,\xi} y_{,\xi} \\ x_{,\eta} x_{,\eta} & y_{,\eta} y_{,\eta} & x_{,\eta} y_{,\eta} \\ 2x_{,\xi} x_{,\eta} & 2y_{,\xi} y_{,\eta} & x_{,\xi} y_{,\eta} + x_{,\eta} y_{,\xi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi}^b \\ \varepsilon_{\eta\eta}^b \\ 2\varepsilon_{\xi\eta}^b \end{Bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^s = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{\xi\xi}^r \\ 2\varepsilon_{\eta\xi}^r \end{Bmatrix}, \quad (3.14)$$

missä

$$x_{,\xi} = \mathbf{e}_1^T \bar{\mathbf{x}}_{,\xi}, \quad y_{,\xi} = \mathbf{e}_2^T \bar{\mathbf{x}}_{,\xi}, \quad x_{,\eta} = \mathbf{e}_1^T \bar{\mathbf{x}}_{,\eta}, \quad y_{,\eta} = \mathbf{e}_2^T \bar{\mathbf{x}}_{,\eta}. \quad (3.15)$$

Edellä 'm' viittaa kalvotilaan (membrane), 'b' taivutukseen (bending) ja 's' leikkaukseen (shear).

Paikalliset karteesiset venymät voidaan ilmaista elementin solmujen tuntemattomat siirtymät ja kiertymät sisältävän siirtymävektorin $\mathbf{q}$ avulla

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \mathbf{B}_m \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^b = \mathbf{B}_b \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s = \mathbf{B}_s \mathbf{q}. \quad (3.16)$$

3.3 Jäykkyysmatriisi

Tuntemattomien solmusiirtymien ratkaisemiseksi muodostetaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (3.17)$$

missä $\mathbf{K}$ on jäykkyysmatriisi, $\mathbf{v}$ on solmupisteiden siirtymien ja kiertymien muodostama siirtymävektori ja $\mathbf{f}$ on kuormavektori. Globaali jäykkyysmatriisi saadaan elementtien jäykkyysmatriisien summana, kunhan yksittäiset jäykkyyskertoimet sijoitetaan globaalien vapausasteiden määräämiin paikkoihin [Hakala 1991, s. 33]:

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e. \quad (3.18)$$

Elementin jäykkyysmatriisi [Sze ja Zhu 1999, s. 60]

$$\mathbf{K}^e = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} ((\mathbf{B}_m + \zeta \mathbf{B}_b)^T \mathbf{C}_\varepsilon (\mathbf{B}_m + \zeta \mathbf{B}_b) + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_\gamma \mathbf{B}_s) J d\xi d\eta d\zeta, \quad (3.19)$$

missä $\mathbf{C}_\varepsilon$ on tasojännitystilän kimmomatriisi, $\mathbf{C}_\gamma$ on leikkauksen kimmomatriisi ja J on Jacobin determinanti.

Isotrooppiselle materiaalille

$$\mathbf{C}_\varepsilon = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

ja

$$\mathbf{C}_\gamma = \frac{kE}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

missä E on kimmokerroin, ν Poissonin vakio ja k leikkauskorjauskerroin ($k = 5/6$).

Kuorielementillä ei ole jäykkyyttä kuoren tason normaalin ympäri tapahtuvaa kiertymää vastaan. Tämä aiheuttaa yhtälöryhmään singulaarisuuden, jos samaan solmuun liittyvät elementit ovat samassa tasossa, kuoren tason normaalin ympäri tapahtuvaa kiertymää ei ole estetty reunaehdolla tai jousella ja solmuun ei liity muita elementtejä, joilla olisi jäykkyyttä kuoren normaalin ympäri tapahtuvaa kiertymää vastaan. Singulaarisuus poistetaan lisäämällä kiertymäjousielementti kuoren normaalin suuntaan singulaarisuuden aiheuttaviin solmuihin. [Vierros 1993, s. 35.]

3.4 Lukkiutuminen

Edellä esitetty tavanomainen siirtymäelementti ei toimi ohuella kuorella. Malli ei kuvaa todellista kuorta riittävän hyvin. Elementti lukkiutuu eli taipumat jäävät liian pieniksi tai pahimmassa tapauksessa taipumat ovat nolliä. Testitapausten 8.9 ja 8.12 yhteydessä on taulukoitu tulokset edellä esitetyllä tavalla muodostetuilla 3-solmuisella (DISP3) ja 6-solmuisella (DISP6) kolmioelementillä. Molemmissa testitapauksissa DISP3-elementin siirtymät ovat lähes nolliä. DISP6-elementti toimii paremmin, mutta sekin konvergoi hyvin hitaasti kohti tarkkaa ratkaisua.

Lukkiutuminen jaetaan yleensä kalvo- ja leikkauslukkiutumiseen riippuen siitä kummat termit kuoren venymäsuureista aiheuttavat lukkiutumisen [Vierros 1993, s. 26]. Tässä työssä implementoiduilla elementeillä lukkiutumista pyritään välttämään valitsemalla venymätermeille uudet interpolaatiofunktiot, joiden tuntemattomat kertoimet määrätään sitomalla ne alkuperäisiin venymien lausekkeisiin tietyissä pisteissä.

Voidaan vaatia, että venymät ovat vakioita tai muuttuvat lineaarisesti elementin sivujen suunnissa. Nelikulmioelementillä tämä on helppo järjestää, koska elementin sivut ovat käyräviivaisen koordinaatiston akselien suuntaisia. Kolmioelementillä ongelmia aiheuttaa kantaelementin hypotenuusaa vastaava sivu, joka ei ole käyräviivaisen koordinaatiston akselien suuntainen.

Toimivia nelikulmioelementtejä on olemassa, kolmioita vähemmän. Seuraavassa luvussa esitetään ensin kalvoelementistä ja laattaelementistä yhdistetty tasokuorikolmioelementti, jonka leikkausmuodonmuutosta on modifioitu. Lineaarisella elementillä sovelletaan lisäksi stabilointitekniikkaa. Kvadraattisilla kaarevilla kuorielementeillä myös elementin tasonsuuntaisia venymäkomponentteja täytyy modifioida, jotta päästään eroon kalvolukkiutumisesta. Luvussa 5 esitetään MITC-elementtejä (MITC = Mixed Interpolated Tensorial Components) ja luvussa 6 ANS-elementti (ANS = Assumed Natural Strain). Molemmissa tekniikoissa on sama periaate.

4 MITC-laattaelementit

Tässä luvussa käsitellään kalvoelementistä ja MITC-laattaelementistä yhdistettyä tasokuorikolmioelementtiä. Tarkastelun kohteena ovat 3- ja 7-solmuiset MITC-laattaelementit. 7-solmuinen elementti on käyttäjän kannalta 6-solmuinen. Seitsemännessä solmussa on vapausasteina vain kiertymät ja ne eliminoidaan elementtitasolla ennen globaalin jäykkyyssmatriisin muodostamista. Seitsemänteen, elementin keskipisteessä sijaitsevaan, solmuun liittyvä kuplamuotofunktio on

$$N_7(\xi, \eta) = 27\xi\eta(1 - \xi - \eta). \quad (4.1)$$

4.1 Venymämatriisi

Oletetaan, että kunkin elementin solmut ovat keskenään samassa tasossa. Muodostetaan (integrointipisteessä) paikalliskoordinaatisto luvussa 3 selostetulla tavalla. Solmujen koordinaatit tässä paikalliskoordinaatistossa ovat

$$\begin{Bmatrix} x_i^l \\ y_i^l \\ z_i^l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^T \cdot \bar{\mathbf{x}}_i \\ \mathbf{e}_2^T \cdot \bar{\mathbf{x}}_i \\ \mathbf{e}_3^T \cdot \bar{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^T \cdot \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \mathbf{e}_2^T \cdot \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \mathbf{e}_3^T \cdot \bar{\mathbf{x}}_1 \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2)$$

missä $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$ ovat paikalliskoordinaatiston kantavektorit, $\bar{\mathbf{x}}_i$ on solmun i globaali paikkavektori. Paikalliskoordinaatiston origo on solmussa 1.

Siirtymät paikallisakselien suunnissa voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{Bmatrix} u^l \\ v^l \\ w^l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}^l \\ \bar{v}^l \\ \bar{w}^l \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \beta_{x^l} \\ \beta_{y^l} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.3)$$

missä $\bar{u}^l$, $\bar{v}^l$ ja $\bar{w}^l$ ovat keskipinnan siirtymät. $\beta_{x^l} = \theta_{y^l}$ ja $\beta_{y^l} = -\theta_{x^l}$, missä θ_{x^l} ja θ_{y^l} ovat kiertymät paikallisakselien $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ ympäri.

Venymät paikallisakselistossa ovat

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x^l x^l} &= \frac{\partial u^l}{\partial x^l} = \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial x^l} + \zeta \frac{\partial \beta_{x^l}}{\partial x^l} = \varepsilon_{x^l x^l}^m + \zeta \varepsilon_{x^l x^l}^b, \\
\varepsilon_{y^l y^l} &= \frac{\partial u^l}{\partial y^l} = \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial y^l} + \zeta \frac{\partial \beta_{y^l}}{\partial y^l} = \varepsilon_{y^l y^l}^m + \zeta \varepsilon_{y^l y^l}^b, \\
2\varepsilon_{x^l y^l} &= \frac{\partial u^l}{\partial y^l} + \frac{\partial v^l}{\partial x^l} = \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial x^l} + \frac{\partial \bar{v}^l}{\partial y^l} + \zeta \left(\frac{\partial \beta_{x^l}}{\partial y^l} + \frac{\partial \beta_{y^l}}{\partial x^l} \right) = 2\varepsilon_{x^l y^l}^m + \zeta 2\varepsilon_{x^l y^l}^b, \\
2\varepsilon_{x^l \zeta} &= \frac{\partial u^l}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^l}{\partial x^l} = \beta_{x^l} + \frac{\partial \bar{w}^l}{\partial x^l}, \\
2\varepsilon_{y^l \zeta} &= \frac{\partial v^l}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^l}{\partial y^l} = \beta_{y^l} + \frac{\partial \bar{w}^l}{\partial y^l}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Merkitään

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{x^l \zeta} \\ 2\varepsilon_{y^l \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{x^l} \\ \beta_{y^l} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \partial \bar{w}^l / \partial x^l \\ \partial \bar{w}^l / \partial y^l \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\beta}^l + \nabla \bar{\mathbf{w}}^l. \tag{4.5}$$

Yhden solmun osuus venymämatriisista voidaan kirjoittaa matriisiksi

$$\mathbf{B}_a = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_a^m \\ \mathbf{B}_a^b \\ \mathbf{B}_a^s \end{Bmatrix}, \tag{4.6}$$

missä

$$\mathbf{B}_a^m = \begin{bmatrix} N_{a,x^l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,y^l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{a,y^l} & N_{a,x^l} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{B}_a^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{a,x^l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{a,y^l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{a,y^l} & N_{a,x^l} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{B}_a^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{a,x^l} & N_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,y^l} & 0 & N_a & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Kun venymät paikallisakselistossa kirjoitetaan solmujen globaalien siirtymien ja kiertymien avulla, elementin yhden solmun osuus venymämatriisista tulee muotoon (Vierros 1993, s. 23)

$$\mathbf{B}_a^m = \begin{bmatrix} N_{a,x'} \mathbf{e}_1^T & \mathbf{0} \\ N_{a,y'} \mathbf{e}_2^T & \mathbf{0} \\ N_{a,y'} \mathbf{e}_1^T + N_{a,x'} \mathbf{e}_2^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B}_a^b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & N_{a,x'} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{0} & N_{a,y'} \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{0} & N_{a,y'} \mathbf{e}_1^T + N_{a,x'} \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{B}_a^s = \begin{bmatrix} N_{a,x'} \mathbf{e}_3^T & N_a \mathbf{e}_1^T \\ N_{a,y'} \mathbf{e}_3^T & N_a \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Muotofunktioiden derivaatat $N_{a,x'}$ ja $N_{a,y'}$ saadaan seuraavasti käyttämällä derivoinnin ketjusääntöä

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \xi} + \frac{\partial N_a}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \eta} + \frac{\partial N_a}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \xi} & \frac{\partial y'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x'}{\partial \eta} & \frac{\partial y'}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x'} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y'} \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x'} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y'} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \xi} & \frac{\partial y'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x'}{\partial \eta} & \frac{\partial y'}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2 MITC-laattaelementtiformulaatio

MITC-laattaelementtiformulaation idea on modifioida leikkausmuodonmuutosta siten, että leikkausmuodonmuutos on elementin reunaviivalla samanasteinen polynomi kuin taipuman $\bar{w}^l$ gradientti tässä suunnassa (Kouhia ja Tuomala 2003, s. 197). 3-solmuiselle kolmioelementille tämä merkitsee leikkausmuodonmuutoksen vakioisuutta ja 7-solmuiselle kolmioelementille leikkausmuodonmuutoksen lineaarisuutta.

Kaavassa (4.5) korvataan $\boldsymbol{\beta}^l$ elementteittäin $\mathbf{R}_K \boldsymbol{\beta}^l$:llä eli

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{Bmatrix} 2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{x'\zeta} \\ 2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{y'\zeta} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_K \boldsymbol{\beta}^l + \nabla \bar{w}^l, \quad (4.14)$$

missä $\mathbf{R}_K$ on niin sanottu reduktiomatriisi (Lyly ja Stenberg 1995a). Merkitään

$$\mathbf{N}_\beta = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

$\mathbf{R}_K \mathbf{N}_\beta$ on nimeltään redusoitu muotofunktiomatriisi (reduced shape function matrix). Kun merkitään sen solmuun a liittyvää osuutta (sarakkeita $2a-1$ ja $2a$)

$$\mathbf{R}_K \mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

saadaan kaava (4.12) muotoon

$$\mathbf{B}_a^s = \begin{bmatrix} N_{a,x^j} \mathbf{e}_3^T & r_{11} \mathbf{e}_1^T + r_{12} \mathbf{e}_2^T \\ N_{a,y^j} \mathbf{e}_3^T & r_{21} \mathbf{e}_1^T + r_{22} \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Redusoidun muotofunktiomatriisin muodostamista on käsitelty seuraavassa luvussa.

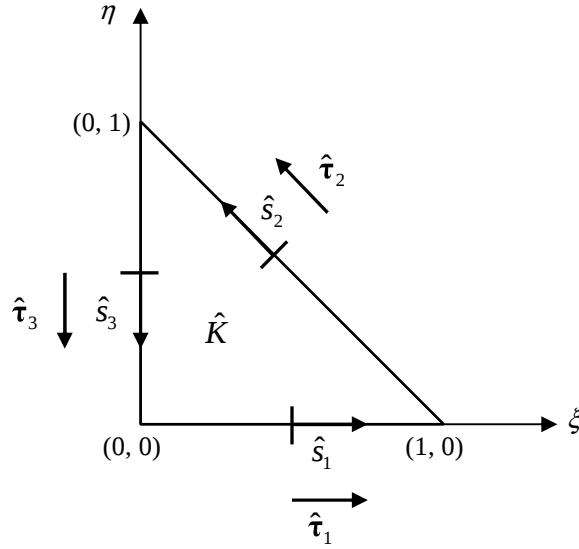
4.3 Redusoidun muotofunktiomatriisin muodostaminen

Seuraava esitys perustuu Lylyn ja Stenbergin raporttiin [1995a]. Referenssikolmioelementti $\hat{K}$ luonnollisessa (ξ, η) -koordinaatistossa on esitetty kuvassa 4.1. Sivujen $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$ ja $\hat{E}_3$ yksikkötangenttivektorit ovat

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}}_1 &= (1, 0), \\ \hat{\mathbf{t}}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1), \\ \hat{\mathbf{t}}_3 &= (0, -1). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Merkitään sivujen $\hat{E}_i$ suuntaisia paikallisia koordinaatteja $\hat{s}_i$:llä. Seuraavat yhteydet ovat voimassa koordinaattien $\hat{s}_i$ ja (ξ, η) välillä:

$$\begin{aligned} (\xi, \eta) &= (\hat{s}_i + \frac{1}{2}, 0), & \text{sivulla } \hat{E}_1, \\ (\xi, \eta) &= (\frac{1}{2} - \frac{\hat{s}_2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{\hat{s}_2}{\sqrt{2}}), & \text{sivulla } \hat{E}_2, \\ (\xi, \eta) &= (0, \frac{1}{2} - \hat{s}_3), & \text{sivulla } \hat{E}_3. \end{aligned} \quad (4.19)$$



Kuva 4.1. Referenssikolmioelementti $\hat{K}$.

Redusoitu muotofunktio matriisi muodostetaan seuraavalla tavalla:

- Ensin määritellään 3- ja 6-solmuisille kolmioille paikallinen leikkausvenymä-avaruus (local shear space) $\Gamma(\hat{K})$ ja sen vapausasteet $\hat{l}_i$.
- Toiseksi määritellään muotofunktiot $\hat{\gamma}_i$ avaruudelle $\Gamma(\hat{K})$ siten, että $\hat{l}_i(\hat{\gamma}_j) = \delta_{ij}$, missä $\delta_{ij} = 1$, jos $i = j$ ja 0 muulloin.
- Merkitään muotofunktio matriisiin $\mathbf{N}_\beta$ j :ttä saraketta $\boldsymbol{\eta}_j(x, y)$:llä. $j = 1, 2, \dots, 2n$, missä n on elementin solmujen lukumäärä.
- Seuraavaksi asetetaan $\hat{\boldsymbol{\eta}}_j(\xi, \eta) = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\eta}_j(x, y)$, missä $\mathbf{J}$ on Jacobin matriisi.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^l}{\partial \xi} & \frac{\partial x^l}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y^l}{\partial \xi} & \frac{\partial y^l}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

- Lasketaan arvot $\hat{l}_i(\hat{\boldsymbol{\eta}}_j)$.
- Lopuksi matriisiin $\mathbf{R}_K \mathbf{N}_\beta$ j :s sarake saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{J}^{-T} \sum_i \hat{l}_i(\hat{\boldsymbol{\eta}}_j) \hat{\gamma}_i. \quad (4.21)$$

Seuraavissa kahdessa luvussa määritellään 3- ja 6-solmuisille kolmioille avaruudet $\Gamma(\hat{K})$, niiden vapausasteet $\hat{l}_i$ ja muotofunktiovektorit $\hat{\gamma}_i$.

4.3.1 Redusoitu leikkausvenymä MITC3-laattaelementille

MITC3-laattaelementin paikallinen leikkausvenymäavaruus koostuu funktioista

$$\begin{pmatrix} a_{00} + c_{00}\eta \\ b_{00} - c_{00}\xi \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Vapausasteet $\hat{l}_i$, $i = 1, 2, 3$, avaruudelle $\Gamma(\hat{K})$ määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned} \hat{l}_1(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{E}_1} \hat{\eta} \cdot \hat{\tau}_1 d\hat{s}_1, \\ \hat{l}_2(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{E}_2} \hat{\eta} \cdot \hat{\tau}_2 d\hat{s}_2, \\ \hat{l}_3(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{E}_3} \hat{\eta} \cdot \hat{\tau}_3 d\hat{s}_3. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ehdot $\hat{l}_i(\hat{\gamma}_j) = \delta_{ij}$ antavat seuraavan muotofunktiojoukon $\Gamma(\hat{K})$:lle:

$$\hat{\gamma}_i = \begin{pmatrix} a_{00}^i + c_{00}^i\eta \\ b_{00}^i - c_{00}^i\xi \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.24)$$

Kertoimet a_{00}^i , b_{00}^i ja c_{00}^i on esitetty taulukossa 4.1. Lylyllä ja Stenbergillä [1995a, s. 17] kaavojen 4.22 ja 4.24 +- ja --merkit ovat toisinpäin, mutta taulukon kertoimet ovat samat kuin alla on esitetty (tässä heillä lienee painovirhe).

Taulukko 4.1. Muotofunktiopolynomien kertoimet.

i	a_{00}^i	b_{00}^i	c_{00}^i
1	1	0	-1
2	0	0	-1
3	0	-1	-1

Soveltamalla luvussa 4.3 esitettyä menettelyä redusoiduksi muotofunktio­matriisiksi saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_K \mathbf{N}_\beta &= \frac{1}{2} \mathbf{J}^{-T} \left\{ \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} & x_{21} & y_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & y_{31} & 0 & 0 & x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} x_{32}\eta & y_{32}\eta & -x_{31}\eta & -y_{31}\eta & x_{21}\eta & y_{21}\eta \\ -x_{32}\xi & -y_{32}\xi & x_{31}\xi & y_{31}\xi & -x_{21}\xi & -y_{21}\xi \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

missä $x_{ij} = x_i - x_j$ ja $y_{ij} = y_i - y_j$.

4.3.2 Redusoitu leikkausvenymä MITC7-laattaelementille

MITC7-laattaelementin paikallinen leikkausvenymäavaruus koostuu funktioista

$$\begin{pmatrix} a_{00} + a_{10}\xi + a_{01}\eta + c_{10}\xi\eta + c_{01}\eta^2 \\ b_{00} + b_{10}\xi + b_{01}\eta - c_{10}\xi^2 - c_{01}\xi\eta \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Vapausasteet $\hat{l}_i$, $i = 1, 2, \dots, 8$, avaruudelle $\Gamma(\hat{K})$ määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned} \hat{l}_1(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{E}_1} \hat{\eta} \cdot \hat{\tau}_1 d\hat{s}_1, \\ \hat{l}_2(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{E}_2} \hat{\eta} \cdot \hat{\tau}_2 d\hat{s}_2, \\ \hat{l}_3(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{E}_3} \hat{\eta} \cdot \hat{\tau}_3 d\hat{s}_3, \\ \hat{l}_4(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{E}_1} \hat{s}_1(\hat{\eta} \cdot \hat{\tau}_1) d\hat{s}_1, \\ \hat{l}_5(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{E}_2} \hat{s}_2(\hat{\eta} \cdot \hat{\tau}_2) d\hat{s}_2, \\ \hat{l}_6(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{E}_3} \hat{s}_3(\hat{\eta} \cdot \hat{\tau}_3) d\hat{s}_3, \\ \hat{l}_7(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{K}} \hat{\eta} \cdot (1, 0) d\xi d\eta, \\ \hat{l}_8(\hat{\eta}) &= \int_{\hat{K}} \hat{\eta} \cdot (0, 1) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ehdot $\hat{l}_i(\hat{\gamma}_j) = \delta_{ij}$ antavat seuraavan muotofunktiojoukon $\Gamma(\hat{K})$:lle:

$$\hat{\gamma}_i = \begin{pmatrix} a_{00}^i + a_{10}^i\xi + a_{01}^i\eta + c_{10}^i\xi\eta + c_{01}^i\eta^2 \\ b_{00}^i + b_{10}^i\xi + b_{01}^i\eta - c_{10}^i\xi^2 - c_{01}^i\xi\eta \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (4.28)$$

Kertoimet on esitetty taulukossa 4.2. Lylyllä ja Stenbergillä [1995a, s. 19] $c_{10}^5 = 2\sqrt{2}$ ja $c_{01}^5 = -2\sqrt{2}$, kun omat laskelmat tuottivat $c_{10}^5 = 4\sqrt{2}$ ja $c_{01}^5 = -4\sqrt{2}$.

Taulukko 4.2. Muotofunktiopolynomien kertoimet.

i	a_{00}^i	a_{10}^i	a_{01}^i	b_{00}^i	b_{10}^i	b_{01}^i	c_{10}^i	c_{01}^i
1	1	0	-5	0	1	0	0	4
2	0	0	3	0	-3	0	-4	-4
3	0	0	-1	-1	5	0	4	0
4	-6	12	14	0	-10	0	-16	-8
5	0	0	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	$4\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$
6	0	0	-10	-6	14	12	8	16
7	0	0	16	0	-8	0	-8	-16
8	0	0	-8	0	16	0	16	8

Redusoitu muotofunktio matriisi on muodostettu soveltamalla luvussa 4.3 esitettyä menettelyä. Tarvittavat integraalit on laskettu tarkasti (symbolisesti) käyttämällä Maple-ohjelmaa, josta tulokset saa halutessaan Fortran-ohjelmointikielen syntaksin mukaisessa muodossa.

MITC7-elementin jäykkyyssmatriisi integroidaan käyttämällä 7 integrointipistettä.

4.4 MITC3-elementin stabilointi

Stabilointi tapahtuu korvaamalla kaavassa (3.21) leikkauskorjauskerroin k elementteittäin seuraavalla modifikaatiolla [Lyly ja Stenberg 1994, s. 8]

$$\left(\frac{h^2}{h^2 + \alpha_K d_K^2} \right) k, \quad (4.29)$$

missä d_K on elementin pisimmän sivun pituus, h on elementin paksuus ja α_K on positiivinen parametri. Kun $\alpha_K = 0$, saadaan alkuperäinen elementti. Kun d_K lähestyy nollaa, stabiloitu elementti konvergoi kohti alkuperäistä elementtiä.

4.5 7-solmuisen elementin sisäsolmun kiertymien kondensointi

7-solmuisen elementin sisäsolmun kiertymävapausasteet ovat kytkeytyneitä vain elementin muihin vapausasteisiin, mutta eivät naapurielementteihin. Tällaiset sisäiset vapausasteet voidaan eliminoida jo elementtitasolla ennen globaalien matriisien muodostamista.

Merkitään elementin sisäisiä vapausasteita $\mathbf{u}_2$:lla ja ulkoisia $\mathbf{u}_1$:llä. Ositetaan elementin tasapainoyhtälö vastaavasti

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.30)$$

$\mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$, koska sisäsolmulle ei anneta solmukuormia eikä elementin alueella vaikuttavia kuormia ja eta sisäsolmulle ekvivalentiksi solmuvoimaksi. Yhtälöryhmän alemmasta osasta voidaan ratkaista

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \mathbf{u}_1. \quad (4.31)$$

Kun tämä yhteys sijoitetaan ylempään osaan, saadaan yhtälöryhmä

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_1, \quad \text{missä} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}. \quad (4.32)$$

Tätä eliminointia sanotaan vapausasteiden (staattiseksi) kondensoinniksi. [Hakala 1991, s. 296-297.]

5 MITC-kuorielementit

Tässä luvussa käsitellään MITC-kuorielementtejä. Esitys perustuu Leen väitöskirjaan [2004].

Määritellään niin sanottujen sidontapisteiden (tying points) joukko (ξ_k, η_k) , $k = 1, \dots, n_{ij}$ ja määritellään venymäkomponenteille interpolaatiot

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^{n_{ij}} H_{ij}^k(\xi, \eta) \varepsilon_{ij} \Big|_{(\xi_{ij}^k, \eta_{ij}^k, \zeta)}, \quad (5.1)$$

missä n_{ij} on sidontapisteiden lukumäärä ja H_{ij}^k interpolaatiofunktioita, joille pätee

$$H_{ij}^k(\xi_{ij}^l, \eta_{ij}^l) = \delta_{kl}, \quad l = 1, \dots, n_{ij} \quad (5.2)$$

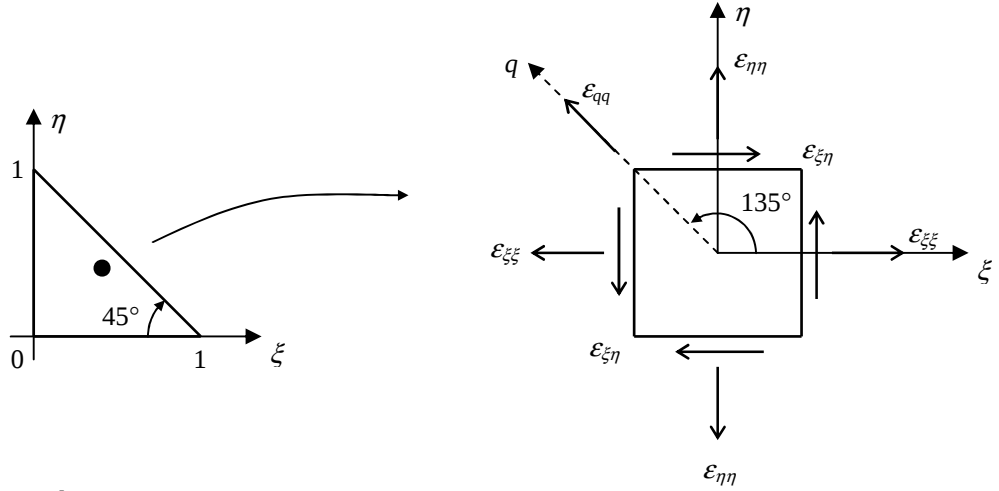
eli venymäkomponenteille valitaan tietyt interpolaatiot, jotka sidotaan kaavan (3.8) venymiin tietyissä pisteissä (sidontapisteissä).

5.1 Elementin tasonsuuntaisten venymien interpolointi

Kuvassa 5.1 on esitetty luonnollisessa koordinaatistossa sijaitsevan kolmioelementin yhden pisteen elementin tasonsuuntaiset venymät. Elementin tasossa tapahtuva muodonmuutos määritellään kolmen venymän eli kahden normaalivenymän $\varepsilon_{\xi\xi}$ ja $\varepsilon_{\eta\eta}$ sekä tasossa vaikuttavan leikkausvenymän $\varepsilon_{\xi\eta}$ avulla.

Kolme riippumatonta normaalivenymää määrittävät myös yksikäsitteisesti tasossa tapahtuvan muodonmuutoksen. Kolmioelementin, jonka tuloksiin ei vaikuta solmunumerointijärjestys, aikaansaamiseksi otetaan käyttöön suorakulmaisen kolmion hypotenuusan suuntainen normaalivenymä ε_{qq} . Venymä ε_{qq} saadaan venymistä $\varepsilon_{\xi\xi}$, $\varepsilon_{\eta\eta}$ ja $\varepsilon_{\xi\eta}$ seuraavasti ($\alpha = 135^\circ$) [Pennala 1993, s. 157-161]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{qq} &= \begin{Bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} & \varepsilon_{\xi\eta} \\ \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\eta\eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \\ &= \varepsilon_{\xi\xi} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{\eta\eta} \sin^2 \alpha + 2\varepsilon_{\xi\eta} \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{\xi\xi} - \varepsilon_{\eta\eta}) \cos 2\alpha + \varepsilon_{\xi\eta} \sin 2\alpha \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta}) - \varepsilon_{\xi\eta}. \end{aligned} \quad (5.3)$$



Kuva 5.1. Elementin tasonsuuntaiset venymät.

Venymät $\varepsilon_{\xi\xi}$, $\varepsilon_{\eta\eta}$ ja ε_{qq} interpoloidaan toisistaan riippumatta samanasteisilla polynomeilla

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} &= a_1 + b_1\xi + c_1\eta + \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} &= a_2 + b_2\xi + c_2\eta + \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{qq} &= a_3 + b_3\xi + c_3\eta + \dots,\end{aligned}\tag{5.4}$$

missä $a_1, b_1, \dots, a_2, b_2, \dots, a_3, b_3, \dots$ ovat venymäpolynomien tuntemattomia kertoimia. Seuraavaksi valitaan sidontapisteet samalla tavalla elementin jokaisen sivun suhteen ja muodostetaan yhtälöt, joilla venymät (5.4) sidotaan venymiin (3.8)

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(\xi_k, \eta_k) &= \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta}(\xi_k, \eta_k) &= \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{qq}(\xi_k, \eta_k) &= \dots\end{aligned}\tag{5.5}$$

Pisteen (ξ_k, η_k) ei tarvitse olla sidontapiste. Riippumattomien yhtälöiden lukumäärän täytyy luonnollisesti olla sama kuin tuntemattomien kertoimien lukumäärä yhtälöryhmässä (5.4).

Lopuksi ratkaistaan lineaariset yhtälöt. Elementtiformulaatiossa tarvittava $\varepsilon_{\xi\eta}$ saadaan kaavalla

$$\tilde{\varepsilon}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \{ \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(\xi, \eta) + \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta}(\xi, \eta) \} - \tilde{\varepsilon}_{qq}(\xi, \eta).\tag{5.6}$$

Lee esittää väitöskirjassaan erilaisia venymäinterpolaatioita ja sidontapistekombinaatioita. Seuraavaksi on esitetty ainoa menetelmä, jonka hän on todennut toimivaksi 6-solmuisella kolmioelementillä.

5.1.1 Menetelmä 1

Normaalivenymien oletetaan muuttuvan lineaarisesti kolmion sivujen suunnissa ja tämän vuoksi jokaiselta sivulta valitaan kaksi sidontapistettä. Kuvassa 5.2 on esitetty sidontapisteen paikat, missä

$$\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (5.7)$$

Normaalivenymille oletetaan lineaariset interpolaatiot

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} &= a + b\xi + c\eta \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} &= d + e\xi + f\eta \\ \tilde{\varepsilon}_{qq} &= g + h\xi + i(1 - \xi - \eta). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ehdot tuntemattomien parametrien ratkaisemiseksi ovat

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(0,0) &= \tilde{m}_{\xi\xi}^{(1)} - \tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(0.5,0) = \tilde{m}_{\xi\xi}^{(1)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(1,0) = \tilde{m}_{\xi\xi}^{(1)} + \tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(\xi_1, 1/\sqrt{3}) &= \varepsilon_{1\xi\xi}^{(c)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta}(0,0) &= \tilde{m}_{\eta\eta}^{(2)} - \tilde{l}_{\eta\eta}^{(2)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta}(0,0.5) = \tilde{m}_{\eta\eta}^{(2)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta}(0,1) = \tilde{m}_{\eta\eta}^{(2)} + \tilde{l}_{\eta\eta}^{(2)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta}(1/\sqrt{3}, \eta_1) &= \varepsilon_{2\eta\eta}^{(c)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{qq}(1,0) &= \tilde{m}_{qq}^{(3)} - \tilde{l}_{qq}^{(3)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{qq}(0.5,0.5) = \tilde{m}_{qq}^{(3)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{qq}(0,1) = \tilde{m}_{qq}^{(3)} + \tilde{l}_{qq}^{(3)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{qq}(\xi_1, \eta_1) &= \varepsilon_{3qq}^{(c)}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

missä

$$\begin{aligned} \tilde{m}^{(i)} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)}) \\ \tilde{l}^{(i)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon_2^{(i)} - \varepsilon_1^{(i)}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ratkaisuksi saadaan

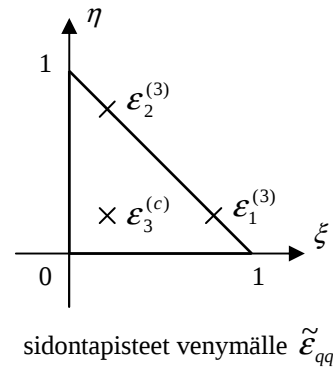
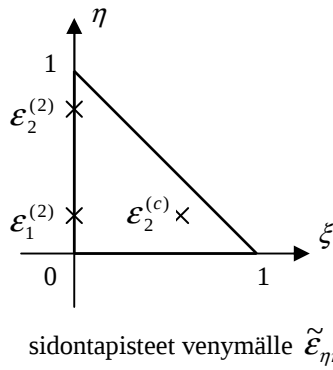
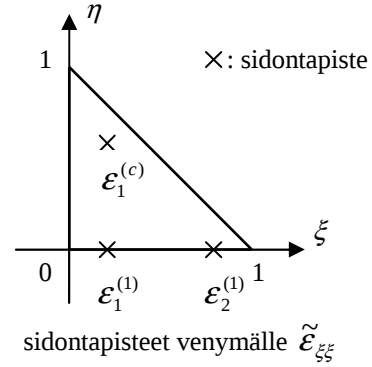
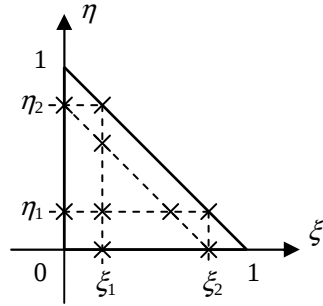
$$\begin{aligned} a &= \tilde{m}_{\xi\xi}^{(1)} - \tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, \quad b = 2\tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, \\ d &= \tilde{m}_{\eta\eta}^{(2)} - \tilde{l}_{\eta\eta}^{(2)}, \quad f = 2\tilde{l}_{\eta\eta}^{(2)}, \\ g &= \tilde{m}_{qq}^{(3)} + \tilde{l}_{qq}^{(3)}, \quad h = -2\tilde{l}_{qq}^{(3)}, \\ c &= \sqrt{3}(\varepsilon_{1\xi\xi}^{(c)} - a - b\xi_1), \\ e &= \sqrt{3}(\varepsilon_{2\eta\eta}^{(c)} - d - f\eta_1), \\ i &= \sqrt{3}(\varepsilon_{3qq}^{(c)} - g - h\xi_1). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Venymät voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} &= \varepsilon_{1\xi\xi}^{(1)} (1/2 + \sqrt{3}/2 - \sqrt{3}\xi - \sqrt{3}\eta) \\
&\quad + \varepsilon_{2\xi\xi}^{(1)} (1/2 - \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}\xi) \\
&\quad + \varepsilon_{1\xi\xi}^{(c)} \sqrt{3}\eta \\
\tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} &= \varepsilon_{1\eta\eta}^{(2)} (1/2 + \sqrt{3}/2 - \sqrt{3}\xi - \sqrt{3}\eta) \\
&\quad + \varepsilon_{2\eta\eta}^{(2)} (1/2 - \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}\eta) \\
&\quad + \varepsilon_{2\eta\eta}^{(c)} \sqrt{3}\xi \\
\tilde{\varepsilon}_{qq} &= \varepsilon_{1qq}^{(3)} (1/2 - \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}\xi) \\
&\quad + \varepsilon_{2qq}^{(3)} (1/2 - \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}\eta) \\
&\quad + \varepsilon_{3qq}^{(c)} \sqrt{3}(1 - \xi - \eta)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

missä

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{1qq}^{(3)} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{1\xi\xi}^{(3)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{1\eta\eta}^{(3)} - \varepsilon_{1\xi\eta}^{(3)} \\
\varepsilon_{2qq}^{(3)} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{2\xi\xi}^{(3)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{2\eta\eta}^{(3)} - \varepsilon_{2\xi\eta}^{(3)} \\
\varepsilon_{3qq}^{(c)} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{3\xi\xi}^{(c)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{3\eta\eta}^{(c)} - \varepsilon_{3\xi\eta}^{(c)}
\end{aligned} \tag{5.13}$$



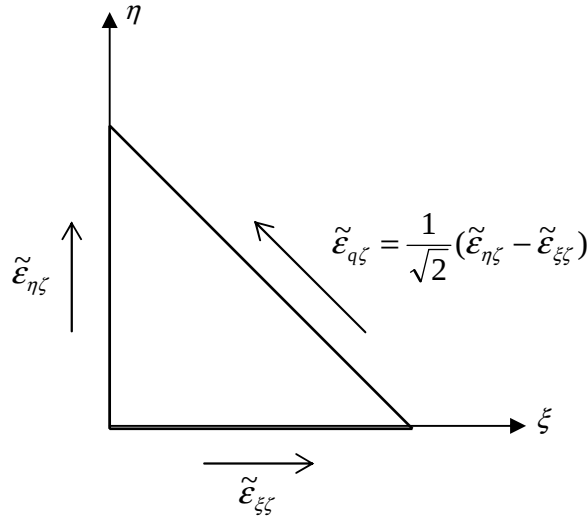
Kuva 5.2. Sidontapisteet elementin tasossa oleville venymille.

5.2 Elementin paksuussuuntaisten leikkausvenymien interpolointi

Kolmioelementillä täytyy ottaa huomioon poikittaisten leikkausvenymien $\varepsilon_{\xi\xi}$ ja $\varepsilon_{\eta\eta}$ lisäksi kolmion hypotenuusan suuntainen leikkausvenymä $\varepsilon_{q\zeta}$ (kuva 5.3). Se saadaan venymistä $\varepsilon_{\xi\xi}$ ja $\varepsilon_{\eta\eta}$ kaavalla

$$\varepsilon_{q\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{\eta\eta} - \varepsilon_{\xi\xi}). \quad (5.14)$$

Kerroin $1/\sqrt{2}$ voidaan jättää pois koska sidontayhtälöissä $\tilde{\varepsilon}_{q\zeta}(\xi_k, \eta_k) = \varepsilon_{q\zeta}(\xi_k, \eta_k)$ se tulisi molemmille puolille yhtälöä.



Kuva 5.3. Elementin paksuussuuntaiset leikkausvenymät.

Venymille $\varepsilon_{\xi\xi}$ ja $\varepsilon_{\eta\eta}$ valitaan sopiva polynomi-interpolaatio, venymän $\varepsilon_{q\zeta}$ lauseke seuraa kaavasta (5.14)

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} &= a_1 + b_1\xi + c_1\eta + \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} &= a_2 + b_2\xi + c_2\eta + \dots \\ \tilde{\varepsilon}_{q\zeta} &= \tilde{\varepsilon}_{\eta\eta} - \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} = (a_2 + b_2\xi + c_2\eta + \dots) - (a_1 + b_1\xi + c_1\eta + \dots), \end{aligned} \quad (5.15)$$

missä $a_1, b_1, \dots$ ja $a_2, b_2, \dots$ ovat venymäpolynomien tuntemattomat kertoimet. Seuraavaksi menetellään samalla tavalla kuin elementin tasonsuuntaisia venymäinterpolatioita määritettäessä eli valitaan sopivat sidontapisteeet, muodostetaan riittävä määrä yhtälöitä ja ratkaistaan yhtälöt.

Lee esittää väitöskirjassaan erilaisia venymäinterpolatioita ja sidontapistekombinaatioita. Seuraavaksi on esitetty näistä ne, joita hän on käyttänyt 3- ja 6-solmuisille kolmioelementeilleen.

5.2.1 Menetelmä 1

Poikittaiset leikkausvenymät elementin sivujen suunnissa oletetaan vakioiksi ja sidontapisteinä käytetään sivujen keskipisteitä (kuva 5.4a). Interpolaatiopolynomit ovat ensimmäistä astetta

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'} &= a + b\xi + c\eta \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi'} &= d + e\xi + f\eta \\ \tilde{\varepsilon}_{q\xi'} &= \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi'} - \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'} = (d + e\xi + f\eta) - (a + b\xi + c\eta).\end{aligned}\tag{5.16}$$

Ehdot ovat

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'}(0,0) &= \varepsilon_{\xi\xi'}^{(1)} \\ \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'}(1,0) &= \varepsilon_{\xi\xi'}^{(1)} \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi'}(0,0) &= \varepsilon_{\eta\xi'}^{(2)} \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi'}(0,1) &= \varepsilon_{\eta\xi'}^{(2)} \\ \tilde{\varepsilon}_{q\xi'}(1,0) &= \varepsilon_{q\xi'}^{(3)} = \varepsilon_{\eta\xi'}^{(3)} - \varepsilon_{\xi\xi'}^{(3)} \\ \tilde{\varepsilon}_{q\xi'}(0,1) &= \varepsilon_{q\xi'}^{(3)} = \varepsilon_{\eta\xi'}^{(3)} - \varepsilon_{\xi\xi'}^{(3)},\end{aligned}\tag{5.17}$$

joista saadaan lineaariset yhtälöt

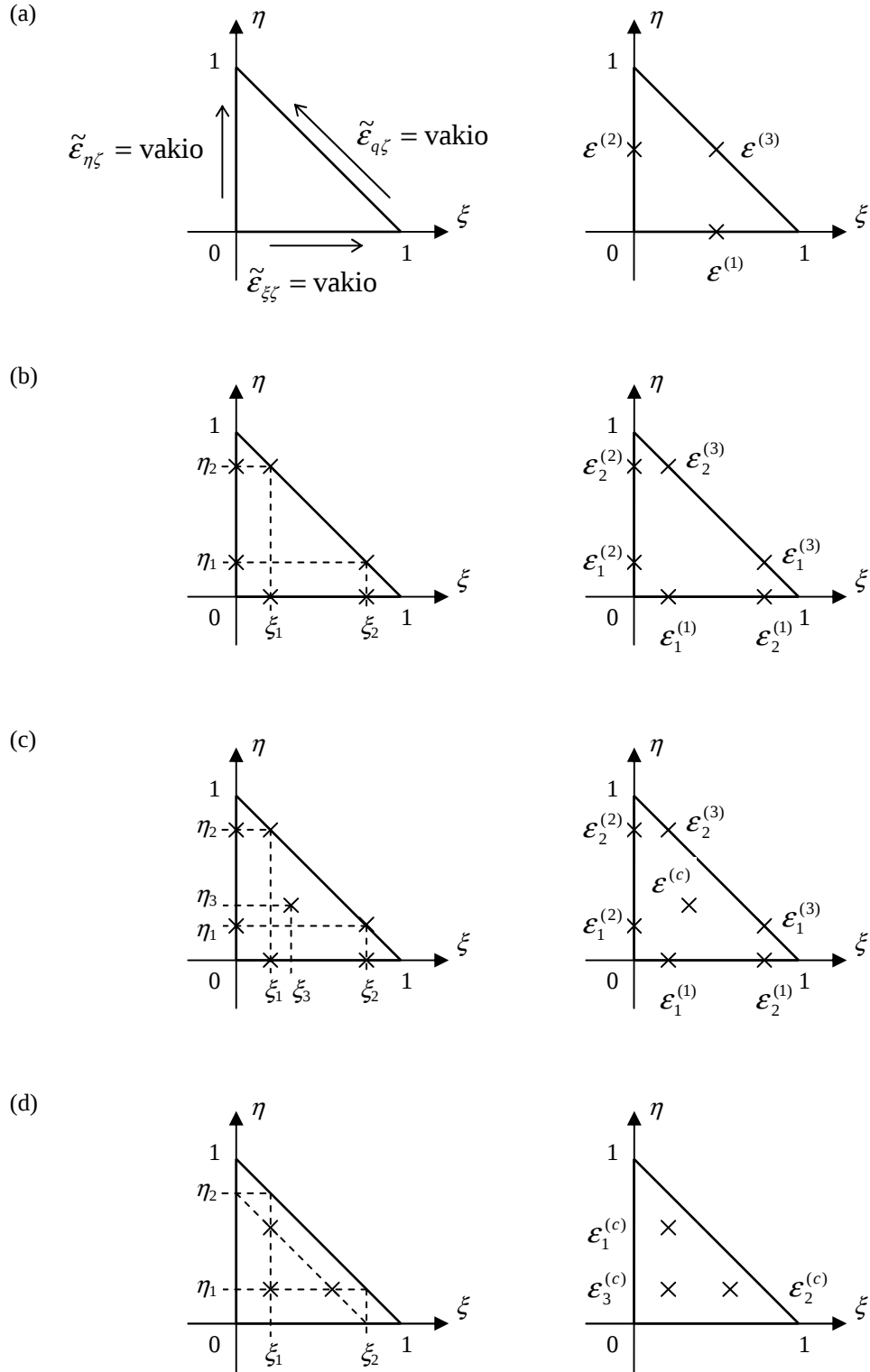
$$\begin{aligned}a &= \varepsilon_{\xi\xi'}^{(1)} \\ a + b &= \varepsilon_{\xi\xi'}^{(1)} \\ d &= \varepsilon_{\eta\xi'}^{(2)} \\ d + f &= \varepsilon_{\eta\xi'}^{(2)} \\ d + e - a - b &= \varepsilon_{\eta\xi'}^{(3)} - \varepsilon_{\xi\xi'}^{(3)} \\ d + f - a - c &= \varepsilon_{\eta\xi'}^{(3)} - \varepsilon_{\xi\xi'}^{(3)}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

Ratkaisemalla lineaariset yhtälöt kuuden tuntemattoman kertoimen arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}a &= \varepsilon_{\xi\xi'}^{(1)}, \quad b = 0, \quad c = \varepsilon_{\eta\xi'}^{(2)} - \varepsilon_{\xi\xi'}^{(1)} - \varepsilon_{\eta\xi'}^{(3)} + \varepsilon_{\xi\xi'}^{(3)}, \\ d &= \varepsilon_{\eta\xi'}^{(2)}, \quad e = -c, \quad f = 0.\end{aligned}\tag{5.19}$$

Joten venymiksi saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'} &= \varepsilon_{\xi\xi'}^{(1)} + (\varepsilon_{\eta\xi'}^{(2)} - \varepsilon_{\xi\xi'}^{(1)} - \varepsilon_{\eta\xi'}^{(3)} + \varepsilon_{\xi\xi'}^{(3)})\eta \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi'} &= \varepsilon_{\eta\xi'}^{(2)} - (\varepsilon_{\eta\xi'}^{(2)} - \varepsilon_{\xi\xi'}^{(1)} - \varepsilon_{\eta\xi'}^{(3)} + \varepsilon_{\xi\xi'}^{(3)})\xi.\end{aligned}\tag{5.20}$$



Kuva 5.4. Sidontapisteet poikittaisille leikkausvenymille.

5.2.2 Menetelmä 2

Poikittaisten leikkausvenymien oletetaan muuttuvan lineaarisesti elementin sivujen suunnissa ja sen vuoksi jokaiselta sivulta valitaan kaksi sidontapistettä. Kuvassa 5.4b on esitetty sidontapisteeet, missä

$$\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (5.21)$$

Venymäpolynomit ovat

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} &= a + b\xi + c\eta \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi} &= d + e\xi + f\eta \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ehdot ovat

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(0,0) &= \tilde{m}_{\xi\xi}^{(1)} - \tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, & \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(0.5,0) &= \tilde{m}_{\xi\xi}^{(1)}, & \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(1,0) &= \tilde{m}_{\xi\xi}^{(1)} + \tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi}(0,0) &= \tilde{m}_{\eta\xi}^{(2)} - \tilde{l}_{\eta\xi}^{(2)}, & \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi}(0,0.5) &= \tilde{m}_{\eta\xi}^{(2)}, & \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi}(0,1) &= \tilde{m}_{\eta\xi}^{(2)} + \tilde{l}_{\eta\xi}^{(2)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{q\xi}(1,0) &= \tilde{m}_{q\xi}^{(3)} - \tilde{l}_{q\xi}^{(3)}, & \tilde{\varepsilon}_{q\xi}(0.5,0.5) &= \tilde{m}_{q\xi}^{(3)}, & \tilde{\varepsilon}_{q\xi}(0,1) &= \tilde{m}_{q\xi}^{(3)} + \tilde{l}_{q\xi}^{(3)}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

missä

$$\begin{aligned} \tilde{m}^{(i)} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)}) \\ \tilde{l}^{(i)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon_2^{(i)} - \varepsilon_1^{(i)}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Tuntemattomiksi kertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned} a &= \tilde{m}_{\xi\xi}^{(1)} - \tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, & b &= 2\tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, & d &= \tilde{m}_{\eta\xi}^{(2)} - \tilde{l}_{\eta\xi}^{(2)}, & f &= 2\tilde{l}_{\eta\xi}^{(2)}, \\ c &= (d + f - a) - (\tilde{m}_{\eta\xi}^{(3)} + \tilde{l}_{\eta\xi}^{(3)} - \tilde{m}_{\xi\xi}^{(3)} - \tilde{l}_{\xi\xi}^{(3)}), \\ e &= (a + b - d) + (\tilde{m}_{\eta\xi}^{(3)} - \tilde{l}_{\eta\xi}^{(3)} - \tilde{m}_{\xi\xi}^{(3)} + \tilde{l}_{\xi\xi}^{(3)}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

ja edelleen venymien lausekkeiksi

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'} &= \varepsilon_{1\xi\xi'}^{(1)}[1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\xi - (1 + \sqrt{3})\eta]/2 \\
&+ \varepsilon_{2\xi\xi'}^{(1)}[1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\xi - (1 - \sqrt{3})\eta]/2 \\
&+ \varepsilon_{1\xi\xi'}^{(3)}[(1 - \sqrt{3})\eta/2] + \varepsilon_{2\xi\xi'}^{(3)}[(1 + \sqrt{3})\eta/2] \\
&+ \varepsilon_{1\eta\xi}^{(2)}[(1 - \sqrt{3})\eta/2] + \varepsilon_{2\eta\xi}^{(2)}[(1 + \sqrt{3})\eta/2] \\
&+ \varepsilon_{1\eta\xi}^{(3)}[(\sqrt{3} - 1)\eta/2] + \varepsilon_{2\eta\xi}^{(3)}[(-1 - \sqrt{3})\eta/2] \\
\tilde{\varepsilon}_{\eta\xi} &= \varepsilon_{1\xi\xi'}^{(1)}[(1 - \sqrt{3})\xi/2] + \varepsilon_{2\xi\xi'}^{(1)}[(1 + \sqrt{3})\xi/2] \\
&+ \varepsilon_{1\xi\xi'}^{(3)}[(-1 - \sqrt{3})\xi/2] + \varepsilon_{2\xi\xi'}^{(3)}[(\sqrt{3} - 1)\xi/2] \\
&+ \varepsilon_{1\eta\xi}^{(2)}[1 + \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})\xi - 2\sqrt{3}\eta]/2 \\
&+ \varepsilon_{2\eta\xi}^{(2)}[1 - \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})\xi + 2\sqrt{3}\eta]/2 \\
&+ \varepsilon_{1\eta\xi}^{(3)}[(1 + \sqrt{3})\xi/2] + \varepsilon_{2\eta\xi}^{(3)}[(1 - \sqrt{3})\xi/2]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

5.2.3 Menetelmä 3

Sidontapisteet on esitetty kuvassa 5.4c. Elementin sivuilla on samat sidontapisteet kuin menetelmässä 2, lisäksi elementin sisällä on yksi sidontapiste ($\xi = 1/3$, $\eta = 1/3$) menetelmästä 2 poiketen ja venymäpolynomit ovat

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'} &= a + b\xi + c\eta + d\xi\eta + e\xi^2 + f\eta^2 \\
\tilde{\varepsilon}_{\eta\xi} &= g + h\xi + i\eta + j\xi\eta + k\xi^2 + l\eta^2
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Ehdot ovat

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'}(0,0) &= \tilde{m}_{\xi\xi'}^{(1)} - \tilde{l}_{\xi\xi'}^{(1)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'}(0.5,0) = \tilde{m}_{\xi\xi'}^{(1)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'}(1,0) = \tilde{m}_{\xi\xi'}^{(1)} + \tilde{l}_{\xi\xi'}^{(1)}, \\
\tilde{\varepsilon}_{\eta\xi}(0,0) &= \tilde{m}_{\eta\xi}^{(2)} - \tilde{l}_{\eta\xi}^{(2)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi}(0,0.5) = \tilde{m}_{\eta\xi}^{(2)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi}(0,1) = \tilde{m}_{\eta\xi}^{(2)} + \tilde{l}_{\eta\xi}^{(2)}, \\
\tilde{\varepsilon}_{q\xi}(1,0) &= \tilde{m}_{q\xi}^{(3)} - \tilde{l}_{q\xi}^{(3)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{q\xi}(0.5,0.5) = \tilde{m}_{q\xi}^{(3)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{q\xi}(0,1) = \tilde{m}_{q\xi}^{(3)} + \tilde{l}_{q\xi}^{(3)}, \\
\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi'}(1/3,1/3) &= \varepsilon_{\xi\xi'}^{(c)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\eta\xi}(1/3,1/3) = \varepsilon_{\eta\xi}^{(c)}, \quad d = -k, \quad j = -f,
\end{aligned} \tag{5.28}$$

missä

$$\begin{aligned}
\tilde{m}^{(i)} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)}) \\
\tilde{l}^{(i)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon_2^{(i)} - \varepsilon_1^{(i)}).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Venymäpolynomien tuntemattomien kertoimien ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned}
a &= \tilde{m}_{\xi\xi}^{(1)} - \tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, \quad b = 2\tilde{l}_{\xi\xi}^{(1)}, \quad e = 0, \\
g &= \tilde{m}_{\eta\xi}^{(2)} - \tilde{l}_{\eta\xi}^{(2)}, \quad i = 2\tilde{l}_{\eta\xi}^{(2)}, \quad l = 0, \\
c &= 6\varepsilon_{\xi\xi}^{(c)} - 3\varepsilon_{\eta\xi}^{(c)} + 2\tilde{m}_{\eta\xi}^{(3)} - 2\tilde{m}_{\xi\xi}^{(3)} - 4a - b + g \\
h &= -3\varepsilon_{\xi\xi}^{(c)} + 6\varepsilon_{\eta\xi}^{(c)} - 2\tilde{m}_{\eta\xi}^{(3)} + 2\tilde{m}_{\xi\xi}^{(3)} + a - 4g - i \\
k &= 3\varepsilon_{\xi\xi}^{(c)} - 6\varepsilon_{\eta\xi}^{(c)} + 3\tilde{m}_{\eta\xi}^{(3)} - \tilde{l}_{\eta\xi}^{(3)} - 3\tilde{m}_{\xi\xi}^{(3)} + \tilde{l}_{\xi\xi}^{(3)} + b + 3g + i \\
f &= -6\varepsilon_{\xi\xi}^{(c)} + 3\varepsilon_{\eta\xi}^{(c)} - 3\tilde{m}_{\eta\xi}^{(3)} - \tilde{l}_{\eta\xi}^{(3)} + 3\tilde{m}_{\xi\xi}^{(3)} + \tilde{l}_{\xi\xi}^{(3)} + 3a + b + i \\
d &= -k, \quad j = -f
\end{aligned} \tag{5.30}$$

ja venymät voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi} &= \varepsilon_{1\xi\xi}^{(1)}[1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\xi - (4 + 2\sqrt{3})\eta + 2\sqrt{3}\xi\eta + (3 + \sqrt{3})\eta^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{2\xi\xi}^{(1)}[1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\xi - (4 - 2\sqrt{3})\eta - 2\sqrt{3}\xi\eta + (3 - \sqrt{3})\eta^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{1\xi\xi}^{(3)}[-2\eta + (3 + \sqrt{3})\xi\eta + (3 - \sqrt{3})\eta^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{2\xi\xi}^{(3)}[-2\eta + (3 - \sqrt{3})\xi\eta + (3 + \sqrt{3})\eta^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{\xi\xi}^{(c)}[6\eta - 3\xi\eta - 6\eta^2] \\
&\quad + \varepsilon_{1\eta\xi}^{(2)}[(1 + \sqrt{3})\eta - (3 + \sqrt{3})\xi\eta - 2\sqrt{3}\eta^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{2\eta\xi}^{(2)}[(1 - \sqrt{3})\eta - (3 - \sqrt{3})\xi\eta + 2\sqrt{3}\eta^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{1\eta\xi}^{(3)}[2\eta - (3 + \sqrt{3})\xi\eta - (3 - \sqrt{3})\eta^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{2\eta\xi}^{(3)}[2\eta - (3 - \sqrt{3})\xi\eta - (3 + \sqrt{3})\eta^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{\eta\xi}^{(c)}[-3\eta + 6\xi\eta + 3\eta^2] \\
\tilde{\varepsilon}_{\eta\xi} &= \varepsilon_{1\xi\xi}^{(1)}[(1 + \sqrt{3})\xi - (3 + \sqrt{3})\xi\eta - 2\sqrt{3}\xi^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{2\xi\xi}^{(1)}[(1 - \sqrt{3})\xi - (3 - \sqrt{3})\xi\eta + 2\sqrt{3}\xi^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{1\xi\xi}^{(3)}[2\xi - (3 - \sqrt{3})\xi\eta - (3 + \sqrt{3})\xi^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{2\xi\xi}^{(3)}[2\xi - (3 + \sqrt{3})\xi\eta - (3 - \sqrt{3})\xi^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{\xi\xi}^{(c)}[-3\xi + 6\xi\eta + 3\xi^2] \\
&\quad + \varepsilon_{1\eta\xi}^{(2)}[1 + \sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3})\xi - 2\sqrt{3}\eta + 2\sqrt{3}\xi\eta + (3 + \sqrt{3})\xi^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{2\eta\xi}^{(2)}[1 - \sqrt{3} - (4 - 2\sqrt{3})\xi + 2\sqrt{3}\eta - 2\sqrt{3}\xi\eta + (3 - \sqrt{3})\xi^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{1\eta\xi}^{(3)}[-2\xi + (3 - \sqrt{3})\xi\eta + (3 + \sqrt{3})\xi^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{2\eta\xi}^{(3)}[-2\xi + (3 + \sqrt{3})\xi\eta + (3 - \sqrt{3})\xi^2]/2 \\
&\quad + \varepsilon_{\eta\xi}^{(c)}[6\xi - 3\xi\eta - 6\xi^2]
\end{aligned} \tag{5.31}$$

5.2.4 Menetelmä 4

Tämä menetelmä on lähes sama kuin menetelmä 3. Ainoa ero on, että käytetään kolmea elementin sisällä olevaa sidontapistettä, jotka on esitetty kuvassa 5.4d, missä

$$\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ja } \xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}. \text{ Ehtoja}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(1/3, 1/3) &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{1\xi\xi}^{(c)} + \varepsilon_{2\xi\xi}^{(c)} + \varepsilon_{3\xi\xi}^{(c)}) \\ \tilde{\varepsilon}_{\eta\zeta}(1/3, 1/3) &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{1\eta\zeta}^{(c)} + \varepsilon_{2\eta\zeta}^{(c)} + \varepsilon_{3\eta\zeta}^{(c)}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

käytetään menetelmän 3 ehtojen $\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}(1/3, 1/3) = \varepsilon_{\xi\xi}^{(c)}$ ja $\tilde{\varepsilon}_{\eta\zeta}(1/3, 1/3) = \varepsilon_{\eta\zeta}^{(c)}$ sijasta. Kun sijoitetaan

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi}^{(c)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{1\xi\xi}^{(c)} + \varepsilon_{2\xi\xi}^{(c)} + \varepsilon_{3\xi\xi}^{(c)}) \\ \varepsilon_{\eta\zeta}^{(c)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{1\eta\zeta}^{(c)} + \varepsilon_{2\eta\zeta}^{(c)} + \varepsilon_{3\eta\zeta}^{(c)}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

menetelmän 3 ratkaisuun, saadaan tämän menetelmän ratkaisu.

5.2.5 Menetelmä 5

Tämä on variaatio menetelmästä 4 ja se ei esiinny Leen väitöskirjassa. Kolmion sisällä olevat sidontapistet $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}})$ ja $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ on korvattu Gaussin pisteillä $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ ja $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$. Tällöin elementin pitäisi vastata laatan taivutuksessa MITC7-laattaelementtiä, josta olisi poistettu sisäsolmu, koska molemmilla venymäinterpolaatiopolynomi on samanmuotoinen (kaavat (4.28) ja (5.27)), ja integraalit (4.27) tulevat lasketuiksi tarkasti, jos ne lasketaan numeerisesti ja käytetään integrointipisteinä menetelmän 5 sidontapistettä.

5.3 Toteutetut MITC-kuorielementit

Lee esittää 3-solmuisen MITC3-elementin sekä 6-solmuiset MITC6-1, MITC6-2 ja MITC6-3 -elementit. Taulukossa 5.1 on esitetty niiden eri venymätermeille käytetyt interpolaatiomenetelmät.

Taulukko 5.1. Venymäinterpolaatiomenetelmät MITC-kolmiokuorielementeille.

	Interpolaatiomenetelmä poikittaiselle leikkausvenymälle	Interpolaatiomenetelmä elementin tasonsuuntaiselle venymälle
MITC3	Menetelmä 1	---
MITC6-1	Menetelmä 3	Menetelmä 1
MITC6-2	Menetelmä 4	Menetelmä 1
MITC6-3	Menetelmä 2	Menetelmä 1
MITC6-4	Menetelmä 5	Menetelmä 1

MITC3-elementin solmut ovat aina samassa tasossa ja se ei kärsi kalvolukkiutumisesta, joten MITC-tekniikkaa on sovellettu vain poikittaiselle leikkausvenymälle. Elementti on identtinen luvussa 4 esitetyn kalvoelementistä ja stabiloimattomasta 3-solmuisesta MITC-laattaelementistä yhdistetyn elementin kanssa. Lee ei mainitse stabilointitekniikkaa. Leen testeissä MITC3-elementti on lukkiutunut ohuilla kuorilla.

MITC6-4 on variaatio elementistä MITC6-2. Se ei esiinny Leen työssä.

Lee toteaa tekemiensä testien perusteella, että hänen esittämiään 6-solmuisia elementtejä voidaan käyttää käytännössä vastaantulevien kuorirakenteiden laskentaan.

Sekä 3-solmuisen että 6-solmuisten elementtien jäykkyyismatriisit on integroitu käytämällä kolmea integrointipistettä.

Leen esittämää MITC7-kuorielementtiä ei ole toteutettu. Finnsap-ohjelmiston verkongeneroija Finngen ei generoi 7-solmuisia kolmioita. Lisäksi Leen ehdottama MITC7-kuorielementti ei toimi hänen omien testiensä mukaan kovin hyvin.

Bathe et al. [2000] esittävät MITC6-kuorielementin, jonka paksuussuuntainen leikkausvenymä interpoloidaan samalla tavalla kuin MITC6-1-elementillä. Taivutus- ja kalvovenymille oletetaan lineaarinen interpolaatio ja sidontapisteinä käytetään Gaussin pisteitä. Laatan taivutuksessa elementti antaa luonnollisesti samat tulokset kuin MITC6-1. Luvun 8.12 pallokalottitestissä elementillä saadut siirtymät ovat samaa luokkaa kuin tavanomaisen siirtymäelementin (elementti on liian jäykkä). Elementti kärsinee lukkiutumisesta ja sen tuloksia ei ole taulukoitu luvun 8 testien yhteydessä.

6 ANS-kuorielementti

Tämä luku perustuu Szen ja Zhun artikkeliin [1999].

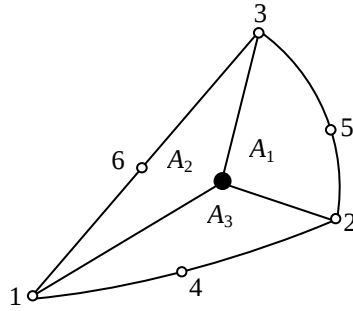
Käytetään niin sanottuja alakoordinaatteja, joita käytettäessä määritetään kolmion sisällä olevan pisteen paikka kuvan 6.1 mukaisesti osakolmioiden pinta-alojen A_1 , A_2 ja A_3 avulla. Varsinaiset dimensiottomat alakoordinaatit määritellään näiden osa-alojen suhteina kolmion pinta-alaan A eli

$$r = \frac{A_1}{A}, \quad s = \frac{A_2}{A}, \quad t = \frac{A_3}{A}. \quad (6.1)$$

Alakoordinaateille pätee

$$r + s + t = 1 \quad (6.2)$$

eli riippumattomia alakoordinaatteja on vain kaksi. [Hakala 1991, s. 274-275.] Alakoordinaatti s vastaa luvun 5 koordinaattia ξ ja t vastaa koordinaattia η .



Kuva 6.1. Osakolmioiden pinta-alat alakoordinaattien määrittämistä varten.

Muotofunktiot alakoordinaateissa lausuttuina ovat [Kim et al. 2003, s. 2079]

$$\begin{aligned} N_1 &= r(2r-1), & N_2 &= s(2s-1), & N_3 &= t(2t-1), \\ N_4 &= 4rs, & N_5 &= 4st, & N_6 &= 4tr. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Venymät alakoordinaateissa lausuttuna määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^m &= (\partial_r \bar{\mathbf{x}})^T (\partial_r \bar{\mathbf{u}}), & \varepsilon_{rr}^b &= (\partial_r \hat{\mathbf{x}})^T (\partial_r \bar{\mathbf{u}}) + (\partial_r \bar{\mathbf{x}})^T (\partial_r \hat{\mathbf{u}}), \\ 2\varepsilon_{r\zeta} &= \hat{\mathbf{x}}^T (\partial_r \bar{\mathbf{u}}) + (\partial_r \bar{\mathbf{x}})^T \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (6.4a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^m &= (\partial_s \bar{\mathbf{x}})^T (\partial_s \bar{\mathbf{u}}), & \varepsilon_{ss}^b &= (\partial_s \hat{\mathbf{x}})^T (\partial_s \bar{\mathbf{u}}) + (\partial_s \bar{\mathbf{x}})^T (\partial_s \hat{\mathbf{u}}), \\ 2\varepsilon_{s\zeta} &= \hat{\mathbf{x}}^T (\partial_s \bar{\mathbf{u}}) + (\partial_s \bar{\mathbf{x}})^T \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (6.4b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tt}^m &= (\partial_t \bar{\mathbf{x}})^T (\partial_t \bar{\mathbf{u}}), & \varepsilon_{tt}^b &= (\partial_t \hat{\mathbf{x}})^T (\partial_t \bar{\mathbf{u}}) + (\partial_t \bar{\mathbf{x}})^T (\partial_t \hat{\mathbf{u}}), \\ 2\varepsilon_{t\zeta} &= \hat{\mathbf{x}}^T (\partial_t \bar{\mathbf{u}}) + (\partial_t \bar{\mathbf{x}})^T \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (6.4c)$$

missä derivaattaoperaattorit ∂_r , ∂_s ja ∂_t funktioon $F = F(r, s, t)$ kohdistettuina määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned}\partial_r F(r, s, t) &= \frac{\partial F(r, s, 1-r-s)}{\partial r}, & \partial_s F(r, s, t) &= \frac{\partial F(1-s-t, s, t)}{\partial s}, \\ \partial_t F(r, s, t) &= \frac{\partial F(r, 1-t-r, t)}{\partial t}.\end{aligned}\tag{6.5}$$

6.1 Kalvo- ja taivutusvenymien interpolointi

Kalvo- ja taivutusvenymät interpoloidaan seuraavasti

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{rr}^m &= g_1(r, s)\varepsilon_{rr}^{m-} + g_2(r, s)\varepsilon_{rr}^{m+} + 2s\varepsilon_{rr}^{ma}, \\ \tilde{\varepsilon}_{rr}^b &= g_1(r, s)\varepsilon_{rr}^{b-} + g_2(r, s)\varepsilon_{rr}^{b+} + 2s\varepsilon_{rr}^{ba}\end{aligned}\tag{6.6a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{ss}^m &= g_1(s, t)\varepsilon_{ss}^{m-} + g_2(s, t)\varepsilon_{ss}^{m+} + 2t\varepsilon_{ss}^{ma}, \\ \tilde{\varepsilon}_{ss}^b &= g_1(s, t)\varepsilon_{ss}^{b-} + g_2(s, t)\varepsilon_{ss}^{b+} + 2t\varepsilon_{ss}^{ba}\end{aligned}\tag{6.6b}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{tt}^m &= g_1(t, r)\varepsilon_{tt}^{m-} + g_2(t, r)\varepsilon_{tt}^{m+} + 2r\varepsilon_{tt}^{ma}, \\ \tilde{\varepsilon}_{tt}^b &= g_1(t, r)\varepsilon_{tt}^{b-} + g_2(t, r)\varepsilon_{tt}^{b+} + 2r\varepsilon_{tt}^{ba}\end{aligned}\tag{6.6c}$$

missä

$$\begin{aligned}g_1(\xi, \eta) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \xi\sqrt{3} - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\eta, \\ g_2(\xi, \eta) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \xi\sqrt{3} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\eta\end{aligned}\tag{6.7}$$

ja

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{m-} &= \varepsilon_{rr}^m\left(r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, s = 0\right), & \varepsilon_{ss}^{m-} &= \varepsilon_{ss}^m\left(s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, t = 0\right), \\ \varepsilon_{tt}^{m-} &= \varepsilon_{tt}^m\left(t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, r = 0\right)\end{aligned}\tag{6.8a}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{m+} &= \varepsilon_{rr}^m\left(r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, s = 0\right), & \varepsilon_{ss}^{m+} &= \varepsilon_{ss}^m\left(s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, t = 0\right), \\ \varepsilon_{tt}^{m+} &= \varepsilon_{tt}^m\left(t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, r = 0\right)\end{aligned}\tag{6.8b}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{rr}^{b-} &= \mathcal{E}_{rr}^b \left(r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, s = 0 \right), & \mathcal{E}_{ss}^{b-} &= \mathcal{E}_{ss}^b \left(s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, t = 0 \right), \\ \mathcal{E}_{tt}^{b-} &= \mathcal{E}_{tt}^b \left(t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, r = 0 \right)\end{aligned}\tag{6.8c}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{rr}^{b+} &= \mathcal{E}_{rr}^b \left(r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, s = 0 \right), & \mathcal{E}_{ss}^{b+} &= \mathcal{E}_{ss}^b \left(s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, t = 0 \right), \\ \mathcal{E}_{tt}^{b+} &= \mathcal{E}_{tt}^b \left(t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, r = 0 \right)\end{aligned}\tag{6.8d}$$

sekä

$$\mathcal{E}_{rr}^{ma} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{rr}^m \left(r = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, s = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{rr}^m \left(r = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, s = \frac{1}{2} \right)\tag{6.9a}$$

$$\mathcal{E}_{ss}^{ma} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{ss}^m \left(s = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, t = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{ss}^m \left(s = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, t = \frac{1}{2} \right)\tag{6.9b}$$

$$\mathcal{E}_{tt}^{ma} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{tt}^m \left(t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, r = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{tt}^m \left(t = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, r = \frac{1}{2} \right)\tag{6.9c}$$

$$\mathcal{E}_{rr}^{ba} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{rr}^b \left(r = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, s = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{rr}^b \left(r = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, s = \frac{1}{2} \right)\tag{6.9d}$$

$$\mathcal{E}_{ss}^{ba} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{ss}^b \left(s = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, t = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{ss}^b \left(s = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, t = \frac{1}{2} \right)\tag{6.9e}$$

$$\mathcal{E}_{tt}^{ba} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{tt}^b \left(t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, r = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{tt}^b \left(t = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, r = \frac{1}{2} \right)\tag{6.9f}$$

Kalvo- ja taivutusvenymät paikallisessa suorakulmaisessa xyz-koordinaatistossa, jonka akselit globaalissa koordinaatistossa ovat $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$ saadaan kaavoilla

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{xx}^m \\ \tilde{\mathcal{E}}_{yy}^m \\ 2\tilde{\mathcal{E}}_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial_r x)^2 & (\partial_r y)^2 & (\partial_r x)(\partial_r y) \\ (\partial_s x)^2 & (\partial_s y)^2 & (\partial_s x)(\partial_s y) \\ (\partial_t x)^2 & (\partial_t y)^2 & (\partial_t x)(\partial_t y) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{rr}^m \\ \tilde{\mathcal{E}}_{ss}^m \\ \tilde{\mathcal{E}}_{tt}^m \end{Bmatrix}\tag{6.10a}$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{xx}^b \\ \tilde{\mathcal{E}}_{yy}^b \\ 2\tilde{\mathcal{E}}_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial_r x)^2 & (\partial_r y)^2 & (\partial_r x)(\partial_r y) \\ (\partial_s x)^2 & (\partial_s y)^2 & (\partial_s x)(\partial_s y) \\ (\partial_t x)^2 & (\partial_t y)^2 & (\partial_t x)(\partial_t y) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{rr}^b \\ \tilde{\mathcal{E}}_{ss}^b \\ \tilde{\mathcal{E}}_{tt}^b \end{Bmatrix}\tag{6.10b}$$

missä

$$\begin{aligned}\partial_r x &= \mathbf{e}_1^T (\partial_r \bar{\mathbf{x}}), & \partial_r y &= \mathbf{e}_2^T (\partial_r \bar{\mathbf{x}}), & \partial_s x &= \mathbf{e}_1^T (\partial_s \bar{\mathbf{x}}), \\ \partial_s y &= \mathbf{e}_2^T (\partial_s \bar{\mathbf{x}}), & \partial_t x &= \mathbf{e}_1^T (\partial_t \bar{\mathbf{x}}), & \partial_t y &= \mathbf{e}_2^T (\partial_t \bar{\mathbf{x}}).\end{aligned}\tag{6.11}$$

6.2 Paksuussuuntaisten leikkausvenymien interpolointi

Paksuussuuntaiset leikkausvenymät interpoloidaan samalla tavalla kuin kalvo- ja taivutusvenymät

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_{r\zeta} &= g_1(r, s) \mathcal{E}_{r\zeta}^- + g_2(r, s) \mathcal{E}_{r\zeta}^+ + 2s \mathcal{E}_{r\zeta}^a, \\ \tilde{\mathcal{E}}_{s\zeta} &= g_1(s, t) \mathcal{E}_{s\zeta}^- + g_2(s, t) \mathcal{E}_{s\zeta}^+ + 2t \mathcal{E}_{s\zeta}^a, \\ \tilde{\mathcal{E}}_{t\zeta} &= g_1(t, r) \mathcal{E}_{t\zeta}^- + g_2(t, r) \mathcal{E}_{t\zeta}^+ + 2r \mathcal{E}_{t\zeta}^a\end{aligned}\tag{6.12}$$

missä

$$\mathcal{E}_{r\zeta}^- = \mathcal{E}_{r\zeta} \left(r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, s = 0 \right), \quad \mathcal{E}_{r\zeta}^+ = \mathcal{E}_{r\zeta} \left(r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, s = 0 \right)\tag{6.13a}$$

$$\mathcal{E}_{s\zeta}^- = \mathcal{E}_{s\zeta} \left(s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, t = 0 \right), \quad \mathcal{E}_{s\zeta}^+ = \mathcal{E}_{s\zeta} \left(s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, t = 0 \right)\tag{6.13b}$$

$$\mathcal{E}_{t\zeta}^- = \mathcal{E}_{t\zeta} \left(t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, r = 0 \right), \quad \mathcal{E}_{t\zeta}^+ = \mathcal{E}_{t\zeta} \left(t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, r = 0 \right)\tag{6.13c}$$

ja

$$\mathcal{E}_{r\zeta}^a = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{r\zeta} \left(r = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, s = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{r\zeta} \left(r = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, s = \frac{1}{2} \right)\tag{6.14a}$$

$$\mathcal{E}_{s\zeta}^a = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{s\zeta} \left(s = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, t = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{s\zeta} \left(s = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, t = \frac{1}{2} \right)\tag{6.14b}$$

$$\mathcal{E}_{t\zeta}^a = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{t\zeta} \left(t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}, r = \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{t\zeta} \left(t = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}, r = \frac{1}{2} \right)\tag{6.14c}$$

Funktiot g_1 ja g_2 on määritelty yhtälöllä (6.7).

Poikittaiset leikkausvenymät $\tilde{\mathcal{E}}_{xz}$ ja $\tilde{\mathcal{E}}_{yz}$ paikallisessa suorakulmaisessa xyz-koordinaatistossa voidaan määrittää käyttämällä mitä tahansa kahta leikkausvenymistä $\tilde{\mathcal{E}}_{r\zeta}$, $\tilde{\mathcal{E}}_{s\zeta}$ ja $\tilde{\mathcal{E}}_{t\zeta}$. Näin menetellen solmunumerointijärjestys vaikuttaa tuloksiin. Elementin jäykkymatriisia laskettaessa venymät tarvitaan vain integrointipisteissä. Kun integrointi-

pisteessä I ($r = 2/3, s = 1/6, t = 1/6$) ei huomioida venymää $\tilde{\epsilon}_{t\zeta}$, integrointipisteessä II ($1/6, 2/3, 1/6$) venymää $\tilde{\epsilon}_{r\zeta}$ ja integrointipisteessä III ($1/6, 1/6, 2/3$) venymää $\tilde{\epsilon}_{s\zeta}$, saadaan kolmioelementti, jonka tuloksiin solmunumerointijärjestys ei vaikuta. Venymät $\tilde{\epsilon}_{xz}$ ja $\tilde{\epsilon}_{yz}$ saadaan kaavalla [Kim et al. 2003, s. 2082]

$$\begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{xz} \\ 2\tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{5r-s-t}{3} \begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{xz} \\ 2\tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix}_I + \frac{-r+5s-t}{3} \begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{xz} \\ 2\tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix}_{II} + \frac{-r-s+5t}{3} \begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{xz} \\ 2\tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix}_{III}, \quad (6.15)$$

missä

$$\begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{xz} \\ 2\tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix}_I = \begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_r y \\ \partial_s x & \partial_s y \end{bmatrix} \bigg|_I^{-1} \begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{r\zeta} \\ 2\tilde{\epsilon}_{s\zeta} \end{Bmatrix}_I, \quad (6.16a)$$

$$\begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{xz} \\ 2\tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix}_{II} = \begin{bmatrix} \partial_s x & \partial_s y \\ \partial_t x & \partial_t y \end{bmatrix} \bigg|_{II}^{-1} \begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{s\zeta} \\ 2\tilde{\epsilon}_{t\zeta} \end{Bmatrix}_{II}, \quad (6.16b)$$

$$\begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{xz} \\ 2\tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix}_{III} = \begin{bmatrix} \partial_t x & \partial_t y \\ \partial_r x & \partial_r y \end{bmatrix} \bigg|_{III}^{-1} \begin{Bmatrix} 2\tilde{\epsilon}_{t\zeta} \\ 2\tilde{\epsilon}_{r\zeta} \end{Bmatrix}_{III}. \quad (6.16c)$$

7 Ohjelmointi

Uusia kolmioelementtejä toteutettaessa on käytetty 4- ja 9-solmuisille CBR-nelikulmioelementeille olemassa olevaa koodia mahdollisimman paljon hyväksi. 6-solmuinen kolmio on ajateltu 9-solmuiseksi, 3-solmuinen 4-solmuiseksi. Ylimääräisiin solmuihin liittyvät muotofunktiot on asetettu nolliksi. Tällöin elementin jäykkyyssmatriisi on singulaarinen, mutta kun kootaan globaali jäykkyyssmatriisi saadaan sama lopputulos kuin jos alun perin elementit olisi käsitelty 3- ja 6-solmuksina.

Käytännössä on tarvinnut määritellä Fortran 77-ohjelmointikielellä toteutettuun Finnsap-ohjelmaan vain ANS- ja MITC-kolmioelementtien venymämatriisit, kolmioiden muotofunktiot ja integroinnit. Lisäksi on tarvittu joitain pieniä muutoksia koodiin ”sinne tänne”. Näitä pieniä muutoksia ovat esimerkiksi aidon kolmion ja nelikulmiosta degeneroidun kolmion kantaelementtien erilaisista sijainneista luonnollisessa koordinaatistossa aiheutuvat muutokset.

8 Testitapauksia

Testitapaukset ovat pääosin Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteesta [FINNSAP I 2002] ja niiden kuvaus on otettu melko suoraan sieltä. Osa Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen esimerkeistä on FEMdata Oy:n omia, osa perustuu kirjallisuudessa esitettyihin testitapauksiin. Tässä esityksessä ei ole esitetty testien alkuperää.

Viisi ensimmäistä testiä ovat laatantaivutustestejä, seuraavat kolme testiä ovat puh-taita kalvotestejä. Testeissä 8.9-8.12 tarkasteltava kuorirakenne on kaareva.

Testeissä esiintyvät, tässä työssä implementoidut elementit:

MITC3 Elementti perustuu Leen työhön [2004] ja sen teoriaa on selostettu luvussa 5. Stabiloitu (stabilointiparametri α nolasta poikkeava) MITC3-elementti on yhdistetty kalvoelementistä ja stabiloidusta MITC3-laattaelementistä (luku 4). Kalvotesteissä stabilointiparametrin suuruudella tai MITC-reduktiolla ei ole merkitystä. Näin ol-len MITC3-elementti antaa kalvotesteissä saman tuloksen kuin ta-vanomainen 3-solmuinen siirtymäelementti (DISP3).

MITC6-1, MITC6-2, MITC6-3 Elementit perustuvat Leen työhön [2004] ja niiden teoriaa on selostettu luvussa 5.

MITC6-4 Elementti on oma variaatio elementistä MITC6-2, elementin sisällä olevat poikittaisten leikkausvenymien sidontapisteet on korvattu Gaussin pisteillä. Kalvotesteissä kaikki MITC6-elementit antavat identtiset tulokset, koska niiden kalvopuolen venymätermien inter-polointi on identtinen.

MITC7 Laatantaivutustesteissä esiintyvä MITC7 on laattaelementti ja sen teoriaa on selostettu luvussa 4. Leen artikkelin [2004] MITC7-kuorielementtiä ei ole toteutettu.

ANS6 Elementti perustuu Szen ja Zhun työhön [1999] ja sen teoriaa on käsitelty luvussa 6.

DISP3, DISP6 Tavanomaisia siirtymäelementtejä (luku 3).

Osassa testeissä tuloksia on verrattu Finnsap-ohjelman kuorielementtien tuloksiin (elementtejä on käsitelty lyhyesti luvussa 2). Näitä elementtejä ovat:

KUO3 Finnsap-ohjelman 3-solmuinen kolmiokuorielementti.

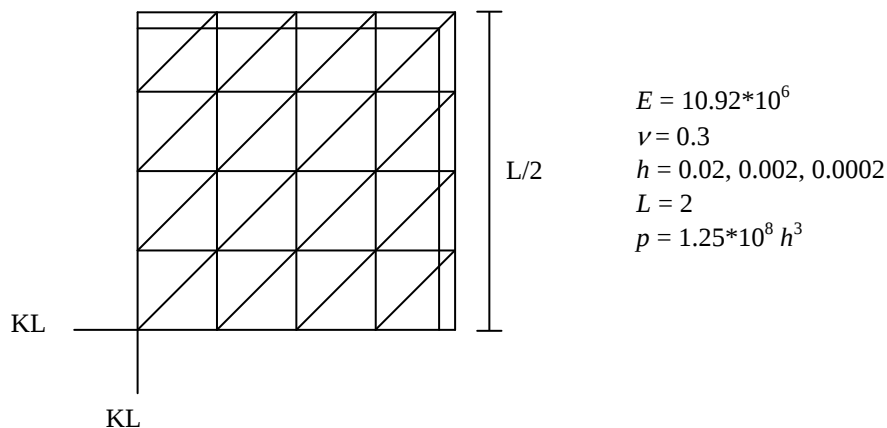
SEMI6 Finnsap-ohjelman 6-solmuinen semiloof-kolmioelementti.

ANS4, ANS9 Finnsap-ohjelman 4- ja 9-solmuiset nelikulmioelementit.

Verkot on generoitu Finngen-ohjelmalla. Testeissä 8.1, 8.2, 8.3 ja 8.6 3-solmuisilla ja 6-solmuisilla kolmioilla on verkoissa yhtä paljon elementtejä. Muissa testeissä on verrattu tuloksia elementtiverkoilla, joissa on yhtä paljon solmuja (elementtimäärä eri), jolloin vapausastemäärä on sama ja joudutaan ratkaisemaan samankokoinen yhtälöryhmä. Elementtiverkot on yleensä tasaisesti tihennetty. Joissain tapauksissa olisi tarkoituksenmukaisempaa tihentää verkkoa paikallisesti esimerkiksi voiman vaikutuskohdan läheisyydessä.

8.1 Neliölaatta (laatan taivutus)

Jokaiselta reunaltaan jäykästi tuettua (reunalla kaikki siirtymät ja kiertymät on estetty) neliölaattaa kuormitetaan tasaisella painekuormalla. Tarkasteltavana suureena on laatan keskipisteen taipuma. Symmetrian perusteella laatasta on mallinnettu vain yksi neljännes. Laskennassa on käytetty neljää eri elementtiverkkoa, joissa on 8, 32, 128 ja 512 elementtiä. Kuvassa 8.1 on esitetty laatan mitat, materiaalitiedot ja elementtiverkko, jossa on 32 elementtiä.



Kuva 8.1. Neliölaatan neljännes, materiaaliarvot ja elementtiverkko.

Elementeillä saadut laatan keskipisteen taipumat kolmella eri laatan paksuudella on esitetty taulukoissa 8.1, 8.3 ja 8.5. Taulukoissa 8.2, 8.4 ja 8.6 on esitetty näiden taipumien prosentuaaliset virheet tavoitearvoon verrattuna. Taipuman tavoitearvot on laskettu Finnsap-ohjelman ANS9-elementillä 16x16-elementtiverkolla.

Stabiloimaton MITC3-elementti lukkiutuu täysin tiheimmälläkin elementtiverkolla, kun laatan paksuuden ja sivun pituuden suhde on 0.0001. Sen sijaan stabiloidulla MITC3-elementillä laatan ohentaminen ei juurikaan vaikuta taipuman suhteelliseen virheeseen.

6-solmuisista elementeistä MITC6-3-elementillä ja MITC7-laattaelementillä laatan ohentaminen ei vaikuta taipuman suhteelliseen virheeseen. MITC6-3-elementti antaa varsinkin harvoilla elementtiverkoilla liian joustavia tuloksia. Muillakin 6-solmuisilla elementeillä laatan ohentaminen vaikuttaa taipuman suhteelliseen virheeseen vain harvimmalla elementtiverkolla.

Kaiken kaikkiaan tässä testitapauksessa kaikilla elementeillä stabiloimatonta MITC3-elementtiä ja MITC6-3-elementtiä lukuun ottamatta saadaan hyviä tuloksia kaikilla kolmella laatan paksuudella, kun elementtejä on laatan neljänneksessä 32 tai enemmän. Luvun 8.3 testissä on tutkittu elementtien muodon vaikutusta tuloksiin tämän testin harvimman elementtiverkon solmuja siirtämällä.

Taulukko 8.1. Taipuma laatan keskipisteessä (tavoitearvo 2.536). $h/L = 0.01$.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
8	0.127	2.462	3.365	2.581	2.515	2.387	2.446	2.452
32	1.437	2.524	2.852	2.614	2.580	2.536	2.530	2.574
128	2.414	2.535	2.631	2.561	2.549	2.538	2.536	2.556
512	2.523	2.536	2.562	2.543	2.539	2.537	2.536	2.542

Taulukko 8.2. Taipuman virhe (%). $h/L = 0.01$.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
8	-95.0	-2.9	32.7	1.8	-0.8	-5.9	-3.5	-3.3
32	-43.3	-0.5	12.5	3.1	1.7	0.0	-0.2	1.5
128	-4.8	-0.0	3.7	1.0	0.5	0.1	0.0	0.8
512	-0.5	0.0	1.0	0.3	0.1	0.0	0.0	0.2

Taulukko 8.3. Taipuma laatan keskipisteessä (tavoitearvo 2.531). $h/L = 0.001$.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
8	0.001	2.456	3.360	2.436	2.185	1.986	2.433	2.177
32	0.037	2.518	2.847	2.558	2.506	2.441	2.523	2.501
128	0.568	2.529	2.626	2.545	2.538	2.524	2.530	2.533
512	2.091	2.530	2.557	2.536	2.534	2.531	2.531	2.534

Taulukko 8.4. Taipuman virhe (%). $h/L = 0.001$.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
8	-100.0	-3.0	32.8	-3.8	-13.7	-21.5	-3.9	-14.0
32	-98.5	-0.5	12.5	1.1	-1.0	-3.6	-0.3	-1.2
128	-77.6	-0.1	3.8	0.6	0.3	-0.3	-0.0	0.1
512	-17.4	-0.0	1.0	0.2	0.1	0.0	0.0	0.1

Taulukko 8.5. Taipuma laatan keskipisteessä (tavoitearvo 2.531). $h/L = 0.0001$.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
8	0.000	2.456	3.360	2.435	2.053	1.954	2.432	2.166
32	0.000	2.518	2.847	2.557	2.435	2.417	2.523	2.487
128	0.007	2.529	2.626	2.544	2.517	2.505	2.530	2.524
512	0.127	2.530	2.557	2.535	2.531	2.526	2.531	2.530

Taulukko 8.6. Taipuman virhe (%). $h/L = 0.0001$.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
8	-100.0	-3.0	32.8	-3.8	-18.9	-22.8	-3.9	-14.4
32	-100.0	-0.5	12.5	1.0	-3.8	-4.5	-0.3	-1.7
128	-99.7	-0.1	3.8	0.5	-0.6	-1.0	-0.0	-0.3
512	-95.0	-0.0	1.0	0.2	0.0	-0.2	0.0	-0.0

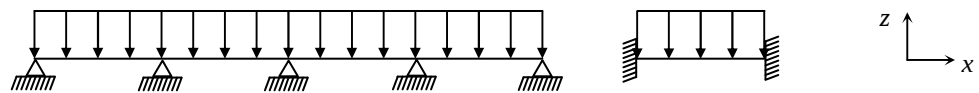
8.2 Laattakaista (laatan taivutus)

Tämä on Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen [FINNSAP I 2002] esimerkki 1.9. Laattakaistan yksi jänneväli voidaan mallintaa päistään jäykästi tuettuna laattana, jossa on kaksi reunaa vapaita (kuva 8.2). Symmetrian vuoksi neljännesmallikin riittäisi.

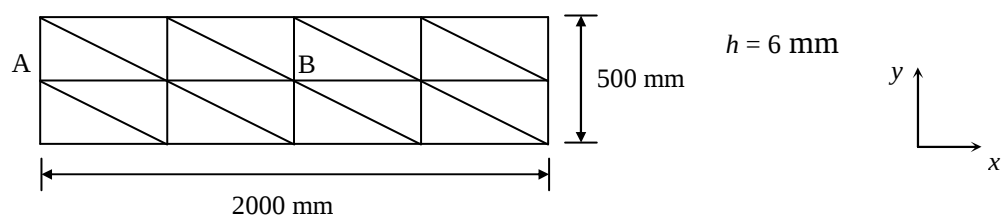
Tutkittavina suureina ovat taipuma ja x -suuntainen normaali-jännitys laatan keskipisteessä B sekä x -suuntainen normaali-jännitys tuetun reunan keskipisteessä A laatan yläpinnalla. Kuormituksena on tasaisesti jakautunut 0.7 kPa painekuorma koko laattalla ja toisessa tapauksessa 0.7 N/mm viivakuorma laatan keskellä leveyssuunnassa.

Kuvassa 8.3 on esitetty 2×4 -elementtiverkko ja laatan mitat. Materiaalina on rakeneteräs, jonka kimmokerroin on $206\,000 \text{ MPa}$.

Poissonin vakio on asetettu nolllaksi, jotta laatan leveys ei vaikuttaisi tuloksiin. Tämä on lähempänä tilannetta, jossa laatta on äärettömän leveä ja siitä tutkitaan äärellistä kaistaletta, jolloin kouruuntumista ei esiinny. Jäykkyys on nyt kuitenkin vähän pienempi kuin leveän laatan ja nolllasta poikkeavan Poissonin vakion tapauksessa. Kun asetetaan Poissonin vakio nolllaksi, vältetään myös kiinnityshäiriön vaikutusta pisteen A jännitykseen.



Kuva 8.2. Tasaisesti kuormitettu laattakaista ja sen yksi jänneväli.



Kuva 8.3. Suorakaidelaatta, mitat ja 2×4 -elementtiverkko.

Molemmissa kuormitustapauksissa taulukoidut jännitysten arvot ovat solmupisteen keskimääräisiä arvoja. Solmun keskiarvo on keskiarvo kyseiseen solmuun siihen liittyvistä eri elementeistä tulevista tulossuureen arvoista. Tässä esimerkissä keskimääräiset arvot eivät eroa oleellisesti maksimiarvoista.

Tuloksia on verrattu teknisen taivutusopin mukaiseen päistään jäykästi kiinnitetyn palkin ratkaisuun.

8.2.1 Painekuorma

Elementeillä saadut pisteen B taipumat ja niiden prosentuaaliset virheet on esitetty taulukoissa 8.7 ja 8.8. Taulukoissa 8.9 ja 8.10 on esitetty pisteen A jännitykset ja niiden prosentuaaliset virheet. Taulukoissa 8.11 ja 8.12 on esitetty pisteen B jännitykset ja niiden prosentuaaliset virheet. Testissä käytetyssä harvimmassa elementtiverkossa on yksi kolmioelementti y-suunnassa ja 2 kolmioelementtiä x-suunnassa eli yhteensä neljä kolmioelementtiä. Seuraavissa elementtiverkoissa on aina edellisen elementtiverkon jokainen kolmioelementti jaettu neljäksi uudeksi kolmioelementiksi. Näin elementit ovat keskenään samanmuotoisia.

Stabiloimattoman MITC3-elementin tulokset ovat käytännössä samat kuin Finnsap-ohjelman ANS4-elementin tulokset [FINNSAP I 2002]. Molemmilla elementeillä jännitys on vakio edettäessä jännityksen suuntaan. Tämä vakio konvergoi kohti elementin x-suuntaisen sivun keskikohdan jännitystä, kun elementtijakoa tihennetään. Tarkka (palkkiteorian mukainen) jännitys jakauma on jännityksen suunnassa parabolinen, jota nämä elementit kuvaavat huonosti varsinkin pisteessä A, jossa jännityksen muutos on suurimmillaan. Stabilointiparametrin käyttö parantaa taipuman arvoja, mutta ei vaikuta jännityksiin.

6-solmuisista elementeistä MITC6-4, MITC7 ja ANS6 antavat parhaat tulokset ja ne ovat käytännössä samat kuin Finnsap-ohjelman ANS9-elementin tulokset [FINNSAP I 2002]. MITC6-1 ja MITC6-2 antavat yllättävän huonoja pisteen A jännityksiä.

Taulukko 8.7. Keskipisteen taipuma (tavoitearvo 7.867 mm). Painekuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	8.753	1.871	3.417	7.865	7.853	7.900
2x4	5.900	6.485	8.303	6.321	6.874	7.867	7.868	7.886
4x8	7.374	7.520	8.004	7.671	7.795	7.867	7.867	7.880
8x16	7.743	7.780	7.905	7.874	7.880	7.867	8.867	7.874

Taulukko 8.8. Taipuman virhe (%). Painekuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	11.3	-76.2	-56.6	-0.0	-0.2	0.4
2x4	-25.0	-17.6	5.5	-19.7	-12.6	0.0	0.0	0.2
4x8	-6.3	-4.4	1.7	-2.5	-0.9	0.0	0.0	0.2
8x16	-1.6	-1.1	0.5	0.1	0.2	0.0	0.0	0.1

Taulukko 8.9. Piste A jännitys σ_x (tavoitearvo 38.89 MPa). Painekuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	28.76	3.40	10.45	29.21	29.67	29.23
2x4	14.58	14.61	36.58	17.65	23.33	36.47	36.52	36.42
4x8	25.52	25.51	38.26	28.23	32.17	38.29	38.29	38.12
8x16	31.90	31.89	38.70	34.82	37.21	38.74	38.74	38.69

Taulukko 8.10. Piste A jännityksen virhe (%). Painekuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	-26.0	-91.3	-73.1	-24.9	-23.7	-24.8
2x4	-62.5	-62.4	-5.9	-54.6	-40.0	-6.2	-6.1	-6.4
4x8	-34.4	-34.4	-1.6	-27.4	-17.3	-1.5	-1.5	-2.0
8x16	-18.0	-18.0	-0.5	-10.5	-4.3	-0.4	-0.4	-0.5

Taulukko 8.11. Piste B jännitys σ_x (tavoitearvo -19.44 MPa). Painekuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	-29.57	-6.85	-10.64	-29.12	-28.76	-29.10
2x4	-14.58	-14.59	-21.62	-16.50	-19.03	-21.87	-21.85	-21.90
4x8	-18.23	-18.23	-19.97	-19.68	-20.02	-20.05	-20.05	-20.03
8x16	-19.14	-19.14	-19.58	-19.59	-19.61	-19.60	-19.60	-19.59

Taulukko 8.12. Piste B jännityksen virhe (%). Painekuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	52.1	-64.8	-45.3	49.8	47.9	49.7
2x4	-25.0	-24.9	11.2	-15.1	-2.1	12.5	12.4	12.7
4x8	-6.2	-6.2	2.7	1.2	3.0	3.1	3.1	3.0
8x16	-1.5	-1.5	0.7	0.8	0.9	0.8	0.8	0.8

8.2.2 Viivakuorma

Elementeillä saadut pisteen B taipumat ja niiden prosentuaaliset virheet on esitetty taulukoissa 8.13 ja 8.14. Taulukoissa 8.15 ja 8.16 on esitetty pisteen A jännitykset ja niiden prosentuaaliset virheet. Taulukoissa 8.17 ja 8.18 on esitetty pisteen B jännitykset ja niiden prosentuaaliset virheet. Testissä käytetyssä harvimmassa elementtiverkossa on yksi kolmioelementti y -suunnassa ja 2 kolmioelementtiä x -suunnassa eli yhteensä neljä kolmioelementtiä. Seuraavissa elementtiverkoissa on aina edellisen elementtiverkon jokainen kolmioelementti jaettu neljäksi uudeksi kolmioelementiksi. Näin elementit ovat keskenään samanmuotoisia.

Tarkka (palkkiteorian mukainen) jännitys jakauma on jännityksen suunnassa lineaarinen.

Tulokset ovat samansuuntaisia kuin painekuorman tapauksessa. MITC6-4, MITC7 ja ANS6 antavat käytännössä tarkat tulokset muiden 6-solmuisten elementtien tulosten jäädessä selvästi huonommiksi.

Taulukko 8.13. Keskipisteen taipuma (tavoitearvo 7.867 mm). Viivakuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	8.966	2.101	3.446	7.869	7.867	7.905
2x4	5.900	6.493	8.338	6.455	7.039	7.867	7.867	7.889
4x8	7.374	7.520	8.007	7.713	7.832	7.867	7.867	7.881
8x16	7.743	7.780	7.905	7.882	7.884	7.867	8.867	7.874

Taulukko 8.14. Taipuman virhe (%). Viivakuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	14.0	-73.3	-56.2	0.0	0.0	0.5
2x4	-25.0	-17.5	6.0	-17.9	-10.5	0.0	0.0	0.3
4x8	-6.3	-4.4	1.8	-2.0	-0.4	0.0	0.0	0.2
8x16	-1.6	-1.1	0.5	0.2	0.2	0.0	0.0	0.1

Taulukko 8.15. Piste A jännitys σ_x (tavoitearvo 29.17 MPa). Viivakuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	26.79	3.46	10.32	29.14	29.17	29.14
2x4	14.58	14.56	28.96	16.31	20.15	29.17	29.17	29.09
4x8	21.87	21.86	29.08	23.45	25.67	29.16	29.17	28.99
8x16	25.52	25.52	29.13	27.08	28.35	29.17	29.17	29.12

Taulukko 8.16. Piste A jännityksen virhe (%). Viivakuorma.

elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	-8.2	-88.1	-64.6	-0.1	0.0	-0.1
2x4	-50.0	-50.1	-0.7	-44.1	-30.9	0.0	0.0	-0.3
4x8	-25.0	-25.1	-0.3	-19.6	-12.0	-0.0	0.0	-0.6
8x16	-12.5	-12.5	-0.1	-7.2	-2.8	0.0	0.0	-0.2

Taulukko 8.17. Piste B jännitys σ_x (tavoitearvo -29.17 MPa). Viivakuorma.

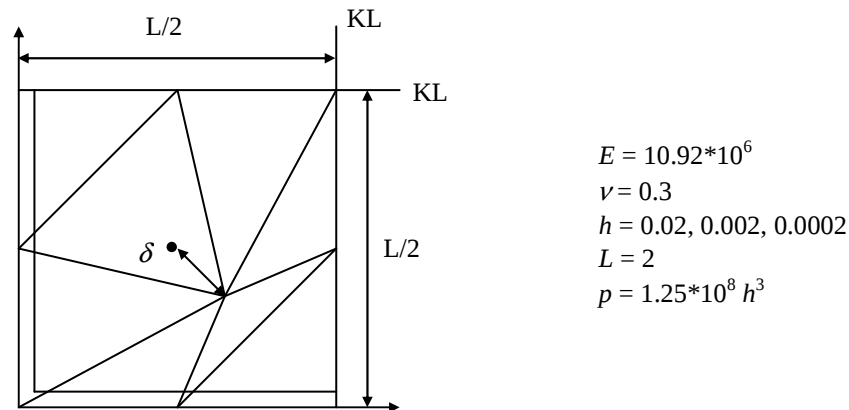
elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	-31.54	-8.18	-10.93	-29.19	-29.17	-29.19
2x4	-14.58	-14.73	-29.53	-19.68	-24.43	-29.18	-29.17	-29.27
4x8	-21.87	-21.91	-29.20	-26.38	-28.45	-29.17	-29.17	-29.18
8x16	-25.52	-25.52	-29.15	-28.79	-29.24	-29.17	-29.17	-29.16

Taulukko 8.18. Piste B jännityksen virhe (%). Viivakuorma.

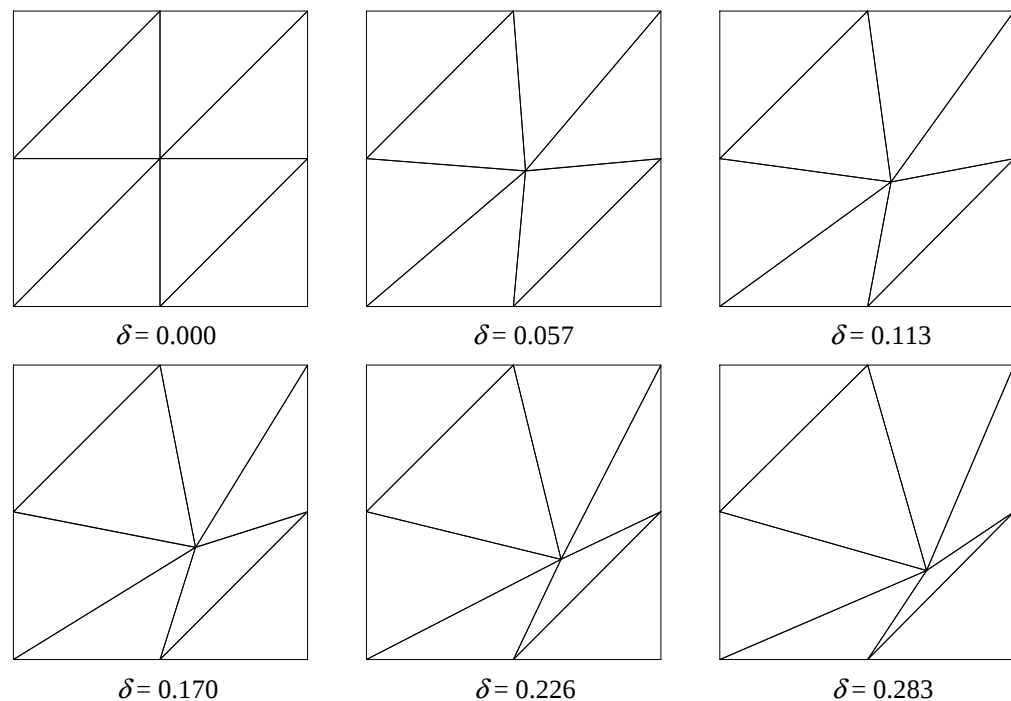
elementtejä	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
1x2	----	----	8.1	-72.0	-62.5	0.1	0.0	0.1
2x4	-50.0	-49.5	1.2	-32.5	-16.2	0.0	0.0	0.3
4x8	-25.0	-24.9	0.1	-9.6	-2.5	0.0	0.0	0.0
8x16	-12.5	-12.5	-0.1	-1.3	0.2	0.0	0.0	-0.0

8.3 Weissman–Taylor-testi (laatan taivutus)

Tämä esimerkki perustuu Lylvyn ja Stenbergin [1994, s. 24-25] versioon Weissmanin ja Taylorin [1990, s. 351] alunperin esittämästä testistä. Jäykästi tuetun tasaisella painekuormalla kuormitetun neliölaatan neljännes on jaettu kahdeksaan kolmioelementtiin. Keskimmäistä solmua on siirretty neljänneslaatan lävistäjää pitkin kohti oikeata alanurkkaa etäisyyden δ verran, jolloin suorakulmaisesta verkosta tulee vinokulmainen. Kuvassa 8.4 on esitetty laatan mitat ja materiaalitiedot. Testissä käytetyt elementtiverkot on esitetty kuvassa 8.5.



Kuva 8.4. Neliölaatan neljännes, materiaaliarvot ja elementtiverkko.



Kuva 8.5. Testissä käytetyt elementtiverkot.

Elementeillä saadut laatan keskipisteen taipumat kolmella eri laatan paksuudella on esitetty taulukoissa 8.19, 8.21 ja 8.23. Taulukoissa 8.20, 8.22 ja 8.24 on esitetty näi-

den taipumien prosentuaaliset virheet tavoitearvoon verrattuna. Taipuman tavoitearvot on laskettu Finnsap-ohjelman ANS9-elementillä 16x16-elementtiverkolla.

Laatan paksuuden ja sivun pituuden suhteen ollessa 0.01 elementtien muodolla (δ :n arvolla) ei ole suurta vaikutusta 6-solmuisten kolmioiden tuloksiin. Laattaa ohennettaessa 6-solmuisista kuorielementeistä ANS6 toimii parhaiten.

Taulukko 8.19. Taipuma laatan keskipisteessä (tavoitearvo 2.536). $h/L = 0.01$.

δ	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
0.000	0.127	2.462	3.365	2.581	2.515	2.387	2.446	2.452
0.057	0.123	2.446	3.375	2.573	2.511	2.385	2.444	2.451
0.113	0.113	2.396	3.402	2.549	2.499	2.379	2.438	2.446
0.170	0.098	2.313	3.440	2.510	2.478	2.368	2.428	2.437
0.226	0.081	2.195	3.476	2.458	2.449	2.352	2.413	2.424
0.283	0.061	2.037	3.493	2.392	2.411	2.331	2.389	2.402

Taulukko 8.20. Taipuman virhe (%). $h/L = 0.01$.

δ	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
0.000	-95.0	-2.9	32.7	1.8	-0.8	-5.9	-3.5	-3.3
0.057	-95.1	-3.5	33.1	1.5	-1.0	-6.0	-3.6	-3.4
0.113	-95.5	-5.5	34.1	0.5	-1.5	-6.2	-3.9	-3.5
0.170	-96.1	-8.8	35.6	-1.0	-2.3	-6.6	-4.3	-3.9
0.226	-96.8	-13.4	37.1	-3.1	-3.4	-7.3	-4.9	-4.4
0.283	-97.6	-19.7	37.7	-5.7	-4.9	-8.1	-5.8	-5.3

Taulukko 8.21. Taipuma laatan keskipisteessä (tavoitearvo 2.531). $h/L = 0.001$.

δ	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
0.000	0.001	2.456	3.360	2.436	2.185	1.986	2.433	2.177
0.057	0.001	2.439	3.370	2.314	2.172	1.980	2.431	2.170
0.113	0.001	2.390	3.397	2.103	2.126	1.949	2.425	2.146
0.170	0.001	2.307	3.435	1.696	2.025	1.845	2.414	2.105
0.226	0.001	2.189	3.471	1.172	1.867	1.577	2.396	2.044
0.283	0.001	2.031	3.488	1.010	1.706	1.496	2.370	1.976

Taulukko 8.22. Taipuman virhe (%). $h/L = 0.001$.

δ	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
0.000	-100.0	-3.0	32.8	-3.8	-13.7	-21.5	-3.9	-14.0
0.057	-100.0	-3.6	33.1	-8.6	-14.2	-21.8	-4.0	-14.3
0.113	-100.0	-5.6	34.2	-16.9	-16.0	-23.0	-4.2	-15.2
0.170	-100.0	-8.9	35.7	-33.0	-20.0	-27.1	-4.6	-16.8
0.226	-100.0	-13.5	37.1	-53.7	-26.2	-37.7	-5.3	-19.2
0.283	-100.0	-19.8	37.8	-60.1	-32.6	-40.9	-6.4	-21.9

Taulukko 8.23. Taipuma laatan keskipisteessä (tavoitearvo 2.531). $h/L = 0.0001$.

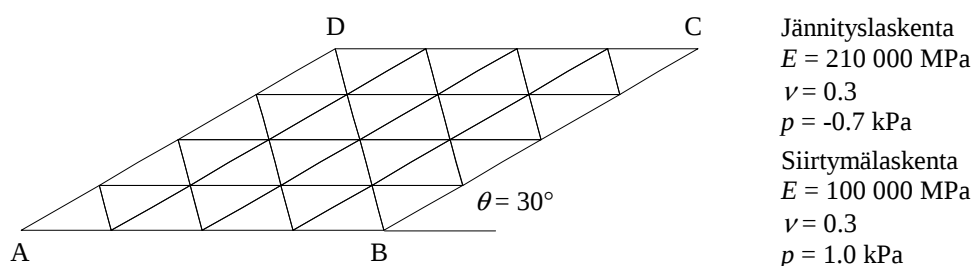
δ	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
0.000	0.000	2.456	3.360	2.435	2.053	1.954	2.432	2.166
0.057	0.000	2.439	3.370	1.815	1.752	1.947	2.431	2.158
0.113	0.000	2.390	3.397	0.907	0.707	1.909	2.424	2.133
0.170	0.000	2.307	3.435	0.233	0.301	1.724	2.413	2.083
0.226	0.000	2.189	3.471	0.110	0.828	0.565	2.396	1.993
0.283	0.000	2.031	3.488	0.552	0.183	0.861	2.370	1.919

Taulukko 8.24. Taipuman virhe (%). $h/L = 0.0001$.

δ	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
0.000	-100.0	-3.0	32.8	-3.8	-18.9	-22.8	-3.9	-14.4
0.057	-100.0	-3.6	33.1	-28.3	-30.8	-23.1	-4.0	-14.7
0.113	-100.0	-5.6	34.2	-64.2	-72.1	-24.6	-4.2	-15.7
0.170	-100.0	-8.9	35.7	-90.8	-88.1	-31.9	-4.7	-17.7
0.226	-100.0	-13.5	37.1	-95.7	-67.3	-77.7	-5.3	-21.3
0.283	-100.0	-19.8	37.8	-78.2	-92.8	-66.0	-6.4	-24.2

8.4 Salmiakkilaatta (laatan taivutus)

Tämä on Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen [FINNSAP I 2002] esimerkki 1.10 (NAFEMS-testi nro LE6). Kuvassa 8.6 on esitetty salmiakkilaatan geometria, materiaaliominaisuudet ja elementtiverkko. Laatan sivunpituus on 1 metri, laatan paksuus on 0.01 metriä ja se on kaikilta sivuiltaan nivelellisesti tuettu (kaikki siirtymät on esitetty, kiertymät ovat vapaat). Kuormana on tasan jakautunut painekuorma kohtisuorassa laatan pintaa vastaan. Tutkittavia suureita ovat suurempi pääjännitys laatan alapinnalla laatan keskipisteessä ja keskipisteen taipuma.



Kuva 8.6. Salmiakkilaatan geometria, materiaaliarvot ja elementtiverkko.

Elementeillä saadut keskipisteen jännitykset on esitetty taulukossa 8.25. Taulukoidut arvot ovat solmupisteiden keskimääräisiä arvoja. Taulukossa 8.26 on jännitysten prosentuaaliset virheet. Testissä käytetyssä harvimmassa verkossa on 3 solmua joka sivulla eli kaksi 6-solmuista kolmioelementtiä tai kahdeksan 3-solmuista kolmioelementtiä. Seuraavassa verkossa on viisi solmua joka sivulla eli kahdeksan 6-solmuista kolmioelementtiä tai 32 3-solmuista kolmioelementtiä jne.

Taulukossa 8.27 on eri elementeillä saadut keskipisteen taipumat ja taulukossa 8.28 on näiden taipumien virheet prosentteina. Harvimmallalla verkolla saadaan 6-solmuilla kolmioilla aivan liian joustavia tuloksia, mutta verkossa on vain kaksi elementtiä. Finnsap-ohjelman ANS4-elementin ($\alpha = 0.05$) prosentuaaliset virheet vastaavilla verkoilla ovat -30.1, -25.9, -16.0 ja -8.0. ANS9 -elementillä vastaavasti -41.6, -18.7, -13.8 ja -5.7. Nelikulmioelementteihin ANS4 ja ANS9 verrattuna kolmioelementit toimivat hyvin. Kolmioelementit ovat varsin hyvänmuotoisia. Jos kulma θ olisi 60° , kolmioelementit olisivat muodoltaan optimaalisia, tasasivuisia.

Taulukko 8.25. Jännitys laatan keskellä solmumäärän mukaan (tavoitearvo 0.802 MPa).

solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
3x3	0.339	0.377	1.212	1.174	1.115	1.053	0.950	1.163
5x5	0.656	0.695	1.175	1.145	1.083	0.989	0.940	0.987
9x9	0.750	0.787	0.817	0.898	0.890	0.862	0.904	0.822
17x17	0.790	0.808	0.796	0.835	0.828	0.818	0.825	0.806

Taulukko 8.26. Jännityksen virhe (%) solmumäärän mukaan.

solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
3x3	-57.7	-53.0	51.1	46.4	39.0	31.3	18.5	45.0
5x5	-18.2	-13.3	46.5	42.8	35.0	23.3	17.2	23.1
9x9	-6.5	-1.9	1.9	12.0	11.0	7.5	12.7	2.5
17x17	-1.5	0.7	-0.7	4.1	3.2	2.0	2.9	0.5

Taulukko 8.27. Taipuma laatan keskellä ($\cdot 10^{-2}$ mm) solmumäärän mukaan (tavoitearvo $4.455 \cdot 10^{-2}$ mm).

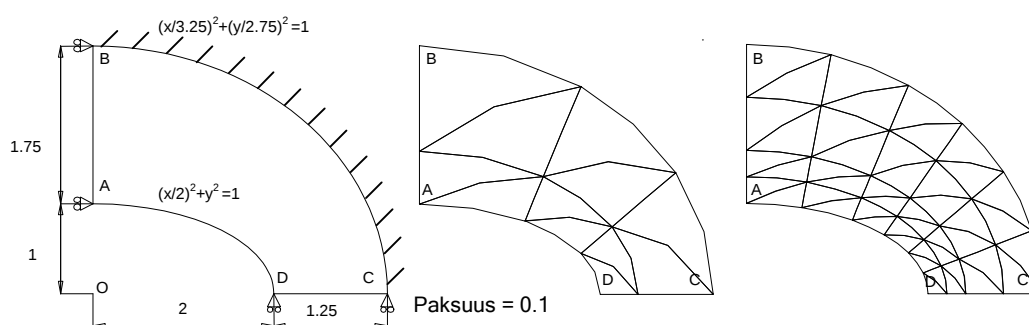
solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
3x3	2.805	5.631	9.920	9.402	8.583	7.752	7.739	9.331
5x5	3.939	4.718	7.075	5.239	4.997	4.560	4.766	4.688
9x9	4.037	4.619	5.655	4.692	4.549	4.363	4.419	4.293
17x17	4.386	4.593	4.875	4.626	4.568	4.510	4.481	4.543

Taulukko 8.28. Taipuman virhe (%) solmumäärän mukaan.

solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
3x3	-37.0	26.4	122.7	111.0	92.7	74.0	73.7	109.5
5x5	-11.6	5.9	58.8	17.6	12.2	2.4	7.0	5.2
9x9	-9.4	3.7	26.9	5.3	2.1	-2.1	-0.8	-3.6
17x17	-1.5	3.1	9.4	3.8	2.5	1.2	0.6	2.0

8.5 Elliptinen laatta (laatan taivutus)

Tämä on NAFEMS-testi nro IC12 [Lyly & Stenberg 1995b, s. 9-10]. Ellipsin muotoisen laatan neljännes ja kaksi elementtiverkkoa (6-solmuisten kolmioelementtien elementtiverkot, joissa on 5 ja 9 solmua sivulla CD) on esitetty kuvassa 8.7 (mitat metreissä). Laattaa kuormittaa tasan jakautunut 1 MPa:n suuruinen painekuorma. Reuna BC on jäykästi kiinnitetty. Reunalla AB on symmetriareunaehto yz-tason suhteen (x -siirtymä ja kiertymät y - ja z -akselien ympäri on estetty). Reunalla CD on symmetriareunaehto xz -tason suhteen (y -siirtymä ja kiertymät x - ja z -akselien ympäri on estetty). Kimmokerroin on 210 000 MPa ja Poissonin vakio on 0.3. Tarkasteltavana suureena on y -suuntainen normaalijännitys laatan yläpinnalla pisteessä D.



Kuva 8.7. Elliptisen laatan neljännes ja elementtiverkot.

Eri elementeillä saadut pisteen D jännityksen arvot ovat taulukossa 8.29 ja jännitysten prosentuaaliset virheet taulukossa 8.30.

Taulukko 8.29. Jännitys σ_y pisteessä D sivun CD solmumäärän mukaan (tavoitearvo 158 MPa).

solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
3	41.1	140						
5	122	149	70.2	134	139	142	157	139
9	156	158	142	155	156	156	169	159
17	161	161	159	159	160	161	167	162

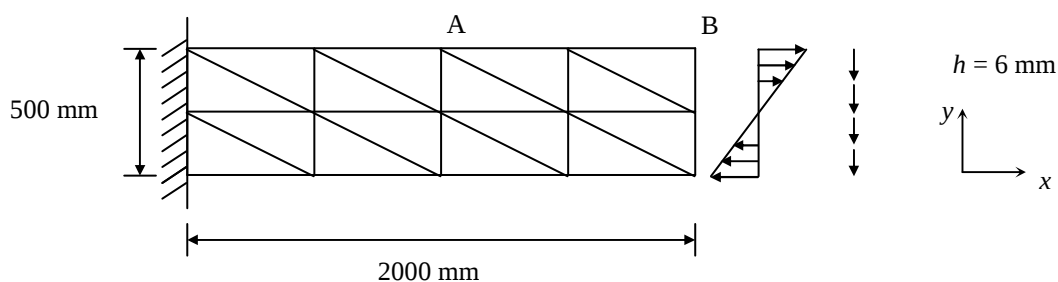
Taulukko 8.30. Jännityksen virhe (%).

solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	MITC7	ANS6
3	-74.0	-11.4						
5	-22.8	-5.7	-55.6	-15.2	-12.0	-10.1	-0.6	-12.0
9	-1.3	0.0	-10.1	-1.9	-1.3	-1.3	7.0	0.6
17	1.9	1.9	0.6	0.6	1.3	1.9	5.7	2.5

8.6 Levyulokepalkki (kalvotilan testi)

Tämä on Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen [FINNSAP I 2002] esimerkki 1.4. Kuvassa 8.8 on esitetty levyn mitat ja kuormat sekä 2x4-elementtiverkko. Tutkittavina suureina ovat levyn x-suuntainen normaalijännitys pisteessä A sekä taipuma pisteessä B. Levy on yhdeltä reunaltaan jäykästi tuettu ja muut kolme reunaa ovat vapaita. Ensimmäisessä kuormitustapauksessa levyn päähän vaikuttaa momentti $1.3 \cdot 10^7$ Nmm ja toisessa leikkausvoima 14.4 N/mm. Molemmissa kuormitustapauksissa voimat on jaettu ekvivalenteiksi solmuvoimiksi.

Materiaalina on rakenneteräs (kimmokerroin on 206 000 MPa). Poissonin vakio on asetettu nolllaksi, koska jäykkä kiinnitys aiheuttaa muuten häiriötä kiinnitetyn pään jännityksiin. Kun Poissonin vakio nollataan, kiinnityshäiriöstä päästään eroon momenttikuorman tapauksessa, mutta leikkausvoiman tapauksessa niitä esiintyy edelleen, mutta vähemmän. Kiinnityskohdan häiriön vuoksi jännitys on luettu pisteestä A levyn vasemman reunan sijasta.



Kuva 8.8. Levyulokepalkin mitat, kuormat ja 2x4-elementtiverkko.

Testissä käytetyssä harvimmassa elementtiverkossa on yksi kolmioelementti y-suunnassa ja 2 kolmioelementtiä x-suunnassa eli yhteensä neljä kolmioelementtiä. Seuraavissa elementtiverkoissa on aina edellisen elementtiverkon jokainen kolmioelementti jaettu neljäksi uudeksi kolmioelementiksi.

Implementoitujen elementtien lisäksi on vertailun vuoksi taulukoitu myös Finnsap-ohjelman 3-solmuisen kuori-elementin (KUO3), 6-solmuisen semiloof-elementin (SEMI6) sekä 4- ja 9-solmuisten ANS-elementtien tulokset. DISP6 on tavanomainen 6-solmuinen siirtymäelementti.

Molemmissa kuormitustapauksissa taulukoidut jännitysten arvot ovat solmupisteen keskimääräisiä arvoja kuori3-elementtiä lukuun ottamatta. MITC3-elementille on lisäksi esitetty solmupisteen maksimiarvot. Solmun keskiarvo on keskiarvo kyseiseen solmuun siihen liittyvistä eri elementeistä tulevista tulossuureen arvoista.

Tuloksia on verrattu teknisen taivutusopin mukaiseen ulokepalkin ratkaisuun ottaen leikkausmuodonmuutos huomioon.

8.6.1 Momenttikuorma

Kaikki 6-solmuiset kolmioelementit antavat tarkat tulokset jo harvimmalla elementtiverkolla. Tarkka x -suuntaisen normaalijännityksen jakauma on momenttikuormalla vakio x -suunnassa ja muuttuu lineaarisesti y -suunnassa. Kolmisolmuisen kolmioelementin jännitysjaakauma on vakio molempiin suuntiin. Näin ollen 3-solmuisella kolmiolla saadut pisteen A jännitysarvot ovat tarkkuudeltaan vaatimattomia.

Taulukko 8.31. Pisteen A jännitys σ_x (tavoitearvo 52.00 MPa). Momenttikuorma.

elementtejä	KUO3 maksimi	MITC3 maksimi	MITC3 keskiarvo	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
1x2	6.01	6.01	1.93	52.00	52.00	52.00	52.00	52.00	52.00
2x4	17.47	17.47	11.57	52.00	52.00	52.00	52.00	52.00	52.00
4x8	34.67	34.67	28.89	52.00	52.00	52.00	52.00	52.00	52.00
8x16	46.22	46.22	42.37	52.00	52.00	52.00	52.00	52.00	52.00

Taulukko 8.32. Pisteen A jännityksen virhe (%). Momenttikuorma.

elementtejä	KUO3 maksimi	MITC3 maksimi	MITC3 keskiarvo	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
1x2	-88.4	-88.4	-96.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2x4	-66.4	-66.4	-77.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4x8	-33.3	-33.3	-44.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8x16	-11.1	-11.1	-18.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Taulukko 8.33. Pisteen B taipuma δ_y (tavoitearvo 2.019 mm). Momenttikuorma.

elementtejä	KUO3	MITC3	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
1x2	0.230	0.230	2.019	2.019	2.019	2.019	2.019	2.019
2x4	0.680	0.680	2.019	2.019	2.019	2.019	2.019	2.019
4x8	1.349	1.349	2.019	2.019	2.019	2.019	2.019	2.019
8x16	1.796	1.796	2.019	2.019	2.019	2.019	2.019	2.019

Taulukko 8.34. Pisteen B taipuman virhe (%). Momenttikuorma.

elementtejä	KUO3	MITC3	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
1x2	-88.6	-88.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2x4	-66.3	-66.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4x8	-33.2	-33.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8x16	-11.0	-11.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

8.6.2 Leikkausvoimakuorma

Kaikki 6-solmuiset kolmioelementit antavat keskenään identtiset tulokset. Tarkka x -suuntaisen normaali-jännityksen jakauma on leikkausvoimakuormalla lineaarinen sekä x - että y -suunnassa.

Taulukko 8.35. Piste A jännitys σ_x (tavoitearvo 28.80 MPa). Leikkausvoimakuorma.

elementtejä	KUO3 maksimi	MITC3 maksimi	MITC3 keskiarvo	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
1x2	4.87	4.87	1.62	28.80	24.10	24.10	24.10	24.10	28.80
2x4	11.99	11.99	6.40	28.80	27.42	27.42	27.42	27.42	28.79
4x8	21.60	21.60	15.60	28.80	28.45	28.45	28.45	28.45	28.80
8x16	27.20	27.20	23.07	28.80	28.71	28.71	28.71	28.71	28.80

Taulukko 8.36. Piste A jännityksen virhe (%). Leikkausvoimakuorma.

elementtejä	KUO3 maksimi	MITC3 maksimi	MITC3 keskiarvo	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
1x2	-83.1	-83.1	-94.4	0.0	-16.3	-16.3	-16.3	-16.3	0.0
2x4	-58.4	-58.4	-77.8	0.0	-4.8	-4.8	-4.8	-4.8	-0.0
4x8	-25.0	-25.0	-45.8	0.0	-1.2	-1.2	-1.2	-1.2	0.0
8x16	-5.6	-5.6	-19.9	0.0	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	0.0

Taulukko 8.37. Piste B taipuma δ_y (tavoitearvo 1.549 mm). Leikkausvoimakuorma.

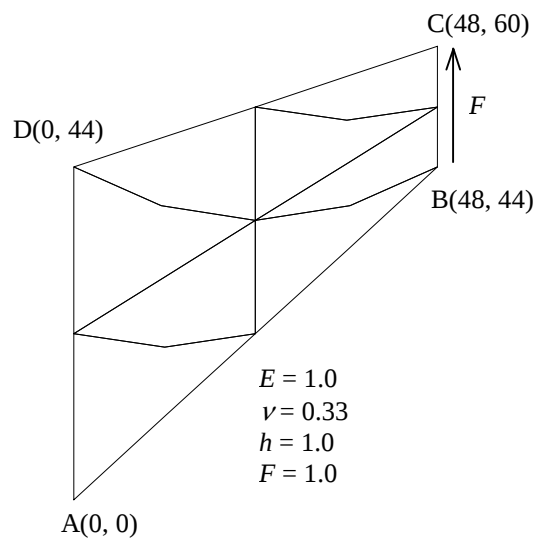
elementtejä	KUO3	MITC3	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
1x2	0.205	0.205	1.445	1.484	1.484	1.484	1.484	1.538
2x4	0.538	0.538	1.515	1.540	1.540	1.540	1.540	1.547
4x8	1.040	1.040	1.539	1.547	1.547	1.547	1.547	1.549
8x16	1.378	1.378	1.544	1.549	1.549	1.549	1.549	1.549

Taulukko 8.38. Piste B taipuman virhe (%). Leikkausvoimakuorma.

elementtejä	KUO3	MITC3	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
1x2	-86.8	-86.8	-6.7	-4.2	-4.2	-4.2	-4.2	-0.7
2x4	-65.3	-65.3	-2.2	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.1
4x8	-32.9	-32.9	-0.6	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	0.0
8x16	-11.0	-11.0	-0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

8.7 Cookin ongelma (kalvotilan testi)

Tämä on Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen [FINNSAP I 2002] esimerkki 1.5. Kuvassa 8.9 on esitetty rakenteen geometria, materiaaliarvot ja 6-solmuisten kolmioelementtien 5x5-solmun elementtiverkko. Sivulta AD levy on jäykästi tuettu ja sivulla BC vaikuttaa yhden yksikön suuruinen tasan jakautunut voima. Tutkittavana suureena on kuormitetun sivun BC keskikohdan siirtymä. Kuormitus on sellainen, että kalvo ainoastaan taipuu tasossaan kuten paksu puolisuunnikkaan muotoinen ulokepalkki.



Kuva 8.9. Rakenteen geometria ja 6-solmuisten kolmioiden 5x5-solmun elementtiverkko.

Elementeillä saadut siirtymät on esitetty taulukossa 8.39 ja siirtymien prosentuaaliset virheet taulukossa 8.40. ANS4 ja ANS9 ovat Finnsap-ohjelman elementtejä ja niiden tulokset ovat Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteesta [FINNSAP I 2002]. SEMI6 on Finnsap-ohjelman 6-solmuinen semiloof-elementti. DISP6 on tavanomainen 6-solmuinen siirtymäelementti.

Taulukko 8.39. Siirtymä sivun BC puolivälissä solmumäärän mukaan (tavoitearvo 23.91).

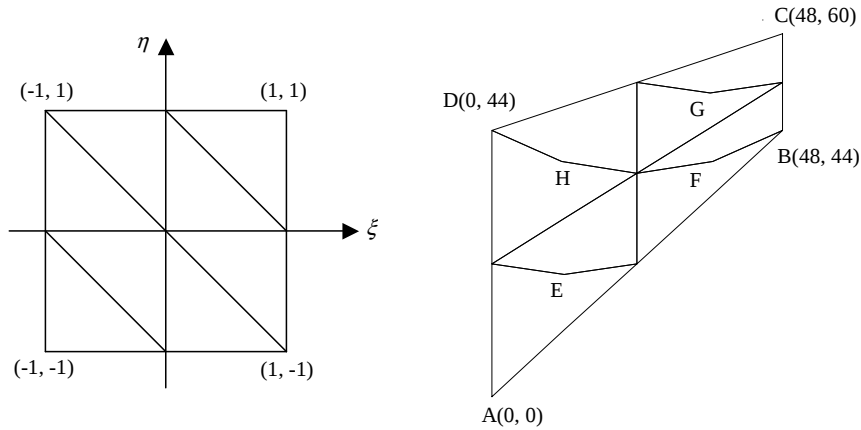
solmuja	MITC3	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
3x3	11.98	17.53	19.25	19.79	20.67	16.31	22.19
5x5	18.27	21.82	23.23	23.11	23.45	22.76	23.61
9x9	22.02	23.33	23.84	23.76	23.85	23.81	23.89

Taulukko 8.40. Sivun BC puolivälin siirtymän virhe (%) solmumäärän mukaan.

solmuja	MITC3	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6	ANS9
3x3	-49.9	-26.7	-19.5	-17.2	-13.6	-31.8	-7.2
5x5	-23.6	-8.7	-2.8	-3.3	-1.9	-4.8	-1.3
9x9	-7.9	-2.4	-0.3	-0.6	-0.3	-0.4	-0.1

6-solmuisilla elementeillä on kaarevia sivuja, vaikka rakenne on suorasivuinen. Elementtiverkot on generoitu Finngen-ohjelmalla. Ensin on muodostettu suorasivuinen generointialue antamalla alueen neljä nurkkapistettä. Seuraavaksi on määrätty alueen sivujen elementtijako eli elementtien lukumäärät alueen sivuilla. Lopuksi ohjelma on generoinut elementit.

Tarkastellaan solmujen koordinaattien määräytymistä, kun alueen sivuilla on kaksi 6-solmuista kolmioelementtiä (kuva 8.10).



Kuva 8.10. Alueeseen generoitujen elementtien solmujen koordinaattien määräytyminen.

Solmujen koordinaatit lasketaan kaavoilla

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i = 24(1 + \xi), \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i = 37 + 15(\xi + \eta) - 7\xi\eta, \end{aligned} \quad (8.1)$$

missä x_i ja y_i ovat alueen nurkkien koordinaatit ja

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Pisteiden E, F, G ja H koordinaateiksi saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(-1/2, -1/2) &= [12 \quad 20,25]^T, \\ \mathbf{x}(+1/2, -1/2) &= [36 \quad 38,75]^T, \\ \mathbf{x}(+1/2, +1/2) &= [36 \quad 50,25]^T, \\ \mathbf{x}(-1/2, +1/2) &= [12 \quad 38,75]^T.\end{aligned}\tag{8.3}$$

Tämä selittää miksi alueen sisällä elementeillä on kaarevia sivuja. Finngen siirtää lisäksi (tarvittaessa) välisolmuja siten, että välisolmun etäisyys molemmista nurkkasolmuista on sama, jolloin pisteiden F ja H koordinaateiksi tulee [36.4704 38.8872] ja [11.5296 38.8872]. Taulukossa 8.41 on esitetty siirtymätulokset ilman, että välisolmuja on siirretty. Eroa taulukon 8.40 tuloksiin ei juurikaan ole. Elementeistä saadaan suorasivuisia kun ensin poistetaan välisolmut ja sitten lisätään välisolmut. Tällaisilla elementtiverkoilla saadut tulokset on esitetty taulukossa 8.42. Tällöin kaikilla 6-solmuisilla kolmioelementeillä saadaan samat tulokset.

Taulukko 8.41. Siirtymä sivun BC puolivälissä (tavoitearvo 23.91). Välisolmuja ei ole siirretty.

solmuja	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6
3x3	19.25 (-19.5 %)	19.79 (-17.2 %)	20.67 (-13.6 %)	16.31 (-31.8 %)
5x5	23.21 (-2.9 %)	23.01 (-3.8 %)	23.39 (-2.2 %)	22.76 (-4.8 %)
9x9	23.84 (-0.3 %)	23.74 (-0.7 %)	23.84 (-0.3 %)	23.81 (-0.4 %)

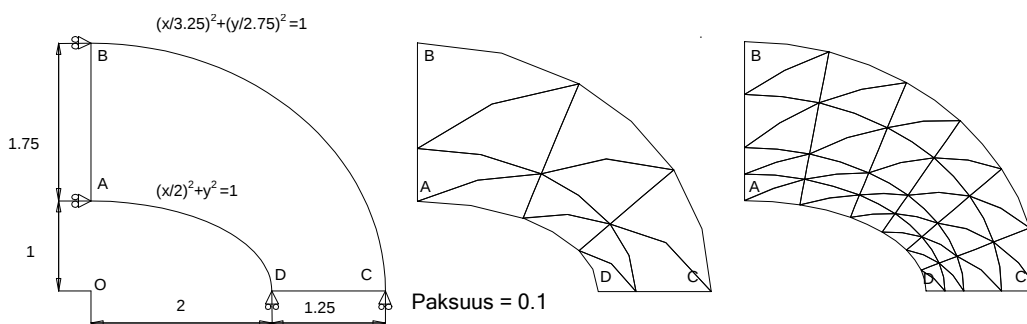
Taulukko 8.42. Siirtymä sivun BC puolivälissä (tavoitearvo 23.91). Suorasivuiset elementit.

solmuja	DISP6	MITC6	ANS6	SEMI6
3x3	18.36 (-23.2 %)	18.36 (-23.2 %)	18.36 (-23.2 %)	18.36 (-23.2 %)
5x5	23.30 (-2.6 %)	23.30 (-2.6 %)	23.30 (-2.6 %)	23.30 (-2.6 %)
9x9	23.85 (-0.3 %)	23.85 (-0.3 %)	23.85 (-0.3 %)	23.85 (-0.3 %)

Testeissä 8.5 ja 8.8 generointialueen määrittelyssä on käytetty nurkkapisteid lisäksi välipisteitä ja interpolaatiofunktioiden N_i asteluku ja lukumäärä on korkeampi kuin suorasivuisen generointialueen tapauksessa.

8.8 Elliptinen kalvo (kalvotilan testi)

Tämä on Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen [FINNSAP I 2002] esimerkki 1.6 (NAFEMS-testi nro LE1). Ellipsin muotoisen levyn neljännes ja kaksi elementtiverkkoa (6-solmuisten kolmioelementtien elementtiverkot, joissa on 5 ja 9 solmua sivulla CD) on esitetty kuvassa 8.11 (mitat metreissä). Kuormituksena on levyn ulkoreunalla BC vaikuttava ulospäin suuntautunut tasaisesti jakautunut 10 MPa:n suuruinen painekuorma. Kaikissa solmuissa kaikki kiertymät ja z-suuntainen siirtymä on kiinnitetty. Reunalla AB on symmetriareunaehto y-akselin suhteen (x-siirtymä on estetty). Reunalla CD on symmetriareunaehto x-akselin suhteen (y-siirtymä on estetty). Kimmo kerroin on 210 000 MPa ja Poissonin vakio on 0.3. Tarkasteltavana suureena on levyn sisäkehän tangentiaalinen jännitys (σ_y) pisteessä D.



Kuva 8.11. Elliptisen levyn neljännes ja elementtiverkot.

Eri elementeillä saadut pisteen D jännityksen arvot ovat taulukossa 8.43 ja jännitysten prosentuaaliset virheet taulukossa 8.44. ANS4 ja ANS9 ovat Finnsap-ohjelman elementtejä. DISP6 on tavanomainen 6-solmuinen siirtymäelementti.

Taulukko 8.43. Jännitys σ_y pisteessä D sivun CD solmumäärän mukaan (tavoitearvo 92.7 MPa).

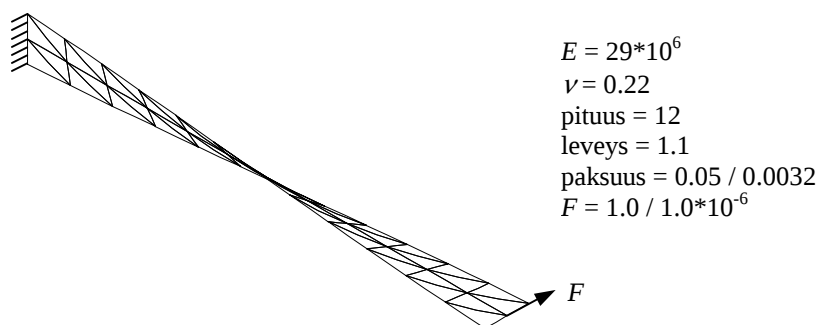
solmuja	MITC3	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	ANS9
3	52.9	68.0				
5	74.0	84.7	88.4	89.4	88.1	85.7
9	86.9	91.9	93.4	92.9	92.8	91.1
17	91.4	93.6	93.2	92.9	92.9	92.1

Taulukko 8.44. Jännityksen σ_y virhe (%) pisteessä D sivun CD solmumäärän mukaan.

solmuja	MITC3	ANS4	DISP6	MITC6	ANS6	ANS9
3	-42.9	-26.6				
5	-20.2	-8.6	-4.6	-3.6	-5.0	-7.6
9	-6.3	-0.9	0.8	0.2	0.1	-1.7
17	-1.4	1.0	0.5	0.2	0.2	-0.6

8.9 Kiero ulokepalkki (kaareva kuori)

Tämä on Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen [FINNSAP I 2002] esimerkki 1.13. Testi tutkii kaksoiskaarevuuden vaikutusta kuorielementtien toimintaan. Testimallina käytetty kuorinauha, jota on kierretty 90° , sekä materiaaliarvot on esitetty kuvassa 8.12. Kuorinauhan toinen pää on jäykästi kiinnitetty ja toiseen päähän vaikuttaa yhden yksikön suuruinen leikkausvoima. Tutkittavana suureena on voiman vaikutuskohdan siirtymä voiman suuntaan. Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen esimerkissä kuoren paksuus on 0.05. Siirtymän tavoitearvo kuoren paksuudella 0.0032 on saatu lähteestä [Belytschko et al. 1989, s. 408].



Kuva 8.12. Kiero ulokepalkki, mitat ja materiaaliarvot.

Elementeillä saadut siirtymät nauhan paksuudella 0.05 on esitetty taulukoissa 8.45 ja 8.47. Taulukoissa 8.46 ja 8.48 on esitetty näiden siirtymien prosentuaaliset virheet. Implementoitujen elementtien lisäksi on vertailun vuoksi taulukoitu myös Finnsap-ohjelman 3-solmuisen kuori-elementin (KUO3), 6-solmuisen semiloof-elementin (SEMI6) sekä 4- ja 9-solmuisten ANS-elementtien tulokset. DISP3 ja DISP6 ovat tavanomaisia siirtymäelementtejä.

Stabiloimaton MITC3 toimii hyvin stabiloidun MITC3-elementin antaessa liian suuria siirtymiä. Finnsap-ohjelman ANS4-elementillä stabilointiparametrin (0.05) käytöllä ei ole juurikaan vaikutusta tuloksiin. Kaikki 6-solmuiset kolmioelementit antavat hyviä tuloksia, ANS6-elementillä saadaan parhaat tulokset.

Taulukko 8.45. Siirtymä solmumäärän mukaan (tavoitearvo 1.390). Paksuus 0.05.

solmuja	DISP6	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6	SEMI6	ANS9
3 x 13	0.897	1.345	1.350	1.338	1.323	1.389	1.381	1.385
5 x 25	1.298	1.384	1.380	1.379	1.378	1.386	1.376	1.387
9 x 49	1.378	1.388	1.386	1.386	1.386	1.387	1.387	1.387

Taulukko 8.46. Siirtymän virhe (%) solmumäärän mukaan. Paksuus 0.05.

solmuja	DISP6	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6	SEMI6	ANS9
3 x 13	-35.5	-3.2	-2.9	-3.7	-4.8	-0.1	-0.6	-0.4
5 x 25	-6.6	-0.4	-0.7	-0.8	-0.9	-0.3	-1.0	-0.2
9 x 49	-0.9	-0.1	-0.3	-0.3	-0.3	-0.2	-0.2	-0.2

Taulukko 8.47. Siirtymä solmumäärän mukaan (tavoitearvo 1.390). Paksuus 0.05.

solmuja	KUO3	DISP3	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	ANS4 $\alpha = 0$	ANS4 $\alpha = 0.05$
3 x 13	1.381	0.012	1.365	1.515	1.376	1.377
5 x 25	1.383	0.046	1.389	1.525	1.384	1.385
9 x 49	1.385	0.162	1.425	1.554	1.387	1.387

Taulukko 8.48. Siirtymän virhe (%) solmumäärän mukaan. Paksuus 0.05.

solmuja	KUO3	DISP3	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	ANS4 $\alpha = 0$	ANS4 $\alpha = 0.05$
3 x 13	-0.6	-99.1	-1.8	9.0	-1.0	-0.9
5 x 25	-0.5	-96.7	-0.1	9.7	-0.4	-0.4
9 x 49	-0.4	-88.3	2.5	11.8	-0.2	-0.2

Elementeillä saadut siirtymät nauhan paksuudella 0.0032 on esitetty taulukoissa 8.49 ja 8.51. Taulukoissa 8.50 ja 8.52 on esitetty näiden siirtymien prosentuaaliset virheet. Stabiloimaton MITC3 antaa ohuellakin nauhalla hyviä tuloksia harvinta verkkoa lukuun ottamatta stabiloidun MITC3-elementin antaessa liian suuria siirtymiä. Nauhan paksuuden pienentäminen ei vaikuta ANS6-elementin suhteellisiin virheisiin. Sen sijaan MITC6-elementtien tulokset huononevat selvästi.

Sze ja Zhu [1999, s. 66] ovat saaneet ANS6-elementillään tarkalla arvolla normeerautuksi siirtymiksi 0.992 ja 0.990 3x13- ja 5x25-solmun elementtiverkoilla. Omat tulokset ovat käytännössä samat.

Taulukko 8.49. Siirtymä ($\cdot 10^{-3}$) solmumäärän mukaan (tavoitearvo $5.256 \cdot 10^{-3}$). Paksuus 0.0032.

solmuja	DISP6	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6	SEMI6	ANS9
3 x 13	0.382	3.878	4.483	4.167	3.509	5.217	5.266	5.251
5 x 25	0.361	3.003	2.945	2.846	2.776	5.202	3.742	5.246
9 x 49	2.505	4.881	4.885	4.884	4.882	5.227	4.720	5.250

Taulukko 8.50. Siirtymän virhe (%) solmumäärän mukaan. Paksuus 0.0032.

solmuja	DISP6	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6	SEMI6	ANS9
3 x 13	-92.7	-26.2	-14.7	-20.7	-33.2	-0.7	0.2	-0.1
5 x 25	-93.1	-42.9	-44.0	-45.9	-47.2	-1.0	-28.8	-0.2
9 x 49	-52.3	-7.1	-7.1	-7.1	-7.1	-0.6	-10.2	-0.1

Taulukko 8.51. Siirtymä ($\cdot 10^{-3}$) solmumäärän mukaan (tavoitearvo $5.256 \cdot 10^{-3}$). Paksuus 0.0032.

solmuja	KUO3	DISP3	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	ANS4 $\alpha = 0$	ANS4 $\alpha = 0.05$
3 x 13	5.252	0.000	4.125	5.736	5.060	5.165
5 x 25	5.198	0.001	5.077	5.613	5.220	5.227
9 x 49	5.223	0.003	5.179	5.654	5.244	5.245

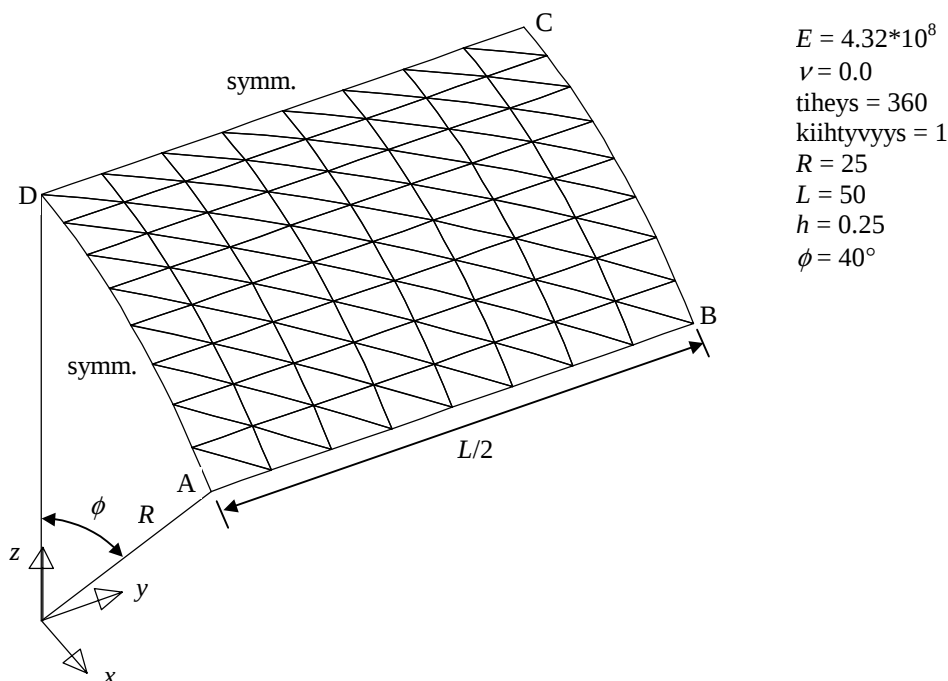
Taulukko 8.52. Siirtymän virhe (%) solmumäärän mukaan. Paksuus 0.0032.

solmuja	KUO3	DISP3	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	ANS4 $\alpha = 0$	ANS4 $\alpha = 0.05$
3 x 13	-0.1	-100.0	-21.5	9.1	-3.7	-1.7
5 x 25	-1.1	-100.0	-3.4	6.8	-0.7	-0.6
9 x 49	-0.6	-99.9	-1.5	7.6	-0.2	-0.2

8.10 Kaareva katto (Scordelis-Lo) (kaareva kuori)

Tämä on Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen [FINNSAP I 2002] esimerkki 1.8. Kyseessä on laakea sylinterikuoren osan muodostama katto, jota kuormittaa omapaino. Rakenteen mitat ja materiaaliarvot sekä tihein testissä käytetyistä 6-solmuisista elementtiverkoista on esitetty kuvassa 8.13. Kaarevilla sivuilla on jäykisteet, suorat sivut ovat vapaat. Tarkasteltavana suurena on pisteen A siirtymä. Tavoitearvo on lähteestä [Lee 2004, s. 28].

Symmetrian vuoksi on verkotettu vain rakenteen neljännes. Neljännestä rajoittaviin kahteen leikkaukseen on annettu symmetriareunaehdot: sivulla DA on δy , θ_x ja θ_z kiinnitetty ja sivulla DC on δx , θ_y ja θ_z kiinnitetty. Päätysivu CB on tuettu jäykällä kannakekaarella eli vapausasteet δx , δz ja θ_y on kiinnitetty.



Kuva 8.13. Rakenteen neljännes, mitat ja materiaaliarvot sekä elementtiverkko.

Elementeillä saadut siirtymät on esitetty taulukossa 8.53 ja siirtymien prosentuaaliset virheet taulukossa 8.54.

Sze ja Zhu [1999, s. 70] ovat saaneet normeeratuiksi siirtymiksi ANS6-elementillään 0.856, 0.825, 0.952, 0.982, 0.993, 0.995. Neljällä viimeisellä elementtiverkolla omat ANS6-tulokset ovat esitetyllä tarkkuudella näiden kanssa identtiset.

Taulukko 8.53. Siirtymä vapaan sivun puolivälissä solmumäärän mukaan (tavoitearvo 0.3024).

solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6
3x3	0.0279	0.2235	0.2503	0.3305	0.2756	0.2699	0.2511	0.2552
5x5	0.1214	0.2058	0.2130	0.2874	0.2771	0.2743	0.2699	0.2485
7x7	0.2013	0.2439	0.2521	0.3078	0.3009	0.2995	0.2974	0.2878
9x9	0.2430	0.2678	0.2769	0.3079	0.3041	0.3032	0.3019	0.2969
13x13	0.2763	0.2913	0.3012	0.3051	0.3035	0.3030	0.3024	0.3004
17x17	0.2887	0.3018	0.3120	0.3034	0.3026	0.3024	0.3020	0.3009

Taulukko 8.54. Siirtymän virhe (%) solmumäärän mukaan.

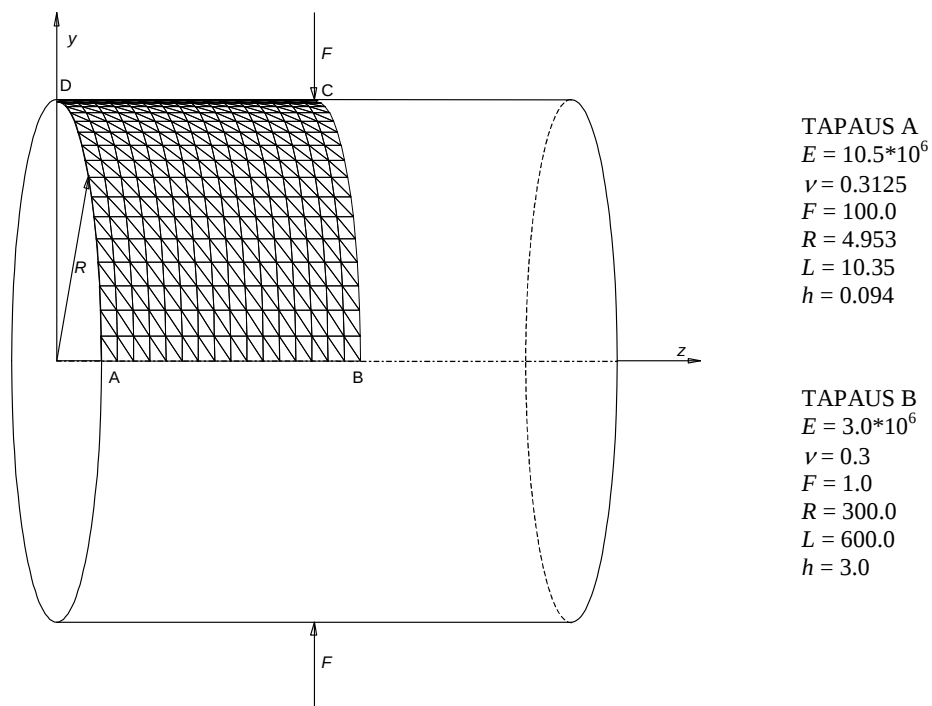
solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6
3x3	-90.8	-26.1	-17.2	9.3	-8.9	-10.7	-17.0	-15.6
5x5	-59.9	-31.9	-29.6	-5.0	-8.4	-9.3	-10.7	-17.8
7x7	-33.4	-19.3	-16.6	1.8	-0.5	-1.0	-1.7	-4.8
9x9	-19.6	-11.4	-8.4	1.8	0.6	0.3	-0.2	-1.8
13x13	-8.6	-3.7	-0.4	0.9	0.4	0.2	0.0	-0.7
17x17	-4.5	-0.2	3.2	0.3	0.1	0.0	-0.1	-0.5

8.11 Ympyräsylinterin litistäminen (kaareva kuori)

Tämä on Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen [FINNSAP I 2002] esimerkki 1.11. Kuvassa 8.14 on esitetty sylinterikuoren geometria ja materiaaliarvot. On laskettu kaksi eri tapausta: A) sylinterin päät ovat vapaat ja B) sylinterin molemmissa päissä on jäykisteet (jäykkä kalvo).

Molemmissa tapauksissa tarkasteltavana suureena on pisteen C siirtymä y-akselin suuntaan. Tapauksessa A syntyy kuoreen puhdasta taivutusta ilman kalvovenymiä, kun taas tapauksessa B syntyy taivutustilan ja kalvotilan yhdistelmä. Elementeillä saadut tulokset prosentuaalisine virheineen erilaisilla verkon tiheyksillä on esitetty tapaukselle A taulukoissa 8.55 ja 8.56 sekä tapaukselle B taulukoissa 8.57 ja 8.58.

Elementtien herkkyyttä verkon muotovirheille on tutkittu tapauksessa A käyttäen 7x7-solmuverkkoa. Elementtiverkot on esitetty kuvissa 8.15 ja 8.16. Taulukossa 8.59 on esitetty siirtymät ja taulukossa 8.60 siirtymien prosentuaaliset virheet eri θ -kulman arvoilla.



Kuva 8.14. Ympyräsylinteri, mitat ja materiaaliarvot sekä tihein 3-solmuinen elementtiverkko.

Taulukko 8.55. Siirtymät ($\cdot 10^{-1}$) pisteessä C (tavoitearvo 0.1139). Tapaus A, vapaat päät.

solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6
3x3	0.700	0.854	0.999	1.054	0.731	1.031	0.986	0.996
5x5	0.989	1.042	1.084	1.243	1.091	1.150	1.106	1.135
9x9	1.085	1.108	1.124	1.192	1.156	1.147	1.130	1.142
17x17	1.122	1.130	1.136	1.160	1.147	1.142	1.136	1.141

Taulukko 8.56. Siirtymän virhe (%). Tapaus A, vapaat päät.

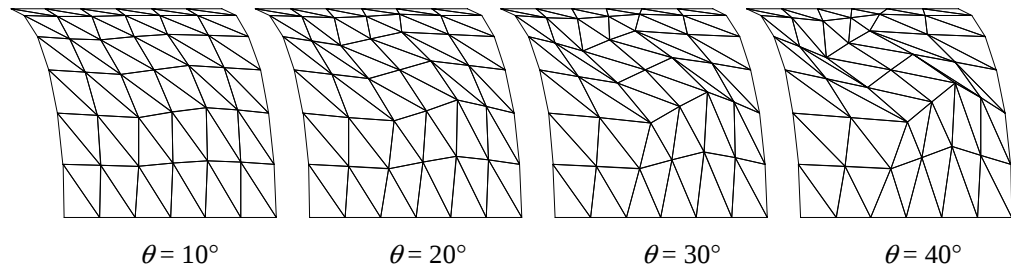
solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6
3x3	-38.5	-25.0	-12.3	-7.5	-35.8	-9.5	-13.4	-12.6
5x5	-13.2	-8.5	-4.8	9.1	-4.2	1.0	-2.9	-0.4
9x9	-4.7	-2.7	-1.3	4.7	1.5	0.7	-0.8	0.3
17x17	-1.5	-0.8	-0.3	1.8	0.7	0.3	-0.3	0.2

Taulukko 8.57. Siirtymät ($\cdot 10^{-5}$) pisteessä C (tavoitearvo $1.8248 \cdot 10^{-5}$). Tapaus B, päätyjäykisteet.

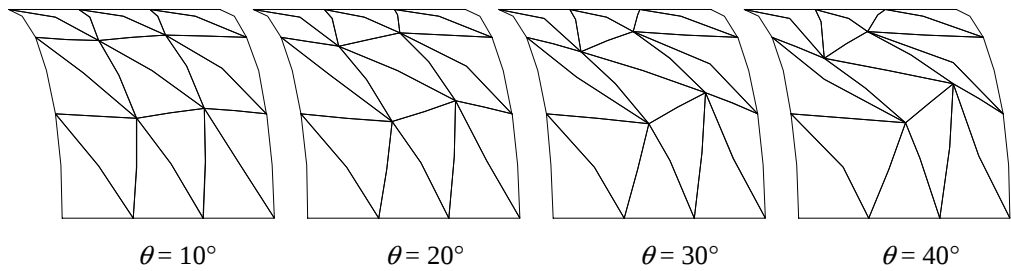
solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6
3x3	0.049	0.098	0.098	0.091	0.101	0.100	0.099	0.095
5x5	0.252	0.734	0.851	0.920	0.747	0.839	0.900	0.920
9x9	0.880	1.421	1.588	1.727	1.551	1.584	1.530	1.577
17x17	1.487	1.730	1.850	2.046	1.946	1.892	1.823	1.893

Taulukko 8.58. Siirtymän virhe (%). Tapaus B, päätyjäykisteet.

solmuja	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6
3x3	-97.3	-94.6	-94.6	-95.0	-94.5	-94.5	-94.6	-94.8
5x5	-86.2	-59.8	-53.4	-49.6	-59.1	-54.0	-50.7	-49.6
9x9	-51.8	-22.1	-13.0	-5.4	-15.0	-13.2	-16.2	-13.6
17x17	-18.5	-5.2	1.4	12.1	6.6	3.7	-0.1	3.7



Kuva 8.15. Vääristetyt 3-solmuiset kolmioelementtiverkot.



Kuva 8.16. Vääristetyt 6-solmuiset kolmioelementtiverkot.

Taulukko 8.59. Siirtymät ($\cdot 10^{-1}$) pisteessä C eri θ -kulman arvoilla (tavoitearvo 0.1139).

kulma θ	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6
0	1.056	1.089	1.112	1.214	1.152	1.151	1.124	1.141
10	1.046	1.087	1.111	1.210	1.148	1.149	1.121	1.139
20	1.015	1.079	1.105	1.199	1.166	1.147	1.113	1.138
30	0.959	1.060	1.090	1.181	1.149	1.131	1.096	1.113
40	0.860	1.022	1.061	1.147	1.102	1.095	1.064	1.061

Taulukko 8.60. Siirtymän virhe (%).

kulma θ	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6
0	-7.3	-4.4	-2.4	6.6	1.1	1.1	-1.3	0.2
10	-8.2	-4.6	-2.5	6.2	0.8	0.9	-1.6	0.0
20	-10.9	-5.3	-3.0	5.3	2.4	0.7	-2.3	-0.1
30	-15.8	-6.9	-4.3	3.7	0.9	-0.7	-3.8	-2.3
40	-24.5	-10.3	-6.8	0.7	-3.2	-3.9	-6.6	-6.8

8.12 Litistetty pallokalotti (kaareva kuori)

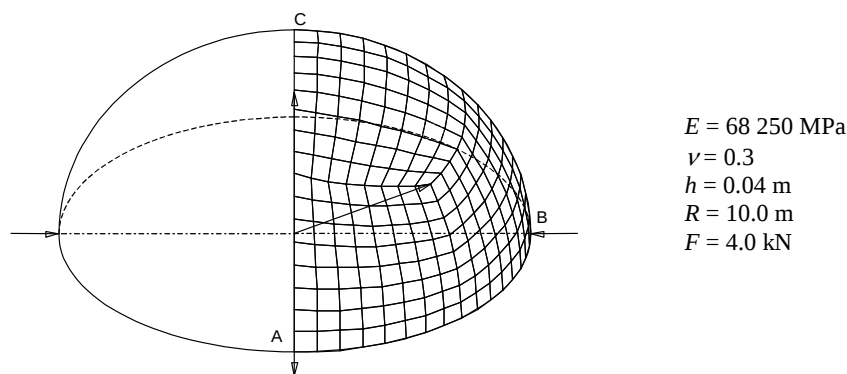
Tämä on Finnsap-ohjelman esimerkkiselosteen [FINNSAP I 2002] esimerkki 1.12 (NAFEMS-testi nro LE3). Pallokalottia (puolipalloa) kuormitetaan 90° välein sijaitsevilla pistevoimilla siten, että vastakkaisista voimapareista toinen puristaa ja toinen levittää kalottia. Pallokalotti on kiinnitetty ainoastaan kuvun huipusta. Tarkasteltavana suureena on siirtymä kalotista poispäin vaikuttavien kuormien kohdalla.

Symmetrian vuoksi kalotista on mallinnettu ainoastaan yksi neljännes. Elementtien generointia varten pallokalotin neljännes on jaettu kolmeen generointialueeseen neljänneksen sivujen keskipisteiden ja pisteen $(10/\sqrt{3}, 10/\sqrt{3}, 10/\sqrt{3})$ avulla. Kuvassa 8.17 on esitetty rakenteen geometria, materiaalitiedot ja nelikulmioelementtiverkko. Kolmioverkoissa jokainen nelikulmio on jaettu vasemman yläkulman ja oikean alakulman yhdistävällä diagonaalilla kahdeksi kolmioksi.

Testin tavoitteena on tutkia kuorielementtien toimintaa, kun ne sijaitsevat kahteen suuntaan kaarevalla pinnalla ja lähes puhtaan taivutuksen alaisina. Lisäksi mallissa on alueita, joissa syntyy ainoastaan jäykän kappaleen liikettä. Verkon topologia aiheuttaa kaiken lisäksi elementteihin käyristymistä, joten ongelmaa voidaan pitää erittäin vaativana alkuaan tasomaisille elementeille.

Siirtymätulokset eri elementeille on esitetty taulukoissa 8.61 ja 8.63. Siirtymän prosentuaaliset virheet ovat taulukoissa 8.62 ja 8.64. Implementoitujen elementtien lisäksi on vertailun vuoksi taulukoitu myös Finnsap-ohjelman 3-solmuisen kuorielementin (KUO3), 6-solmuisen semiloof-elementin (SEMI6) sekä 4- ja 9-solmuisten ANS-elementtien tulokset. DISP3 ja DISP6 ovat tavanomaisia siirtymäelementtejä.

6-solmuisista kolmioista MITC6-3 ja ANS6, joiden leikkausvenymäinterpolaatio on lineaarinen, antavat parhaat tulokset. MITC3-elementti stabilointiparametrin α arvolla 0.1 antaa yllättävän hyviä tuloksia.



Kuva 8.17. Pallokalotin geometria, materiaaliarvot ja nelikulmioelementtiverkko.

Taulukko 8.61. Piste A siirtymä sivun AB solmumäärän mukaan (tavoite 0.185 m).

solmuja	DISP6	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6	SEMI6	ANS9
5	0.004	0.199	0.155	0.151	0.146	0.189	0.146	0.134
9	0.013	0.188	0.175	0.172	0.169	0.191	0.072	0.182
17	0.060	0.184	0.177	0.177	0.176	0.183	0.157	0.184
33	0.158	0.186	0.184	0.184	0.184	0.184	0.183	0.185

Taulukko 8.62. Pallokalotin pisteen A siirtymän virhe (%) sivun AB solmumäärän mukaan.

solmuja	DISP6	MITC6-3	MITC6-1	MITC6-2	MITC6-4	ANS6	SEMI6	ANS9
5	-97.8	7.6	-16.2	-18.4	-21.1	2.2	-21.1	-27.6
9	-93.0	1.6	-5.4	-7.0	-8.6	3.2	-61.1	-1.6
17	-67.6	-0.5	-4.3	-4.3	-4.9	-1.1	-15.1	-0.5
33	-14.6	0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-1.1	0.0

Taulukko 8.63. Piste A siirtymä sivun AB solmumäärän mukaan (tavoite 0.185 m).

solmuja	KUO3	DISP3	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	ANS4 $\alpha = 0$	ANS4 $\alpha = 0.05$
5	0.178	0.000	0.007	0.190	0.206	0.107	0.127
9	0.181	0.000	0.056	0.187	0.194	0.180	0.186
17	0.182	0.001	0.151	0.185	0.188	0.185	0.187
33	0.183	0.003	0.179	0.184	0.185	0.187	0.188

Taulukko 8.64. Pallokalotin pisteen A siirtymän virhe (%) sivun AB solmumäärän mukaan.

solmuja	KUO3	DISP3	MITC3 $\alpha = 0$	MITC3 $\alpha = 0.1$	MITC3 $\alpha = 0.2$	ANS4 $\alpha = 0$	ANS4 $\alpha = 0.05$
5	-3.8	-100.0	-96.2	2.7	11.4	-42.2	-31.4
9	-2.2	-100.0	-69.7	1.1	4.9	-2.7	0.5
17	-1.6	-99.5	-18.4	0.0	1.6	0.0	1.1
33	-1.1	-98.4	-3.2	-0.5	0.0	1.1	1.6

9 Yhteenveto

Tässä työssä perehdyttiin kuoriongelmien ratkaisemiseen elementtimenetelmällä ja toteutettiin Finnsap-lujuuslaskentaohjelmistoon 3-solmuinen (stabiloitu) MITC3-kolmiokuorielementti, 6-solmuinen ANS6-kolmiokuorielementti sekä neljä toisistaan hiukan eroavaa 6-solmuista MITC6-kolmiokuorielementtiä.

Sovellettu kuorielementin teoria perustuu kontinuumimekaniikkaan ja on oletettu, että kuorella ei esiinny paksuussuuntaista normaalijännitystä, kuoren normaalit pysyvät suorina ja kuoren paksuussuuntaiset leikkausmuodonmuutokset ovat pieniä. Lisäksi on oletettu, että kuori on suhteellisen ohut ja paksuuden muutokset elementin alueella ovat vähäisiä. Tällöin on voitu käyttää kaksiulotteisia kuoriyhtälöitä.

Lineaarinen (3-solmuinen) elementti MITC3 toimii vakiovenymäelementtinä heikosti kalvotilassa. Stabiloimaton MITC3 lukkiutuu taivutuksessa, kun kuori on ohut. Stabiloitu MITC3 toimii hyvin laatan taivutuksessa taipuman osalta (stabilointihan on kehitetty laattaelementille). Jossain tapauksissa (esim. kiero ulokepalkki) stabilointi tekee elementistä liian taipuisan.

Kvadraattisista (6-solmuista) elementeistä keskimäärin parhaiten toimii ANS6 ja testitapausten perusteella sitä voi suositella kuorirakenteiden laskentaan. MITC6-elementit antavat joissain tapauksissa selvästi heikompia tuloksia kuin ANS6-elementti. MITC6-3 antaa pääsääntöisesti liian taipuisia tuloksia (joskin pallokalottitestissä se toimii hyvin).

Tässä työssä rajoituttiin lineaariseen staattiseen analyysiin lineaarisella isotrooppisella materiaalilla. Finnsap-ohjelmistossa CBR-nelikulmioelementtejä voidaan käyttää lineaarisen staattisen ja dynaamisen analyysin lisäksi geometrisesti epälineaariseen analyysiin (suuret siirtymät), materiaalisesti epälineaariseen analyysiin (myötäminen / suuret venymät) sekä lämmönjohtumisanalyysiin. On mahdollista käyttää useita erilaisia materiaalimalleja, jäykistettyä poikkileikkausta, laminaattipoikkileikkausta jne. Jatkossa on testattava uusien kolmioelementtien soveltuvuutta näihin.

Lähdeluettelo

- Bathe, K. J. & Iosilevich, A. & Chapelle, D. 2000. *An evaluation of the MITC shell elements*. Computers and Structures, 75. S. 1-30.
- Belytschko, T. & Wong, B. L. & Stolarski, H. 1989. *Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element*. International journal for numerical methods in engineering, 28. S. 385-414.
- Chapelle, D. & Bathe, K. J. 2003. *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*. Berlin: Springer-Verlag. 330 s. ISBN 3-540-41339-1.
- FINNSAP I. 2002. *Aloitusohje, Ohjelmaseloste, Esimerkkiseloste*. Insinööritoimisto FEMdata Oy, Espoo.
- Hakala, M. K. 1991. *Lujuusopin elementtimenetelmä*. Neljäs muuttumaton painos. Espoo: Otatieto Oy. 490 s.
- Kim, C. H. & Sze, K. Y. & Kim, Y. H. 2003. *Curved quadratic triangular degenerated- and solid-shell elements for geometric non-linear analysis*. International journal for numerical methods in engineering, 57. S. 2077-2097.
- Kouhia, R. & Tuomala, M. 2003. *Rakenteiden mekaniikan numeeriset menetelmät*. Luentomoniste. Teknillinen korkeakoulu, Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto, Rakenteiden mekaniikan laboratorio. Espoo.
- Lee, PS. 2004. *On Triangular Finite Elements for General Shell Structures*. Väitöskirja. Massachusetts Institute of Technology. 162 s.
- Lyly, M. & Stenberg, R. 1994. *New three and four noded plate bending elements*. Rakenteiden mekaniikka, 27: 2. S. 3-29.
- Lyly, M. & Stenberg, R. 1995a. *Theory Manual of the Stabilized MITC Plate and Flat Shell Elements of SHIPFEM*. VTT Publications, B 81. 31 s.
- Lyly, M. & Stenberg, R. 1995b. *Some NAFEMS benchmark tests applied to the stabilized MITC plate and flat shell elements of the SHIPFEM program*. VTT Publications, B 82. 16 s.
- Malinen, M. 2001. *Finite Elements and Linear Shell Theory – Studies on Shell Models and Numerical Locking Phenomena*. Väitöskirja. Teknillinen korkeakoulu, Kone-tekniikan osasto. Espoo. 15 + 135 s.
- Määttänen, M. 2001. *Elementtimenetelmän perusteet*. Luentomoniste. Teknillinen korkeakoulu, Kone-tekniikan osasto, Lujuusopin laboratorio. Espoo.

Pennala, E. 1993. *Lujuusopin perusteet*. Kuudes uudistettu painos. Espoo: Otatieto Oy. 400 s.

Sze, K. Y. & Zhu, D. 1999. *A quadratic assumed natural strain curved triangular shell element*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 174. S. 57-71.

Vierros, S. 1993. *Geometrisesti epälineaarinen kuorielementti*. Diplomityö. Teknillinen korkeakoulu, Konetekniikan osasto. Espoo. 71 s.

Weissman, S. L. & Taylor, R. L. 1990. *Resultant fields for mixed plate bending elements*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 79. S. 321-355.