

TEKNILLINEN KORKEAKOULU

Insinööritieteiden ja arkkitehtuurin tiedekunta

Rakenne- ja rakennustuotantotekniikan tutkinto-ohjelma



Laattarakenteiden mallinnus elementtimenetelmällä

Kandidaatintyö

15.05.2009

Jarkko Luntta



TEKNILLINEN KORKEAKOULU PL 1000, 02015 TKK <a href="http://www.tkk.fi">http://www.tkk.fi</a>	KANDIDAATINTYÖN TIIVISTELMÄ	
Tekijä: Jarkko Luntta		
Työn nimi: Laattarakenteiden mallinnus elementtimenetelmällä		
Tiedekunta: Insinööritieteiden ja arkkitehtuurin tiedekunta		
Tutkinto-ohjelma: R901-O		
Pääaine: Rakennetekniikka	Pääaineen koodi: R3001	
Vastuopettaja(t): Prof. Jukka Aalto		
Ohjaaja(t): Jarkko Niiranen		
<p>Tässä työssä esitetään elementtimenetelmän peruseriaatteet sekä yksinkertaisimmat laattateoriat, joiden pohjalta elementtimenetelmää voidaan soveltaa myös laattarakenteisiin. Laattateorioista käsitellään Kirchhoffin sekä Reissnerin–Mindlinin laattamallit. Lisäksi selvitetään elementtimenetelmään pohjautuvan Abaqus-ohjelmiston ominaisuuksia sekä käyttöä laattarakenteiden mallinnuksessa.</p> <p>Tutkimus painottuu Abaqus-ohjelmiston ohuille laattarakenteille soveltuvien elementtityyppien vertailuun eri testitapauksissa. Vertailun kohteena ovat laskentakustannukset eli ratkaisun tarkkuus suhteessa vapausasteiden lukumäärään. Vertailuarvona käytetään maksimijännitystä ja -taipumaa sekä muodonmuutosenergiaa. Tutkimuksessa mallinnetut testitapaukset poikkeavat toisistaan laatan geometrian ja reunaehtojes osalta.</p> <p>Tutkimuksen tuloksena testitapauksille löydettiin kustannustehokas elementtityyppi. Tutkimuksessa havaittiin myös laatan geometrian ja reunaehtojes vaikuttavan elementtityypin valintaan sekä laskentatarkkuuteen.</p>		
Päivämäärä: 15.05.09	Kieli: suomi	Sivumäärä: 23+4
Avainsanat: elementtimenetelmä, FEM, laattarakenne, Abaqus, Kirchhoff, Reissner–Mindlin, kuorielementti		

# Sisällysluettelo

<b>1</b>	<b>Johdanto</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Laattateoria</b> .....	<b>2</b>
2.1	Peruskäsitteet ja -oletukset.....	2
2.2	Kirchhoff-laattamalli .....	3
2.3	Reissner–Mindlin-laattamalli.....	3
2.4	Leikkausrasitukset .....	4
2.5	Materiaalimalli.....	5
<b>3</b>	<b>Elementtimenetelmä</b> .....	<b>6</b>
3.1	Laskentaperiaate .....	6
3.2	Muotofunktiot .....	7
3.3	Elementtityypit.....	9
3.4	Tulostarkkuus.....	10
3.5	Jännitysten laskenta .....	11
<b>4</b>	<b>Abaqus-ohjelmisto</b> .....	<b>12</b>
4.1	Laattojen elementtityypin valinta .....	13
4.2	Kuorman määrittäminen ja jännitysten tulkinta.....	14
<b>5</b>	<b>Testitapaukset</b> .....	<b>15</b>
5.1	Tutkimusmenetelmät .....	15
5.2	Tulokset .....	16
5.2.1	Jännitykset ja muodonmuutosenergia tapauksissa B ja C .....	16
5.2.2	Jännitykset ja taipumat tapauksissa A ja B .....	19
5.3	Johtopäätökset.....	20

# 1 Johdanto

Elementtimenetelmä (engl. Finite element method, FEM) on nykyajan insinööritieteissä laajalti käytetty menetelmä rakenteiden käyttäytymisen analysoimisessa. Ensimmäiset yritykset elementtimenetelmän soveltamiseksi rakenteiden lujuusanalyysiin tehtiin 1950-luvun lentokoneollisuudessa. Tuolloin elementtimenetelmä oli niin sanottu suora menettely, jota käytettiin ainoastaan sauva- ja palkkirakenteiden laskentaan [6, s. 13]. 1960-luvulla syntyi elementtimenetelmän matemaattinen pohja, kun löydettiin yhteys elementtimenetelmän ja klassisen Ritzin likimääräismenetelmän välillä [6, s. 14]. Tämä mahdollisti yhdessä tietokoneiden kehittymisen myötä elementtimenetelmän soveltamisen sauvarakenteiden lisäksi myös muihin rakenteisiin, kuten laatta- ja kuorirakenteisiin.

Yleisiä elementtimenetelmään pohjautuvia ohjelmistoja ovat muun muassa Adina, Ansys, Lusas, Comsol sekä Abaqus, jonka käyttöä tarkastellaan tässä työssä. Ohjelmistot mahdollistavat vaativien rakenteiden mallinnusten lisäksi myös monifysikaaliset tarkastelut, kuten lämmön siirtymisen, massavirtausten tai värähtelyjen vaikutusten arvioinnin. Monipuoliset käyttömahdollisuudet voidaan selittää menetelmässä käytettyjen matemaattisten mallien avulla. Mallit kuvaavat käytännön ongelmia erilaisten muuttujien ja yhtälöiden muodossa. Jokaisessa mallissa muuttujille on tehty oletuksia ongelmasta riippuen. Oletusten avulla voidaan luoda yksinkertaistettu, matemaattisesti ratkaistavissa oleva malli todellisesta tilanteesta. Malleilla voidaan kuvata esimerkiksi värähtelyliikettä, lämpötilojen vaihtelua tai siirtymiä rakenteessa.

Tässä työssä tarkastellaan elementtimenetelmän käyttöä laattarakenteissa, joiden matemaattiset mallit ovat syntyneet siirtymätilaa koskevien oletusten pohjalta. Työn alussa esitetään kaksi yksinkertaisinta laattamallia eli Kirchhoffin ja Reissnerin–Mindlinin laattamallit. Elementtimenetelmän laskentaperiaate selvitetään yleisellä tasolla, sekä käydään läpi elementtien ominaisuuksia ja valintaa laattarakenteita silmällä pitäen. Työssä esitetyissä tutkimustuloksissa rajoitutaan Abaqus/Standard elementtikirjaston ohuiden kuorielementtityyppien vertailuun. Tavoitteena on selvittää, miten laatan geometria ja reunaehdot sekä elementtityypin valinta vaikuttavat laskentatarkkuuteen.

## 2 Laattateoria

### 2.1 Peruskäsitteet ja -oletukset

Laatat ovat tasopintoja, joiden paksuus on pieni verrattuna muihin dimensioihin. Tämän takia laatat voidaan redusoida kaksiulotteiseksi malliksi, jossa kaikilla muuttujilla on riippumattomuus paksuuden suuntaisesta  $z$ -koordinaatista. Kuori on kaareva pinta, jolla laattarakenteista poiketen normaalin suunta muuttuu pinnalla liikuttaessa.

Käytännön insinöörisovelluksissa on usein ratkaistava rakenteen sisäiset jännitysja-kaumat kestävyuden määrittämiseksi. Laattojen tapauksessa kestävyuden kannalta ratkaisevat suureet ovat  $x$ - ja  $y$ -akselien suuntaiset jännitysjaumat. Jännitykset ovat verrannolliset rakenteen venymiin ja venymät puolestaan riippuvat siirtymistä. Yleisesti kaikille lineaarisesti elastisille materiaaleille voidaan siirtymä–venymäyhteydet muodostaa seuraavasti [3, s. 147]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (2)$$

Siirtymää  $z$ -akselin suunnassa eli taipumaa on merkitty kirjaimella  $w$ . Lausekkeissa  $u$  ja  $v$  ovat  $x$ - ja  $y$ -akseleita vastaavat siirtymät, joille tehtyjen oletusten perusteella on kehitetty erilaisia laattateorioita. Seuraavaksi esitetään yleisessä käytössä olevat Kirchhoffin ja Reissnerin–Mindlinin laattateorioiden perusoletukset karteesisessa  $x,y,z$ -koordinaatistossa. Molemmissa teorioissa normaalijännitys paksuuden suunnassa on asetettu nolllaksi ja materiaalille oletetaan pätevän Hooken lain mukainen lineaarinen materiaalmalli.

## 2.2 Kirchhoff-laattamalli

Kirchhoff-laattateoriaa voidaan käyttää ohuille laatoille, joiden taipuma on pieni verrattuna laatan paksuuteen [6, s. 379]. Teoriasta käytetään myös nimeä lineaarinen [1, s. 282] ja klassinen laattateoria (engl. classic plate theory, CPT) [10, s. 59]. Lattamallin kinemaattiset perusoletukset määritellään seuraavasti [9, s. 167]:

1. poikkileikkaustasot pysyvät tasoina sekä kohtisuorassa laatan keskipintaa kohden taivutuksen tai muodonmuutoksen aikana,
2. laatan keskipinnan normaalit eivät veny,
3. keskipinta siirtyy ainoastaan z-suunnassa.

Teoria noudattaa siis tasojännitystilän (engl. Plane stress) yhtälöitä, joissa poikittaisia leikkausmuodonmuutoksia ei synny. Kinemaattisten oletusten perusteella siirtymille voidaan kirjoittaa lausekkeet [3, s. 171]:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w = w(x, y). \quad (3)$$

Sijoittamalla siirtymät kaavoihin (1) ja (2) muodonmuutoksille saadaan yhtälöt [3, s. 171]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \gamma_{yz} &= 0, & \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Todellisuudessa laatan poikkipinta kuitenkin käyristyy leikkausjännitysten vaikutuksesta. Ohuella laatalle tämä ilmiö ei ole merkittävä, kun taipumat ovat pieniä. Tällöin kaikki venymät johtuvat laatan käyristymisestä ja laatussa vaikuttaa ainoastaan taivutuksesta aiheutuvia normaali- ja leikkausjännityksiä. [6, s. 100, 379]

## 2.3 Reissner–Mindlin-laattamalli

Reissnerin–Mindlinin laattateoria on yksidimensioisen Timoshenko-palkin vastine laatoille [1, s. 282]. Teoriaa käytetään usein paksumpia laattarakenteita mallinnettaessa, joissa poikkipinnan oletetaan pysyvän yhä tasona mutta ei enää kohtisuorassa keskipintaa vastaan [5, s. 100]. Tällöin taivutus aiheuttaa nollasta poikkeavan poik-

kipinnan kiertymän, jolloin myös leikkausmuodonmuutokset otetaan huomioon. Tällainen teoria on tarpeellinen esimerkiksi kerroslaatan tai sandwich-laatan tapauksessa [9, s. 176]. Teorian mukaan siirtymille voidaan kirjoittaa lausekkeet [3, s. 173]:

$$u = z\theta_y, \quad v = -z\theta_x, \quad w = w(x, y). \quad (5)$$

Muodonmuutoksille puolestaan saadaan kaavojen (1) ja (2) avulla lausuttuna [3, s. 173]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, & \varepsilon_y &= -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y}, & \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{xy} &= z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right), & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y. \end{aligned} \quad (6)$$

Lausekkeissa  $w$  on laatan keskipinnan taipuma, ja  $\theta_x$  ja  $\theta_y$  ovat kiertymät  $x$ - ja  $y$ -akselien ympäri. Kaavasta huomataan, että korvaamalla  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$  ja  $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ , poikittaiset leikkausmuodonmuutokset katoavat, jolloin yhtälöt vastaavat Kirchhoff-laattamallin oletuksia [3, s. 174].

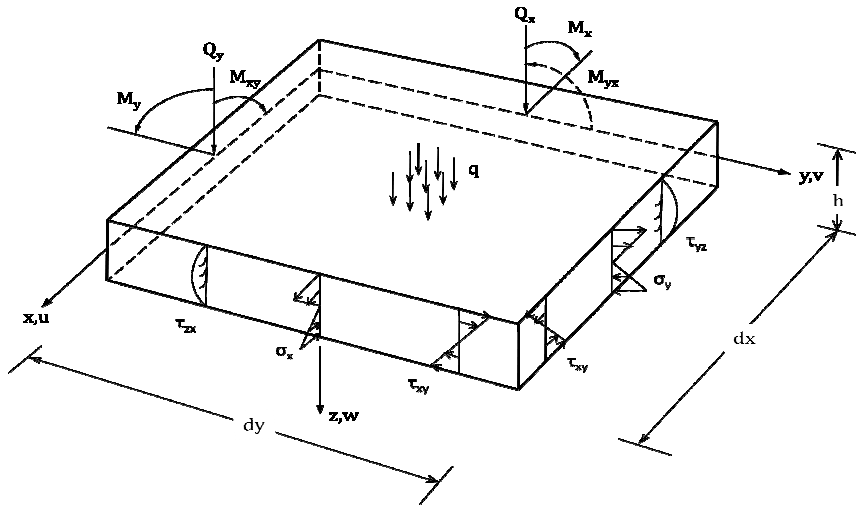
## 2.4 Leikkausrasitukset

Tasojännitystilassa laattaan vaikuttavat leikkausvoimat  $Q_x$  ja  $Q_y$ , taivutusmomentit  $M_x$  ja  $M_y$  sekä kiertomomentti  $M_{yx}$  voidaan määrittellä seuraavasti [2, s. 532]:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (8)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz. \quad (9)$$

Lausekkeissa  $\sigma$  on normaali-jännitys ja  $\tau$  leikkausjännitys. Kuvassa 1 on esitetty laattaan vaikuttavat leikkausrasitukset sekä normaali- ja leikkausjännitykset.



Kuva 1 Laattaan kohdistuvat voimasuureet [2, s. 532]

## 2.5 Materiaalimalli

Normaalijännitys  $\sigma_z$  on tyypillisesti merkityksetön verrattuna jännityksiin  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$ . Tällöin lineaarisesti elastisen ja isotrooppisen materiaalin tapauksessa tasojännitystilän jännitys–venymäyhteydet voidaan kirjoittaa matriisimuodossa [2, s. 533]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

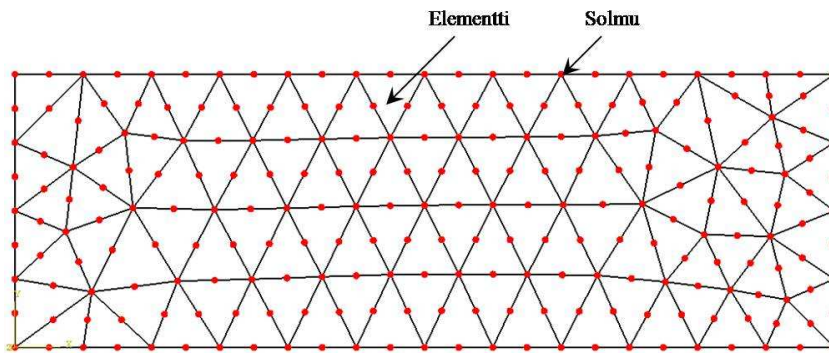
Suureet  $E$  ja  $\nu$  ovat materiaalivakioita, joiden avulla jännitykset ja muodonmuutokset kytkeytyvät toisiinsa. Lauseke (10) tunnetaan lyhemmin konstitutiivisena yhtälönä  $[\sigma] = [E][\varepsilon]$ . Sijoittamalla konstitutiivisesta yhtälöstä ratkaistut jännitysten arvot yhtälöihin (8) ja (9) voidaan määrittää myös laatta vaikuttavat leikkausrasitukset.



### 3 Elementtimenetelmä

#### 3.1 Laskentaperiaate

Elementtimenetelmän perusidea on löytää ratkaisu monimutkaiseen ongelmaan korvaamalla se yksinkertaisemmalla mallilla [11, s. 3]. Ongelman yksinkertaistaminen tarkoittaa tarkasteltavan rakenteen jakoa pienempiin osa-alueisiin eli elementteihin, jotka liittyvät toisiinsa solmupisteiden välityksellä [6, s. 12]. Elementtien ja solmujen muodostamaa kokonaisuutta kutsutaan elementtiverkoksi (engl. element mesh). Kuvasssa 2 on esimerkki suorakaidelaatasta, joka on jaettu 100 elementin verkoksi.



Kuva 2 Suorakaidelaatan elementtiverkko

Seuraavaksi esitetään yleisesti, miten elementtien ja solmupisteiden avulla rakenteessa vaikuttavat voimat saadaan laskettua. Solmupisteellä on tarkasteltavasta mallista riippuen tietty määrä vapausasteita (engl. degree of freedom, DOF). Jännityksiä laskettaessa mahdolliset vapausasteet ovat rakenteen siirtymät  $u$ ,  $v$  ja  $w$  sekä kiertymät  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  ja  $\theta_z$  [5, s. 2]. Vapausasteena Kirchhoffin laattamallissa on taipuma  $w$  ja Reissner–Mindlinin laattamallissa taipuman lisäksi kiertymät  $\theta_x$  ja  $\theta_y$ . Vapausasteiden ollessa mallin tuntemattomat siirtymäsuureet, puhutaan siirtymämenetelmästä [6, s. 21]. Tällöin diskretoitu systeemi voidaan kuvata matriisimuotoisella yhtälöryhmällä [6, s. 17]:

$$[F] = [K][U] \quad (11)$$

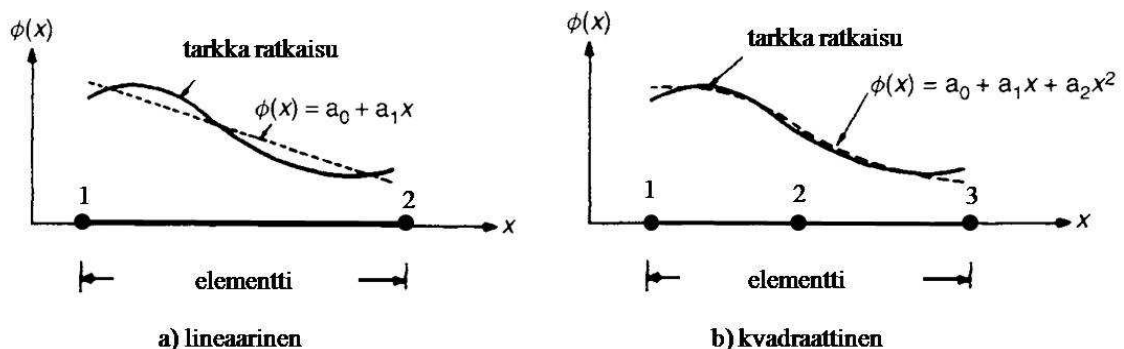
Lausekkeessa  $[F]$  on rakenteen voimavektori eli elementtien solmupisteissä vaikuttavat voimat,  $[K]$  on rakenteen jäykkyyismatriisi ja  $[U]$  solmupisteiden vapausasteet.

Siirtymämenetelmä on systemaattisuutensa johdosta yleisesti käytössä elementtimenetelmiin pohjautuvissa laskentaohjelmistoissa [6, s. 21].

Kun elementin solmut, vapausasteet ja muotofunktiot on valittu, muodostetaan tapausta vastaava muotofunktioiden avulla lausuttu kinemaattinen matriisi  $[B]$ , sekä materiaalivakiot sisältävä kimmomatriisi  $[E]$  [6, s. 236]. Muotofunktioista kerrotaan tarkemmin seuraavassa kappaleessa. Matriisien  $[B]$  ja  $[E]$  avulla voidaan yleisiä energiaperiaatteita käyttämällä muodostaa elementin jäykkyysmatriisi  $[K]$ . Tasapainoehdot huomioiden yksittäisten elementtien jäykkyysmatriisit voidaan yhdistää koko rakenteen kattavaksi, globaaliksi jäykkyysmatriisiksi. Tämän jälkeen muodostetaan lausekkeen (11) avulla systeemin yhtälöryhmä ja ratkaistaan niistä rakenteen siirtymät ja kiertymät [6, s. 236]. Venymille saadaan puolestaan arvot lausekkeiden (1) ja (2) avulla huomioimalla siirtymille tehdyt oletukset. Rakenteessa vaikuttavat jännitykset saadaan lopulta ratkaistuksi sijoittamalla venymät lausekkeeseen (10).

### 3.2 Muotofunktiot

Ratkaisun käyttäytymistä elementin alueella voidaan arvioida elementtimenetelmässä yksinkertaisilla kentillä  $\phi$  (engl. fields), joista käytetään myös yleisesti nimeä interpolointifunktiot [11, s. 80]. Funktiot voivat kuvata esimerkiksi lämpötilan tai hydraulisen paineen jakautumista tarkasteltavassa kohteessa [2, s. 7]. Kuvassa 3 on kaksi yksiulotteista elementtiä, joiden solmupisteet on merkitty numeroilla. Yhtenäinen viiva kuvaa elementin alueen tarkkaa ratkaisua, jota arvioidaan kohdassa a lineaarisella funktiolla  $\phi(x) = a_0 + a_1x$ , ja kohdassa b kvadraattisella funktiolla  $\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ .



Kuva 3 Muotofunktiot [11, s. 81]

Rakenteiden mekaniikassa interpolointifunktioilla approksimoidaan yleensä rakenteen siirtymiä ja kiertymiä. Tällöin puhutaan muotofunktioista, jotka nimensä mukaisesti ilmaisevat oletetun siirtymätilan muodon [6, s. 51]. Kuvan 3 tapauksessa tarkka ratkaisu voi kuvata esimerkiksi elementin todellista taipumaa, jolloin kvadraattisella muotofunktiolla saadaan parempi approksimaatio. Mikäli siirtymät tapahtuvat ainoastaan tason suunnassa, myös lineaarisilla muotofunktioilla on mahdollista saavuttaa tarkkoja approksimaatioita. Esimerkiksi aksiaalisesti kuormitetuille sauvarakenteille on löydettävissä analyttistä ratkaisua vastaava tulos [6, s. 56].

Laattoihin kohdistuu usein tasoa vastaan kohtisuora kuormitus, jolloin ongelmana on taipuman ratkaiseminen. Laattaelementeillä taipuman approksimaatiolle voidaan kirjoittaa yleisesti kaksiulotteisessa muodossa [11, s. 82]:

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + \dots + a_my^n \quad (16)$$

Lausekkeessa  $a_1, a_2, \dots, a_m$  ovat funktion vakiokertoimet,  $n$  on polynomien aste ja  $m$  on funktion asteluvusta riippuva vakiokertoimien lukumäärä, joka kasvaa asteluvun myötä. Korkeamman asteen elementeissä (engl. higher order elements) muotofunktion asteluku  $n$  on kaksi tai enemmän [11, s. 80]. Asteluvun myötä kasvaa myös elementin solmupisteiden lukumäärä [5, s. 81]. Tämä on havaittavissa kuvissa 1 ja 3, joissa toisen asteen elementillä muodostetussa mallissa solmupisteet sijaitsevat kulmapisteiden lisäksi myös elementin sivuilla. Asteluvun vaikutusta laskentatuloksiin laatoille soveltuvilla elementeillä tarkastellaan myöhemmin luvussa 5.

### 3.3 Elementtityypit

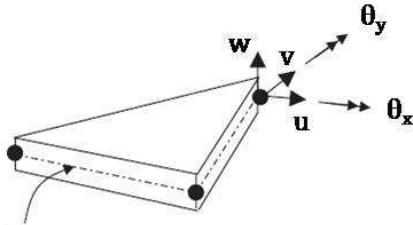
Kappaleessa 3.1 esitetyt elementtimenetelmälle pohjan luovat perusyhdytöt ovat varsin yleisiä ja niitä voidaan soveltaa mitä erilaisimmissa tapauksissa. Tärkeimmän vaiheen elementtimenetelmässä muodostaa rakenteen diskretointi eli jako elementteihin ja yksittäisten elementtien tyyppin ja ominaisuuksien määrittäminen. Muut vaiheet eli varsinaiset laskentaprosessit voidaan helposti suorittaa laskentaohjelmilla [6, s. 235]. Elementtityypin määrittely vaatii kolmen perusasian selventämistä [8, s. 44]:

1. elementin muodon eli geometrian (jana, kolmio, tetraedri, särmiö, jne.),
2. interpoloivien funktioiden ja
3. vapausasteiden määrittelyn.

Laattaelementit ovat muodoltaan kolmioita tai nelikulmioita. Vapausasteina on usein taipuma  $w$  sekä kiertymät  $x$ - ja  $y$ -akselien ympäri. Ensimmäiset laattaelementit olivat klassisen laattateorian vaikutuksesta Kirchhoff-elementtejä, joissa poikittaiset leikkausmuodonmuutokset koko elementin alueella oli asetettu nolaksi. [2, s. 538, 542] Myöhemmin on kehitetty myös diskreetti-Kirchhoff-tyyppisiä (engl. discrete Kirchhoff, DK) laattaelementtejä, joilla poikittaiset muodonmuutokset on asetettu nolaksi vain tietyissä pisteissä. Ensimmäisistä elementeistä poiketen muodonmuutokset on määritetty Reissnerin–Mindlinin laattamallin kaavoilla (6) [9, s. 167, 183].

Reissnerin–Mindlinin laattamalliin pohjautuvat elementit ovat luontevasti laajennettavissa kuorielementeiksi [2, s. 547]. Elementit ovatkin ohjelmoijien suosiossa, sillä nykyisissä elementtimenetelmiin pohjautuvissa ohjelmistoissa varsinaisten laattaelementtien sijaan käytetään usein ainoastaan kuorielementtejä (engl. shell elements) [2, s. 536]. Laattaelementeistä poiketen kuorielementeillä on tyypillisesti kuusi vapausastetta, jolloin elementeillä on mahdollista kuvata myös tasossa tapahtuvia muodonmuutoksia sekä mallintaa kaarevia pintoja.

Kuorielementeissä solmut ovat yleensä elementin keskitasolla. Yleisimmin käytössä olevat kuorielementit ovat kolme ja kuusisolmuinen kolmio, sekä neljä, kahdeksan- ja yhdeksänsolmuinen nelikulmio [5, s. 267]. Kuvassa 4 on esimerkki kolmisolmuisesta kolmioelementistä, jonka jokaisella solmupisteellä on viisi vapausastetta.



**Keskitaso**

Kuva 4 Kolmioelementti [5, s. 267]

Kuorielementit palautuvat laattaelementeiksi, kun porauskiertymä  $\theta_z$  sekä tason suuntaiset siirtymät  $u$  ja  $v$  estetään [2, s. 536].

### 3.4 Tulostarkkuus

Kuten aiemmin on todettu, elementtimenetelmällä saadut tulokset ovat aina approksimaatioita todellisen mallin käyttäytymisestä. Ratkaisun luotettavuutta voidaan tutkia tarkastelemalla tulosten suppenevuutta. Suppeneminen eli konvergoiminen kohti tarkkaa ratkaisua riippuu pääasiassa käytettyjen muotofunktioiden asteluvusta ja elementtiverkon tiheydestä. [7, s. 174] Strategiaa, jossa tulosten suppenevuutta tarkastellaan elementtiverkkoa tihentämällä ja käyttämällä alhaista astetta olevia funktioita, nimitetään h-menetelmäksi (engl. h-version) [11, s. 81]. Kyseistä menetelmää on käytetty myös tutkimusosiossa luvussa 5.

Modernimpi tapa saavuttaa numeerisen ratkaisun tarkentuminen on pitää elementtien lukumäärä pienenä ja korottaa muotofunktion astetta. Tällöin puhutaan p-menetelmästä (engl. p-version) [7, s. 137]. Käyttämällä elementeille äärettömän suurta muotofunktion astelukua, on teoriassa mahdollista saavuttaa mallille tarkka, analyttinen, ratkaisu [11, s. 80]. Vastaavasti h-menetelmällä tarkka ratkaisu on löydettävissä käyttämällä äärettömän tiheää elementtiverkkoa. Käytännön sovelluksissa tarkastelu rajataan usein vain ensimmäisen, toisen ja kolmannen asteen muotofunktioihin.

Aina ei ole selvää, miten suppenemista mitataan. Tätä varten on kehitetty erilaisia kriteerejä, joista yksinkertaisin on tutkia tietyn suureen maksimiarvon muuttumista käyttämällä edellä mainittuja menetelmiä [7, s. 137]. Ratkaisun luotettavuuden mitana voidaan käyttää myös suuretta, joka huomioi koko tarkasteltavan mallin. Lineaarisesti kimmoisessa tapauksessa sopiva mitta on rakenteen sisäinen muodonmuutosenergia (engl. strain energy) [6, s. 205].

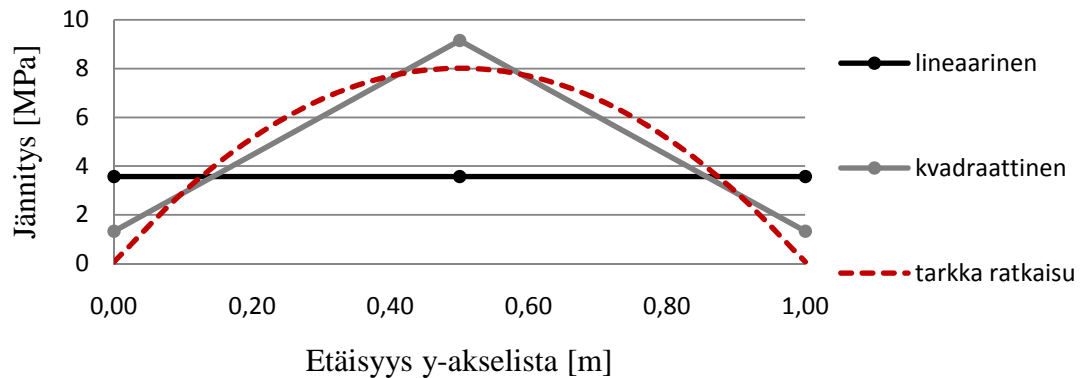
### 3.5 Jännitysten laskenta

Elementtimenetelmään perustuvissa laskentaohjelmistoissa jännitykset lasketaan elementtikohtaisesti käyttäjän valitsemassa kohdissa [3, s. 59]. Usein laskentapisteiksi valitaan integrointipisteet, koska niissä jännitykset saavat tarkimmat arvonsa. Kun jännitysten huippuarvojen tiedetään sijaitsevan rakenteen reunoilla, laskentapisteet kannattaa valita vastaavasti elementin reunoilta eli solmupisteistä. Tällöin laskentaohjelmat ekstrapoloivat Gaussin pisteiden arvot solmupisteisiin, jolloin tulokset ovat epätarkempia [3, s. 87].

Jännityskeskittymien kohdalla riittävä tulostarkkuus vaatii ympäröivään rakenteeseen verrattuna tiheämmän elementtiverkon. Verkon tihennys voidaan suorittaa esimerkiksi adaptiivisin verkontihennysmenetelmin [6, luku 8.1.1]. Viime aikoina on kehitetty myös täysin verkottomia menetelmiä. Menetelmässä mallin kriittisiin kohtiin voidaan vapaasti lisätä solmupisteitä, huolehtimatta solmujen riippuvuudesta muihin ympäröiviin solmupisteisiin [10, s. 22]. Tällöin edellä mainittu diskretointi ja elementtiverkon luominen voidaan sivuuttaa. Tämä mahdollistaa entistä tehokkaamman analyysiprosessin etenkin vaikeimmissa mallinnuksen projekteissa. Verkoton menetelmä on kuitenkin varsin uusi ala numeerisessa mallinnuksessa, eikä se ole vielä saavuttanut ohjelmistojen kehittäjien keskuudessa suurempaa suosiota [10, s. 24].

Kuvassa 5 on havainnollistettu reunoiltaan vapaasti tuetun ja tasaisesti kuormitetun laattarakenteen jännityskuvaajien muoto. Kuvaajan arvot on saatu elementtimenetelmään pohjautuvalla Abaqus-ohjelmistolla, josta kerrotaan tarkemmin luvussa 4. Yhtenäiset viivat kuvaavat jännityksen approksimaatiota lineaarisella ja kvadraattisella mallilla, kun laatta on jaettu leveyden suunnassa kahteen nelikulmaiseen ele-

menttiin. Katkoviivalla on merkitty ohjelmistolla saatua tarkinta ratkaisua. Vaikka approksimaatiot ovat varsin epätarkkoja, on niistä silti havaittavissa elementtimenetelmän ratkaisun luonne. Jännitysten arvot solmupisteissä sijaitsevat tarkan jännitysjakauman molemmin puolin. Tämä osoittaa, kuinka diskretoitu rakenne pyrkii yleisten energiaperiaatteiden mukaisesti noudattamaan todellisen rakenteen sisäistä energiatilaa.



Kuva 5 Jännitysten käyttäytyminen

## 4 Abaqus-ohjelmisto

Abaqus on multifysikaalinen ohjelmisto, jonka on kehittänyt vuonna 1978 perustettu yritys nimeltä HKS. Ohjelma on saavuttanut tutkijoiden keskuudessa suosiota, koska Abaqus mahdollistaa myös uusien materiaalien ja elementtityyppien lisäämisen ohjelmaan [5, s. 22]. Seuraavissa kappaleissa esitetään laattarakenteiden mallinnuksessa käytetyt elementtityypit sekä kuorman määrittelyssä ja jännitysten tulkinnassa huomioitavia seikkoja Abaqus-ohjelmistossa.

## 4.1 Laattojen elementtityypin valinta

Liitteen D kuvassa 14 on esitetty Abaquksen elementtikirjaston tyypillisimmät jännitustarkastelussa käytetyt elementit. Laattojen elementtityyppinä voidaan käyttää kuorielementtejä, kun laatan paksuus on alle kymmenesosa laatan lyhimmän sivun mitasta [13, luku 5]. Tämän rajan ylittävät laatat mallinnetaan kolmiulotteisilla solidielementeillä.

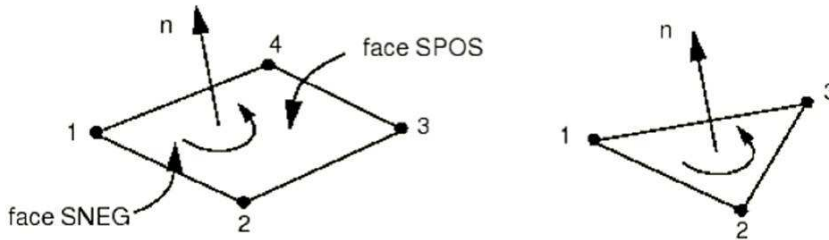
Laatoissa, joiden paksuuden suhde lyhimmän sivun mittaan on alle  $1/15$ , voidaan käyttää ohuita kuorielementtejä [12, luku 23.6.2]. Elementeillä on lineaarisen ja elastisen materiaalioletuksen tapauksessa pienten venymien ehto, joka toteutuu, kun venymä on alle viisi prosenttia [13, luku 5.5]. Suorakulmioelementit S4R5 ja S8R5 soveltuvat yleisesti ohuille laatoille. Kvadraattisella S8R5-elementillä saavutetaan harvaa elementtiverkkoa käyttämällä jo melko tarkkoja tuloksia, kuten myös myöhemmin testitapauksista selviää. STRI3 ja STRI65 ovat diskreetti-Kirchhoff-elementtejä, jotka on tarkoitettu ainoastaan ohuille laatoille.

Elementit S3, S4 ja S4R ovat yleiskäyttöisiä ja soveltuvat myös paksujen laattojen mallintamiseen. Elementeissä S4 ja S4R on lisäksi pienten kalvovenymien (engl. small membrane strains) ominaisuus, jolloin ne soveltuvat myös dynaamisiin ongelmiin, joissa on pienet siirtymät ja kohtalaisen suuret kiertymät. Kaikkien edellä mainittujen elementtien ominaispiirteet on esitetty liitteen D taulukossa 1.



## 4.2 Kuorman määrittäminen ja jännitysten tulkinta

Kuorman määrittämiseksi ja jännitysten tulkitsemiseksi oikein on tiedettävä, miten laatan pinta ja pohjapuoli ovat määriteltyjä ohjelmaan. Kuvassa 6 on havainnollistettu positiivisen normaaliakselin suunta sekä kuoren ylä- (SPOS) ja alapinta (SNEG). Kuorman määrittämiseksi ohjelma kysyy pinnan, jolla kuorman halutaan vaikuttavan. Ruskeaksi väritetty pinta tarkoittaa yläpuolta ja vihreä alapuolta.



Kuva 6 Positiivisen normaalin suunta kuorille [12, luku 23.6.1]

Jännitysten graafisessa tulostuksessa Abaqus käyttää oletusarvona pohjapuolen integrointipisteistä saatuja tuloksia. Abaquksessa voidaan valita myös numeerinen tulostus käyttäjän haluamille arvoille. Arvot laatan alapuolella on merkitty Loc1-merkinnällä ja yläpuolella Loc2-merkinnällä [12, luku 23.6.1]. Jännitysten arvoja voidaan tarkastella esimerkiksi käyttämällä von Mises-jännityksiä, joiden arvot eivät ole riippuvaisia käytetystä koordinaatistosta [3, s. 60] Kolmedimensioinen von Mises-jännitys voidaan muodostaa homogeeniselle aineelle seuraavasti [4, s. 204]:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})]^{\frac{1}{2}}$$

Laattojen tapauksessa  $\sigma_z = 0$ , jolloin lauseke yksinkertaistuu muotoon:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + 6(\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})]^{\frac{1}{2}}$$

Mises-jännitykset ovat aina positiivisia, joten niiden avulla ei pystytä määrittämään rakenteessa vaikuttavien vetävien tai puristavien voimien suuruutta ja sijaintia. Jännitys ei myöskään anna selvää kuvaa yksittäisten jännityskomponenttien keskinäisestä vaihtelusta. Liitteissä A-C on esitetty testitapausten (kuva 7) yksittäisten jännityskomponenttien  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$  sekä von Mises-jakaumien graafinen tulostus laatan pinnalta, kun laattoja on kuormitettu 1 kPa tasaisella kuormalla. Koordinaatisto on

sijoitettu siten, että positiivinen x-akseli vastaa kuvien koordinaatistossa merkintää 1 ja y-akseli vastaavasti merkintää 2. Tulosteessa punaisella on merkitty puristavaa jännitystä ja sinisellä vetojännitystä. Elementtiverkko on muodostettu käyttäen 300 kappaletta S8R5 elementtejä.

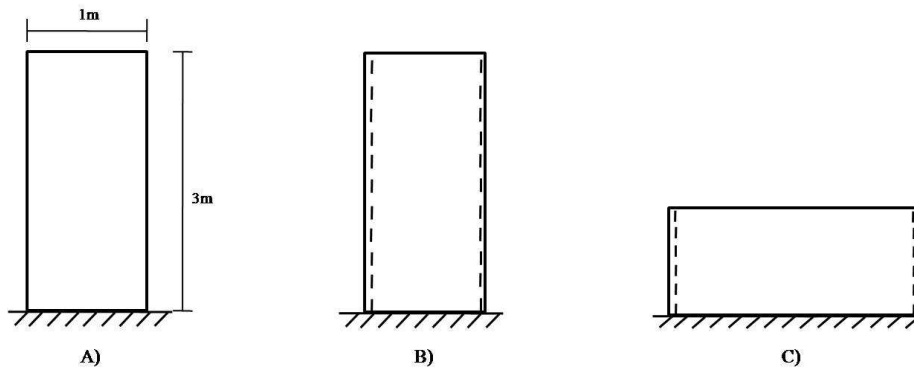
Liitteessä A on esitetty ulokelaatassa vaikuttavien jännitysten jakauma. On huomioitava, että Mises-jännityksen maksimiarvo 22,76 kPa on pienempi kuin laatan pituuden suunnassa vaikuttavan jännityksen  $\sigma_x$  maksimiarvo. Mises-jännitys antaa kuitenkin selkeän kuvan jännitysten yhteisvaikutuksesta. Jakauman perusteella voidaan määrittää rakenteen kriittisin kohta, mutta suurimman jännityksen tulkitsemiseksi oikein kannattaa suorittaa komponenttikohtainen jännitystarkastelu.

## 5 Testitapaukset

### 5.1 Tutkimusmenetelmät

Tutkimus suoritettiin versiolla Abaqus/CAE Student Edition 6.6-2. Version elementtikirjastossa on käytettävissä Abaqus/Standard elementit, jotka on kuvattu liitteen D taulukossa 1. Tutkimuksen painopisteenä oli verrata erityyppisten laattarakenteille soveltuvien elementtien vaikutusta jännitysten ja taipumien arvoihin. Vertailu suoritettiin tarkastelemalla valittujen laskenta-arvojen kehitystä elementtiverkkoa tihentämällä.

Abaqus-ohjelmiston elementtityyppejä tutkittiin kolmella eri esimerkkitapauksella, jotka on esitetty kuvassa 7. Tapaus A vastaa yhdeltä sivulta jäykästi tuettua ulokelaattaa. Tapauksissa B ja C laatan yksi sivu on jäykästi tuettuna ja kaksi vapaasti tuettuna. Kaikissa tapauksissa laattarakennetta kuormitetaan tasaisesti jakautuneella 1 kPa kuormalla. Materiaalina käytetään homogeenista ja lineaarisesti kimmoisaa terästä, jonka materiaalivakiot ovat Poissonin luvulle  $\nu$  0.3 ja kimmokertoimelle E 210 GPa. Laattojen paksuus on 10 mm, jolloin paksuuden suhde lyhimpään sivuun on 1/100. Laatat ovat tällöin ohuita ja kevyesti taipuvia, jolloin on perusteltua käyttää ohuita kuorielementtejä, joilla on voimassa edellä mainitut laattateoriat.



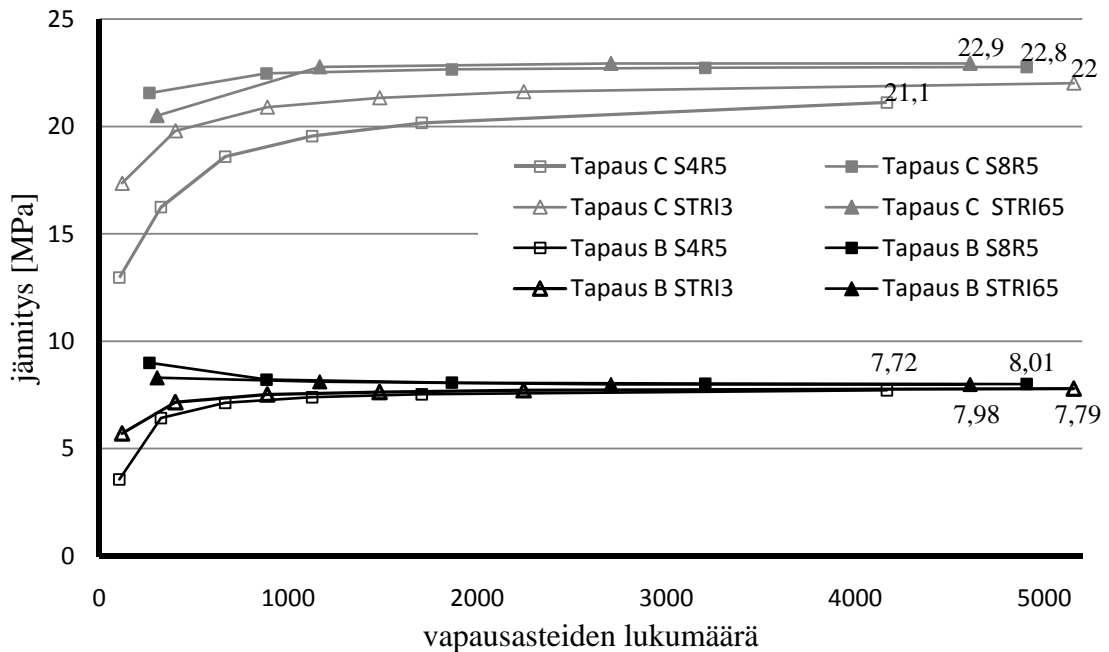
**Kuva 7 Testitapausten geometria ja reunaehdot**

Testitapausten mallinnuksessa käytetyt elementit olivat ohuita kuorielementtejä, joilla saadut tulokset on esitetty kuvissa 8-13. Kuvista selviää, miten valitut laskentatarkkuudet muuttuvat elementtiverkkoa tihennettäessä. Pystyakselilla on mallin laskentatarkkuudet ja vaaka-akselilla vapausasteiden kokonaislukumäärä, joka on saatu kertomalla solmupisteiden lukumäärä yksittäisen elementin solmukohtaisella vapausastelukumäärällä. Tällöin elementtityypit ovat keskenään vertailukelpoisia. Tutkimuksessa rajoitettiin elementtiverkkoihin, joiden solmupisteiden lukumäärä on alle 1000 kappaletta, joka on Abaqus Student-versiossa rajoitteena. Tavoitteena on löytää kullekin testitapaukselle ominainen elementtiverkon jako sekä elementtityyppi, jolla päästään riittävään laskentatarkkuuteen.

## 5.2 Tulokset

### 5.2.1 Jännitykset ja muodonmuutosenergia tapauksissa B ja C

Seuraavassa tarkastellaan tapausten B ja C von Mises-maksimijännityksen supenevuutta (kuva 8) käyttäen ohuita kuorielementtejä S4R5, S8R5, STRI3 ja STRI65. Tapausten jännitys jakaumien graafinen tuloste on esitetty liitteissä B ja C. Elementtien S8R5 ja STRI65 muotofunktiot ovat toisen asteen polynomeja. Muissa elementeissä käytetään lineaarisia muotofunktioita. On tärkeää huomata myös, että elementit S4R5 ja S8R5 ovat nelikulmioita ja STRI3 sekä STRI65 ovat puolestaan kolmioelementtejä.

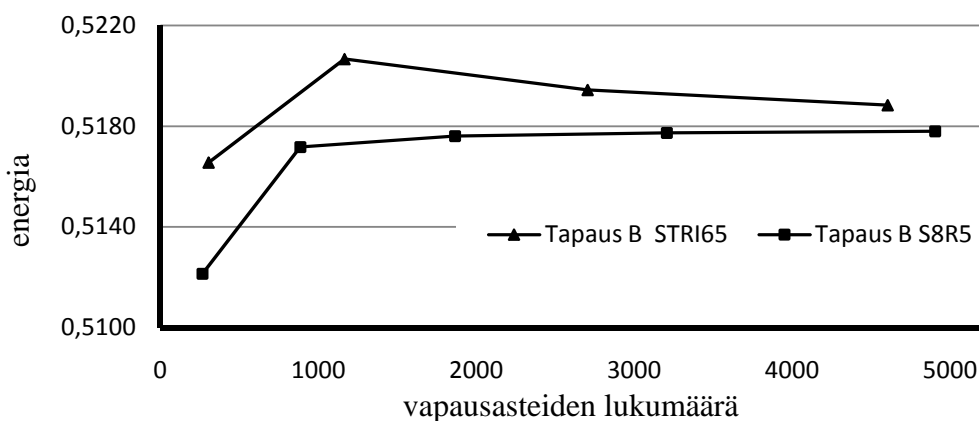


Kuva 8 von Mises-maksimijännitykset

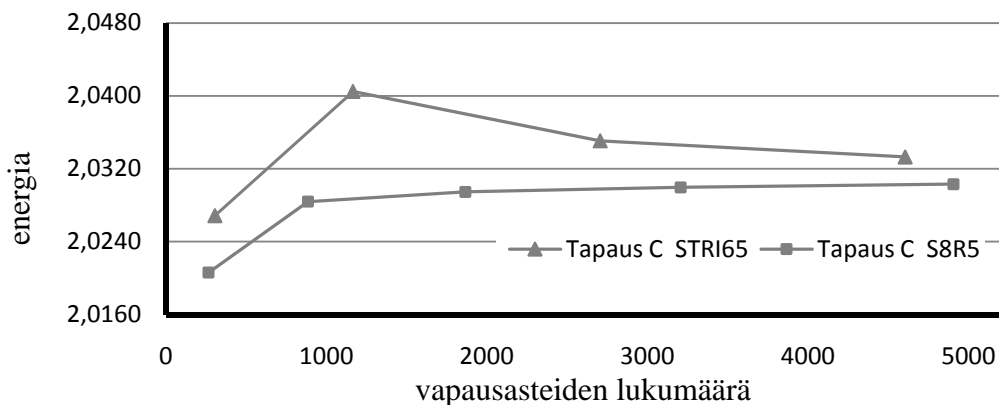
Tulokset suppenevat molemmissa tapauksissa kohti tiettyä raja-arvoa. Kvadraattisilla elementeillä saadut tulokset suppenevat kuitenkin huomattavasti nopeammin lineaarisiin elementteihin verrattuna. Tulokset vastaavat Singiresun päätelmää, jonka mukaan korkeamman asteen elementeillä, joilla muotofunktion asteluku on kaksi tai enemmän, saavutetaan yleisesti harvempaa elementtiverkkoa käyttämällä parempi laskentatarkkuus [11, s. 80]. Lineaarisilla S4R5- ja STRI3-elementeillä jännitysten arvot eivät suppene kohti selkeää raja-arvoa, jolloin luotettavaa tulosta ei voida kyseisille elementeille tässä tapauksessa määrittää.

Tulosten suppenevuudessa havaitaan myös tapauskohtaisia eroavaisuuksia. Tapauksessa C lineaarisilla elementeillä suppenevuus on selkeästi hitaampaa tapaukseen B verrattuna. Tapauksessa B, jossa laatta on lyhyemmältä sivultaan jäykästi tuettuna, ero lineaarisen elementin S4R5 ja kvadraattisen S8R5-elementin tarkimpien arvojen välillä on 3,6 prosenttia. Tapauksessa C, jossa laatta on jäykästi tuettu pidemmältä sivultaan, vastaava ero on 7,3 prosenttia. Myös kvadraattisten elementtien suppenevuus poikkeaa; tapauksessa B tulokset pienenevät elementtiverkon tihentyessä, tapauksessa C tulokset vastaavasti kasvavat. Jännevälin suureneminen kasvattaa jännitysten arvoja, jolloin on ymmärrettävää, että tapauksessa C vaikuttaa suuremmat jännitysten arvot. Tulosten perusteella voidaan päätellä, että suurempien jännitysten vaikuttaessa myös elementeillä saaduissa tuloksissa esiintyy enemmän hajontaa.

Tuloksista ei voida päätellä, kummalla kvadraattisista elementeistä saavutetaan luotettavampi tulostarkkuus. Tapauksessa B SRTI65 elementin arvot jäävät S8R5 elementtiä pienemmiksi. Tapauksessa C tulokset ovat puolestaan vastakkaiset. Kuten luvussa 3.4 mainittiin, luotettava mitta ratkaisun hyvyydelle on tarkastella muodonmuutosenergioiden suppenevuutta. Suppenevuutta molemmissa tapauksissa sekä kvadraattisella nelikulmiolla että kolmiolla on tutkittu kuvissa 9 ja 10. Tuloksista nähdään, että muodonmuutosenergia suppenee nopeammin elementillä S8R5. Tämän perusteella S8R5 antaa luotettavimman tuloksen.



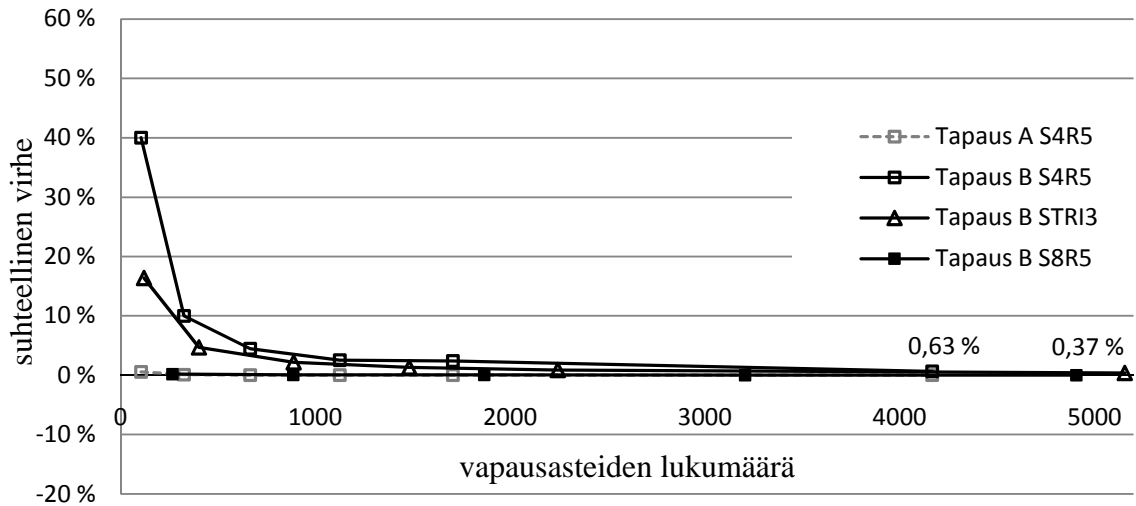
Kuva 9 Tapaus B, muodonmuutosenergia



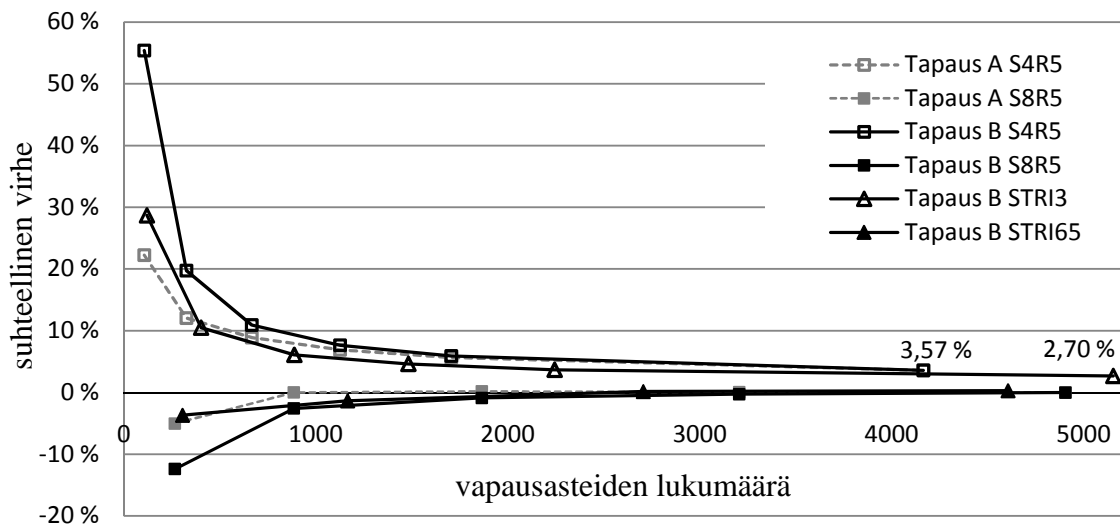
Kuva 10 Tapaus C, muodonmuutosenergia

## 5.2.2 Jännitykset ja taipumat tapauksissa A ja B

Seuraavassa tarkastellaan taipumien (kuva 11) ja jännitysten (kuva 12) käyttäytymistä tapauksissa A ja B suhteellisten virheiden avulla. Vertailuarvona on käytetty 300:lla S8R5-elementillä saatuja arvoja.



Kuva 111 Taipumien suhteellinen virhe



Kuva 122 von Mises-jännitysten suhteellinen virhe

Tapauksessa A ulokelaattaa kuormitetaan tasaisella kuormalla. Ainoa reunaehto on yhden sivun jäykkä kiinnitys. Kuvasta 11 havaitaan, että taipumat suppenevat erittäin nopeasti. Linearisella elementillä S4R5 saavutetaan riittävä tulostarkkuus käyttäen ainoastaan 12 elementtinä.

Ongelmana ulokelaatta onkin yksinkertainen eikä kaksiulotteinen mallintaminen ole välttämättä tarpeellista. Taipuma- tai jännitys jakaumalle voidaan ratkaista analyytinen malli, esimerkiksi soveltamalla ulokepalkille johdettuja yhtälöitä ja olettamalla laatan jännitys jakauman olevan leveyden suunnassa muuttumaton. Lähellä tukeja jännitysten arvot kuitenkin muuttuvat leveyden suunnassa, kuten myös liitteen A ulokelaatan jännitys jakaumista (kuvat 1-4) nähdään. Tarkkaan lujuusanalyysiin elementtimenetelmä onkin varsin hyödyllinen.

On kuitenkin huomattava, että elementtimenetelmällä lasketut jännitykset ovat yleisesti epätarkempia kuin siirtymät. Tämä johtuu siitä, että jännitykset saadaan siirtymistä derivoimalla, jolloin virheet aina kertaantuvat [6, s. 209]. Ilmiö on nähtävissä myös kuvista 11 ja 12; jännitysten arvot suppenevat taipumien arvoja hitaammin. Taipumia tarkasteltaessa lineaarisilla elementeillä saadut tarkimmat tulokset poikkeavat 0,4–0,6 prosenttia vertailuarvosta. Jännitysten arvoille vastaavat virheprosentit ovat yli nelinkertaiset.

### 5.3 Johtopäätökset

Tulosten perusteella voidaan sanoa, että laatan reunaehdoilla, geometrialla ja erityisesti elementtityypin valinnalla on vaikutusta tulostarkkuuteen. Yksinkertaisessa tapauksessa, jossa on ainoastaan yksi reunaehto, taipuman arvot eivät tarkennu merkittävästi, vaikka elementin astelukua nostetaan ja elementtiverkkoa tihennetään. Taipumien arvot suppenivat yleisesti sekä lineaarisilla että kvadraattisilla elementeillä. Testitapauksesta riippumatta jännityksille saavutettiin puolestaan luotettava tulostarkkuus ainoastaan toisen asteen kvadraattisilla elementeillä. Reunaehtojen monimutkaistumisen myötä tulosten suppenevuus vaati myös tiheämmän elementtiverkon.

Jännevälin kasvattaminen (tapaus C) kasvatti laatan venymiä ja jännityksiä, jolloin myös eri elementeillä saadut tulokset poikkesivat selkeästi enemmän toisistaan. Toisin sanoen suurempien muodonmuutosten vuoksi oli käytettävä tiheämpää elementtiverkkoa, jotta luotettava tulos voitiin saavuttaa. Usein käytännön insinöörisovelluksissa käytetään kuitenkin liian harvoja elementtiverkkoja, jolloin ei välttämättä saada

luotettavaa tietoa siitä, ovatko jännitykset ja muut suunnittelun kannalta oleelliset suuret sallituissa rajoissa.

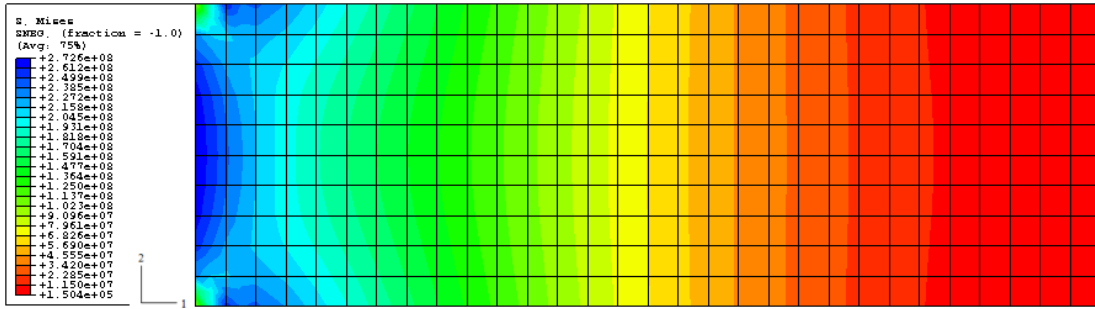
Elementtejä vertailtaessa ainoastaan yhden tapauksen ja yhden laskentasuureen tarkastelu voi johtaa väärään lopputulokseen. Sisäinen muodonmuutosenergia on yleisesti hyvä mitta tulosten suppenevuudelle, mutta ei kuitenkaan kerro miten tietyt piste arvot rakenteessa käyttäytyvät. Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin muodonmuutosenergian lisäksi jännitysten ja taipumien muuttumista. Tulosten perusteella luotettavimmaksi elementiksi osoittautui kvadraattinen nelikulmioelementti S8R5.



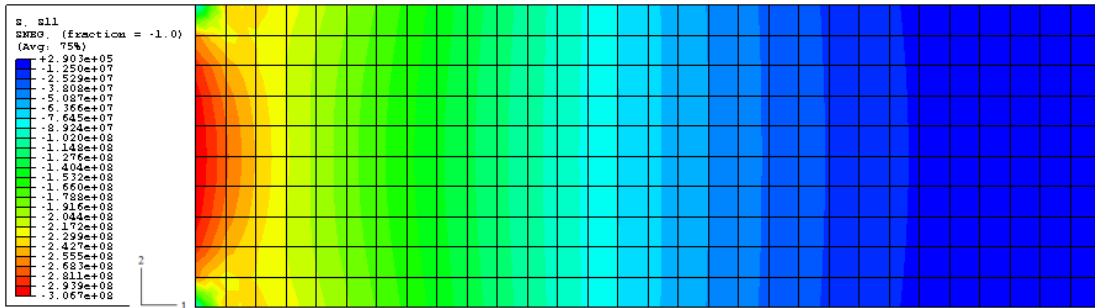
## Lähdeluettelo

- [1] Aalto, Jukka. *Laattarakenteiden lineaarisesti kimmoinen analysointi* [verkkodokumentti]. Otaniemi TKK, Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto, 2007. [viitattu 29.02.2009]. Saatavilla [http://www.tkk.fi/Yksikot/Rakenteidenmekaniikka/ojkoti/rmb/pruju/L\\_III\\_1.pdf](http://www.tkk.fi/Yksikot/Rakenteidenmekaniikka/ojkoti/rmb/pruju/L_III_1.pdf)
- [2] Cook, Robert & Malkus David. *Concepts and applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [3] Cook, R. D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [4] Ciarlet, P. G. & Lions, J. L. *Handbook of Numerical Analysis V4 Part2 - Finite Element Methods*. Elsevier Science & Technology Books, 1996.
- [5] Fish, Jacob & Belytschko, Ted. *A First Course In Finite Elements*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [6] Hakala, Matti. *Lujuusopin elementtimenetelmä*. Otatieto, 1980.
- [7] Kouhia, Reijo & Tuomala, Markku. *Elementtiapproksimaation tarkkuus* [verkkodokumentti]. Otaniemi TKK, Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto, 2009. [viitattu 29.02.2009]. Saatavilla <http://www.tkk.fi/Yksikot/Rakenteidenmekaniikka/ojkoti/rtnm/pruju/luku8.pdf>
- [8] Kouhia, Reijo & Tuomala, Markku. *Johdatus elementtimenetelmään* [verkkodokumentti]. Otaniemi TKK, Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto, 2009. [viitattu 29.02.2009]. Saatavilla <http://www.tkk.fi/Yksikot/Rakenteidenmekaniikka/ojkoti/rtnm/pruju/elem.pdf>
- [9] Kouhia, Reijo & Tuomala, Markku. *Laattaelementtejä* [verkkodokumentti]. Otaniemi TKK, Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto, 2009. [viitattu 29.02.2009]. Saatavilla <http://www.tkk.fi/Yksikot/Rakenteidenmekaniikka/ojkoti/rnm/pruju/rnm-laatta.pdf>

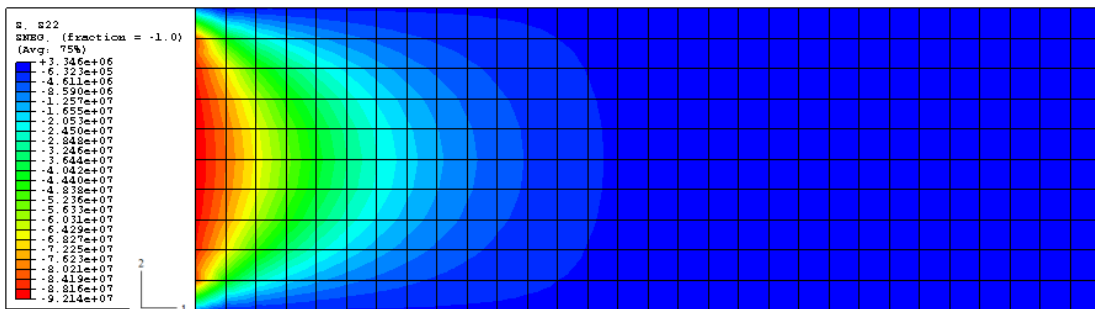
- [10] Liu, G. R. *Mesh Free Methods - Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press LLC, 2003.
- [11] Singiresu, S.R. *The Finite Element Method in engineering*. Elsevier Science & Technology Books, 2004.
- [12] *ABAQUS/CAE Analysis User's Manual*. ABAQUS, Inc., 2006. Saatavilla lisenssiä vastaan.
- [13] *Getting Started with ABAQUS*. ABAQUS, Inc., 2006. Saatavilla lisenssiä vastaan.



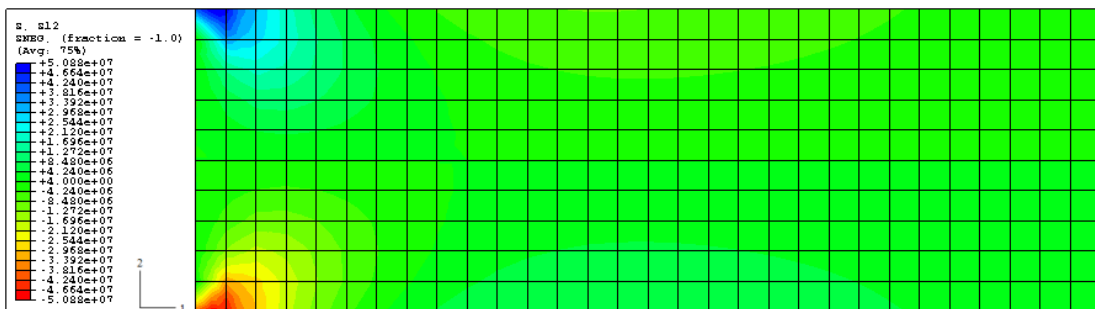
Kuva 1 Tapaus A. Von Mises-jännitysjaakauma käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



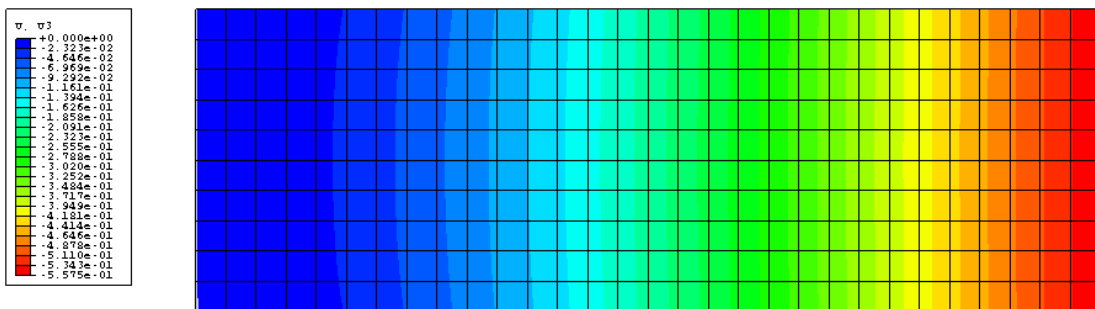
Kuva 2 Tapaus A. Normaalijännitysjaakauma  $\sigma_x$  käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



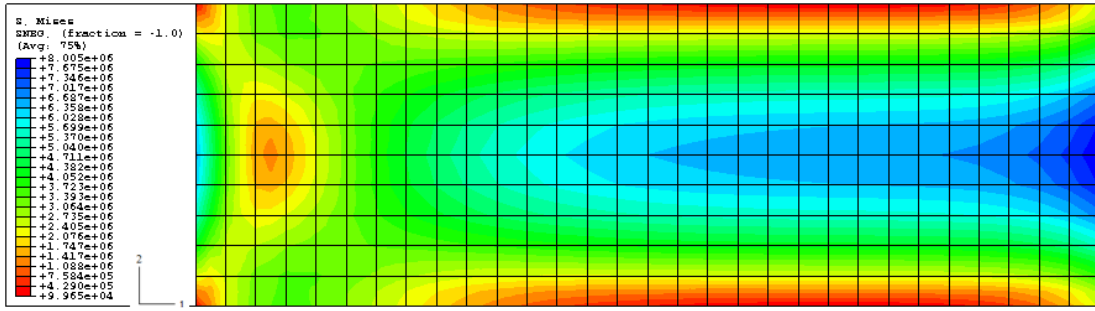
Kuva 3 Tapaus A. Normaalijännitysjaakauma  $\sigma_y$  käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



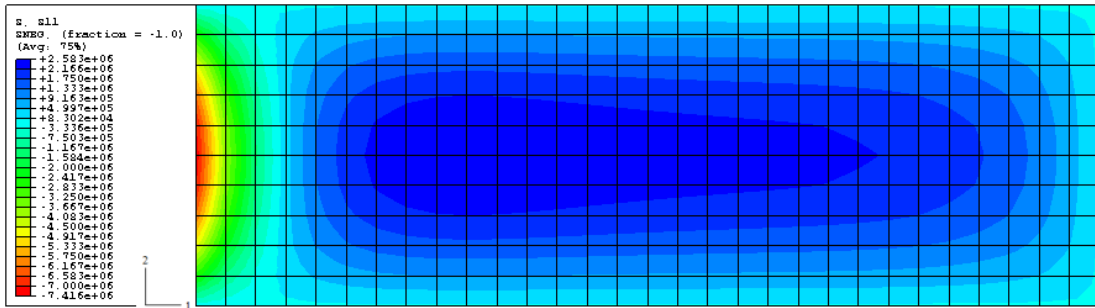
Kuva 4 Tapaus A. Leikkausjännitysjaakauma  $\tau_{xy}$  käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



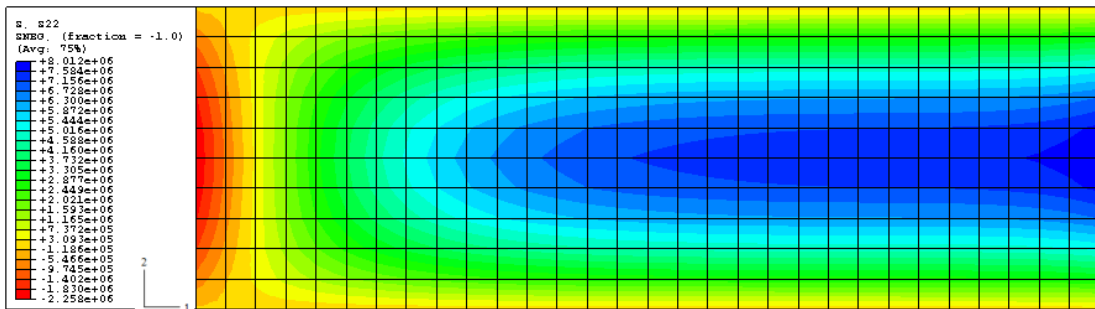
Kuva 5 Tapaus A. Taipuman jakauma käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



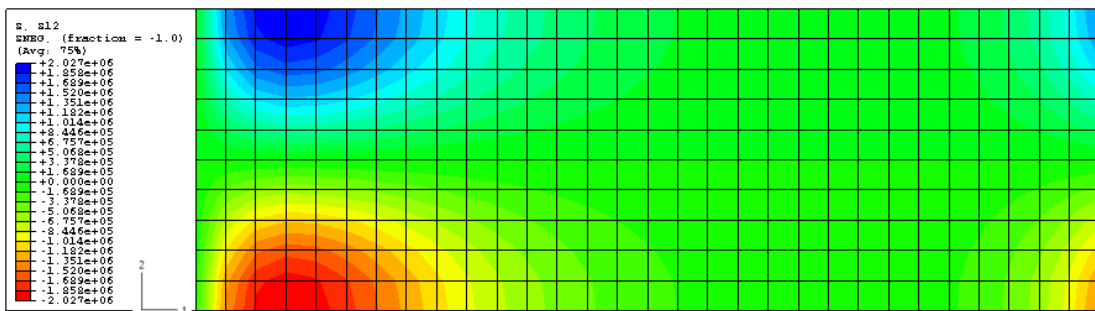
Kuva 1 Tapaus B. Von Mises-jännitysjaakuma käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



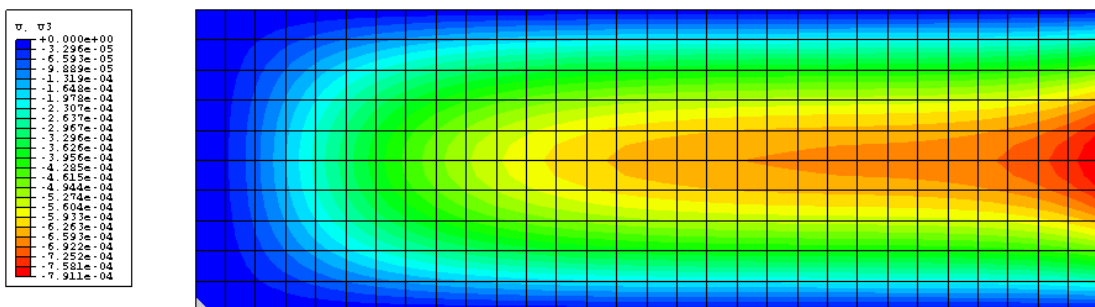
Kuva 2 Tapaus B. Normaalijännitysjaakuma  $\sigma_x$  käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



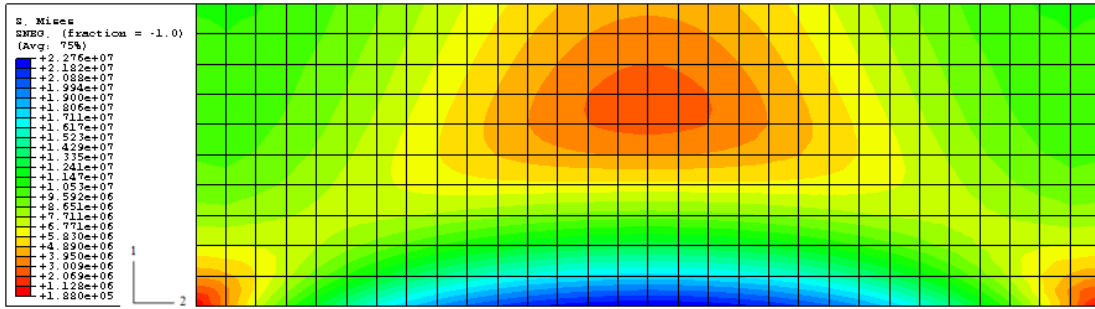
Kuva 3 Tapaus B. Normaalijännitysjaakuma  $\sigma_y$  käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



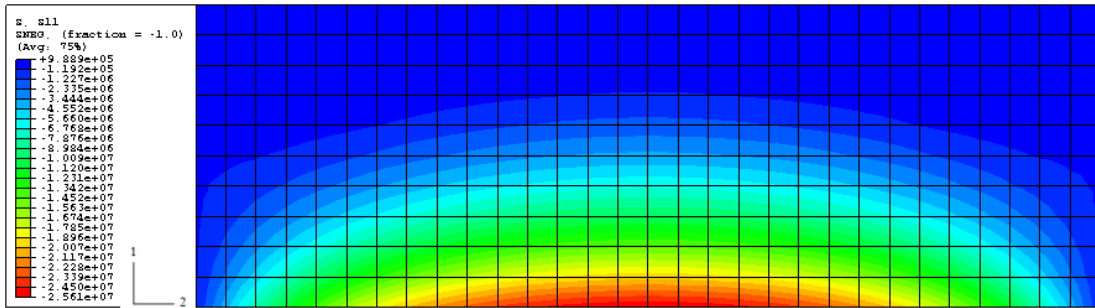
Kuva 4 Tapaus B. Leikkausjännitysjaakuma  $\tau_{xy}$  käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



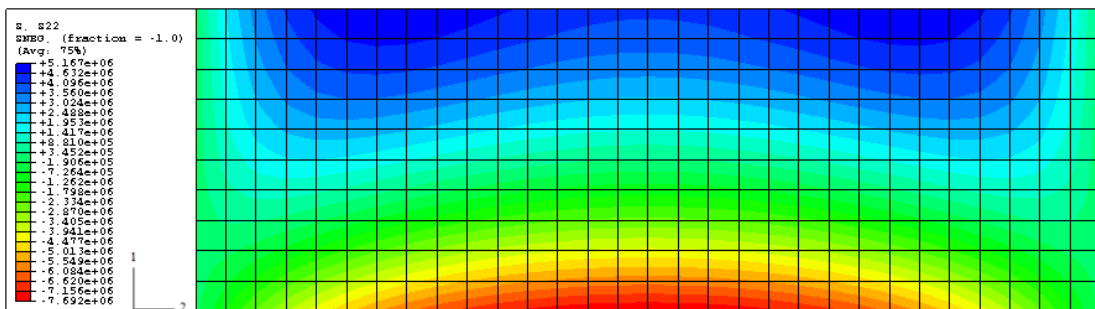
Kuva 5 Tapaus B. Taipuman jakauma käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



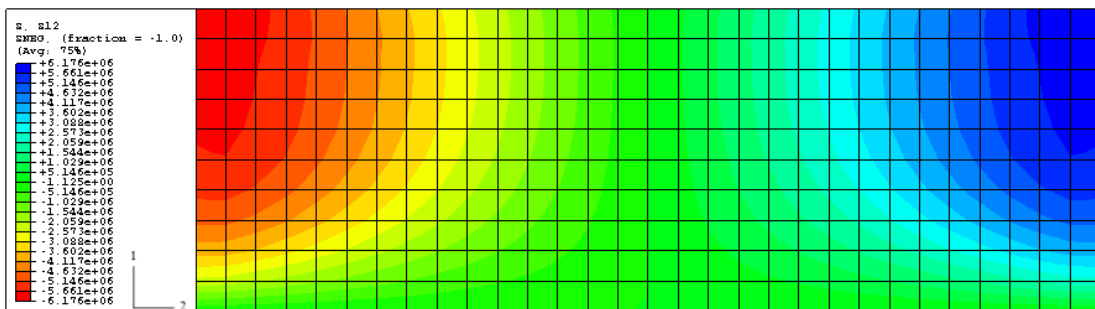
Kuva 13 Tapaus C. Von Mises-jännitysjaakuma käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



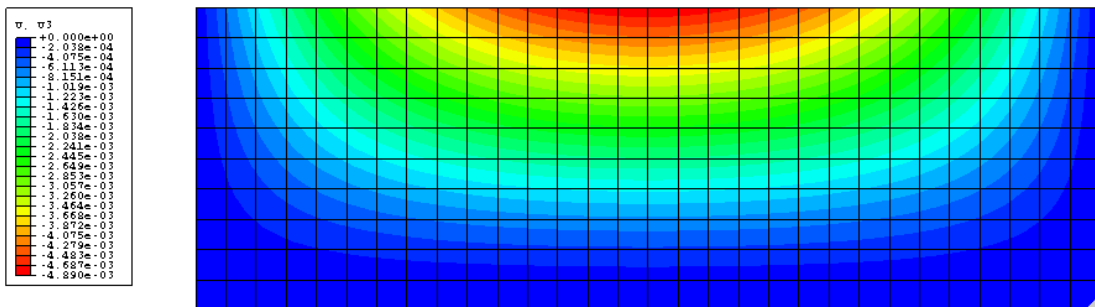
Kuva 2 Tapaus C. Normaalijännitysjaakuma  $\sigma_x$  käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



Kuva 3 Tapaus C. Normaalijännitysjaakuma  $\sigma_y$  käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



Kuva 4 Tapaus C. Leikkausjännitysjaakuma  $\tau_{xy}$  käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä



Kuva 5 Tapaus C. Taipuman jaakuma käyttäen 300kpl S8R5 elementtiä

Taulukko 1 Abaqus-kuorielementit (conventional shell elements) [12, luku 23.6.7]

Muoto	Lyhenne	Versio*	n**	Paksuus	Solmut	DOF	Ali-integrointi	n.e.m.k
Kolmio	<b>S3</b>	s	1	Ohut/Paksu	3	6	-	-
	S3R	e	1	Ohut/Paksu	3	6	-	-
	S3RS	e	1	Ohut/Paksu	3	6	-	-
	<b>STRI3</b>	s	1	Ohut	3	6	-	-
	<b>STRI65</b>	s	2	Ohut	6	5	-	-
Nelikulmio	<b>S4</b>	s	1	Ohut/Paksu	4	6	kyllä	-
	<b>S4R</b>	s	1	Ohut/Paksu	4	6	kyllä	kyllä
	<b>S4R5</b>	s	1	Ohut	4	5	kyllä	kyllä
	S4RS	e	1	Ohut/Paksu	4	6	kyllä	kyllä
	S4RSW	e	1	Ohut/Paksu	4	6	kyllä	kyllä
	<b>S8R</b>	s	2	Paksu	8	6	kyllä	-
	<b>S8R5</b>	s	2	Ohut	8	5	kyllä	-
	S9R5	e	1	Ohut	9	5	kyllä	-

\* s = ABAQUS/Standard, e = ABAQUS/Explicit

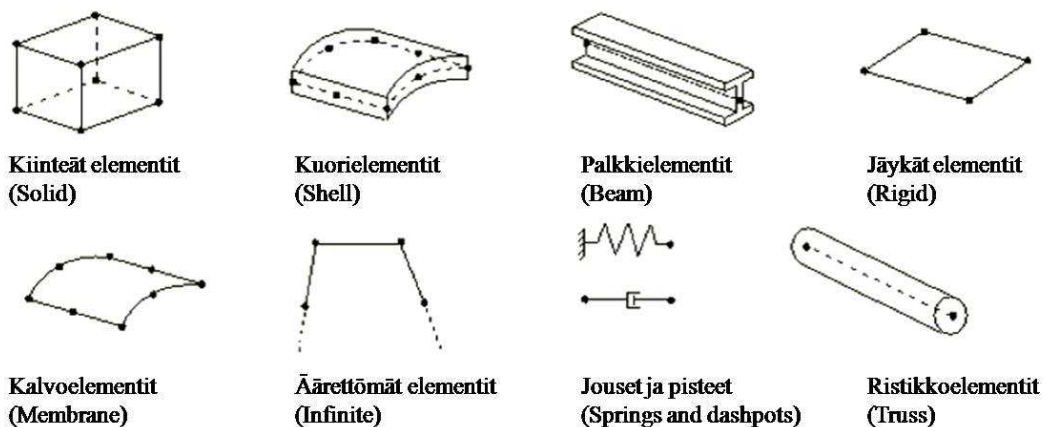
Lukkiutumisen esto

\*\* n=1 → Lineaarinen elementti, n=2 → Kvadraattinen elementti

Ohut/Paksu = yleiskäyttöiset elementit (engl. general purpose)

DOF = vapausasteet solmua kohti

n.e.m.k = nollaenergiamuotojen kontrollointi (engl. hourglass controll)



Kuva 14 Jännitysanalyysissä tyypillisesti käytetyt elementit [12, luku 21.1.1]