

Mat-1.139 Matematiikan erikoistyöt

# Numeerisia polunseurausmenetelmiä

Jarkko Niiranen  
40710 P

19. lokakuuta 2000

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Polunseurausmenetelmien peruseriaatteet</b>	<b>5</b>
2.1	Upotusmenetelmät . . . . .	5
2.2	Implisiittisesti määritellyt käyrät . . . . .	6
2.3	Ennuste-korjausmenetelmien (PC methods) perusidea . . . . .	9
2.4	Paloittain lineaaristen menetelmien (PL methods) perusidea . . . . .	10
2.5	Moore-Penrose-käännös Newton-iteraatiossa . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Ennuste-korjausmenetelmät rakenteiden mekaniikassa</b>	<b>14</b>
3.1	Tasapainoyhtälö ja Newton-Raphson-menetelmä . . . . .	14
3.2	Kaarenpituusmenetelmien rajoiteyhtälöt ja ositustekniikka . . . . .	15
<b>A</b>	<b>Rajoiteyhtälöiden rajoitevektorit</b>	<b>18</b>
<b>B</b>	<b>Kuormakerroinmuutos rajoiteyhtälöille</b>	<b>20</b>
<b>C</b>	<b>Iteroinnin kulku tapauksessa <math>n = 1</math></b>	<b>21</b>

# 1 Johdanto

Tässä työssä tarkastellaan ns. numeeristen polunseurausmenetelmien - erityisesti ns. ennustekorjausmenetelmien - matemaattisia perusteita ja rakenteiden mekaniikassa käytettyjä sovelluksia. Matemaattisten perusteiden pohjana on pääasiassa viite [1], joten tämän esityksen kunkin luvun alussa on mainittu ne viitteen [1] luvut, joihin esitys perustuu. Tämä luku perustuu viitteen [1] lukuun 1.

Tyypillinen ongelma, jonka ratkaisemiseksi voidaan käyttää polunseuraus-, homotopia- tai upotusmenetelmiä, on seuraavaa muotoa: On löydettävä piste  $x \in R^n$ , joka toteuttaa yhtälön

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

missä kuvaus  $F : R^n \rightarrow R^n$  on sileä eli tarvittavan monta kertaa jatkuvasti derivoituva.

Jos yhtälön (1) ratkaisulle eli kuvauksen  $F$  nollakohdalle  $x = \bar{x} \in R^n$  tiedetään riittävän hyvä likiarvo  $x_0 \in R^n$ , voidaan tarkempaa ratkaisua hakea ns. Newton-iteraatiolla

$$x_{i+1} = x_i - A_i^{-1}F(x_i), \tag{2}$$

missä  $i = 0, 1, \dots$  ja  $A_i$  on kuvauksen  $F$  derivaatan  $F'(x_i)$  sopiva likiarvo.

Jos yhtälön (1) ratkaisulle ei ole olemassa niin hyvää likiarvoa, että Newton-iteraatio (2) suppenisi kohti tarkkaa ratkaisua  $\bar{x}$ , voidaan määrittellä homotopia  $H : R^n \times R \rightarrow R^n$  siten, että

$$H(x, 1) = G(x) \text{ ja} \tag{3}$$

$$H(x, 0) = F(x), \tag{4}$$

missä  $G : R^n \rightarrow R^n$  on sellainen sileä kuvaus, jonka nollakohdat tunnetaan. Usein homotopiaksi  $H$  valitaan ns. konvekssi homotopia

$$H(x, \lambda) = \lambda G(x) + (1 - \lambda)F(x). \tag{5}$$

Jos  $x_1 \in R^n$  tiedetään kuvauksen  $G$  nollakohdaksi, kuvauksen  $F$  nollakohta  $\bar{x}$  etsitään seuraamalla homotopian  $H$  implisiittisesti määrittelemää - polkuparametrin  $s$  mukana lähtöpisteestä  $(x_1, 1)$  ratkaisupisteeseen  $(\bar{x}, 0)$  kulkevaa - polkua  $c(s) \in H^{-1}(0)$ .

Toinen tyypillinen valinta homotopiaksi  $H$  on ns. globaali homotopia

$$H(x, \lambda) = F(x) - \lambda F(x_1), \tag{6}$$

missä  $x_1 \in R^n$ .

Usein ongelman asettelu voi olla jo valmiiksi samaa muotoa kuin edellä esitetty homotopian  $H$  määrittelemä polunseurausongelma: On siis löydettävä  $z \in R^{n+1}$ , joka toteuttaa yhtälön

$$H(z) = 0, \tag{7}$$

missä kuvaus  $H : R^{n+1} \rightarrow R^n$  on sileä. Esimerkiksi useat rakenteiden mekaniikan ongelmat voidaan esittää tässä muodossa, jolloin  $z = (x, \lambda)$ , missä  $\lambda \in R$  on tehtävän asettelusta seuraava luonnollinen fysikaalisesti tulkittavissa oleva parametri ja  $x \in R^n$ .

Jotta voidaan puhua yhtälön  $H = 0$  ratkaisukäyrän seuraamisesta, täytyy löytää vastaus ainakin seuraaviin kysymyksiin:

- (1) Millä ehdoilla polku  $c(s) \in H^{-1}(0)$  on olemassa ja sileä?
- (2) Jos kyseinen sileä polku on olemassa, niin millä ehdoilla ratkaisupiste  $(\bar{x}, 0)$  saavutetaan äärellisellä polkuparametrin  $s$  arvolla?
- (3) Miten kyseistä polkua voidaan seurata numeerisesti?

Ensimmäistä kysymystä käsitellään luvussa 2.2 ja siihen saadaan vastaus implisiittifunktioiteoreeman avulla. Toinen kysymys liittyy epälineaarisen analyysin olemassaololauseisiin ja asteteoriaan. Näitä aihepiirejä ei käsitellä tässä työssä. Kolmannen kysymyksen perusteita käsitellään eri ratkaisumenetelmätyyppien osalta luvuissa 2.3, 2.4 ja 2.5. Lisäksi luvussa 3 on vertailtu erityisesti rakenteiden mekaniikassa käytettyjä ratkaisumenetelmiä.

## 2 Polunseurausmenetelmien peruseriaatteet

### 2.1 Upotusmenetelmät

Tämä luku perustuu viitteen [1] lukuun 1. Jos yhtälön (7) implisiittisesti määrittelemä polku  $c$  voidaan parametrisoida parametrin  $\lambda$  suhteen, voidaan käyttää klassisia upotusmenetelmiä, jotka voidaan esittää parametriarvosta  $\lambda = 1$  arvoon  $\lambda = 0$  polkua  $c$  seuraavan algoritmin muodossa. Algoritmin avulla saadaan polun  $c$  likiarvopisteet  $(x_1, \lambda_1), \dots, (x_m, \lambda_m)$ .

#### 2.1.1 Algoritmi upotusmenetelmille.

1. Valitaan lähtöpiste  $x_0 \in R^n$  siten, että  $H(x_0, 1) = 0$ .
2. Valitaan kokonaisluku  $m > 0$  ja asetetaan parametrimuutos:  $\Delta\lambda = 1/m$ .
3. Suoritetaan kohdat 3a - 3c askelille  $i = 1, \dots, m$  :
  - 3a. Lähtöarvo:  $x_i^{(0)} = x_{i-1}$
  - 3b. Askeleen parametriarvo:  $\lambda_i = 1 - i\Delta\lambda$
  - 3c. Ratkaistaan iteratiivisesti parametriarvoa  $\lambda_i$  vastaava ratkaisu  $x_i$  yhtälöstä  $H(x_i, \lambda_i) = 0$  käyttäen lähtöarvoa  $x_i^{(0)}$ .

Jos kohdan 1 kokonaisluku  $m$  on riittävän suuri eli parametrimuutos  $\Delta\lambda$  on riittävän pieni, niin kohdan 3a lähtöarvo  $x_i^{(0)}$  on yleensä niin lähellä kohdan 3c ratkaisua  $x_i$ , että iteraatio suppenee kohti ratkaisua kaikilla askelilla  $i = 1, \dots, m$  ja viimein saavutetaan parametriarvoa  $\lambda = \lambda_m = 0$  vastaava ratkaisu  $x_m$ . Joissakin tapauksissa ratkaisun löytäminen saattaa kuitenkin vaatia hyvin pienen parametrimuutoksen  $\Delta\lambda$  eli vastaavasti hyvin suuren arvon kokonaisluvulle  $m$ . Tämä parametrivälin jakoon perustuva menetelmä ei kuitenkaan toimi, jos polulla  $c$  on ns. käännepestepiste parametrin  $\lambda$  suhteen eli parametrilla  $\lambda$  on polulla  $c$  lokaali ääriarvo.

Edellä kuvattujen upotusmenetelmien yksinkertaisen parametrivalinnan aiheuttamat heikkoudet voidaan välttää valitsemalla parametrin  $\lambda$  sijasta polulle  $c$  luonnollisempi polkuparametri kaarenpituus  $s$ . Numeerisissa tarkasteluissa kaarenpituudelle voidaan käyttää sopivaa likiarvoa eli ns. pseudokaarenpituutta. Yhtälö

$$H(c(s)) = 0 \tag{8}$$

määrää siis implisiittisesti polun  $c(s)$ , jonka polkuparametrina on nyt kaarenpituus  $s$ . Yhtälö (8) voidaan differentioida kaarenpituuden  $s$  suhteen, jolloin saadaan yhtälöt

$$H'(c)\dot{c} = 0, \tag{9}$$

$$c(0) = (x_1, 1) \text{ ja} \tag{10}$$

$$\|\dot{c}\| = 1. \tag{11}$$

Yhtälöiden (9) - (11) ratkaisuun voidaan käyttää alkuarvot tehtävien numeerisia ratkaisumenetelmiä, mutta tehokkaampia menetelmiä saadaan aikaan ottamalla huomioon, että polku  $c$  koostuu kuvauksen  $H$  nollakohdista, jolloin voidaan käyttää hyväksi kuvauksen  $H$  lokaalisti kontraktiivisia ominaisuuksia suhteessa Newton-tyyppisiin iteraatiomenetelmiin. Yhtälö (9) voidaan nimittäin integroida likimääräisesti, jolloin saadaan aikaan hyvä ratkaisueennuste, johon voidaan soveltaa Newton-tyyppistä iteraatiota. Tämä periaate on pohjana seuraavissa

luvuissa käsiteltäville ns. ennuste-korjausmenetelmille (predictor-corrector (PC) methods).

Toista polun seuraukseen käytettävää menetelmätyyppiä ovat ns. paloittain lineaariset menetelmät (piecewise linear (PL) methods), joita käsitellään vain lyhyesti luvussa 2.4. Nämä menetelmät eivät vaadi kuvauksen  $H$  sileyttä, joten niitä voidaan ainakin periaatteessa soveltaa laajemmin kuin ennuste-korjausmenetelmiä, joita pidetään kuitenkin tehokkaampina menetelminä - erityisesti silloin, kun yhtälöryhmän dimensio  $n$  on suuri.

## 2.2 Implisiittisesti määritellyt käyrät

Tämä luku perustuu viitteen [1] lukuun 2.1. Kuvauksella  $H$  oletetaan olevan seuraavat ominaisuudet:

**2.2.1 Oletus.** Kuvaus  $H : R^{n+1} \rightarrow R^n$  on sileä.

**2.2.2 Oletus.** On olemassa piste  $u_0 \in R^{n+1}$  siten, että

- (1)  $H(u_0) = 0$  ja
- (2) Jacobin matriisilla  $H'(u_0)$  on maksimaalinen rangi eli  $\text{rank}H'(u_0) = n$ .

Koska  $\dim \text{range}H'(u_0) = \text{rank}H'(u_0) = n$  ja matriisin  $H'(u_0)$  kuva-avaruus on sen pystyvektorien  $h_i, i = 1, \dots, n+1$ , viritelmä eli  $\text{range}H'(u_0) = \text{span}\{h_i\}_{i=1}^{n+1}$ , voidaan valita indeksi  $j$  siten, että  $\dim \text{range}H'_j(u_0) = \dim \text{span}\{h_i \mid i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n+1\} = n$ , missä  $H'_j(u_0)$  on siis matriisi, joka saadaan ottamalla matriisista  $H'(u_0)$   $j$ :s pystyvektori pois. Oletusten 2.2.1 ja 2.2.2 perusteella indeksi  $j$  voidaan siis valita siten, että matriisi  $H'_j(u_0)$  on ei-singulaarinen. Implisiittifunktioteoreeman mukaan ratkaisujoukko  $H^{-1}(0)$  voidaan parametrisoida lokaalisti  $j$ :nnen koordinaatin suhteen. Uudelleenparametrisoinnilla (parametrinvaihdolla) saadaan seuraava lemma:

**2.2.3 Lemma.** Jos oletukset 2.2.1 ja 2.2.2 ovat voimassa, on olemassa sileä käyrä  $c(a) \in R^{n+1}$  nollan sisältävältä avoimelta väliltä  $J$  siten, että kaikilla  $a \in J$  pätee:

- (a)  $c(0) = u_0$ ,
- (b)  $H(c(a)) = 0$ ,
- (c)  $\text{rank}H'(c(a)) = n$  ja
- (d)  $c'(a) \neq 0$ .

Polkuparametrina voidaan käyttää myös kaarenpituutta  $s$ , jolle pätee

$$ds = \left[ \sum_{i=1}^{n+1} \left( \frac{dc_i(a)}{da} \right)^2 \right]^{1/2} da, \quad (12)$$

missä  $c_i$  on  $c$ :n  $i$ :s koordinaatti. Korvaamalla parametri  $a$  kaarenpituudella  $s$  ja merkittämällä  $\dot{c}(s) = \frac{dc}{ds}$  saadaan

$$\|\dot{c}(s)\| = 1 \quad (13)$$

kaarenpituutta  $s$  vastaavalla lemman 2.2.3 mukaisella parametrivälillä. Koska laajennettu Jacobin matriisi

$$\begin{pmatrix} H'(c(s)) \\ \dot{c}(s)^* \end{pmatrix} \quad (14)$$

on ei-singulaarinen kaarenpituutta vastaavalla parametrivälillä, sen etumerkki säilyy kyseisellä välillä vakiona, joten käyrä  $c$  voidaan suunnistaa laajennetun Jacobin matriisin determinantin etumerkin mukaan. Yhteenvedona saadaan seuraava lemma:

**2.2.4 Lemma.** Jos

(1)  $c(s)$  on positiivisesti suunnistettu kaarenpituuden  $s$  mukaan parametrisoitu ratkaisukäyrä,

(2)  $c(0) = u_0$  ja

(3)  $H(c(s)) = 0$ ,

kun  $J$  on nollan sisältävä avoin väli sekä  $s \in J$ , niin silloin kaikille  $s \in J$  tangentti  $\dot{c}(s)$  toteuttaa seuraavat ehdot:

(a)  $H'(c(s))\dot{c}(s) = 0$ ,

(b)  $\|\dot{c}(s)\| = 1$  ja

(c)  $\det \begin{pmatrix} H'(c(s)) \\ \dot{c}(s)^* \end{pmatrix} > 0$ .

Ehdot (a) - (c) määräävät yksikäsitteisesti tangentin  $\dot{c}(s)$ , joten tangentille voidaan esittää seuraava määritelmä:

**2.2.5 Määritelmä.** Jos  $A$  on  $n \times (n + 1)$ -matriisi ja  $\text{rank} A = n$ , niin vektoria  $t = t(A) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , jolle pätee

(1)  $At = 0$ ,

(2)  $\|t\| = 1$  ja

(3)  $\det \begin{pmatrix} A \\ t^* \end{pmatrix} > 0$ ,

sanotaan  $A$  :n indusoimaksi tangenttivektoriksi, joka on yksikäsitteinen.

Implisiittifunktioteoreemasta seuraa myös seuraava tangenttikuvauksen sileyden takaava lemma.

**2.2.6 Lemma.** Jos  $M$  on kaikkien  $n \times (n + 1)$ -matriisien, joilla on maksimaalinen rangi, indusoimien tangenttivektoreiden joukko, niin  $M$  on avoin ja kuvaus  $A \mapsto t(A)$ ,  $A \in M$ , on sileä.

Lemman 2.2.4 mukaan ratkaisukäyrällä  $c$  on siis polkuparametrin  $s$  suhteen derivaatta  $\dot{c}(s)$ , joka on Jacobin matriisin  $H'(c(s))$  indusoima määritelmän 2.2.5 mukainen tangenttivektori. Sama asia voidaan sanoa toisin määrittelemällä käyrä  $c$  alkuarvotehtävän ratkaisuna.

**2.2.7 Alkuarvotehtävämäärittely.** Käyrä  $c$  on seuraavan alkuarvotehtävän ratkaisu:

(1)  $\dot{u} = t(H'(u))$  ja

(2)  $u(0) = u_0$ ,

missä kuvaus  $H$  toteuttaa oletukset 2.2.1 ja 2.2.2 sekä tangentti  $t$  määritelmän 2.2.5.

Yhtälön 2.2.7 (1) oikea puoli on määritelty vain niissä pisteissä  $u$ , joissa Jacobin matriisin  $H'(u)$  rangi on maksimaalinen.

**2.2.8 Määritelmä.** Jos kuvaus  $f : R^p \rightarrow R^q$  on sileä ja

- (a) jos Jacobin matriisin  $f'(x)$  rangi on maksimaalinen eli  $\text{rank} f'(x) = \min\{p, q\}$ , niin  $x \in R^p$  on  $f$  :n säännöllinen piste;
- (b) jos  $x \in R^p$  on säännöllinen piste kaikilla  $x \in f^{-1}(y)$ , niin  $y \in R^q$  on  $f$  :n säännöllinen arvo.
- (c) Jos  $x \in R^p$  ei ole  $f$  :n säännöllinen piste, se on  $f$  :n singulaarinen piste.
- (d) Jos  $y \in R^q$  ei ole  $f$  :n säännöllinen arvo, se on  $f$  :n singulaarinen arvo.

Jos  $y \notin \text{range} f$ , niin  $f^{-1}(y) = \emptyset$ , jolloin  $y$  on  $f$  :n säännöllinen arvo. Sardin teoreeman mukaan  $f$  :n säännöllisiä arvoja ovat melkein kaikki  $y \in R^q$ . Lisäksi säännöllisten pisteiden joukko on avoin.

**2.2.9 Lause (Sardin teoreema).** Jos  $U \subset R^p$  on avoin ja  $f : U \rightarrow R^q$  on  $r$  kertaa jatkuvasti derivoituva,  $r > \max\{p - q, 0\}$ , niin sekä  $f$  :n singulaaristen pisteiden että  $f$  :n singulaaristen arvojen joukon Lebesguen mitta on nolla.

**2.2.10 Lemma.** Jos kuvaus  $f : R^p \rightarrow R^q$  on sileä, niin  $f$  :n säännöllisten pisteiden joukko  $S$  on avoin.

Lemmoista 2.2.6 ja 2.2.10 nähdään nyt, että alkuarvotehtävän 2.2.7 yhtälön (1) oikea puoli  $t(H'(u))$  on sileä vektorikenttä, joka on määritelty kuvauksen  $H$  säännöllisistä pisteistä koostuvassa avoimessa joukossa. Lisäksi saadaan myös seuraava lemma:

**2.2.11 Lemma.** Jos  $u = u(s)$  on differentiaaliyhtälön  $\dot{u} = t(H'(u))$  ratkaisu, niin  $H(u(s))$  on vakio.

Koska  $u_0$  on oletuksen 2.2.2 (2) ja määritelmän 2.2.8 (a) mukaan kuvauksen  $H$  säännöllinen piste, niin klassisten olemassaolo- ja yksikäsitteisyystulosten perusteella alkuarvotehtävän 2.2.7 ratkaisun  $c(s)$  olemassaololle on olemassa maksimaalinen väli  $(a, b)$ , missä  $a, b \in R$ . Käyrä  $c(s)$  voidaan siis määritellä kyseiseksi maksimaaliseksi ratkaisuksi. Oletuksen 2.2.2 (1) ja alkuarvotehtävämäärittelyn 2.2.7 (2) mukaan  $H(c(0)) = H(u_0) = 0$ . Seuraavan lemmän mukaan kaikki ratkaisukäyrän  $c(s)$  pisteet ovat kuvauksen  $H$  säännöllisiä nollakohtia.

**2.2.12 Lemma.** Olkoon käyrä  $c(s)$  alkuarvotehtävän 2.2.7 maksimaalinen ratkaisu.

- (a) Jos  $-\infty < a$ , niin
  - (i) käyrä  $c(s)$  suppenee rajapisteeseen  $\tilde{u}$ , kun  $s \rightarrow a$  ja  $s > a$  ja lisäksi
  - (ii)  $\tilde{u}$  on  $H$  :n singulaarinen nollakohta.
- (b) Jos vastaavasti  $b < \infty$ , niin
  - (i) käyrä  $c(s)$  suppenee rajapisteeseen  $\tilde{u}$ , kun  $s \rightarrow b$  ja  $s < b$  ja lisäksi
  - (ii)  $\tilde{u}$  on  $H$  :n singulaarinen nollakohta.

Ilman oletusta 2.2.2 (2) ratkaisukäyrällä  $c(s)$  saattaisi esiintyä ns. bifurkaatio- eli haarautu-



mis pisteitä, jotka ovat kuvauksen  $H$  singulaarisia pisteitä, mutta näitä pisteitä ei käsitellä tässä työssä. Edellisen lemmän avulla saadaan ratkaisukäyrän käyttäytymistä kuvaava ja ratkaisukäyrän seuraamisen kannalta oleellinen tulos:

**2.2.13 Lause.** Jos nolla on kuvauksen  $H$  säännöllinen arvo, niin alkuarvottehtävän 2.2.7 maksimaalinen ratkaisu  $c$  on määritelty koko  $R$  :ssä ja toteuttaa toisen seuraavista ehdoista:

(1) Käyrä  $c$  on diffeomorfinen ympyrän kanssa eli on olemassa jakso  $T > 0$  siten, että  $c(s_1) = c(s_2)$ , jos ja vain jos  $s_1 - s_2$  on  $T$  :n monikerta.

(2) Käyrä  $c$  on diffeomorfinen reaaliakselin kanssa eli käyrä  $c(s)$  on injektio ja sillä ei ole kasautumispistettä, kun  $s \rightarrow \pm\infty$ .

### 2.3 Ennuste-korjausmenetelmien (PC methods) perusidea

Tämä luku perustuu viitteen [1] lukuun 2.2. Ennuste-korjausmenetelmillä on tarkoitus seurata likimääräisesti luvussa 2.2 käsiteltyä käyrää  $c$  lähtien alkupisteestä  $u_0 \in R^{n+1}$ , joka on kuvauksen  $H$  säännöllinen piste ja jolle pätee  $H(u_0) = 0$ . Käyrää seurataan muodostamalla jono pisteitä  $u_i \in R^{n+1}$ ,  $i = 1, \dots$ , jotka ovat halutun tarkkuuden rajoissa kyseisellä käyrällä eli toteuttavat ehdon  $\|H(u_i)\| \leq \epsilon$  valitulla  $\epsilon > 0$ .

Oletetaan, että on valittu  $\epsilon > 0$  ja piste  $u_i \in R^{n+1}$  on halutulla tarkkuudella käyrällä  $c$  eli  $\|H(u_i)\| \leq \epsilon$ . Jos  $u_i$  on kuvauksen  $H$  säännöllinen piste, luvun 2.2 tulosten mukaan alkuarvottehtävällä 2.2.7 on olemassa alkuarvolla  $u_i$  maksimaalisella ratkaisuvälillään  $J$  määritelty yksikäsitteinen ratkaisukäyrä  $c_i : J \rightarrow R^{n+1}$ . Siis alkuarvottehtävällä

$$\dot{u} = t(H'(u)) \text{ ja} \tag{15}$$

$$u(0) = u_i \tag{16}$$

on yksikäsitteinen maksimaalinen ratkaisu  $c_i$ . Seuraavaa pistettä  $u_{i+1}$  varten saadaan ennuste integroimalla yhtälöt (15) ja (16) numeerisesti. Esimerkiksi ns. Eulerin ennuste on muotoa

$$v_{i+1} = u_i + ht(H'(u_i)), \tag{17}$$

missä  $h > 0$  on ns. askelpituus. Jos  $w_{i+1}$  on käyrän  $c$  piste, joka on Euklidisen normin suhteen lähinnä ennustetta  $v_{i+1}$ , se on ratkaisu minimointiongelmalle

$$\|w_{i+1} - v_{i+1}\| = \min\{\|w - v_{i+1}\| \mid H(w) = 0\}. \tag{18}$$

Jos piste  $u_i$  on riittävän lähellä käyrää  $c$  ja askelpituus  $h$  on riittävän pieni, niin myös ennuste  $v_{i+1}$  on lähellä käyrää  $c$  ja minimointiongelman ratkaisu  $w_{i+1}$  on yksikäsitteinen. Ratkaisulle  $w_{i+1}$  haetaan kuitenkin ainoastaan likiarvo, joka hyväksytään seuraavaksi käyrän  $c$  pistettä  $w_{i+1}$  approksimoivaksi pisteeksi  $u_{i+1}$ , jos  $\|H(u_{i+1})\| \leq \epsilon$ . Likiarvo  $u_{i+1}$  haetaan korjaamalla Newton-tyyppisellä iteroinnilla ennustetta  $v_{i+1}$ .

Käyrän  $c$  likimääräinen seuraaminen tapahtuu siis vuorotellen toistuvilla ennuste- ja korjausvaiheilla. Ennuste-korjausmenetelmien tehokkuus riippuu mm. seuraavista tekijöistä:

- (1) Askelpituuden mukauttaminen ratkaisukäyrän käyttäytymisen suhteen.
- (2) Eulerin ennustetta korkeampiasteisten ennusteiden käyttö.
- (3) Korjausvaiheen Newton-tyyppisten iterointimenetelmien tehokkuus.
- (4) Erikoispisteiden kuten käänne- ja bifurkaatiopisteiden käsittely.

Tässä työssä käsitellään korjausvaiheen tehokkuuteen ratkaisevasti vaikuttavaa kohtaa (3) ja kohdan (4) käännepisteitä (luvut 2.1, 2.2 ja 2.5 sekä luku 3). Kohtia (1) ja (2) sekä kohdan (4) bifurkaatiopisteitä ei käsitellä erityisemmin tässä työssä.

## 2.4 Paloittain lineaaristen menetelmien (PL methods) perusidea

Tämä luku perustuu viitteen [1] lukuun 2.3. Kun edellisen luvun 2.3 ennuste-korjausmenetelmillä seurataan likimääräisesti luvussa 2.2 käsiteltyä tarkkaa ratkaisua  $c$ , niin paloittain lineaarisilla menetelmillä seurataan tarkasti paloittain lineaarista käyrää  $c_\tau$ , joka approksimoi käyrää  $c$ . Käyrä  $c_\tau$  on monikulmiopolku, joka määräytyy alla määriteltävän  $R^{n+1}$  :n kolmion  $\tau$  suhteen.

**2.4.1 Määritelmä.** Olkoon  $v_1, \dots, v_{j+1} \in R^{n+1}$ ,  $j \leq n+1$ , affiinisti riippumattomia eli olkoot  $v_k - v_1$ ,  $k = 2, \dots, j+1$ , lineaarisesti riippumattomia. Konvekssi verho  $(v_1, \dots, v_{j+1}) = \text{co}\{v_1, \dots, v_{j+1}\}$  on  $R^{n+1}$  :n  $j$ -simpleksi, jonka kulmat ovat  $v_1, \dots, v_{j+1}$ . Joukon  $\{w_1, \dots, w_{r+1}\} \subset \{v_1, \dots, v_{j+1}\}$  konvekssi verho  $(w_1, \dots, w_{r+1})$  on konvekssin verhon  $(v_1, \dots, v_{j+1})$   $r$ -tahko.

**2.4.2 Määritelmä.**  $R^{n+1}$  :n kolmiointi  $\tau$  on  $R^{n+1}$  :n osajako  $n+1$  :een simpleksiin siten, että

- (1) kaksi  $\tau$  :n simpleksiä leikkaavat joko yhteisessä tahkossa tai eivät leikkaa lainkaan ja
- (2)  $R^{n+1}$  :n rajoitettu joukko leikkaa vain äärellisen monta  $T$  :n simpleksiä.

**2.4.3 Määritelmä.** Kuvauksen  $H : R^{n+1} \rightarrow R^n$  paloittain lineaarinen approksimaatio  $H_\tau$  määrittelyjoukon  $R^{n+1}$  kolmion  $\tau$  suhteen on seuraavien ehtojen yksikäsitteisesti määräämä kuvaus:

- (1)  $H_\tau(v) = H(v)$  kaikissa  $\tau$  :n kulmissa
- (2)  $H_\tau|_\sigma$  eli kuvauksen  $H_\tau$  rajoittuma simpleksiin  $\sigma = (v_1, \dots, v_{n+2}) \in \tau$  on affinikuvaus eli  $H_\tau|_\sigma - H_\tau|_\sigma(0)$  on lineaarikuvaus.

Jos  $u = \sum_{i=1}^{n+2} a_i v_i \in \sigma$ , sen painopistekoordinaatit  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n+2$ , toteuttavat ehdot  $\sum_{i=1}^{n+2} a_i = 1$  ja  $a_i \geq 0$ . Koska  $H_\tau$  on affinikuvaus, niin

$$H_\tau(u) = \sum_{i=1}^{n+2} a_i H(v_i). \quad (19)$$

Joukko  $H_\tau^{-1}(0)$  sisältää monikulmiopolun  $c_\tau : R \rightarrow R^{n+1}$ , joka approksimoi käyrää  $c$ . Paloittain lineaarisilla menetelmillä polkua  $c_\tau$  seurataan lineaarisen ohjelmoinnin kuten simplexmenetelmien kaltaisilla askelilla. Paloittain lineaaristen menetelmien etuna on se, ettei kuvauksen  $H$  tarvitse olla sileä. Ennuste-korjausmenetelmiä ja paloittain lineaarisia menetelmiä voidaan myös yhdistää esimerkiksi käyttämällä ennuste-korjausmenetelmien ennusteena

paloittain lineaarisen polun  $c_\tau$  pisteitä.

## 2.5 Moore-Penrose-käännös Newton-iteraatiossa

Tämä luku perustuu viitteen [1] lukuihin 3.1, 3.2 ja 3.3. Luvun 2.3 perusteella ennuste-korjausmenetelmät voidaan esittää seuraavan algoritmin muodossa:

### 2.5.1 Algoritmi ennuste-korjausmenetelmille.

1. Valitaan lähtöpiste  $u \in R^{n+1}$  siten, että  $H(u) = 0$ .
2. Valitaan askelpituus  $h > 0$ .
3. Tehdään ennuste seuraavaksi pisteeksi  $v \in R^{n+1}$  siten, että  $H(v) \approx 0$  ja  $\|u - v\| \approx h$ .
4. Korjataan iteratiivisesti ennustetta  $v \in R^{n+1}$  etsimällä likimääräinen ratkaisu  $w \in R^{n+1}$  minimointitehtävälle

$$\min_{w \in R^{n+1}} \{\|w - v\| \mid H(w) = 0\}. \quad (20)$$

5. Asetetaan minimointitehtävän likimääräinen ratkaisu  $w$  uudeksi lähtöpisteeksi  $u$  ja palataan kohtaan 3.

Jos kuvaus  $H$  algoritmin 2.5.1 kohdassa 4 olisi kuvaus avaruudelta  $R^n$  itselleen, minimointitehtävän likimääräistä ratkaisua voitaisiin etsiä luvun 1 yhtälön (2) mukaisella Newton-iteraatiolla. Koska  $H : R^{n+1} \rightarrow R^n$ , Jacobin matriisi  $H'$  ei ole neliömatriisi eikä siis myöskään kääntyvä, joten Newton-iteraatiota ei voida sellaisenaan käyttää. Koska derivaatalla  $H'$  on kuitenkin oletuksen 2.2.2 mukaan maksimaalinen rangi  $n$ , voidaan Newton-iteraatiota modifioida käyttämällä ns. Moore-Penrose-käännöstä. Moore-Penrose-käännös voidaan määritellä yleisemmin  $n \times m$ -matriiseille, joilla on maksimaalinen rangi, mutta tässä tapauksessa käsitellään vain maksimaalisen rangin omaavia  $n \times (n + 1)$ -matriiseja.

**2.5.2 Määritelmä.** Jos  $A$  on  $n \times (n + 1)$ -matriisi, jolla on maksimaalinen rangi eli  $\text{rank} A = n$ , niin  $A$  :n Moore-Penrose-käännös  $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ .

**2.5.3 Lemma.** Jos  $A$  on  $n \times (n + 1)$ -matriisi, jolla on maksimaalinen rangi, ja  $t(A)$  sen indusoima tangenttivektori, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä kaikilla  $b \in R^n$  ja  $x \in R^{n+1}$

- (1)  $Ax = b$  ja  $t(A)^*x = 0$ ,
- (2)  $x = A^+b$  ja
- (3)  $x$  on ratkaisu minimointitehtävälle  $\min_{w \in R^{n+1}} \{\|w\| \mid Aw = b\}$ .

**2.5.4 Lemma.** Jos  $A$  on  $n \times (n + 1)$ -matriisi, jolla on maksimaalinen rangi, niin

- (1)  $A^+A$  on ortogonaaliprojektio avaruudelta  $R^{n+1}$  avaruudelle  $\{t(A)\}^\perp = \text{range} A^*$  eli  $A^+A = I - t(A)t(A)^*$ ,
- (2)  $AA^+ = I$  ja
- (3) jos  $B$  on  $A$  :n oikeanpuoleinen käännös eli  $AB = I$ , niin  $A^+ = (I - tt^*)B$ .

Välttämätön ehto minimointitehtävän (20) ratkaisulle saadaan Lagrangen kertoimia käyt-

tämällä: Jos  $w \in R^{n+1}$  on algoritmin 2.5.1 kohdan 4 minimointitehtävän

$$\min_{w \in R^{n+1}} \{\|w - v\| \mid H(w) = 0\} \quad (21)$$

ratkaisu, se toteuttaa Lagrangen yhtälöt

$$H(w) = 0 \text{ ja} \quad (22)$$

$$w - v = H'(w)^* \lambda, \quad (23)$$

missä  $\lambda \in R^{n+1}$ . Jälkimmäinen yhtälö on yhtäpitävä sen kanssa, että  $w - v \in \text{range} H'(w)^* = \{t(H'(w))\}^\perp$ , joten ratkaisun  $w$  on toteutettava yhtälöt

$$H(w) = 0 \text{ ja} \quad (24)$$

$$t(H'(w))^*(w - v) = 0. \quad (25)$$

Newtonin menetelmässä yhtälöt (24) ja (25) linearisoidaan pisteessä  $v$  eli muodostetaan Taylorin kehitelmät pisteessä  $v$ :

$$H(w) = H(v) + H'(v)(w - v) + O(\|w - v\|^2) \text{ ja} \quad (26)$$

$$t(H'(w))^*(w - v) = t(H'(v))^*(w - v) + O(\|w - v\|^2), \quad (27)$$

joista poistetaan Landaun symbolilla  $O$  merkityt korkean asteen termit. Näin saadaan likiarvo  $N(v)$  yhtälöiden (24) ja (25) ratkaisulle  $w$ . Likiarvoratkaisu  $N(v)$  toteuttaa siis yhtälöt

$$H(v) + H'(v)(N(v) - v) = 0 \text{ ja} \quad (28)$$

$$t(H'(v))^*(N(v) - v) = 0. \quad (29)$$

Lemman 2.5.3 avulla saadaan seuraava määritelmä:

**2.5.5 Määritelmä.** Jos  $v \in R^{n+1}$  on kuvauksen  $H : R^{n+1} \rightarrow R^n$  säännöllinen piste, niin minimointitehtävän (20) ratkaisun likiarvo eli Newtonin piste

$$N(v) = v - H'(v)^+ H(v). \quad (30)$$

Kuvauksen  $H$  säännöllisille pisteille näin määriteltyä kuvausta  $N : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$  sanotaan Newtonin kuvaukseksi.

Vertaamalla määritelmän 2.5.5 Newtonin kuvausta luvun 1 Newtonin iteraatioon (2), huomataan, että ainoa muodollinen ero on tavallisen käänteismatriisin korvaaminen Moore-Penrose-käännöksellä. Algoritmia 2.5.1 voidaan nyt tarkentaa kohtien 3 ja 4 osalta käyttämällä luvun 2.3 yhtälön (17) mukaista Eulerin ennustetta ja Newtonin kuvauksen määrittelemää korjausta.

**2.5.6 Algoritmi Euler-Newton-tyyppiselle ennuste-korjausmenetelmälle.**

1. Valitaan lähtöpiste  $u \in R^{n+1}$  siten, että  $H(u) = 0$ .
2. Valitaan askelpituus  $h > 0$ .
3. Tehdään ennuste seuraavaksi pisteeksi  $v \in R^{n+1}$  käyttämällä Eulerin ennustetta  $v = u + ht(H'(u))$ .

4. Korjataan iteratiivisesti ennustetta  $v \in R^{n+1}$  etsimällä likimääräinen ratkaisu  $w \in R^{n+1}$  minimointitehtävälle

$$\min_{w \in R^{n+1}} \{ \|w - v\| \mid H(w) = 0 \} \quad (31)$$

- 4a. korjaamalla ennustetta  $v$  Newtonin kuvauksella  $N : w = N(v) = v - H'(v)^+ H(v)$  ja  
4b. asettamalla näin saatu likiarvoratkaisu korjatuksi ennusteeksi  $v = w$  sekä palaamalla kohtaan 4a, kunnes  $H(w) \approx 0$ .  
5. Asetetaan minimointitehtävän likimääräinen ratkaisu  $w$  uudeksi lähtöpisteeksi  $u$  ja palataan kohtaan 3.

Algoritmin 2.5.6 korjausvaiheen iteraatiokuvauksena voidaan käyttää myös ns. modifioitua Newtonin kuvausta, jossa kohdan 4a käänös  $H'(v)^+$  päivitetään vain jokaisen askeleen alussa. Algoritmin kohdassa 2 valittava askelpituus  $h$  riippuu luonnollisesti jollakin tavalla tarkkuudesta, jolla ratkaisukäyrää halutaan seurata, mutta askelpituudelle voidaan esittää myös tarkempia arvioita. Askelpituus voidaan päivittää esimerkiksi Newton-korjausvaiheen kontraktiosuhteeseen perustuvalla asympotoottisella strategialla tai Newton-korjausvaiheen virhemalliin perustuvalla strategialla, jota voidaan soveltaa edellistä laajemmin. Molemmilla malleilla päivitetään Eulerin ennustetta, joka on ensimmäisen asteen ennuste. Myös korkeampiasteisille ennusteille, jotka voivat perustua esimerkiksi polynomi-interpolaatioon, on kehitetty erilaisia päivitysmenetelmiä. Näitä aihepiirejä on käsitelty viitteen [1] luvussa 6.

### 3 Ennuste-korjausmenetelmät rakenteiden mekaniikassa

Seuraavissa luvuissa käsitellään ennuste-korjausmenetelmien soveltamista rakenteiden mekaniikan tehtäviin. Tämä luku perustuu pääasiassa viitteeseen [6]. Muut viitteet on mainittu erikseen asiayhteydessään.

#### 3.1 Tasapainoyhtälö ja Newton-Raphson-menetelmä

Rakenteiden mekaniikassa tehtävät saatetaan äärellisulotteisiksi usein elementtimenetelmän avulla, jolloin päädytään rakenteen ulkoisen kuorman  $p : R^{n+1} \mapsto R^n$  ja sisäisen voiman  $r : R^n \mapsto R^n$  väliseen tasapainoyhtälöön

$$p(u, \lambda) = r(u), \quad (32)$$

missä  $u \in R^n$  on rakenteen siirtymä ja  $\lambda \in R$  kuormakerroin. Jos ulkoinen kuorma  $p$  on riippumaton siirtymästä  $u$  ja kuormakertoimella  $\lambda$  suoraan verrannollinen referenssikuormaan  $p_{ref} \in R^n$ , niin tasapainoyhtälö (32) voidaan esittää muodossa

$$f(u, \lambda) = \lambda p_{ref} - r(u) = 0, \quad (33)$$

missä  $f : R^{n+1} \mapsto R^n$  on elementtimenetelmän tapauksessa ainakin kerran derivoituva kuvaus. Luvussa 1 mainittua Newton-iteraatiota voidaan käyttää luvun 2.1 upotusmenetelmien yhteydessä, jolloin saadaan ratkaisumenetelmä, josta käytetään usein nimitystä Newton-Raphson-menetelmä. Linearisoimalla yhtälö (33) pisteessä  $(u_j, \lambda_j)$  saadaan

$$f(u_j, \lambda_j) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_j, \lambda_j)\delta u + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(u_j, \lambda_j)\delta \lambda = 0, \quad (34)$$

missä  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(u_j, \lambda_j) = p_{ref}$ ,  $f(u_j, \lambda_j) = \lambda_j p_{ref} - r(u_j)$  ja ns. jäykkyyssmatriisi  $K \doteq -\frac{\partial f}{\partial u}$ . Nyt  $-\frac{\partial f}{\partial u}(u_j, \lambda_j) = \frac{\partial r}{\partial u}(u_j)$ , joten

$$f(u_j, \lambda_j) - K(u_j)\delta u + p_{ref}\delta \lambda = 0. \quad (35)$$

Koska  $f(u_j, \lambda_j) = \lambda_j p_{ref} - r(u_j)$ , saadaan vielä rakenteiden mekaniikassa usein esiintyvä muoto

$$K(u_j)\delta u = (\lambda_j + \delta \lambda)p_{ref} - r(u_j). \quad (36)$$

Kuormittamattomassa rakenteessa eli tapauksessa  $\lambda = 0$  voidaan asettaa  $u = 0$  ja  $f(0, 0) = 0$ , joten hiukan muuttamalla ja tarkentamalla algoritmia 2.1.1 saadaan Newton-Raphson-menetelmän algoritmi.

##### 3.1.1 Algoritmi Newton-Raphson-menetelmälle.

1. Valitaan kokonaisluku  $m > 0$  ja lähtöpiste  $u_0 \in R^n$  siten, että  $f(u_0, 0) = 0$ ; usein  $u_0 = 0$ .
2. Asetetaan parametrimuutos:  $\Delta \lambda = 1/m$ , jolloin  $\lambda_i = i\Delta \lambda$ .
3. Suoritetaan kohdat 3a - 3c askelille  $i = 1, \dots, m$ :
  - 3a. Siirtymän lähtöarvo:  $u = u_{i-1}$
  - 3b. Askeleen parametriarvo:  $\lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta \lambda$
  - 3c. Ratkaistaan iteratiivisesti parametriarvoa  $\lambda_i$  vastaava siirtymä  $u_i$  yhtälöstä  $f(u_i, \lambda_i) = 0$

käyttäen siirtymälle lähtöarvoa  $u$  :

3c.0. Alustus:  $k = 0, u^{(0)} = u$ .

3c.1. Uusi iteraatiokierros:  $k = k + 1$ .

3c.2. Siirtymän muutos:  $\delta u^{(k)} = K(u^{(k-1)})^{-1}((\lambda_{i-1} + \Delta\lambda)p_{ref} - r(u^{(k-1)}))$ .

3c.3. Iteraatiokierroksen siirtymä:  $u^{(k)} = u^{(k-1)} + \delta u^{(k)}$ .

3c.4. Palataan kohtaan 3c.1, kunnes  $f(u^{(k)}, \lambda_i) = (\lambda_{i-1} + \Delta\lambda)p_{ref} - r(u^{(k)}) \approx 0$ , jolloin asetetaan  $u_i = u^{(k)}$ .

Kun  $k = 1$  algoritmin 3.1.1 kohdassa 3c.2, niin saadaan ennuste

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(0)} + K(u^{(0)})^{-1}((\lambda_{i-1} + \Delta\lambda)p_{ref} - r(u^{(0)})) \\ &= u^{(0)} + \Delta\lambda K(u^{(0)})^{-1}p_{ref}, \end{aligned} \quad (37)$$

jota voidaan pitää algoritmin 2.5.6 mukaisena Eulerin ennusteena askelpituudella  $\Delta\lambda$ . Kun  $k > 1$ , niin saadaan korjattu ennuste

$$u^{(k)} = u^{(k-1)} + K(u^{(k-1)})^{-1}((\lambda_{i-1} + \Delta\lambda)p_{ref} - r(u^{(k-1)})). \quad (38)$$

Newton-Raphson-menetelmä on siis Euler-Newton-tyyppinen ennuste-korjausmenetelmä, mutta klassista upotusmenetelmää vastaavan parametrivalinnan takia kuitenkin yksinkertaisempi kuin esimerkiksi algoritmin 2.5.6 Moore-Penrose-käännöksen sisältävä menetelmä. Jos Newton-Raphson-algoritmin kohdassa 3c.2 käytetään jäykkyysmatriisin  $K(u^{(k-1)})$  tilalla kyseisen askeleen alun jäykkyysmatriisia  $K(u^{(0)})$ , saadaan ns. modifioitu Newton-Raphson-menetelmä.

Jos algoritmin 3.1.1 kohdan 2 parametrimuutos  $\Delta\lambda$  on riittävän pieni, kohdan 3a siirtymän lähtöarvo on niin lähellä kohdan 3c siirtymää, että iteraatio suppenee kohti ratkaisua kaikilla askelilla  $i = 1, \dots, m$  ja viimein saavutetaan parametriarvoa  $\lambda_m = 1$  vastaava siirtymä  $u_m$ . Jos ratkaisukäyrällä  $f^{-1}(0)$  on raja- eli käänne piste parametrin  $\lambda$  suhteen, niin iteraatio hajaantuu jollakin  $i = i_{cr} < m$  ja ratkaisukäyrän seuraaminen keskeytyy. Käänne pisteessä jäykkyysmatriisi  $K$  on singulaarinen.

### 3.2 Kaarenpituusmenetelmien rajoiteyhtälöt ja ositustekniikka

Käänne piste voidaan ohittaa ns. kaarenpituusmenetelmillä, joissa ratkaisukäyrän seuraamista ei kontrolloida ainoastaan parametrin  $\lambda$  suhteen vaan myös siirtymän  $u$  suhteen käyttämällä ratkaisukäyrän parametrina kaarenpituutta  $a$ . Kaarenpituuden muutosta  $\Delta a$  vastaavat ennusteaskeleen siirtymämuutos  $\delta u^{(1)}$  ja kuormakerroinmuutos  $\Delta\lambda^{(1)}$  määräytyvät yhtälöstä

$$\|\delta u^{(1)}\|^2 + \Delta\lambda^{(1)2} = \Delta a^2, \quad (39)$$

missä on käytetty Newton-Raphson-algoritmin 3.1.1 merkintää  $\delta u^{(1)} = \Delta\lambda^{(1)}K(u^{(0)})^{-1}p_{ref}$ . Ennusteaskeleen kuormakerroinmuutokseksi saadaan siis

$$\Delta\lambda^{(1)} = \sigma \frac{\Delta a}{\sqrt{1 + \|K(u^{(0)})^{-1}p_{ref}\|^2}}, \quad (40)$$

missä etumerkki  $\sigma$  voidaan valita esimerkiksi ns. Berganin jäykkyyssparametrin etumerkin mukaan [2]:

$$\sigma = \text{sign} \frac{(K(u_1^{(0)})^{-1} p_{ref}) \cdot p_{ref}}{(K(u_i^{(0)})^{-1} p_{ref}) \cdot p_{ref}}. \quad (41)$$

Kaarenpituuden muutoksen  $\Delta a$  päivittämiseen käytetään usein luvussa 2.5 mainittuja askelpituudenmukauttamismenetelmiä tai niiden johdannaisia.

Korjausvaihetta ajatellen kaarenpituuteen perustuva uudelleenparametrisointi voidaan esittää lisäämällä tasapainoyhtälön (33) rinnalle ns. rajoiteyhtälö

$$c(u, \lambda) = 0, \quad (42)$$

missä  $c : R^{n+1} \mapsto R$ . Linearisoimalla rajoiteyhtälö (42) pisteessä  $(u_j, \lambda_j)$  saadaan

$$c(u_j, \lambda_j) + \frac{\partial c}{\partial u}(u_j, \lambda_j) \cdot \delta u + \frac{\partial c}{\partial \lambda}(u_j, \lambda_j) \delta \lambda = 0. \quad (43)$$

Jos merkitään  $c_j = c(u_j, \lambda_j)$ ,  $c'_j = \frac{\partial c}{\partial u}(u_j, \lambda_j)$ ,  $\dot{c}_j = \frac{\partial c}{\partial \lambda}(u_j, \lambda_j)$ , linearisoitu rajoiteyhtälö (43) tulee muotoon

$$c_j + c'_j \cdot \delta u + \dot{c}_j \delta \lambda = 0. \quad (44)$$

Useissa tapauksissa jäykkyyssmatriisi  $K$  on symmetrinen ja nauhamainen, joten yhtälöparia

$$g(u, \lambda) = \begin{pmatrix} f(u_j, \lambda_j) - K(u_j) \delta u + p_{ref} \delta \lambda \\ c_j + c'_j \cdot \delta u + \dot{c}_j \delta \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (45)$$

missä  $g : R^{n+1} \mapsto R^{n+1}$ , ei kannata ratkaista suoraviivaisesti vaan ns. ositustekniikalla, jolloin jäykkyyssmatriisin erityisrakennetta voidaan käyttää hyväksi: Annettua kaarenpituuden muutosta  $\Delta a$  vastaava siirtymälisäys  $\delta u$  jaetaan kuormitusta ja epätasapainoa vastaaviin osiin, jolloin

$$\delta u = \delta u_f + \delta \lambda \delta u_p, \quad (46)$$

missä  $\delta u_f$ ,  $\delta \lambda$  ja  $\delta u_p$  ratkaistaan yhtälöistä

$$K(u_j) \delta u_{fj} = f(u_j, \lambda_j) = \lambda_j p_{ref} - r(u_j) \quad (47)$$

$$K(u_j) \delta u_{pj} = p_{ref} \quad (48)$$

$$\delta \lambda (\dot{c}_j + c'_j \cdot \delta u_{pj}) = -(c_j + c'_j \cdot \delta u_{fj}). \quad (49)$$

Useissa tapauksissa linearisoitu rajoiteyhtälö (44) voidaan esittää muodossa

$$t_j \cdot n_j - e_j = 0, \quad (50)$$

missä  $t_j, n_j \in R^{n+1}$  ja  $e_j \in R$ . Vektorit  $t_j$  ja  $n_j$  sekä vakio  $e_j$  on lueteltu eri rajoiteyhtälöille liitteessä A. Kaarenpituusmenetelmien ero Newton-Raphson-menetelmään ja luvun 2.5 ennuste-korjausmenetelmään nähdään vertaamalla seuraavaa algoritmia Newton-Raphson-algoritmiin 3.1.1 ja Moore-Penrose-käännöksen sisältävään algoritmiin 2.5.6.



### 3.2.1 Algoritmi kaarenpituusmenetelmille.

1. Valitaan lähtöpiste  $u_0 \in R^n$  siten, että  $f(u_0, 0) = 0$ ; usein  $u_0 = 0$ .

2. Valitaan kaarenpituuden muutos  $\Delta a > 0$ , jolloin  $a_0 = 0$  ja  $a_i = a_{i-1} + \Delta a$ .

3. Suoritetaan kohdat 3a - 3c askelille  $i = 1, 2, \dots$  :

3a ja 3b. Lähtöpiste:  $(u, \lambda) = (u_{i-1}, \lambda_{i-1})$ .

3c. Ratkaistaan iteratiivisesti kaarenpituuden muutosta  $\Delta a$  vastaava ratkaisupiste  $(u_i, \lambda_i)$  yhtälöparista  $f(u_i, \lambda_i) = 0$  ja  $c(u_i, \lambda_i) = 0$  käyttäen kohdan 3a ja 3b lähtöpistettä  $(u, \lambda)$  :

3c.0. Alustus:  $k = 0, (u^{(0)}, \lambda^{(0)}) = (u, \lambda)$

3c.1. Uusi iteraatiokierros:  $k = k + 1$

3c.2. Siirtymän ja kuormakertoimen muutokset:

Kuormakerroinmuutos, ennuste ( $k = 1$ ):

$$\delta u_f^{(1)} = 0 \quad (51)$$

$$\delta u_p^{(1)} = K(u^{(0)})^{-1} p_{ref} \quad (52)$$

$$\delta \lambda^{(1)} = \Delta a_i \sqrt{1 + \|\delta u_p^{(1)}\|^2} \quad (53)$$

Kuormakerroinmuutos, korjaus ( $k > 1$ ) , liite B:

$$\delta u_f^{(k)} = K(u^{(k-1)})^{-1} (\lambda^{(k-1)} p_{ref} - r(u^{(k-1)})) \quad (54)$$

$$\delta u_p^{(k)} = K(u^{(k-1)})^{-1} p_{ref} \quad (55)$$

$$\delta \lambda^{(k)} = \frac{c^{(k-1)} + c'^{(k-1)} \cdot \delta u_f^{(k)}}{c^{(k-1)} + c'^{(k-1)} \cdot \delta u_p^{(k)}} \quad (56)$$

Siirtymämuutos:

$$\delta u^{(k)} = \delta u_f^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta u_p^{(k)} \quad (57)$$

3c.3. Iteraatiokierroksen kuormakerroin- ja siirtymäarvot:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)} \quad (58)$$

$$\Delta \lambda^{(k)} = \lambda^{(k)} - \lambda_{i-1} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)} \quad (59)$$

$$u^{(k)} = u^{(k-1)} + \delta u^{(k)} \quad (60)$$

$$\Delta u^{(k)} = u^{(k)} - u_{i-1} = \Delta u^{(k-1)} + \delta u^{(k)} \quad (61)$$

3c.4. Palataan kohtaan 3c.1 kunnes  $f(u^{(k)}, \lambda^{(k)}) \approx 0$ , jolloin asetetaan  $u_i = u^{(k)}$  ja  $\lambda_i = \lambda^{(k)}$ .

Algoritmin kohtaa 3c.2 voidaan luonnollisesti modifioida käyttämällä jäykkyysmatriisin  $K(u^{(k-1)})$  tilalla kyseisen askeleen alun jäykkyysmatriisia  $K(u^{(0)})$ . Jos algoritmin kohdassa 3c.2 asetetaan  $\delta \lambda^{(1)} = \Delta \lambda$  ja  $\delta \lambda^{(k)} = 0$  kaikilla  $k > 1$ , kaarenpituusmenetelmien algoritmista saadaan Newton-Raphson-menetelmän algoritmi. Newton-Raphson-menetelmää voidaan itse asiassa pitää kaarenpituusmenetelmänä rajoitekuvauksella  $c(u, \lambda) = \lambda_i - \lambda$ .

Liitteen C kuvassa 1 on esitetty esimerkit ratkaisun kulusta eri rajoiteyhtälöillä tapauksessa  $n = 1$ .

## A Rajoiteyhtälöiden rajoitevektorit

Normaalitaso [8]:

$$\begin{aligned}t^{(k)} &= \begin{pmatrix} \Delta u^{(1)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \\n^{(k)} &= \begin{pmatrix} \delta u^{(k)} \\ \delta \lambda^{(k)} \end{pmatrix} \\e^{(k)} &= 0\end{aligned}\tag{62}$$

Päivitetty normaalitaso [7]:

$$\begin{aligned}t^{(k)} &= \begin{pmatrix} \Delta u^{(k-1)} \\ \Delta \lambda^{(k-1)} \end{pmatrix} \\n^{(k)} &= \begin{pmatrix} \delta u^{(k)} \\ \delta \lambda^{(k)} \end{pmatrix} \\e^{(k)} &= 0\end{aligned}\tag{63}$$

Ortogonaali trajektorit [4]:

$$\begin{aligned}t^{(k)} &= \begin{pmatrix} \delta u_p^{(k)} \\ 1 \end{pmatrix} \\n^{(k)} &= \begin{pmatrix} \delta u^{(k)} \\ \delta \lambda^{(k)} \end{pmatrix} \\e^{(k)} &= 0\end{aligned}\tag{64}$$

Konsistentti linearisointi [9]:

$$\begin{aligned}t^{(k)} &= \begin{pmatrix} \Delta u^{(k-1)} \\ \Delta \lambda^{(k-1)} \end{pmatrix} \\n^{(k)} &= \begin{pmatrix} \delta u^{(k)} \\ \delta \lambda^{(k)} \end{pmatrix} \\e^{(k)} &= t^{(k)} \cdot t^{(k)} (t^{(k)} \cdot t^{(k)} - \Delta a)\end{aligned}\tag{65}$$

Elliptinen [3]:

$$\begin{aligned}t^{(k)} &= \begin{pmatrix} \Delta u^k \\ \Delta \lambda^k \end{pmatrix} \\n^{(k)} &= \begin{pmatrix} \Delta u^k \\ \Delta \lambda^k \end{pmatrix} \\e^{(k)} &= \Delta a^2\end{aligned}\tag{66}$$

Elliptinen kahdessa vaiheessa [5]:

$$\begin{aligned}
 t^{(Ik)} &= \begin{pmatrix} \Delta u^{(k-1)} \\ \Delta \lambda^{(k-1)} \end{pmatrix} \\
 n^{(Ik)} &= \begin{pmatrix} \delta u^{(Ik)} \\ \delta \lambda^{(Ik)} \end{pmatrix} \\
 e^{(Ik)} &= 0 \\
 t^{(k)} &= \begin{pmatrix} \Delta u^{(k-1)} + \delta u^{(Ik)} \\ \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(Ik)} \end{pmatrix} \\
 n^{(k)} &= \begin{pmatrix} \delta u^{(Ik)} \\ \delta \lambda^{(Ik)} \end{pmatrix} \\
 e^{(k)} &= \Delta a^2(t^{(k)} \cdot t^{(k)} - \Delta a)/t^{(k)} \cdot t^{(k)}
 \end{aligned} \tag{67}$$

## B Kuormakerroinmuutos rajoiteyhtälöille

Normaalitaso [8]:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta u^{(1)} \cdot \delta u_f^{(k)}}{\Delta\lambda^{(1)} + \Delta u^{(1)} \cdot \delta u_p^{(k)}} \quad (68)$$

Päivitetty normaalitaso [7]:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta u^{(k-1)} \cdot \delta u_f^{(k)}}{\Delta\lambda^{(k-1)} + \Delta u^{(k-1)} \cdot \delta u_p^{(k)}} \quad (69)$$

Ortogonaali trajektorii [4]:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\delta u_p^{(k)} \cdot \delta u_f^{(k)}}{1 + \delta u_p^{(k)} \cdot \delta u_p^{(k)}} \quad (70)$$

Konsistentti linearisointi [9]:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{t^{(k)} \cdot t^{(k)}(t^{(k)} \cdot t^{(k)} - \Delta a) + \Delta u^{(k-1)} \cdot \delta u_f^{(k)}}{\Delta\lambda^{(k-1)} + \Delta u^{(k-1)} \cdot \delta u_p^{(k)}} \quad (71)$$

Elliptinen [3]:

$$\delta\lambda^{(k)} = \frac{-B^{(k)} \pm \sqrt{B^{(k)2} - 4A^{(k)}C^{(k)}}}{2A^{(k)}} \quad (72)$$

$$A^{(k)} = 1 + \delta u_p^{(k)} \cdot \delta u_p^{(k)} \quad (73)$$

$$B^{(k)} = 2(\lambda^{(k)} + \delta u_p^{(k)} \cdot \delta u_f^{(k)} + \delta u_p^{(k)} \cdot \Delta u^{(k-1)}) \quad (74)$$

$$C^{(k)} = \lambda^{(k)2} - \Delta a^2 + \Delta u^{(k)} \cdot \Delta u^{(k)} + 2\Delta u^{(k)} \cdot \delta u_f^{(k)} + \delta u_f^{(k)} \cdot \delta u_f^{(k)} \quad (75)$$

Elliptinen kahdessa vaiheessa [5]:

$$\delta\lambda^{(Ik)} = -\frac{\Delta u^{(k-1)} \cdot \delta u_f^{(Ik)}}{\Delta\lambda^{(k-1)} + \Delta u^{(k-1)} \cdot \delta u_p^{(Ik)}} \quad (76)$$

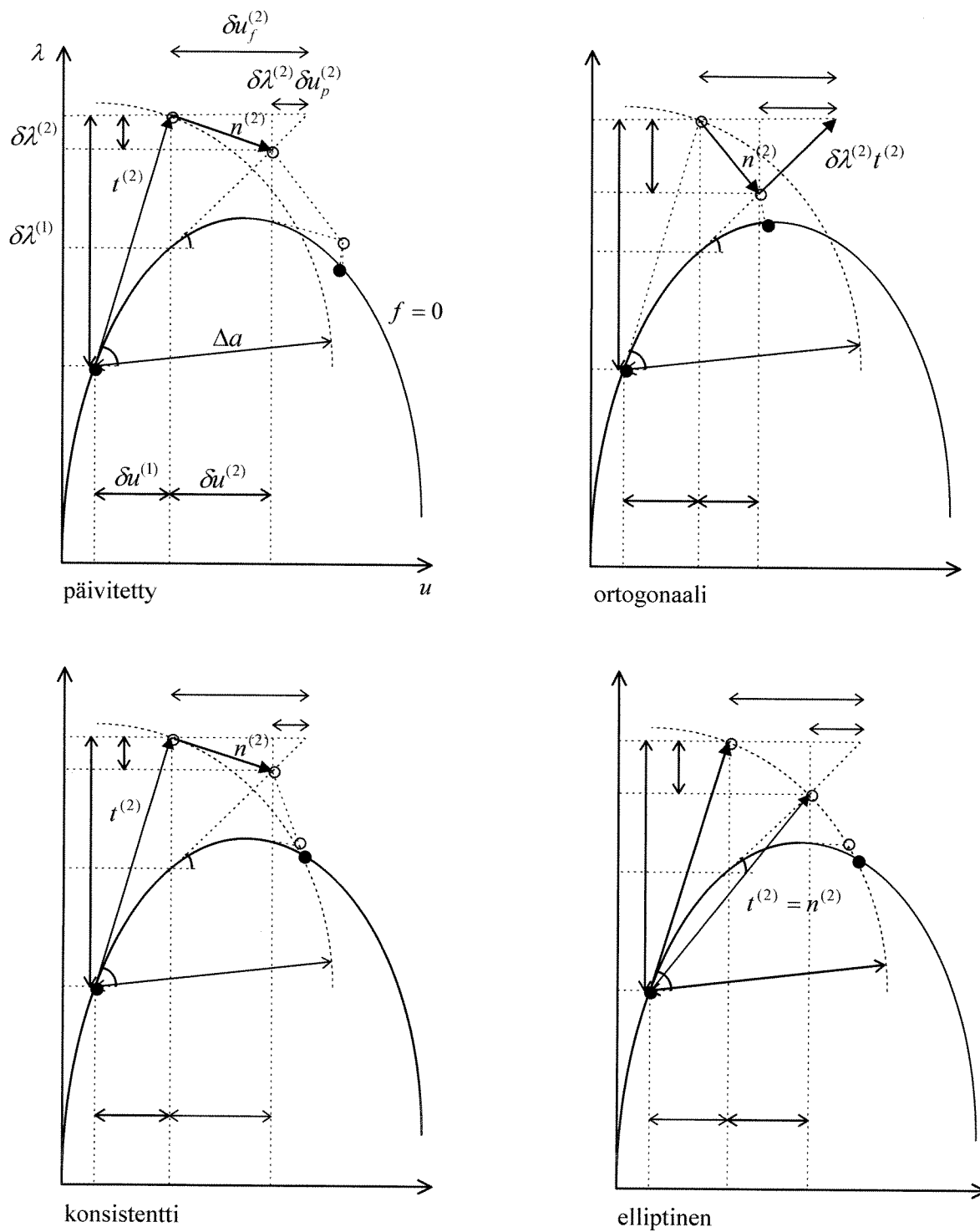
$$\delta u^{(Ik)} = \delta u_f^{(Ik)} + \delta\lambda^{(Ik)} \delta u_p^{(Ik)} \quad (77)$$

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta a^2(t^{(k)} \cdot t^{(k)} - \Delta a)/t^{(k)} \cdot t^{(k)} + (\Delta u^{(k-1)} + \delta u^{(Ik)}) \cdot \delta u_f^{(Ik)}}{(\Delta\lambda^{(k-1)} + d\lambda^{(Ik)}) + (\Delta u^{(k-1)} + \delta u^{(Ik)}) \cdot \delta u_p^{(Ik)}} \quad (78)$$

## Viitteet

- [1] Allgower E. G., Georg K. G., *Numerical Continuation Methods*, Springer-Verlag, 1990.
- [2] Bergan P.G., Horrigmoe G., Kråkeland B., Soreide T.H., Solution techniques for nonlinear finite element problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12 (1978) 1677-1696.
- [3] Crisfield M.A., A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-Through", *Computers & Structures*, 13 (1981) 55-62.
- [4] Fried I., Orthogonal trajectory accession to the nonlinear equilibrium curve, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47 (1984) 283-297.
- [5] Forde B.W.R., Stiemer S.F., Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis, *Computers & Structures*, 27 (1987) 625-630.
- [6] Kouhia R., Mikkola M., Tracing the Equilibrium Path beyond Simple Critical Points, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 (1989) 2923-2941.
- [7] Ramm E., Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Proceedings of the Europe-U.S. Workshop*, Ruhr Universität Bochum, Germany (1980), Edited by Wunderlich W., Stein E. and Bathe K.-J., Springer-Verlag (1981) 63-89.
- [8] Riks E., The application of Newton's method to the problem of elastic stability, *Journal of Applied Mechanics*, 39 (1972) 1060-1066.
- [9] Schweizerhof K.H., Wriggers P., Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59 (1986) 261-279.

### C Iteroinnin kulku tapauksessa $n = 1$



Kuva 1. Iteroinnin kulku eri rajoiteyhtälöillä tapauksessa  $n = 1$ .